Mathesis **III 3**$_1$ (2008) 1 - 18.

Observaciones a propósito de un brillante pasaje de la geometría de Alberto Durero
(Disertaciones artísticas. Parte II)

Carlos Alberto Cardona Suárez

Resumen
Se pretende argumentar que algunos pasajes de la Geometría de Durero ilustran una dirección que bien podría considerarse intermedia entre las orientaciones de Euclides y las nuevas perspectivas de Descartes. Durero enriquece el inventario de objetos geométricos y advierte, en forma incipiente, una leve perspectiva de tipo funcional. Se ilustra también cómo los métodos prácticos de la *geometría de taller* en la obra de Durero encendieron la imaginación de los matemáticos profesionales que tuvieron acceso a su obra.

Abstract
It is sought to argue that some passages of Dürer´s Geometry illustrate a direction which could be considered intermediates between Euclid's orientations and the new perspectives of Descartes. Dürer enriches the inventory of geometric objects and he notices, in incipient form, a perspective of functional type. It is also illustrated how Dürer´s practical methods activate the imagination of professional mathematicians who had access to his work.

Palabras clave: Durero, Descartes, Kepler, geometría, pintura
Key words: Dürer, Descartes, Kepler, geometry, painting.
Math sub Class: 01A40

Aquellos personajes que solemos reconocer por su genio en un área particular de las preocupaciones humanas, suelen sorprendernos por sus contribuciones en otras áreas que no se relacionan, al menos en forma directa con el campo original en el que se reconoce sin duda su genialidad.

El pintor alemán se destacó especialmente por sus famosos grabados en madera (xilografías), por sus preciosos grabados a buril, por sus contribuciones a la antropometría y por introducir en Alemania las innovaciones propias del llamado *Renacimiento Italiano*. En el año de 1525 Alberto Durero escribió, con un lenguaje demasiado brusco, un curioso tratado de geometría. Pocos, sin embargo, lo recuerdan en el presente y pocos lo recordarán en el futuro por sus contribuciones efectivas al difícil arte de la geometría. No obstante lo anterior, es posible advertir en dicho tratado algunos aportes no sólo geniales, sino desconcertantes por el contexto en el que se mencionan.

El propósito del presente artículo consiste en llamar la atención en torno a uno de los fragmentos de dicho tratado. Aludiremos, en primer lugar, a la importancia general del escrito de Durero, y, después, nos concentraremos en elucidar el valor que creemos detectar en el pasaje mencionado.[1]

I

Cerca al año de 1507 Durero concibió la importancia y necesidad de escribir un vasto tratado de pintura especialmente dirigido a los jóvenes aprendices de dicho arte. Este tratado, que finalmente nunca salió a la luz, debía comprender tres partes básicas.

1) En primer lugar, pretendía ocuparse de la elección de aquel joven que podría llegar a convertirse en un pintor (basada ella en el horóscopo) y estipularía el tipo de formación que debía recibir.
2) En segundo lugar, se ocuparía del ejercicio de la pintura y expondría la teoría de las proporciones, la medida del hombre, de los caballos y de los edificios; versaría también acerca de la luz, la sombra y la teoría de los colores.
3) Por último, el tratado exhibiría algunos consejos profesionales sobre el lugar en donde se debería ejercer la pintura y los honorarios a cobrar.

Durero no tardó en advertir la complejidad de la empresa que se había propuesto y decidió (1512) restringirse al segundo apartado relacionado con la teoría de las proporciones del cuerpo humano. Este esfuerzo lo abandonó en 1513 y lo retomó más tarde en 1521. En el año de 1523 Durero decidió aplazar la publicación con el ánimo de llenar un vacío que el mismo pintor había detectado: la comprensión completa del tratado de las proporciones humanas exigía una comprensión igualmente completa sobre el arte de la medida en lo concerniente a las líneas, las superficies y los cuerpos, siempre que se respetasen los métodos que los canteros practicaban cotidianamente.

El tratado de la medida debe entonces concebirse como una introducción metodológica para el tratado sobre las proporciones humanas. Detengámonos por un momento en el título completo del tratado y en

1. Usaremos las siglas *TM* para referirnos al tratado de geometría de Durero; citaremos primero el libro con números romanos y, a continuación, la página correspondiente de la edición en español.

algunas alusiones que saltan a la luz en forma evidente. El título completo reza así: *Instrucción para la medida con el compás y la regla de líneas, planos y todo tipo de cuerpos, reunida por Alberto Durero en provecho de todos los aficionados al arte, con las correspondientes figuras, impreso en el año de MDXXV*.[1] En la dedicatoria a su amigo Pirckheimer, Durero señala que hasta la fecha a los jóvenes pintores alemanes se les había enseñado el arte sin ningún fundamento, recurriendo tan sólo a la práctica diaria. Ellos, advierte el pintor y teórico, habían crecido en el más completo desconocimiento, al igual que un árbol silvestre al que no se poda. Así las cosas, Durero alcanzó a advertir que si bien la enseñanza tradicional podía aportar instrucciones útiles para el trabajo diario, esta enseñanza no derivaba tales instrucciones de principios generales, ni pretendía respaldarlas con hechos verificables. Algo muy diferente a lo que de hecho ya se venía dando con la instrucción de los jóvenes aprendices en Italia. El interés por poner en contacto a las nuevas generaciones de pintores alemanes con los novedosos descubrimientos italianos explica, quizá, por qué Durero insistió en el uso del alemán, renunciando inicialmente a la posibilidad de que su amigo Pirckheimer preparara una edición culta en latín. El tratado de Durero puede contemplarse como una obra que ha de servir de bisagra entre dos tradiciones: la tradición práctica de los talleres alemanes y la tradición teórica de las escuelas italianas. En palabras de Erwin Panofsky [1982, 267]:

> El ‘Unterweisung der Messung’ sirvió, por así decirlo, de puerta giratoria entre el templo de la matemática y la plaza de mercado. Mientras familiarizaba a los toneleros y ebanistas con Euclides y Ptolomeo, familiarizaba también a los matemáticos profesionales con lo que podríamos llamar la ‘geometría de taller’.

Tanto Leon Battista Alberti como Filippo Brunelleschi habían concebido la urgente e imperiosa necesidad de estructurar, a partir de sus fundamentos, las reglas de transformación que permitiesen reconstruir el espacio tridimensional sobre un plano bidimensional. Fue Brunelleschi el primero en aplicar la teoría euclidiana de la visión a los problemas de la representación gráfica. Gracias a sus reglas, los arquitectos contaban con instrumentos muy poderosos de representación pictórica. No obstante la importancia de las reglas mencionadas, los pintores tenían que hacer frente a un segundo problema: ¿cómo aplicar aquellas reglas, que funcionan en forma adecuada cuando se trata de dibujar edificios o

1. *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt in Linien Ebnen und gantzen Corporen durch Albrecht Dürer zu samen getzogen und zu nutz aller Kunstliehabenden mit zu gehörigen Figuren in truck gebracht im Jar MDXXV*

detalles arquitectónicos, al caso de la representación del cuerpo humano en movimiento? Este fue, precisamente, uno de los problemas que convocó la atención de los pintores que se preocupaban por los asuntos relacionados con los fundamentos de su actividad: Piero della Francesca, Leonardo Da Vinci y Alberto Durero. Así las cosas, mientras los geómetras clásicos se obsesionaban por encontrar métodos precisos para dibujar con regla y compás una clase muy compleja de polígonos y circunferencias que se cortaban de alguna manera muy peculiar, y mientras los arquitectos se ufanaban de hallar reglas precisas para dibujar edificios y construcciones, Durero pretendía hallar un método preciso para dibujar con regla y compás cuerpos humanos en movimiento. No en vano muchos dibujos de figuras humanas realizados por Durero tienen en sí la huella indeleble de una delicada figura geométrica realizada con regla y compás, como si se tratara de la construcción compleja de un polígono regular (véase Figura 1).

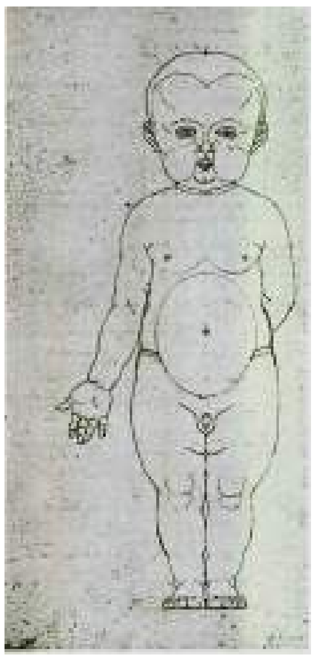

Figura 1. Proporciones de un niño. *The human figure by Albrecht Dürer.* P. 46.

Así, Durero buscaba los fundamentos de su disciplina y pretendía exponerlos a la nueva generación de jóvenes artistas alemanes. Creyó hallarlos en la geometría griega redescubierta por los artistas italianos. En ese orden de ideas podemos entender la advertencia con la que el artista introduce el primer libro de su *Tratado de la medida* [*TM* I, 133]:

> El muy sagaz Euclides recopiló los fundamentos de la geometría. Quien los conozca bien, no tiene ninguna necesidad de lo escrito a continuación, pues sólo se ha escrito para los jóvenes y para aquellos a quienes nadie ha instruido con excelencia.

Dicha orientación es coherente con los elementos que hemos advertido. Sin embargo, cometeríamos una gran injusticia si aseveramos que el tratado de Durero no aporta algo nuevo. De hecho ya hemos señalado, siguiendo a Panofsky, que el tratado de Durero enriquece el ejercicio profesional de la matemática con la *geometría de taller*. Hay claros ejemplos que ponen en evidencia que Durero estimuló la imaginación de pensadores como Tartaglia, Benedetti, Galileo y Kepler. Estudiemos, por ejemplo, el caso de la influencia sobre Kepler.

Los físicos estaban particularmente interesados en desentrañar el problema de la representación óptica. Dos obstáculos, entre otros cuantos, entorpecían el avance en dicho campo: i) se creía que la imagen de los objetos debía formarse en la parte anterior del ojo para evitar así cualquier inversión inexplicable; ii) se creía que la imagen como un todo estructurado debía guardar una relación inmediata con el objeto como un todo estructurado (de acuerdo a la perspectiva aristotélica, la percepción es un proceso en el que la forma del objeto percibido pasa al receptor conservándose intacta; de modo que, en cierto sentido, el receptor asume las propiedades del objeto que se percibe). Kepler revolucionó el estudio de los fenómenos ópticos al sugerir, en primer lugar, que la imagen debía formarse en la retina aunque por tal motivo resultase ser una imagen invertida; y, en segundo lugar, que la imagen de un objeto debía concebirse como una construcción independiente punto a punto. En el segundo caso se trataba entonces de una especie de perspectiva puntillista para el análisis de la construcción de la imagen óptica. Todos los elementos de análisis sugieren que Kepler vislumbró la segunda recomendación a partir de uno de los dibujos del *Underweysung der Messung* de Durero en donde se alude a cierto instrumento (Figura 2).

Este aparato consta de una argolla clavada en la pared («*Hará las veces de un ojo humano*» [*TM* IV, 329]); un cordel que pasa por la argolla y que une en un extremo una plomada y en el otro extremo un clavo que puede ser colocado por un auxiliar en el punto del objeto cuya imagen se pretende construir (este cordel hará las veces de cada uno de los rayos visuales que va desde cada uno de los puntos del objeto hasta el ojo); un marco vertical con un postigo que se puede abrir o cerrar alrededor de uno de los lados verticales del marco (este marco hará las veces del plano de Brunelleschi, o el velo de Alberti, que interseca la pirámide euclidiana formada por el ojo en un vértice y el objeto en la base); dos cordeles auxiliares de longitudes iguales a las dimensiones vertical y horizontal del marco.

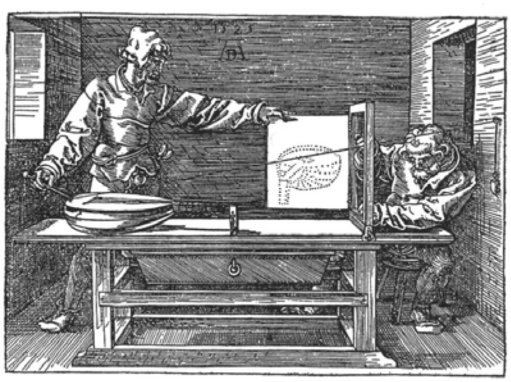

Figura 2. Albrecht Dürer. *The complete woodscuts.* P. 338.

Cuando se sitúa el clavo sobre un punto del objeto es posible determinar la ubicación de la proyección de este punto en el cuadro futuro. Para ello se determina el lugar por donde el cordel atraviesa el marco. Para eso se usan los dos hilos móviles que permiten determinar las coordenadas horizontal y vertical del punto que nos interesa.[1] Una vez se fijan las coordenadas se libera el cordel inicial, se cierra el postigo y se dibuja el punto sobre la hoja en aquel lugar que determinen las coordenadas de los cordeles auxiliares. Este procedimiento se repite para cada punto del objeto que nos interese reproducir. Este método (*geometría de taller*) permite una determinación precisa de la imagen de cada uno de los puntos independientes de un objeto que se quiere representar en escorzo. Este fue el método que impresionó a Kepler y que le permitió recomendar una perspectiva puntillista de la construcción de imágenes ópticas en la retina de los ojos humanos (la retina haría las veces del marco vertical).[2]

1. Durero, obviamente, no hablaba de coordenadas.
2. Para un análisis detallado de la influencia de los grabados de Durero sobre la imaginación de Kepler a propósito de sus estudios en óptica, el lector puede remitirse a la excelente monografía de Lindberg [1976, 178-208]. El autor, a su turno, se apoya en la disertación doctoral de Stracker [1970].

El caso de Kepler ilustra una contribución del tratado de Durero en un campo de ocupación de los matemáticos profesionales. Ilustra también una aplicación interesante de la *geometría de taller*. Nosotros queremos concentrarnos en otro tipo de contribución positiva que puede resultar más alejada del consenso que despiertan los casos analizados. Queremos advertir en el tratado de Durero algunas ideas originales que, en cierta medida, anticiparon resultados importantes de la geometría de los siglos siguientes. Aclaramos, sin embargo, que obraremos como intérpretes que harán lo posible por poner en boca de Durero algunas ideas que posiblemente no pasaron por su mente. Queremos, en forma explícita, resaltar los pasajes que nos interesan sobre la base de lo que finalmente llegó a consolidarse algunos siglos más tarde. Ahora bien, antes de señalar con claridad las tesis que queremos defender, presentaremos en forma sucinta la estructura del *Underweysung der Messung*.

El tratado consta de cuatro libros. El primer libro presenta las definiciones que han de servir como punto de partida y se concentra en la descripción de los objetos geométricos que comportan tan sólo longitud. Durero se detiene tanto en la línea recta, como en las curvas algebraicas de las que se ocuparán los geómetras del siglo XVII. Resulta particularmente interesante el tipo de construcción que el pintor recomienda a propósito de las secciones cónicas (este es otro caso importante del enriquecimiento de la matemática con métodos provenientes de la *geometría de taller*). El fragmento que nos interesa comentar pertenece al primer libro. El segundo libro se ocupa de las figuras bidimensionales. El tratado de Durero es prolífico en la recomendación de métodos para la construcción de polígonos regulares y en métodos para la construcción de figuras que incrementan en una cantidad dada el área de una figura inicial. En muchos casos Durero no le aclara al lector que su método de construcción es apenas un método aproximado. No es claro, sin embargo, si Durero es consciente de la limitación que mencionamos. Se puede citar, por ejemplo, el caso de la construcción del polígono regular de siete lados (heptágono) [*TM* II, 192];[1] el caso de la segunda construcción del pentágono que resulta equilátero, pero no equiángulo [*TM* II, 195]; el caso del eneágono [*TM* II, 196]. Durero propone también un método interesante para obtener una solución aproximada de la trisección del ángulo y le advierte al lector que "*quien desee una mayor precisión, que la busque por vía demostrativa*" [*TM* II, 197].

1. Sólo hasta el siglo XIX y gracias a la algebraización completa de los problemas euclidianos de construcción con regla y compás debida a Gauss, se pudo demostrar que tanto la trisección del ángulo como la construcción del heptágono, entre otros polígonos, no se pueden adelantar si nos restringimos a las exigencias de una construcción euclidiana.

Esta advertencia de Durero muestra claramente que el pintor no debía estar del todo familiarizado con la dificultad de la empresa demostrativa que estaba recomendando. El tercer libro ilustra la aplicación de la geometría a las tareas de la arquitectura y familiariza al lector alemán con la construcción geométrica de las letras romanas. El cuarto libro, por último, se ocupa de los cuerpos tridimensionales.

II

Creo que es posible defender, aligerando en cierto sentido las exigencias de un análisis más riguroso, que el fragmento de Durero que me interesa, recomienda un ejercicio intermedio entre la geometría de Euclides y la geometría de Descartes. El inventario de objetos de estudio de la geometría euclidiana está restringido a segmentos de recta, polígonos, circunferencias y todas aquellas construcciones que cuentan con éstos como sus últimos elementos de análisis. Aún cuando los griegos se preocuparon también por otro tipo de objetos (cónicas, espirales), estos objetos no llegaron a formar parte del inventario euclidiano; en muchos casos se estudiaban como curvas mecánicas (el caso de Arquímedes) que, de suyo, se encontraban por fuera del escrutinio matemático que debía ocuparse estrictamente de lo inmutable. Descartes, por su parte, amplió notablemente el inventario de los objetos de estudio y abrió la posibilidad de definir las curvas de estudio geométrico como aquellas construcciones para las cuales es posible concebir la regla de variación de una magnitud en función de la variación de otra magnitud. En las palabras de Descartes [1981, 295]:

> [...] me parece totalmente claro que si entendemos, como generalmente se hace, por 'geométrico' lo que es preciso y exacto y, en segundo lugar, por 'mecánico' lo que no lo es; y así mismo, si consideramos la Geometría como una ciencia que enseña en general a conocer las medidas de todos los cuerpos, no existe razón alguna para excluir de la misma el estudio de las líneas más complejas y no el de las más simples, con tal de que puedan imaginarse descritas por un movimiento continuo o por varios movimientos sucesivos y en los que los últimos vienen determinados por los anteriores; pues por este medio, puede siempre tenerse conocimiento exacto de sus medidas.

Lo único que se necesita, a juicio de Descartes, para trazar todas las líneas curvas que han de ser objeto de la geometría, es suponer que dichas curvas son el resultado de las intersecciones de dos o más líneas que se mueven entre sí.

La geometría de Euclides contempla unos objetos (segmentos, circunferencias, polígonos) y un método (reducción deductiva a axiomas originales). Las proposiciones acerca de los objetos mencionados han de ser aquellas que se pueden obtener por vía deductiva de los axiomas que se reconocen como proposiciones indemostradas. La geometría de Descartes, por su parte, contempla también unos objetos y un método. Los objetos incluyen ahora las curvas algebraicas, en tanto que el método contempla la posibilidad de reducir el estudio de los objetos a la manipulación de magnitudes mensurables. En otras palabras, la intención consiste en estudiar aquellas magnitudes cuyas reglas de correspondencia se dejan expresar bajo la forma de una expresión algebraica. El tratado de geometría de Durero, entre tanto, es un singular intento por ampliar el inventario de los objetos, incorporando la posibilidad de concentrar el estudio en las reglas de correspondencia que posibilitan la construcción de los mismos. El fragmento que citaremos deja ver una leve orientación en la dirección que Descartes impondrá a la disciplina años más tarde. Durero entrevé el futuro de la disciplina, quizá de la misma manera en que Descartes entrevé la orientación que finalmente Hilbert le dará a la geometría.

En el libro I, antes del fragmento que nos interesa, Durero se encarga de recomendar el estudio de nuevas curvas sugiriendo métodos elementales de construcción. Durero construye diferentes modelos de espirales, proyecciones de espirales, óvalos, parábolas, hipérbolas, elipses, algunas variantes de cicloides, concoides, líneas arácneas, etc. El modelo de construcción sigue, con algunas variaciones, casi siempre el mismo esquema, a saber: construir una o varias figuras que sirven de base (una recta, un cono, un triángulo, una circunferencia, etc.); producir un número finito de divisiones en la figura o figuras que sirven de base;[1] concebir una regla de construcción que permite señalar un nuevo punto e iterarla un número finito de veces en cada una de las divisiones indicadas en la secuencia anterior; reunir en un trazado continuo todos los puntos que han sido identificados con el procedimiento anterior. Las curvas de Durero son entonces construcciones que iteran una regla en un número finito de instancias y que recogen después este ejercicio en el trazado continuo de una curva envolvente.[2] Existe, por lo tanto, un salto algo abrupto en el método cuando se pasa de una reunión discreta de puntos a una curva continua que pretende guardar en sus entrañas la regla de construcción original. El método es más claro si se ilustra con un ejemplo.

1. Durero no es muy explícito en los métodos para producir las divisiones y ello lo conduce en ocasiones a exigir construcciones imposibles: en ocasiones pide, por ejemplo, trisecar un ángulo arbitrario.
2. En el artículo usaremos el término *envolvente* de una manera laxa. Nos referimos a la curva que, a la manera de una *gestalt*, recoge una familia completa de puntos que han sido establecidos en virtud del seguimiento de una regla de construcción particular.

La concha de la Figura 3 se ha trazado de la siguiente manera: i) se traza una línea horizontal cuyos extremos se marcan en *a* y *b*; ii) partiendo de *a*, se marcan diez y seis divisiones regulares en *ab* sin necesidad de abarcar hasta el extremo *b*; iii) se traza una línea vertical en el punto trece y se reproducen las mismas divisiones anteriores; iv) se toma una regla que conserva la magnitud de la medida de *ab* y se ubica de tal forma que uno de sus extremos sea el punto 1-horizontal y pase sobre el punto 1-vertical, el otro extremo de la regla ha de determinar el punto 1 de la curva; v) el procedimiento se itera diez y seis veces; vi) finalmente se traza una curva que recoge los diez y seis puntos así obtenidos.

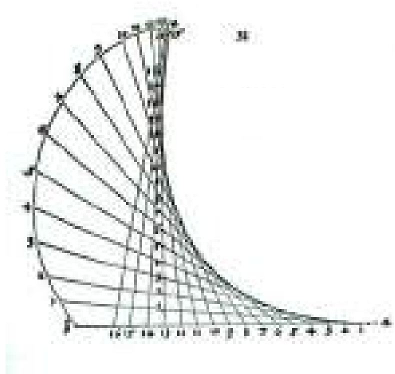

Figura 3. A Durero. *De la Medida*. Vol I. Fig. 38. P. 171.

Después de ilustrar el método de construcción, nos ocuparemos ahora del fragmento que hemos anunciado y trataremos de ver allí una tímida insinuación que parece prefigurar tanto la orientación cartesiana de la geometría como una perspectiva de tipo funcional. Citemos inicialmente el fragmento [*TM* I, 181]:

> [...] todas las líneas verticales que están colocadas con orden sobre una línea horizontal a una misma o diferente distancia, se pueden cortar de tres formas distintas, con una línea curva cóncava o convexa y con una línea oblicua larga o corta; cualquiera de ellas genera su propia correspondencia.

El fragmento se comprende con toda su fuerza si contemplamos con cuidado el trabajo que adelanta el pintor unas páginas atrás. En primer lugar, Durero se interesa por el tipo de relación que se puede establecer a partir de una regla particular de crecimiento o disminución de la longitud de ciertos segmentos. Durero propone inicialmente construir una familia de segmentos cuyas longitudes crecen siempre en la misma proporción. Para ello dibuja un triángulo rectángulo *abc*, sobre cuya base *bc* se han señalado algunos puntos equidistantes (Figura 4). A continuación se trazan líneas verticales sobre estos puntos hasta intersecar la hipotenusa. Por último, Durero reúne aparte de la figura y, conservando la equidistancia, los cinco segmentos verticales y advierte que su longitud se incrementa siempre en la misma cantidad.

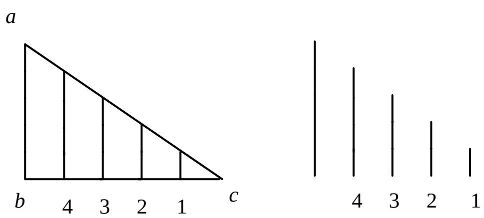

Figura 4.

A continuación Durero repite el procedimiento, pero esta vez los puntos sobre el segmento *bc* están distribuidos de acuerdo a la siguiente regla: la longitud del segmento 23 es el doble de la longitud del segmento 12; la longitud del segmento 34 es el doble de la longitud del segmento 23; etcétera. Así las cosas, los segmentos equidistantes a la derecha crecen de acuerdo a la regla: 1, 2, 4, 8, ...$(2)^{n-1}$ (Figura 5).

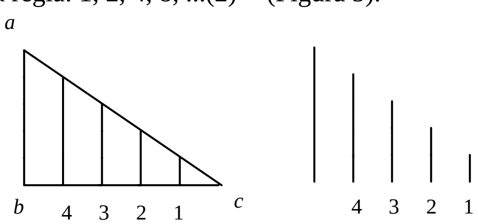

Figura 5.

El siguiente paso pretende darle cierto realce a la regla de crecimiento estipulada en un conjunto de segmentos que se construyen de acuerdo al método anterior, pero recogidos bajo una envolvente circular. Durero dice de estas cinco líneas (Figura 6) que ellas guardan entre sí una "*relación particular*" [*TM* I, p. 179] pero no agrega más acerca de la particularidad mencionada. Quizá podríamos resumir así el rasgo peculiar: las longitudes de los segmentos equidistantes reunidos crecen en una proporción singular; esta proporción es tal que sus extremos superiores (siempre que los inferiores sean colineales) pueden ser recogidos bajo un arco de circunferencia.

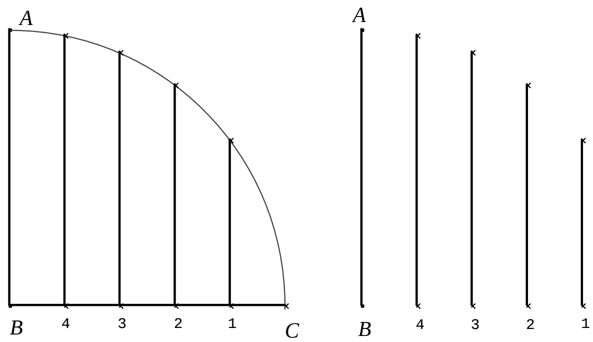

Figura 6.

Este punto es de la mayor importancia para mi análisis. Si me encuentro con un grupo de segmentos verticales equidistantes, cuyos extremos inferiores son colineales y organizados de acuerdo a la distribución de la derecha, puedo advertir a continuación que sus longitudes crecen a la izquierda con una proporción que obedece a una regla de crecimiento sencilla. No crecen en la misma cantidad porque en ese caso la envolvente que recoge los extremos superiores sería una línea recta; tampoco crecen en la proporción 1, 2, 4, 8, ... porque en ese caso su envolvente sería similar a la de la figura 5. Crecen en la única proporción –sea cual sea– que produce una envolvente circular. Podríamos decirlo también así: no crecen en la proporción que garantizaría una envolvente recta (siempre con la misma pendiente), sino en la proporción que garantizaría una única envolvente circular (siempre con una curvatura constante). En el caso de la figura 5, ocurre que la regla de crecimiento no se ajusta ni a una única pendiente ni a una única curvatura constante.

Después de estos desarrollos, Durero introduce el fragmento que ha despertado nuestro interés. Supongamos un racimo de rectas verticales equidistantes y apostadas sobre un eje horizontal. Puedo, en principio, cortar estas rectas de tres maneras diferentes. En primer lugar, puedo cortarlas con un haz de rectas que convergen a un punto a sobre la línea horizontal (Figura 7). Cada una de las rectas de este haz definirá un conjunto de puntos de corte con las verticales tales que las longitudes de los segmentos trazados desde estos puntos hasta la línea horizontal crecerán siempre en una misma cantidad. Este incremento será mayor cuanto mayor sea la inclinación de la recta del haz original.

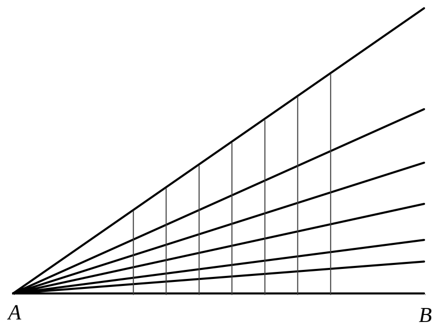

Figura 7.

En segundo lugar, puedo cortar las rectas con un haz de circunferencias de centros colineales de tal modo que el centro de cada circunferencia se encuentre sobre una vertical trazada a partir del extremo *A*, y que todas las circunferencias pasen por un punto que se encuentre sobre la vertical. Cada circunferencia, como en el caso anterior, definirá un conjunto de puntos de corte con las verticales. Las longitudes de los segmentos correspondientes crecen pero no lo hacen en la misma cantidad, lo hacen cada vez con una mayor celeridad. En este caso, cuanto mayor sea el radio de la circunferencia, más lento será el crecimiento del incremento de longitudes (Figura 8).

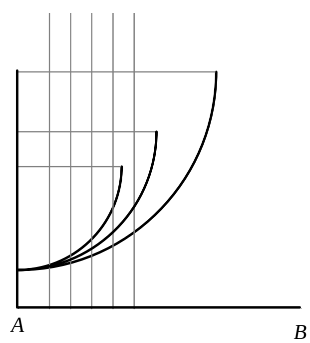

Figura 8.

En tercer lugar, puedo cortar las rectas con un racimo de circunferencias de tal manera que la curva envolvente sea convexa. En este caso Durero pide que tracemos una nueva vertical que pasa por un punto *B* sobre la horizontal ubicado a la derecha de las verticales iniciales. El centro de las nuevas circunferencias se ubica en algún lugar sobre la nueva vertical y por debajo de *B*. Para esta construcción todas las circunferencias han de pasar por el punto *A*. Las longitudes de los segmentos correspondientes crecen pero no lo hacen de manera uniforme, lo hacen cada vez con una menor celeridad (Figura 9).

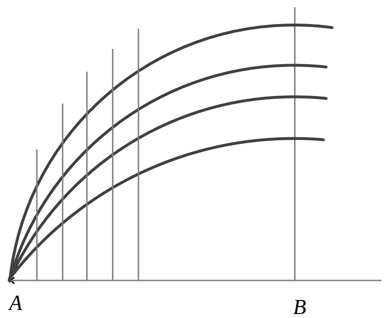

Figura 9.

Cualquiera de las alternativas en cada una de las tres posibilidades de corte nos permite seleccionar un conjunto de segmentos verticales cuyas longitudes, para usar los términos que emplea Durero, guardan entre sí su "*propia correspondencia*". Podemos ahora ampliar los horizontes de las recomendaciones de Durero y forzarlo a razonar en los siguientes términos. Imaginemos un eje horizontal sobre el cual fijamos los extremos inferiores de un conjunto infinito de rayos verticales equidistantes y dirigidos hacia arriba. Aunque Durero recomienda en el fragmento que las líneas verticales bien pueden ser equidistantes o ubicadas a diferente distancia, nos vamos a limitar únicamente a rayos verticales que guardan entre sí una distancia uniforme. Imaginemos ahora que sobre esta familia de rayos señalamos algunos puntos que se ajustan a algún tipo de *regularidad* (uno y sólo uno sobre cada rayo; o uno y sólo uno sobre cada rayo en una agrupación de rayos vecinos). Las longitudes de los segmentos construidos sobre los rayos verticales deben ajustarse a una regla de crecimiento o disminución. Nuestro problema consiste ahora en determinar el tipo de regularidad al que se ajustan los puntos mencionados. Tenemos, pues, dos opciones para explorar. En primer lugar, es posible que los puntos se distribuyan de tal manera que la curva envolvente posea o bien una pendiente constante, o bien una curvatura constante. En segundo lugar, puede ocurrir que la curva envolvente varíe tanto su pendiente como su curvatura de sector a sector. En el primer caso el problema se reduce a hallar: i) la pendiente de la recta que contiene a todos los puntos superiores (si tomamos como unidad la distancia que separa a los rayos verticales equidistantes, bien podemos reconocer que dicha pendiente establece el incremento en longitud de cada segmento contiguo); o, ii) el radio de la circunferencia envolvente (bien sea cóncava o convexa –de acuerdo a los términos que emplea Durero). En el primer ejemplo los puntos pueden distribuirse a lo largo de la extensión completa del plano; en tanto que en el segundo ejemplo los puntos deben restringirse a un dominio reducido, a no ser que pensemos en una curva de curvatura nula (una línea recta). En el segundo caso el problema se reduce a: i) agrupar los puntos de tal manera que queden divididos en sectores en donde se conserva constante o bien la pendiente, o bien el radio de curvatura de la curva envolvente; y, ii) aplicar el procedimiento descrito en el primer caso a cada sector particular. Ahora bien, podemos acercar los rayos verticales tanto cuanto queramos –es decir, podemos exigir un cubrimiento completo de las posibilidades del plano– y aplicar los mismos procedimientos anteriores para concebir la posibilidad de determinar la regla de correspondencia de cualquier curva, siempre que ella se ajuste a un criterio pictórico de continuidad.

En resumen. Si tenemos un conjunto de segmentos verticales que barren todo el plano y están dispuestos de tal manera que uno de sus extremos reposa sobre una horizontal común, mientras que los otros extremos están distribuidos de tal forma que las longitudes de los segmentos obedecen a una regla clara de crecimiento o disminución, determinar la *propia correspondencia* que los rige significa, hallar las posibles combinaciones de rectas y circunferencias cóncavas o convexas que permiten construir nuevamente la envolvente de los extremos que no se encuentran sobre la horizontal. Imaginemos, por ejemplo, el siguiente conjunto de segmentos verticales y asumamos que las longitudes de los segmentos se ajustan a algún tipo de correspondencia propia (Figura 10). Desentrañar la correspondencia significa hallar la regla de construcción que haga uso de circunferencias y rectas envolventes. En este caso, los primeros puntos se pueden envolver con una circunferencia cóncava (según los términos de Durero), los siguientes con una circunferencia convexa y los últimos con una recta. La recta, a su vez, podría contemplarse como una circunferencia (cóncava o convexa) con un radio de magnitud infinitamente grande (obviamente muy lejos de los alcances de Durero) (Figura 11).

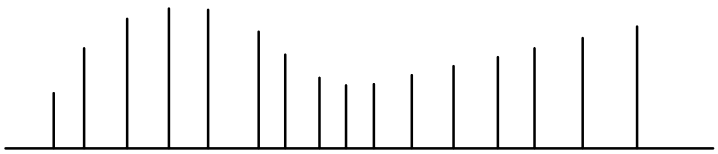

Figura 10.

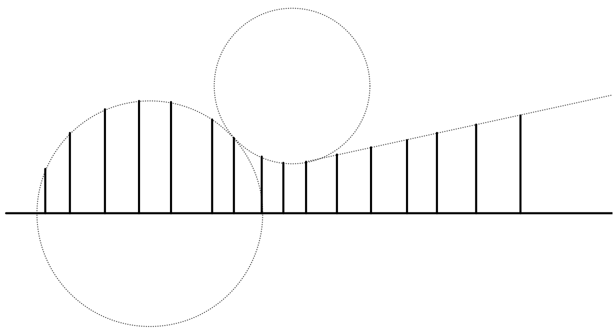

Figura 11.

Los razonamientos de Durero, de hecho muy primitivos, desordenados y, en muchas ocasiones, imprecisos, pueden verse como una interesante anticipación de la recomendación de anexar, como objeto de estudio de la geometría, todas aquellas curvas que se ajustan a algún tipo particular de *correspondencia intrínseca*. En los términos de Descartes [1981, 297]:

> [...] todos los puntos de las [curvas] que pueden llamarse geométricas, es decir, de aquellas que caen bajo alguna medida precisa y exacta [alguna correspondencia propia], tienen necesariamente alguna relación con todos los puntos de una línea recta y esta relación puede ser expresada por alguna ecuación válida por todos los puntos.

No pretendo insinuar que Durero advierte en algún sentido la posibilidad de hacer traducciones analíticas de las figuras geométricas. Tan sólo me interesa el intento de Durero de ampliar la familia de las curvas geométricas para incluir allí todas aquellas curvas cuyas ordenadas verticales encierran una regla de crecimiento que, aunque no se recomiende su reducción a una ecuación algebraica, puede aprehenderse a través de un procedimiento de construcción que implica el uso de circunferencias o rectas envolventes.

Si bien es cierto que las construcciones de Durero están sujetas a un esquema discreto, mediante el cual se adelanta la ubicación de un conjunto finito de puntos a través de la iteración de un procedimiento –que en algunas ocasiones puede ser recursivo– y que conduce después a la recomendación final de trazar una curva envolvente, bien podemos imaginar las potencialidades de los esquemas de Durero si se concibe la posibilidad de imaginar la construcción para una secuencia infinita de puntos abigarrados. Visto así, podemos poner en boca de Durero la recomendación de concebir la estructura interna de una curva geométrica a partir, no de las tangentes que se pueden trazar en cada punto, sino de las circunferencias osculatrices que se pueden trazar sobre cada punto de la curva. En otras palabras, podemos tener una descripción completa de la estructura de una curva geométrica, si estamos en condiciones de describir o bien la pendiente de las rectas que mejor acompañan la curva en la vecindad de cada punto, o bien el radio de las circunferencias que mejor acompañan la curva en las vecindades de cada punto. Sea *C* una curva geométrica cualquiera, sea *A* un punto cualquiera sobre la curva y *T* la tangente a la curva trazada en el punto *A* (Figura 12).

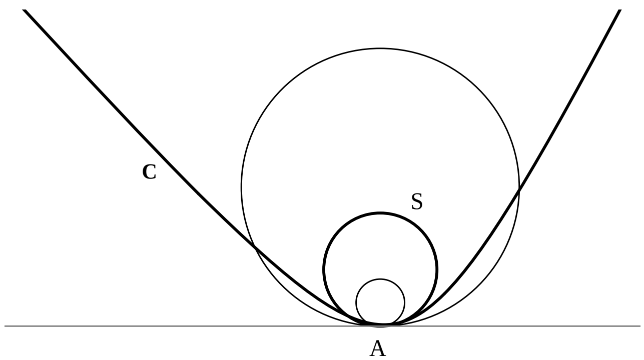

Figura 12.

Podemos imaginar todas las circunferencias que pasan sobre *A* y son tangentes a la recta *T*. De todas ellas seleccionamos la circunferencia *S* que está más cerca de *C* en las vecindades de *A*. ¿Cómo podemos obtener dicha circunferencia? Para cada circunferencia que es tangente a *T* en *A*, y para cada intervalo que contiene a *A*, construimos una función que evalúa el valor absoluto de la diferencia entre el valor de la función *C* en cada punto del intervalo y el valor de la función-circunferencia en dicho punto. A continuación determinamos cuál es la función-circunferencia que minimiza las diferencias anteriores en un intervalo tan pequeño como queramos. El inverso del radio de esta circunferencia puede tomarse como una medida de la curvatura de *C* en las vecindades de *A*.[1] Así las cosas, puedo llegar a determinar la estructura completa de *C*, si para todos los segmentos verticales que están colocados en orden y que caen en las vecindades de cada punto sobre la curva, es posible determinar o bien la línea recta, o bien la línea cóncava o convexa que envuelve los extremos de dichos segmentos.

Referencias

BARTRUM, G. (editora). 2002. *Albrecht Dürer and his legacy*. Londres: Princeton University Press. The British Museum Press.

DESCARTES, R. 1981. *Discurso del método, dióptrica, meteoros y geometría*: Madrid: Ediciones Alfaguara. (Traducción al español de Guillermo Quintás Alonso).

DURERO, A. 1963. *The complete woodcuts.* New York: Dover Publications.

_________. 1972. *The human figure, The complete Dresden Sketchbook.* New York: Dover Publications.

_________. 1995. *De la medida.* Madrid: Ediciones Akal. (Traducción al español de Jesús Espino Nuño). [Albrecht Dürer. *Unterweisung der Messung.* Wiesbaden, Dr. Martin Sändig oHG.1970].

LINDBERG, David. 1976. *Theories of vision from Al-Kindi to Kepler*. Chicago: The University of Chicago Press.

PANOFSKY, E. 1982. *Vida y arte de Alberto Durero.* Madrid: Alianza Editorial. (Traducción al español de Maria Luisa Balseiro).

STRACKER, Stephen. 1970. *Kepler´s Optics: A Study in the Development of Seventeenth-Century Natural Philosophy*. Disertación doctoral presentada en la Universidad de Indiana.

YAGLOM, I. M. 1979. *A simple non-Euclidean geometry and its physical basis.* New York: Springer-Verlag.

1. En forma analítica, este radio de curvatura se puede evaluar de acuerdo a la siguiente expresión:

$$r = \frac{\left(1 + f'(x)\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}.$$

Véase Yaglom [1979, 88].