Una nota escrita por Jacques Herbrand acerca de su tesis doctoral (1931)

Jacques Herbrand

El trabajo en consideración está dedicado a las investigaciones matemáticas de cuestiones planteadas por una teoría de la lógica. La esencia de esta teoría, que Hilbert, su creador, denomina "metamatemática", es el intento de resolver problemas de la filosofía de las matemáticas no mediante la discusión verbal, sino resolviendo cuestiones precisas. No es este el lugar para discutir qué tan a fondo penetra esta teoría en la base de los problemas; no obstante, con base en el análisis que hacemos de ella, veremos que se halla en acuerdo con el más estricto positivismo y el rigor más perfecto, y que se rehusa a considerar ciertas cuestiones relativas a la teoría del conocimiento —quizá en ello se encuentre su insuficiencia desde el punto de vista epistemológico. En todo caso la teoría es de gran interés, si acaso por los problemas que plantea. Hasta ahora, todas las ciencias —la física, la química, la sociología e incluso la biología (recordemos la finas investigaciones recientemente hechas por Volterra)— han planteado nuevos problemas para los matemáticos, y los han incitado a forjar nuevas herramientas. Por primera vez, debido a la metamatemática, la filosofía ha desempeñado dicho papel.

El punto de partida de esta teoría comprende las investigaciones de Russell, ellas mismas un fruto de lo hecho por los logicistas en el siglo diecinueve. Russell había mostrado en *Principia Mathematica* que para hacer matemáticas se podía utilizar, en lugar del lenguaje ordinario, una especie de estenografía, o lenguaje simbólico, que recurre a un número muy reducido de símbolos. Tres signos son suficientes en este lenguaje; las combinaciones de estos forman la oraciones. Pero Russell fue más lejos, y esto es lo interesante para nosotros: mostró que todas las demostraciones posibles en matemáticas se pueden reducir a varias reglas simples de razonamiento, que él estableció. Toda teoría matemática parte de ciertas proposiciones admitidas como verdaderas, los axiomas de la teoría, que, una vez traducidos, son combinaciones de signos. Y todas las demostraciones que se pueden llevar a cabo en esta teoría se reducen al uso repetido de ciertas reglas específicas que permiten formar nuevas proposiciones verdaderas a partir de las proposiciones que ya se sabe que lo son. Si toda demostración se traduce en el lenguaje simbólico, estas reglas se pueden establecer como reglas relativas a ciertas combinaciones de signos de este lenguaje. En consecuencia, podemos ver que el problema '¿es tal o cuál proposición demostrable en una teoría que tiene tales o cuales axiomas?' se convierte en un problema relativo a los signos de este lenguaje y sus combinaciones, y puede ser sujeto a un tratamiento matemático. Esta es la forma más general del problema denominado por los alemanes *Entscheidungsproblem*. En cierto sentido, es el problema más general de las matemáticas.

Pertenece a Hilbert el honor de haber mostrado que este problema es un problema matemático bien definido, resoluble en al menos algunos casos particulares. Pero la teoría de Hilbert contiene más. Durante algunos años, un matemático holandés ha desarrollado una crítica sistemática, de los fundamentos de las matemáticas, crítica que él llama 'intuicionismo'. En su forma extrema, esta teoría sólo permite argumentos que tratan con los números enteros (o con objetos que de hecho puedan ser numerados por medio de los enteros), y que satisfagan las siguientes condiciones: todas las funciones consideradas deben ser efectivamente calculables para todos los valores de sus argumentos mediante operaciones descritas en su totalidad de antemano. Siempre que digamos 'Una proposiciones es verdadera para cada entero', esto significará 'La podemos verificar para cada entero'; siempre que digamos 'Existe un entero x con tal o cual propiedad', esto significará implícitamente 'En lo que precede, hemos proporcionado los medios para construir una tal x'. Podemos ver que es difícil imaginar condiciones más draconianas, pero los brouwerianos consideran que cualquier argumento que no sea de este tipo utiliza, al menos implícitamente, la noción de una infinidad de elementos, la cual consideran que no está bien fundada. Según ellos, no sería sorprendente que tales argumentos (es decir, los argumentos que los matemáticos utilizan todos los días) condujesen a contradicciones y 'no tendríamos el derecho' de utilizarlos. En cualquier caso, es muy cierto que los argumentos intuicionistas, que se reducen en última instancia a argumentos que trata con un número finito y determinado de objetos y funciones, están libre de objeciones.

y que siempre podemos establecer la verdad de todas de sus conclusiones y la de todas las proposiciones intermedias que figuran en ellos. El más exigente de los críticos de los métodos matemáticos no podría objetar nada en ellos, a menos que profesase que la consideración de un número finito de objetos también es ilegítima; pero nadie ha llegado tan lejos [...].

Hilbert planteó entonces el problema de resolver las dificultades ya señaladas mediante el uso exclusivo de argumentos intuicionistas. Pero, como un resultado de ello, desde un comienzo se vio forzado a plantear problemas como el siguiente: Consideremos los axiomas de la aritmética. A partir de estos axiomas y utilizando las reglas de inferencia de Russell podemos formular argumentos que Brouwer rechaza; no obstante, si pudiésemos demostrar con rigor absoluto, utilizando procedimientos intuicionistas, que no hay peligro de llegar a ninguna contradicción (es decir, de poder demostrar tanto un teorema como su negación), entonces la crítica de Brouwer perdería su fuerza. Así, nos vemos llevados a estudiar la consistencia de los axiomas de la aritmética, del análisis, y de la teoría de conjuntos (en esta última, podríamos estudiar la consistencia del axioma de elección), etc. Estos son ahora problemas matemáticos bien definidos. Es más, el caso más general del *Entscheidungsproblem* recién mencionado siempre se reduce al problema de la consistencia de un sistema axiomático, pues si P se puede probar en una teoría axiomática, entonces el sistema que resulta al añadir la negación de P a dicha teoría es inconsistente; y, recíprocamente, si el sistema que resulta de tal adición es inconsistente, esto significa que P es demostrable en el sistema original.

Por tanto, ahora nos encontramos ante el problema de estudiar, con el método recién descrito, la consistencia de todos los sistemas axiomáticos imaginables, utilizando sólo modos de razonamiento intuicionistas.

Antes de indicar los resultados obtenidos, diremos que Hilbert creó una filosofía de las matemáticas sobre esta base. Una de sus tesis fundamentales, por ejemplo, es que una vez que se ha probado la consistencia de un sistema axiomático (por ejemplo, el del análisis), entonces su uso es "legítimo", y que la existencia matemática no es otra cosa que la consistencia. Por ejemplo, decir de un objeto que existe y demostrar que existe es lo mismo. Pero no es el propósito de este trabajo discutir estas ideas y su insuficiencia, si es que la hay. Este estudio sólo intentar resolver el citado problema matemático en el caso más general posible.

Al momento de iniciar estas investigaciones, el estado de cosas era el siguiente: Hilbert se había limitado a dar esquemas de pruebas, casi todas erróneas. Sólo la demostración de la consistencia de los axiomas más simples de la aritmética pudo ser bosquejada de manera más o menos completa por Bernays, uno de sus discípulos. La única contribución importante a la teoría había sido provista por von Neumann, que demostró de manera completa la consistencia de un fragmento de los axiomas de la aritmética. Además, algunos casos particulares del *Entscheidungsproblem* habían sido resueltos, y los primeros pasos de la teoría habían sido presentados por Hilbert y Ackermann en un libro [1928].

Parece necesario considerar nuevamente toda la teoría, comenzando por los primeros lemas. La primera parte de la tesis que estamos analizando está dedicada a este trabajo. Ésta se relaciona con la demostración rigurosa de los teoremas elementales de la teoría, advirtiendo un gran número de detalles como, por ejemplo, que las reglas de razonamiento utilizadas, que no son las mismas que las de Russell, son equivalentes a ellas, etc.

Ahí se prueba nuevamente el resultado de von Neumann, pero con métodos mucho más simples y completos que los suyos; además, tales métodos se pueden generalizar de distintas maneras.

Pero todo este trabajo es preliminar a un resultado de mucha mayor importancia. Éste tiene que ver con el descubrimiento de un método general que nos permita en todos los casos evitar el problema recién planteado. El teorema obtenido es, en su forma completa, extremadamente complejo; trataremos de dar una idea de él en pocas palabras mediante una comparación que esperamos no conduzca a malos entendidos, pues es sólo la traducción al lenguaje ordinario de hechos que tratan exclusivamente con ciertos sistemas de signos. Consideremos un sistema de axiomas que trata con ciertos objetos, y supongamos que se puede construir un modelo [réalisation] de estos axiomas. En otras palabras, se puede construir un sistema de objetos en el que, por medio de definiciones adecuadas de las diferentes relaciones y funciones que figuran en los axiomas, éstos se hacen verdaderos. En tal caso el teorema en cuestión equivale a afirmar que el sistema axiomático bajo consideración no puede ser inconsistente. Pero todo esto debe ser traducido en un enunciado que satisfaga las reglas intuicionistas de razonamiento y utilizando sólo las propiedades de los signos de nuestro lenguaje simbólico.

Las aplicaciones de este teoremas son numerosas. En primer lugar, permite probar la consistencia de todos los axiomas de la aritmética con algunas restricciones menores. Sin embargo, aún no ha permitido una prueba de consistencia para los axiomas del análisis; aquí hay dificultades de una naturaleza muy peculiar, o de una naturaleza que contradice muchas ideas comúnmente aceptadas; estas dificultades fueron reconocidas recientemente. Por otra parte, el teorema en cuestión permite la reducción del caso más general del *Entscheidungsproblem* a una forma fundamental de un problema acerca de funciones aritméticas, el cuál es una generalización del problema de la solución efectiva de ecuaciones diofánticas. Por su conducto, todas las cuestiones que pueden ser planteadas en la metamatemática se 'aritmetizan'.

Tal es la colección de resultados obtenidos. Ahora nos permitimos insistir en un punto que merece nuestra atención. Hemos visto que el problema '¿es verdadero un teorema en una teoría dada?' es equivalente a un problema de la aritmética pura. De este modo tenemos las siguientes alternativas: O bien el primer problema, uno de inmensa generalidad, es resoluble, o bien hay problemas irresolubles en la aritmética. Por ejemplo, habría ecuaciones diofánticas tales que nunca se probaría que no tienen solución, y sin embargo cada vez que se intentara verificar que cierto sistema de enteros es una solución, la respuesta sería negativa. Hay matemáticos que se estremecerían ante cualquiera de estas alternativas. Algunos resultados recientes parecerían indicar que la que se cumple es la segunda de ellas, lo cual conlleva la falsedad de una idea ampliamente difundida.

Hemos visto los principios sobre los que se erige esta nueva rama de las matemáticas. Para concluir, quisiéramos insistir nuevamente en el hecho de que es independiente de cualquier opinión filosófica. Los resultados obtenidos son positivos, y así como un matemático que estudia las ecuaciones de Einstein no tiene por qué compartir sus ideas, tampoco quien estudia estas teorías tiene por qué adherirse a los principios filosóficos de Hilbert. Hay en estas cuestiones un dominio escasamente explorado de investigaciones aritméticas del mayor interés, que muy bien podría contener sorpresas.