Mathesis **III 2**$_1$ (2007) 37-71.

La noción de posibilidad en tres definiciones matemáticas de probabilidad

Marco Antonio Hernández Ramírez

Resumen

En este trabajo defendemos el carácter lógico de las nociones de necesidad y posibilidad, además de su no reductivilidad a la noción matemática de probabilidad. Se presentan tres definiciones de probabilidad: clásica, frecuencialista y axiomática; después, haciendo uso de criterios apropiados, se distinguen diferentes nociones de posibilidad. Con la distinción de al menos dos nociones de posibilidad, se realiza un análisis modal de los diferentes enfoques de probabilidad y se demuestra que en cada uno de ellos alguna noción de posibilidad permanece tácita o explícitamente presupuesta. Esto refuta la tesis de que las nociones modales son sólo explicables por la teoría matemática de las probabilidades, tesis sostenida en el siglo XIX por lógicos y matemáticos.

Abstract

In this paper we defend the logic nature of notions as necessity and possibility, and we defend that they can not be reduced to the mathematical notion of probability. We show three definitions of probability: classic, frequency and axiomatic; then, making use of proper criteria, we distinguish different notions of possibility. Then, with at least two distinctions of possibility we make a modal analysis of the different definitions of probability, and show that in each of them some notion of possibility is presupposed in a tacit or explicit way. This refuses the thesis that the modal notions are only explained by the mathematical theory of probability. This thesis was supported by logicians and mathematicians in the XIX century.

Palabras claves: Probabilidad clásica, frecuencialista, axiomática; posibilidad *de re*, *de dicto*; lógica modal.

1. Introducción

Antecedentes

En 1879, cuando los *Begriffsschrift* de Gottlob Frege fueron publicados, a decir de van Heijenoort, inició una gran época en la historia de la lógica,[1] pues "este libro la liberó de una conexión artificial con las matemáticas al tiempo que preparó una profunda interrelación entre esas dos ciencias" [van Heijenoort 1967, vi]. Sin embargo, no todas las áreas de la lógica fueron iluminadas por la luz de esa época de esplendor;[2] en particular, las nociones que ahora conocemos como modales, fueron dejadas al margen del desarrollo axiomático que se inició a finales del siglo XIX, y alcanzó su apogeo a principios del siglo XX. Frege mismo en su *Conceptografía* calificó de irrelevantes para su trabajo las distinciones modales.[3] Tal actitud reflejó una postura generalizada entre los lógicos del siglo XIX, y explica el éxito que alcanzó lo que consideramos, siguiendo a Niiniluoto [1988], el programa rival de las modalidades, a saber: La teoría matemática de las probabilidades.

Más tarde, en 1910, Whitehead y Russell publicaron la obra que dio la pauta para el surgimiento de la moderna lógica modal: los *Principia Mathematica*.[4] Muchas de las ideas expuestas en los *Principia* fueron discuti-

1. Las siguientes son algunas de las contribuciones fundamentales de esa obra a la lógica: 1) El cálculo proposicional veritativo-funcional; 2) el análisis de proposiciones en términos de función y argumento, que sustituye el análisis sujeto-predicado; 3) la teoría de la cuantificación; y 4) un sistema de derivación lógico en el cual las inferencias son realizadas exclusivamente de acuerdo a la forma de las expresiones.
2. La segunda mitad del siglo XIX fue testigo de un renacimiento de la lógica; esta disciplina a la cual el filósofo alemán Immanuel Kant ([1781, BVIII]) acusó de estar completamente terminada por no haber sufrido progreso alguno durante más de dos mil años, recibió un fuerte impulso proveniente de las matemáticas. Las publicaciones de Boole, De Morgan y Peano, por mencionar tan sólo algunas de las más destacadas, vinieron no sólo a revivir la ciencia del pensamiento puro, sino que además la dotaron de nuevas herramientas y métodos.
3. De acuerdo con Frege [1988, 16], 'posible' y 'necesariamente,' tienen más que ver con consideraciones sobre el conocimiento humano que con la lógica pura, es decir, son nociones meramente epistémicas. De haber estado Frege en lo cierto, entonces, Aristóteles se habría equivocado en pensar que forma parte de la tarea de los lógicos buscar reglas de inferencia aplicables sólo a las proposiciones modales. Sin embargo, ahora nos es más claro que las nociones modales de necesidad y posibilidad no pertenecen a la epistemología (por lo menos no exclusivamente), ni a ninguna otra disciplina en especial, que no sea la lógica misma.
4. Esa obra fue durante mucho tiempo la referencia ineludible para cualquier trabajo que se quisiera realizar en el campo de la lógica. En esa obra se redefinen gran parte de los conceptos lógicos y se introduce una simbolización novedosa (debida a Peano) para ofrecer un cálculo deductivo que abarca la lógica de primer orden y toda la teoría de tipos.

das ampliamente por los lógicos de la época;[5] en particular, Lewis estuvo en desacuerdo con el tratamiento que Russell y Whitehead le dieron a la implicación material. En los *Principia Mathematica* [p. 94] leemos:

> La interpretación más conveniente de la implicación es, conversamente, que si p es falsa o q es falsa, es decir, entonces "*p implica q*" es verdadera. Entonces "p implica q" es definida con el significando: "O bien p es falsa o q es verdadera". Entonces nosostros escribimos: $p \supset q. = . \sim p \vee q$.

Esta interpretación, que considera una implicación material verdadera si, y sólo si, no se da el caso de que su antecedente sea verdadero y su consecuente falso, da lugar a las siguientes tesis conocidas como paradojas de la implicación material:

a) Una proposición falsa (p = 0) implica materialmente cualquier proposición:

$$(p = 0) \rightarrow (p \rightarrow q)$$
$$\therefore 0 \rightarrow q$$

b) Una proposición verdadera (p = 1) es implicada materialmente por cualquier proposición:

$$(q = 1) \rightarrow (p \rightarrow q)$$
$$\therefore p \rightarrow 1$$

c) Dadas dos proposiciones cualesquiera, y dado que una implicación material sólo es falsa cuando el consecuente es falso y el antecedente verdadero, entonces la primera implica materialmente a la segunda o la segunda implica materialmente a la primera:

$\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$;
$\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$;
$\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
Si $\neg(p \rightarrow q)$, entonces p = 1 y q = 0
Si p = 1, $\neg p = 0$, y si q = 0, entonces $\neg q = 1$
Si $\neg p = 0$, entonces $\neg p = 0$ y $\neg p \rightarrow \neg q$
Si $\neg q = 1$, entonces $p \rightarrow \neg q$

Lewis argumentó que algunas de las propiedades de la implicación material obedecen al hecho de que el álgebra de relaciones fue originalmente vista como representado el sistema de la lógica de clases. Sin embargo, Lewis [1918, 230] se percató de que:

5. De todas las reacciones que los *Principia* suscitaron, destaca un artículo, publicado en 1931 por un joven matemático, miembro del Círculo de Viena, llamado Kurt Gödel: "Sobre sentencias formalmente indecidibles en *Principia Mathematica* y sistemas afines" [Gödel 2006].

[c)] exhibe propiedades de la implicación material que no tienen analogía alguna con las relaciones entre clases. [c)] es una consecuencia del postulado adicional, $p = (p = 1)$. Para clases, $\subset$ representa 'es contenido en': pero si a no está contenido en b, no se sigue que a está contenido en no b —a puede estar parcialmente dentro y parcialmente fuera de b.

Para solucionar ese problema, Lewis remplazó la implicación material por la implicación estricta $\prec$, donde $p \prec q$, significa intuitivamente que $p \wedge \neg q$ es imposible. De esta manera, Lewis [1918, 294] definió la fórmula 'es posible que p', como sigue

$$\Diamond p =_{\mathrm{df}} \neg (p \prec \neg p).$$

Al reflexionar sobre las razones de la demora para la invención de un tratamiento sintáctico de la modalidad como el anterior, Niiniluoto [1988, 277] escribe que:

> Este enigma no se puede responder simplemente acusando a los lógicos de una carencia de imaginación: después de todo, los sistemas formales de la lógica extensional, desarrollados por Boole, Peirce, Schröder, Frege, Russell, Hilbert y otros, han sido técnicamente más complejos que los relativamente simples marcos de la lógica intensional.

La respuesta buscada por Niiniluoto la encontró en los supuestos filosóficos más profundos que prevalecieron entre los lógicos del siglo XIX.

Sin embargo, el problema de la modalidad no fue exclusivo de los lógicos del siglo XIX. Al considerar el problema de la modalidad relacionado con la teoría de las probabilidades, encontramos, en primer lugar, que los matemáticos del siglo XIX emprendieron una lucha contra el determinismo Laplaciano y su concepción epistémica de la probabilidad; esta concepción se encuentra estrechamente relacionada con la noción de posibilidad. En segundo lugar, tenemos que los matemáticos del siglo XIX se avocaron a encontrar una definición no circular y objetiva de las probabilidades. Entonces, la definición frecuencialista de las probabilidades se erigió como la definición extensional[6] buscada, es decir, la definición que, aparentemente, no apelaba más a la noción de posibilidad para su formulación.

Objetivo

Nuestro propósito en este trabajo es mostrar que alguna noción de posibilidad se encuentra presupuesta, tácita o explícitamente, en las definiciones matemáticas de las probabilidades que sucedieron a la definición

6. De acuerdo con Quine [1953, 21]: "La clase de todas las entidades de las cuales un término general es verdadero es llamada la *extensión* del término", y agrega que "es un lugar común en filosofía oponer intensión a extensión, o, en un vocabulario distinto, connotación a denotación".

clásica de probabilidad. En otras palabras, proponemos una reflexión de tres enfoques matemáticos de la teoría de las probabilidades en relación con la moderna lógica modal. Los tres enfoques referidos no son los únicos que se han propuesto en la historia de las matemáticas,[7] pero creemos que son los más representativos y los hemos elegido ciñéndonos a consideraciones puramente históricas del desarrollo de la disciplina matemática de las probabilidades.

En este trabajo, siguiendo a Łukasiewicz [1970, 62], entendemos por proposición modal la que ha sido construida sobre el modelo de una de las cuatro expresiones siguientes:

Es posible que *p*	Simbólicamente $\Diamond p$
No es posible que *p*	Simbólicamente $\neg\Diamond p$
Es posible que no *p*	Simbólicamente $\Diamond\neg p$
No es posible que no *p*	Simbólicamente $\neg\Diamond\neg p$

Donde la letra *p* designa cualquier proposición de la lógica de primer orden.[8]

2. Tres definiciones de probabilidad

2.1 Definición clásica de probabilidad

La definición clásica de probabilidad define la probabilidad de un evento ε_i como el cociente de los casos favorables a ε_i sobre la totalidad de los casos igualmente posibles —o 'equiposibles'— dentro de un espacio muestral Ω. Asignar iguales probabilidades a cada una de las salidas es un rasgo característico de la definición clásica de las probabilidades, pues ésta define probabilidad apelando al 'principio de indiferencia': "Este principio establece que dos posibilidades son igualmente probables pues no hay razón para preferir una sobre otra" [Salmon 1984, 65].

No debe sorprender que detrás de la definición clásica de las probabilidades se encuentre un principio como el de indiferencia si tenemos presente que esta teoría fue producto del pensamiento de la ilustración

7. Huygens resolvió los mismos problemas que dieron origen a la teoría matemática de las probabilidades mediante métodos distintos a los de Fermat y Pascal, sólo que él no recurrió en algún momento a probabilidades de eventos. Las soluciones de Huygens "están basadas en el cálculo de esperanzas, lo cual hacía ver ya que este concepto podía tomarse como primario, previo incluso al de probabilidad de un evento, y a partir de él desarrollar la nueva disciplina. La historia no fue de ese modo pues el concepto que prevaleció como primario fue el de probabilidad" [García 2005, 311].

8. Creemos pertinente esta acotación debido a que la lógica modal engloba muchas otras lógicas, no sólo la de la necesidad y la posibilidad. También son lógicas modales: La lógica deóntica, la lógica temporal, la lógica epistémica. En este trabajo cuando nos refiramos a lógica modal, estaremos haciendo referencia a la lógica también llamada alética.

europea y que como tal está empapada de muchas de esas ideas, en particular, la idea de determinismo [Gillies 2000, 14]. Ésta idea sugiere que las probabilidades no pueden ser inherentes a la naturaleza de los objetos sino que deben estar relacionadas con la ignorancia humana.[9] Esto llevó a Laplace [1814, 6] a afirmar que

> La probabilidad es relativa, en parte a nuestra ignorancia, en parte a nuestro conocimiento. Sabemos que de tres o de un número mayor de eventos, sólo uno de ellos debe ocurrir; pero nada nos induce a creer que uno de ellos ocurrirá en mayor medida que los otros. En este estado de indecisión, es imposible para nosotros anunciar la ocurrencia con certeza.

Una situación como ésta, en la cual 'nada nos induce a creer que uno de ellos ocurrirá en mayor medida que los otros', Laplace recomienda considerar todos los eventos con la misma posibilidad de ocurrir, es decir, considerarlos como eventos equiposibles.[10] De esta manera encontramos que la teoría clásica de las probabilidades sólo puede ser aplicada donde tengamos un número finito de casos igualmente posibles:

> Este método de encontrar probabilidades, basándose en la equiprobabilidad de los posibles resultados, es conocido como la definición clásica de probabilidad. Según esta definición, la probabilidad de un evento A se calcula de la siguiente manera:
>
> $$P(A) = \frac{\text{\# de eventos elementales que producen la ocurrencia de A}}{\text{\# total de eventos}}$$
>
> [García 2005, 54]

Se debe tener presente que calcular probabilidades de esta manera es factible sólo cuando ha sido posible determinar que los resultados de nuestro experimento aleatorio son equiposibles y finitos, en nuestra notación moderna: Si un espacio muestral Ω consiste de n eventos elementales equiposibles y ε_i es un evento contenido en Ω, $\varepsilon_i \subseteq \Omega$, con n_ε resultados favorables a ε_i, entonces la probabilidad de ε_i está dada por la fórmula

$$P(A) = {}^{n_\varepsilon}\!/_{n}$$

9. Supongamos que tenemos una situación compuesta por tres posibles eventos ajenos entre sí, *A*, *B*, y *C*. Si nos ceñimos a la idea del determinismo universal, uno de ellos —digamos que *B*— debe ocurrir. Pero dada nuestra condición humana, nosotros no sabemos cuál de ellos ocurrirá. Nos encontramos en la situación en la cual debemos recurrir al cálculo de probabilidades.

10. No es claro quien fue el primero en formular está definición; aparece en la correspondencia entre Fermat y Pascal, y, al parecer, para 1678 Leibniz estaba en posesión de ella [Hacking 1975, 152].

La probabilidad así definida cumple con las propiedades que Laplace llamó 'principios' en su *Ensayo filosófico de las probabilidades*.[11] Nosotros no haremos referencia a estos principios,[12] debido a que nuestro interés primordial se encuentra en la definición misma de probabilidad, más que en sus propiedades aritméticas.

2.2 Definición frecuencialista de probabilidad

En la teoría frecuencialista, las probabilidades son asociadas con colecciones de eventos considerados como objetivos e independientes de los individuos de la misma manera que la masa de un cuerpo es considerada independiente del físico que la mide cuando hace mecánica.[13]

En la teoría frecuencialista se introdujo por primera vez el concepto de espacio de eventos, sólo que referido a atributos, y se le debe a Von Mises [Gillies 2002, 89]. Este término es el que más tarde fue conocido en los libros de texto sobre probabilidades como 'espacio' muestral. La definición de probabilidad frecuencialista se puede formular de la siguiente manera:

> Sea A un atributo arbitrario asociado con un conjunto particular. Si Ω es el espacio de atributos del conjunto, entonces $A \subseteq \Omega$. Supongamos que en los primeros n miembros del conjunto A ocurre $m(A)$ veces, entonces su frecuencia relativa es $m(A)/n$. La ley de estabilidad de las frecuencias estadísticas establece que cuando n crece, $m(A)/n$ se acerca cada vez más a un valor fijo [Gillies 2002, 92].

Este enfoque asume que si un experimento se repite n veces, de las cuales n_A veces ocurre el evento A, entonces la probabilidad se define como el límite de la frecuencia relativa (n_A/n), lo cual quiere decir que:

$$n_A/n \longrightarrow P(A) \in [0,1]$$

La peculiaridad de este enfoque consiste en fundamentar la teoría sobre una sólida base experimental. Sin embargo, este enfoque presupone,

11. Tales como la propiedad de aditividad finita para n eventos A_i mutuamente excluyentes:

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{K=1}^{n} P(A_k).$$

12. A los cuales preferimos llamar propiedades, para distinguirlos de principios implícitos en la teoría, como el de indiferencia y el de equiposibilidad.
13. El intento de Von Mises, y todos aquellos que compartieron la idea de que el enfoque frecuencialista era el adecuado para considerar las probabilidades, consistió en "presentar la teoría de las probabilidades como una ciencia matemática como la mecánica" [Gillies 2002, 90].

además del principio de frecuencia relativa, una ley que Von Mises [1928, 12; citado en Gillies 2002, 92] llamó empírica:

> Es esencial para la teoría de las probabilidades que la experiencia haya mostrado que en el juego del dado, como en todos los otros fenómenos que hemos mencionado, las frecuencias relativas de ciertos atributos llegan a ser más y más estables cuando el número de observaciones es incrementado.

En otras palabras, Von Mises sugiere que, por ejemplo, cuando nosotros arrojamos una moneda al aire n veces, los resultados de este experimento tenderán a estabilizarse en torno a un valor que él llama $m(A)/n$, a medida que la n tiende al infinito.

De supuestos como el anterior, los teóricos frecuencialistas como Von Mises formulan el axioma de convergencia: Sea A un atributo arbitrario (salir número par, por ejemplo, al arrojar un dado n veces) de una colección de C, entonces

$$Lim_{n\to\infty} \frac{m(a)}{n} \text{, existe}$$

y ésta es la definición de probabilidad apelando al límite de la frecuencia relativa.[14]

Otra peculiaridad de esta teoría, es la que Von Mises subrayó de la siguiente manera: "Nuestra teoría de la probabilidad no tiene nada que ver con cuestiones tales como: '¿hay alguna probabilidad de que Alemania esté en un tiempo futuro en guerra con Liberia?'" [Von Mises 1928, 9, citado en Gillies 2002, 97].

La teoría frecuencialista sólo introduce probabilidades en sentido matemático o cuantitativo cuando disponemos de un conjunto considerable de eventos uniformes que son el fruto de una cuidadosa observación. Nuevamente, dejamos de lado las propiedades de este enfoque ya que, como antes señalamos, nuestro interés está en la definición.

14. Este enfoque sobre las probabilidades hizo su aparición en 1692 cuando Jacob Bernoulli probó un importante teorema sobre cualquier conjunto infinito contable de salidas aleatorias. La formulación del teorema es: "para cualquier ε, y para toda x, hay un número de intentos N, tales que para cualquier $n > N$,

$$Pr[(p-\varepsilon) \leq k/n \leq (p+\varepsilon)] > (1-x).$$

Ésta es […] la conección más fundamental entre probabilidad y frecuencias de una serie".[Hacking 2001, 198] Bernoulli probó entonces que si n crece sin cota, la probabilidad de que k/n se estabilice en torno a un valor fijo es 1. Este resultado es conocido como el teorema del límite de Bernoulli o, más coloquialmente, como ley de los grandes números [Cohen 1999, 22]. Una presentación de la prueba se encuentra en [Kneale 1949, 136].

2.3 Definición axiomática de probabilidad

Las condiciones para la axiomatización de la teoría de las probabilidades estaban dadas desde finales del siglo XIX.[15] La teoría de los conjuntos creada por Cantor y las herramientas lógicas desarrolladas por Boole, Frege, Peano y De Morgan, aunados a los trabajos de Lebesgue y Fréchet fueron utilizadas por Kolmogorov, con el objeto de dar fundamento axiomático a la teoría de las probabilidades.[16]

Kolmogorov partió de la intuición de que la teoría de las probabilidades podía ser susceptible de axiomatización, en la misma forma en que lo fue la geometría y el álgebra. En sus propios términos:

> Esto significa que después de tener definidos los elementos a ser estudiados y sus relaciones básicas, y después de haber expuesto los axiomas por los que estas relaciones serán gobernadas, todas las exposiciones futuras deben estar basadas exclusivamente en estos axiomas, independientemente del significado concreto usual de estos elementos y sus relaciones [Kolmogorov 1933, 1].

Kolmogorov fue consciente de que cualquier teoría axiomática es susceptible de un ilimitado número de interpretaciones paralelas a aquella que se tuvo en mente al proponerla.[17] La formulación de la teoría es como sigue:

---

15. El siglo XIX fue rico en construcciones axiomáticas para varias ramas de las matemáticas: El análisis, la teoría de los conjuntos, la geometría y el álgebra. El cálculo de probabilidades no fue la excepción ya que varias axiomatizaciones fueron construidas, como las de Fineti, Popper y Kolmogorov, por mencionar las más importantes, con la intención de axiomatizar la definición de probabilidad.
16. Como lo señaló en el prefacio de su monografía: Kolmogorov se dio a la tarea de colocar los conceptos básicos de la teoría de las probabilidades en su lugar natural. La tarea que él emprendió, como señala, no pudo haberse dado de manera tan natural, antes de la introducción de las teorías de la medida y la integración de Lebesgue. Para Kolmogorov, después de la publicación de las investigaciones de Lebesgue, la analogía entre medida de un conjunto y probabilidad de un evento, y entre integral de una función y esperanza matemática de una variable aleatoria se hizo patente. Para que tal analogía fuese válida, fue necesario que la teoría de la medida y de la integración se independizasen de los elementos geométricos que se encontraban en Lebesgue. Ese trabajo fue llevado a cabo por Fréchet en su tesis doctoral de 1906, en la cual intentó unificar, en términos abstractos las ideas contenidas en los trabajos de Cantor, Volterra, Hadamar y otros, en lo que llamó cálculo funcional.
17. Kolmogorov define uno de los conceptos capitales de su sistema, el de campo o espacio de probabilidades, como un sistema de conjuntos los cuales satisfacen ciertas condiciones. Lo que representen esos conjuntos no será de importancia para el desarrollo de la matemática de la teoría de las probabilidades. Kolmogorov piensa en el punto de vista formalista, tal como lo representa Hilbert en la esfera de los números y la geometría, el cual consiste en dejar sin definir los enteros y los puntos pero afirma respecto a ellos axiomas tales que hagan posible la deducción de las proposiciones usuales de la aritmética. En otras palabras, Hilbert no atribuye significado a los símbolos ‘0’, ‘1’, ‘2’, ‘3’,..., ‘*n*’, excepto que deben tener ciertas propiedades que enumeran los axiomas. De esta manera, los números se consideran como variables. Esto se debe a que tradicionalmente se ha pensado que a los matemáticos no les incumbe la esencia de los números:

Axiomas

Sea E una colección de elementos ξ, η, ζ, ..., los cuales llamaremos eventos elementales, y sea $\mathfrak{I}$ un conjunto de subconjuntos de E. Los elementos del conjunto $\mathfrak{I}$ serán llamados eventos aleatorios.

I. $\mathfrak{I}$ es un campo;
II. $\mathfrak{I}$ contiene al conjunto E, ($E \subseteq \mathfrak{I}$);
III. A cada conjunto A en $\mathfrak{I}$ le es asignado un número real no negativo $P(A)$. Este numero $P(A)$ será llamado la probabilidad del evento A;
IV. $\mathrm{P}(E)$ es igual a 1;
V. Si A y B no tienen elementos en común entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

Un sistema de conjuntos, $\mathfrak{I}$, junto con una asignación definida de números $\mathrm{P}(A)$ que satisface los axiomas I-V, es lo que Kolmogorov llamó un campo generalizado de probabilidad. Un acierto de la teoría de Kolmogorov es que se puede extender a casos en los cuales los conjuntos de eventos son infinitos. Para tal efecto, Kolmogorov introduce el axioma VI de su sistema llamado 'Axioma de Continuidad'. Sobre él nos dice que:

> Es esencial sólo para un campo infinito de probabilidades, aunque es imposible dilucidar su significado empírico [...] Pero, al describir cualquier proceso aleatorio observable sólo podemos obtener campos finitos de probabilidad. Los campos infinitos de probabilidad ocurren solamente como idealizaciones de modelos de procesos aleatorios reales [Kolmogorov 1933, 15].

Además:

> De esta forma estaremos derivando todos los campos posibles finitos de probabilidad en el cual $\mathfrak{I}$ consiste de los conjuntos de todos los subconjuntos de E. (El campo de probabilidad es llamado finito si E es finito.) [Kolmogorov 1933, 3].

Destacamos en la construcción del espacio de probabilidades la noción que proviene de la teoría de los conjuntos, a saber, la noción de conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto dado, es decir, la de conjunto potencia. Esta noción está estrechamente ligada con otro concepto

---

"Lo que importa son las relaciones y operaciones que se aplican a los objetos, en particular la igualdad y el orden entre ellos –de la misma manera en que los jugadores de ajedrez no se interesan por lo que es un alfil sino en cómo funciona" [Fraenkel 1976, 22].

implícito en la presentación de Kolmogorov, a saber, la de ‘campo’: Un campo (o σ*-álgebra*) es aquel sistema de conjuntos en el que se cumplen las siguientes condiciones:

a) Para cualesquier $\xi_i, \xi_j \in \Im$, $\xi_i \bigcup \xi_j \in \Im$.
b) Para cualesquier $\xi_i, \xi_j \in \Im$, $\xi_i \bigcap \xi_j \in \Im$.
c) Para cualesquier $\xi_i, \xi_j \in \Im$, $\xi_i \backslash \xi_j \in \Im$.
d) Si $\Im \neq \varnothing$, entonces $\varnothing \in \Im$.

Omitiremos, como en los casos anteriores, hablar de las propiedades de esta teoría. Nuestros cuestionamientos están dirigidos exclusivamente a conceptos que se encuentran en lo que acabamos de presentar.

3. Nociones de posibilidad

Examinar en detalle todas las propuestas para distinguir entre diversas nociones de posibilidad exige un trabajo aparte; y aunque sería suficiente para nuestros propósitos mostrar que existe al menos una distinción y que ésta está ampliamente reconocida y que es reiteradamente citada en la literatura, mencionamos dos estrategias para establecer criterios de distinción entre diferentes conceptos de posibilidad.

El primer criterio, debido a Hacking [1967, 1975], está basado en una distinción gramatical de dos construcciones en las cuales ocurre el adjetivo ‘posible,’ dejando de lado las ocurrencias de ‘posible’ como nombre o como sustantivo.[18] Hay, sin embargo, autores como Łukasiewics, quienes intentaron construir una definición del concepto de posibilidad que permitiera establecer todos los teoremas de la lógica modal tradicional sin incurrir en contradicción. Łukasiewics se encontró con la siguiente definición de lo que el llama ‘posibilidad pura’:

$$Mp = AEpNp\Pi qNCpKqNq$$ [19]

---

18. Nosotros, al igual que Hacking, dirigimos nuestro análisis al adjetivo o adverbio y no al sustantivo ‘posible’. Es decir, estamos interesados en el cambio de significado que tiene lugar cuando un sustantivo o un verbo es modificado por ‘posible’ o ‘posiblemente.’ Una pregunta sobre qué es lo posible, análoga a la pregunta ‘¿qué es el ser?’, no tiene ningún sentido ni importancia para nuestro enfoque.

19 Esta fórmula está escrita en notación polaca; su traducción a nuestra notación convencional se sigue de la definición de *A*, que es el símbolo polaco de alternación y de *E*, que es el símbolo polaco de equivalencia material. Los demás símbolos son los acostumbrados:

$$M =_{def.} \Diamond,\ C =_{def.} \supset,\ N =_{def.} \neg,\ K =_{def.} \wedge \text{ y } \Pi =_{def.} \forall .$$

De acuerdo a esto,

$$Apq = CCpqq \text{ y } E = KCpqCqp.$$

La cual, traducida a nuestra notación moderna, se formula de la siguiente manera:

$$\Diamond p = ((p \equiv \neg p) \rightarrow \forall q \neg (p \supset (q \wedge \neg q))) \rightarrow \forall q \neg (p \supset (q \wedge \neg q))$$

Esta fórmula afirma que, "es posible que *p*" significa que "o bien *p* y $\neg p$ son equivalentes entre sí, o no hay ningún par de proposiciones contradictoria implicadas por *p*" [Łukasiewics 1970, 74]. Más tarde, Łukasiewics [1970, 75] se convenció de que "el concepto más amplio de posibilidad en *general* era preferible al concepto más restringido de posibilidad *pura*". El proyecto de Łukasiewics, sin embargo, produce consecuencias indeseables[20] si no se adopta un sistema de lógica trivalente.

El segundo método para establecer criterios de distinción entre posibilidades ofrece un ejemplo de cada una de las posibilidades que estemos considerando para que el lector intuya las diferencias [Rinaldi 1967]. Esta última estrategia es infructuosa debido a que los ejemplos sobre posibilidades suelen ser tan contra intuitivos que lo menos que sugieren en el lector es una distinción. Ejemplos sobre modalidades son los siguientes: "es posible que mañana haya o no haya una batalla naval" [Aristóteles 1988, 50]; "es posible que una barra de hierro flote en el agua" [Rinaldi 1967, 82]; "No es posible que el agua no sea H_2O" [Kripke 1981, 134]. Otra razón por la cual la estrategia no brinda los frutos que se esperan de ella es porque ciertas nociones de posibilidad a menudo presuponen otras nociones de posibilidad o tienen una intersección que es no vacía. Esperamos que tales nociones se tornen más intuitivas después de la presentación de la sintaxis y semántica de la lógica modal.

3.1 Sistemas de lógica modal

Los problemas que entrañan las modalidades de necesidad y posibilidad son señalados por primera vez en el tratado *Sobre la interpretación* de Aristóteles. Ahí se analizan las relaciones entre las nociones modales de necesidad y posibilidad, además de la forma de negar proposiciones que contienen esas modalidades,[21] lo cual presupone el conocimiento de ciertas leyes lógicas dado que la negación de una proposición modal no

20. Admitir como posible *todo*, es una de ellas.
21. Lo que Aristóteles elaboró fue una teoría de las proposiciones modales Una proposición modal es una que contiene la palabra 'necesario' o 'posible', o alguna equivalente a esas dos. Véase el final de nuestra introducción.

es directa [Aristóteles 1988, 53].[22] Sin embargo, como señalamos en la sección introductoria:

> La causa inmediata del nacimiento de la moderna "lógica modal" fue muy especial; se inspiró en la insatisfacción con el tratamiento de la tabla de verdad de la implicación de Frege-Russell. Donde la lógica proposicional hace $\varphi \rightarrow \psi$ equivalente a $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ (no es caso que φ y no ψ), o equivalentemente, $\Box(\varphi \rightarrow \psi)$. ($\varphi$ *necesariamente* implica ψ materialmente). [van Benthem 1988, 13]

La insatisfacción de Lewis [1918] lo llevó a elaborar el primer tratamiento sintáctico de las modalidades. Más tarde, de acuerdo con van Benthem [1988, 13], el estudio de $\Diamond$ y $\Box$ llegó a ser dominante en la lógica modal cuando los estudios sobre la implicación material se constituyeron como una materia aparte. Podemos considerar a la lógica modal como el intento por representar los argumentos lógicos que involucran esencialmente los conceptos de necesidad y posibilidad [Haack 1978, 170]. Como muestra la referencia a Aristóteles, hay una larga tradición filosófica de distinguir entre verdades necesarias y contingentes, además de las posibles. La distinción suele ser explicada en los siguientes términos:

> Una verdad necesaria es aquella que no puede ser de otra manera, una verdad contingente es la que sí podría [ser diferente]; o la negación de una verdad necesaria es imposible o contradictoria, la negación de una verdad contingente es posible o consistente; o, una verdad necesaria es verdadera en todos los mundos posibles. [Haack 1975, 172]

Es natural si tales tesis no son suficientemente claras, pues para explicar la necesidad se apela a otra noción modal, tan oscura como la anterior, a saber: Posibilidad. Por otro lado, hay ahí algunas nociones entrelazadas que, como lo afirma Haack [1975, 172], debemos distinguir:

> La distinción entre verdades necesarias y contingentes es una distinción metafísica; ésta se diferencia de la distinción epistemológica entre verdades *a priori* y *a posteriori*. Una verdad *a priori* es una que nosotros conocemos independientemente de la experiencia, y una verdad *a posteriori* es una que no podemos conocer así. Esas −la metafísica y la epistemológica− son ciertamente distinciones diferentes. Pero es controversial cuando ellas coinciden en extensión, esto es: Si todas y sólo las verdades necesarias son *a priori* y todas y sólo las verdades contingentes son *a posteriori.*

22. En efecto, Aristóteles observa que la negación de $\Diamond p$ −donde '$\Diamond$' representa el operador modal 'es posible que' y 'p' representa una proposición cualquiera− no es $\Diamond\neg p$. Las dos proposiciones son conjuntamente posibles; a cualquier persona le es posible leer o le es posible no leer. Por tanto $\Diamond p$ y $\Diamond\neg p$, no son contradictorias. La contradictoria de $\Diamond p$ es $\neg\Diamond p$. La negación no se obtiene negando el *dictum p*, sino negando el *modo* $\Diamond$.

La última de las cuestiones planteada por Haack ha quedado al parecer resuelta por Kripke [1982].[23] Él ha señalado que justamente esas son dos nociones diferentes, que no todas las verdades necesarias son *a priori* y no todas las verdades contingentes son *a posteriori.*

Comenzaremos caracterizando las modalidades sintácticamente, pues esto fue, después de todo, como históricamente sucedió.[24] Pero antes anotemos qué clase de lógica es la lógica modal. La lógica modal ya no es una lógica clásica, sino una extensión[25] de ésta:

> Extensiones de la lógica clásica [Modal, Epistémica, Erotética, ...] son sistemas formales, los cuales extienden el sistema de la lógica clásica (Lc) en tres respectos: su lenguaje, axiomas y reglas de inferencia ($Lc \subseteq Le$, $Ac \subseteq Ae$, $Rc \subseteq Re$). Esos sistemas preservan todas las fórmulas válidas de los sistemas clásicos, y entonces todas las fórmulas válidas previas permanecen válidas también. Así, por ejemplo, la lógica modal extiende los sistemas clásicos por los operadores modales de necesidad y posibilidad junto con sus axiomas y reglas. [Aliseda 2006, 58]

La lógica modal adiciona al vocabulario de la lógica clásica los operadores monádicos ◊ y □, que se leen como 'posible' y 'necesariamente.' Otra de las lógicas extendidas, es la lógica epistémica la cual adiciona el operador 'K' que se lee como 'saber'. Considerando algunos sistemas de lógica modal y su semántica entenderemos por qué resulta adecuada la determinación que se hace de ésta como extensión de la lógica clásica.

a) Lógica modal mínima K

Si añadimos a los axiomas, reglas de inferencia y lenguaje de la lógica clásica la noción 'p es demostrable', simbolizada como *Bp*, junto con los tres axiomas siguientes:

1. $Bp \to p$
2. $Bp \to (B(p \to q) \to Bq)$
3. $Bp \to BBp$

23. Véase, en especial la primer conferencia. 'El agua es H_2O', es para Kripke un enunciado necesario, pero la manera en que adquirimos ese conocimiento es *a posteriori.* El caso de un enunciado *a priori* y contingente es más polémico; para ilustrarlo, Kripke recurre al ejemplo de Wittgenstein sobre el 'metro patrón de Paris': Sabemos *a priori* que un metro mide un metro, pero ¿es necesario que el metro de Paris mida lo que mide?
24. La primera axiomatización de la lógica proposicional modal fue dada por Lewis en 1918 y la extensión a la lógica de predicados, por Marcus en 1946; pero no fue hasta 1963 que Kripke propuso una semántica apropiada para la lógica modal.
25. En el inicio de la siguiente sección se explica la razón de llamar a estas lógicas 'extensiones' de la lógica clásica. La cuestión tiene que ver con una práctica iniciada por Gödel.

Lo que obtenemos es el sistema axiomático Σ que Gödel [1933] construyó para interpretar la lógica conectiva de Heyting. Gödel afirmó que "el sistema Σ es equivalente al sistema de implicación estricta de Lewis, si *Bp* se traduce por $\Box p$ y si el sistema de Lewis se complementa con el siguiente axioma de Becker: $\Box p \rightarrow \Box\Box p$" [Gödel 1933, 139]. Esta práctica gödeliana de construir sistemas modales como extensiones de la lógica clásica terminó por imponerse dentro de la tradición lógica. Está es la razón por la cual prácticamente todo sistema de la lógica modal se define como una extensión de la lógica clásica. De acuerdo a lo anterior, definimos el sistema K, que es el sistema mínimo de lógica modal, de la siguiente manera:

a. Todas las tautologías proposicionales,
b. La definición de $\Diamond\varphi \equiv_{def} \neg\Box\neg\varphi$
c. $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$,
R1. $\varphi, \varphi \rightarrow \psi / \psi$ *modus ponens*
R2. $\vdash \varphi / \Box\varphi$ *necesitación* o regla de Gödel

Como K es una extensión de la lógica clásica, entonces, incluye todos los teoremas de la lógica clásica proposicional,[26] esto es lo que expresa (a). La definición de necesidad en términos de posibilidad, (b), nos permite traducir las nociones de manera que podamos considerar a alguna de ellas como primitiva. En el inciso (c), tenemos un axioma que nos dice que una proposición implicada necesariamente por una proposición necesaria es ella misma necesaria. La regla de necesitación nos permite pasar de la afirmación 'φ es un teorema, o axioma de la lógica clásica,' a '$\Box\varphi$,' es decir, 'φ es una proposición necesaria.'

Más allá de *K*, las opiniones han divergido sobre los supuestos razonables a considerar para hacer un uso práctico de las modalidades. Usualmente estos han tomado la forma de 'principios de reducción,' relacionando una modalidad a otra [van Benthem 1988, 14].

Si le anexamos a *K* los siguientes axiomas, tendremos como resultado el sistema S4 de Lewis:

S4.1 $\Box\varphi \rightarrow \varphi$
S4.2 $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$

S4.1 afirma que toda proposición necesaria es una proposición verdadera, mientras que S4.2 afirma que toda proposición necesaria es necesa-

26. El desarrollo de sistemas de lógica modal cuantificada constituye la segunda etapa del desarrollo de la lógica modal contemporánea. En la lógica modal cuantificada se combinan los operadores modales con los cuantificadores universal y existencial ($\forall, \exists$).

riamente necesaria. De estos axiomas se puede deducir que no es el caso que una proposición sea necesaria y falsa al mismo tiempo: $\neg(\Box A \wedge \neg A)$.

Si añadimos a *K* el siguiente axioma, en lugar del anterior, obtendremos lo que se conoce como el sistema brouweriano:

$$\text{B.1 } \varphi \rightarrow \Box\Diamond \varphi.$$

Este axioma se denomina brouweriano porque es equivalente a una fórmula válida dentro del sistema de lógica intuicionista de Brouwer:[27] $A \rightarrow \neg\neg A$. La conversa de esta fórmula, $\neg\neg A \rightarrow A$, no es válida dentro del sistema de Brouwer. Interpretemos la negación intuicionista de la primera fórmula como 'no es posible que' para obtener: $A \rightarrow \neg\Diamond\neg\Diamond A$. Esta última fórmula, por (c), equivale a:

$$A \rightarrow \Box\Diamond A.$$

Si añadimos el siguiente axioma a S4, entonces obtendremos el sistema S5 de Lewis:

$$\text{S5.1 } \Diamond\Box \varphi \rightarrow \varphi$$

b) Semántica de la lógica modal

Como antes, nuestro lenguaje básico es el de la lógica de primer orden, enriquecida con los operadores modales ◊ y □. La estructura semántica para el caso proposicional, es:

$$M = \langle W, R, V\rangle,$$

Donde *W* es un conjunto de mundos posibles, *R* una relación de accesibilidad entre los mundos de *W*, y *V* una valuación sobre los mundos de W. Para ilustrar esto:

> Un simple ejemplo es el tablero de ajedrez: Los mundos son todas las posibles configuraciones de piezas sobre el tablero; en cualquiera de ellas, los mundos accesibles son aquellos que pueden ser aún obtenidos por subsecuentes jugadas con las reglas del juego [van Benthem 1988, 15].

De acuerdo con esto, *R* impone ciertas restricciones sobre nuestras opciones modales, tales como la relación 'menor o igual que' lo hace

27. La fórmula $\neg\neg A \rightarrow A$ no es derivable en el cálculo intuicionista; $\neg\neg A$ significa en la lógica intuicionista que si suponemos que *A* es falsa, entonces ello lleva a una contradicción. Sin embargo, el no tener certeza de refutar *A* no es suficiente para afirmar *A*. La fórmula conversa, $A \rightarrow \neg\neg A$, si es derivable en la lógica intuicionista: Una demostración de *A* es una demostración de que *A* es imposible de ser refutada. En el cálculo intuicionista la introducción de la doble negación es válida; la eliminación de la doble negación es inválida.

para el tiempo en la lógica temporal, o para el orden numérico en la recta real. De acuerdo a lo anterior, las cláusulas cruciales en la definición de verdad para nuestra semántica son [van Benthem 1988, 15]:

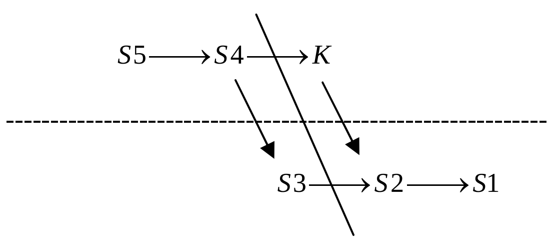
$M \models \Box \varphi[w]$ si y sólo si para todo v con Rwv, $M \models \varphi [v]$

$M \models \Diamond \varphi[w]$ si y sólo si para algún v con Rwv, $M \models \varphi [v]$.

La primera cláusula, donde *w* y *v* son mundos y R*wv* significa que *w* está relacionado con *v*, retoma la idea de verdad necesaria como verdad en todos los mundos posibles. Esta idea de necesidad, como verdad en todos los mundos posibles, de acuerdo con van Benthem [1988a, 15], tiene una prehistoria conceptual que viene de Leibniz.

c) Relaciones entre los sistemas modales

S5 es el sistema más fuerte de lógica modal en el sentido de que éste incluye todos los teoremas y axiomas de los sistemas más débiles. El siguiente esquema de Hughes y Cresswell [1968, 211] representa la relación de S5 con otros sistemas de lógica modal:



La relación $A \rightarrow B$, significa que todo teorema de *B* es también un teorema de *A* (pero no a la inversa). S5, S4 y K están por arriba de la línea horizontal, eso significa que poseen la regla de necesitación de Gödel; los sistemas que aparecen a la izquierda de la diagonal poseen un número finito de modalidades distintas.

La proliferación de sistemas modales nos orilla a decidir entre alguno de ellos, esto origina la cuestión de saber cuál elegir, es decir, cuál de ellos es el más adecuado para capturar la noción de posibilidad que en un momento dado consideremos [Haack 1975, 178]. Para ello, es necesario saber antes que noción de necesidad y posibilidad se está estudiando. De acuerdo con Haack [1975, 178], Lemmon argumentó que cada sistema modal puede ser visto como formalizando una idea diferente de necesidad (o posibilidad): si lo que se entiende por necesidad es demostrabilidad, entonces S4 es el sistema adecuado; la nocion de necesidad como tautologicidad o como analiticidad es capturada por S5. Esto nos sugiere que los distintos sistemas modales no necesariamente son rivales.

La inspiración filosófica para el desarrollo de la lógica modal, de acuerdo con van Benthem [1988, 14], tiene tanto inspiraciones locales —análisis de argumentos modales particulares provenientes de la tradición— como más globales: "intentar (re)construir puntos de vista filosóficamente coherentes de la modalidad". Esto es una razón más por la cual las nociones de necesidad y posibilidad que encierran cada uno de esos sistemas deben ser previamente aclaradas. Gabbay [2003, 3] afirma que aunque los sistemas de Lewis llegaron a ser célebres dentro de la lógica modal, él nunca se preocupó por clarificar lo que entendió por necesidad y posibilidad. Por su parte, Chihara [1998, 7] escribe que hay muchos sistemas de lógica modal, pero "el tipo de sistema que es generalmente aceptado como la formalización correcta de los rasgos lógicos de la necesidad lógica es S5".

3.2 Todas las posibilidades

Si hacemos un recuento de toda la clase de nociones de posibilidad que las tradiciones científica y filosófica han considerado, inmediatamente caeremos en la cuenta de que se han considerado muchas más de las que uno puede a primera vista distinguir. Una lista de diferentes concepciones de posibilidad que rebasa la concepción tradicional[28] es la que aparece en Hacking [1975, 321]. Ahí encontramos el siguiente recuento de posibilidades: lógica, física, *de re*, *de dicto*, epistémica, técnica, humana, teórica, económica, metafísica. En otros autores [Rinaldi 1967, 83] encontramos términos como 'posibilidad lógicamente empírica' y 'posibilidad real' [Deutsch 1990, 751]. Ahora bien, al vernos frente a una lista tan variada de nociones de posibilidad, debemos contar con un buen criterio para distinguir entre ellas.

El criterio de Hacking, a explicar en breve, consiste de un simple método gramatical, y es considerado por su autor como el único medio con que contamos para auxiliarnos en la tarea de colocar a cada una de las posibilidades en su lugar [Hacking 1975, 321]. Otra de las virtudes que Hacking destaca de su método es que permite dirimir la vieja disputa entre las posibilidades *de re* y *de dicto*. En opinión de Hacking, la gramática termina con una vieja controversia, porque la definición de la

28. La cual sólo considera tres posibilidades: lógica, empírica y metafísica.

posibilidad *de re* es referencialmente transparente,[29] y los problemas de opacidad que se originan en las construcciones *de dicto*, no tienen nada que ver con modalidad [Hacking 1975, 321].

Veamos entonces en qué consiste el método gramatical. En su intento de distinguir dos clases de posibilidad, Hacking señala que hay dos construcciones gramaticales en donde ocurre 'posible' de manera natural y gramaticalmente correcta:

L: Es posible que *p*
M: Es posible para $A \rightarrow x$ [30]

Para la primera ocurrencia, Hacking llama la atención sobre *p*, la cual será sustituida por sentencias en modo indicativo y de ningún otro tipo; las ocurrencias de oraciones en subjuntivo, imperativas e interrogativas se excluyen.[31] En el caso de la segunda ocurrencia de 'posible', la representación $A \rightarrow x$ lo único que pretende capturar es el caso de un agente realizando una acción en indicativo, por ejemplo 'Atenea llega en bicicleta a la Facultad de Ciencias en pocos minutos.' Si tenemos la *M* construcción, $\Diamond A \rightarrow x$, entonces la fórmula se traduce como: 'es posible para Atenea llegar en bicicleta a su Facultad en pocos minutos.'

Intuitivamente, un poco de conocimiento de la lógica modal nos indica que *L* implica *M*, pero que no es el caso que *M* implique *L*; es

29. La elaboración de sistemas de lógica modal cuantificada también provocó un fuerte ataque a la empresa por lógicos de orientación extensionalista. La lógica modal se caracteriza por ser intensional, es decir, en ella no rige el principio de extensionalidad según el cual el valor de verdad de una oración compuesta está determinado por el valor de verdad de las oraciones componentes. Ni siquiera en el caso de las proposiciones atómicas se conserva tal principio extensional, ya que si tenemos la proposición modal $\Diamond p$, ésta puede ser verdadera tanto si *p* es falsa como si *p* es verdadera. En términos de la semántica de la lógica modal contemporánea: "Una fórmula $\neg\Phi$, por ejemplo, recibirá el valor de verdad 1 en un contexto dado sólo en el caso de que la fórmula Φ reciba el valor de verdad 0 en ese contexto. De hecho, el conjunto *k* de todos los contextos sólo interviene cuando empezamos a evaluar oraciones de la forma $\Theta\Phi$ en un contexto dado *k*. Para la verdad de una determinada fórmula *k* se hace que dependa de la verdad de Φ, no únicamente en el mismo contexto k' pero también en otros contextos *k*' en K. Esto es lo que hace el sistema intensional" [Gamut 1991, 17].

30. $A \rightarrow x$, simboliza: 'el agente *A* realiza la acción *x*', es decir, *x* es un verbo transitivo en indicativo. *L* es una construcción lógica, el operador tiene como alcance una proposición; mientras que *M* es una construcción moral, aquí las acciones del agente son el alcance del operador.

31. Es natural que las interrogaciones y las oraciones imperativas se excluyan, pues ellas no son veritativo funcionales. El caso de las oraciones en subjuntivo es dramáticamente diferente, pues dado su carácter hipotético, en cierto sentido tienen implícito cierto grado de modalidad. De ahí el rechazo de Hacking a tratar las oraciones en subjuntivo como instancias de *p* en la *L* construcción. Una consideración de otro orden, es que si formalizamos esa oración, nos aparecerán operadores modales iterados, lo cual presenta dificultades en ciertos sistemas de lógica modal, en particular aquellos sistemas donde $\Box\Box p \rightarrow$ p ó $\Box\Box p \rightarrow \Box p$ no sean teoremas.

decir, las modalidades *de re/ de dicto*,[32] implícitas en esas construcciones, no son equivalentes; aunque la primera pueda implicar la segunda, la segunda no implica la primera. La cuestión de fondo tiene que ver con la fórmula Barcan (BF), la cual afirma que la *L* construcción implica la *M* construcción:

$$[\mathrm{BF}]\ (x)\Box Fx \rightarrow \Box(x)Fx$$

y su conversa (CBF), donde la *M* construcción implica la *L* construcción:

$$[\mathrm{CBF}]\ \Box(x)Fx \rightarrow (x)\Box Fx$$

La fórmula Barcan es discutible. Del supuesto de que es posible que algo no tenga la propiedad *F*, no se sigue que existe algo que posiblemente no tiene la propiedad *F*, y la fórmula Barcan afirma justo eso:

$$\Diamond(\exists x)\neg Fx \rightarrow (\exists x)\Diamond\neg Fx$$

Una semántica adecuada de la lógica modal debe garantizar que la fórmula Barcan no sea un teorema del sistema.

Hay una sutileza más que no queremos dejar de lado, y es que hay más de dos interpretaciones de [BF]. Veamos el siguiente ejemplo de van Benthem [1988, 14] que hemos adaptado: "Los matemáticos son [posiblemente] racionales, pero no necesariamente bípedos". Ahora pongamos atención en la primera aserción y vemos como ésta tiene tres lecturas distintas:

(a) $\forall x(\mathit{matemático}(x) \rightarrow \Diamond \mathit{racional}(x))$
(b) $\Diamond\forall x(\mathit{matemático}(x) \rightarrow \mathit{racional}(x))$
(c) $\forall x\Diamond(\mathit{matemático}(x) \rightarrow \mathit{racional}(x))$ [van Benthem 1988, 15]

El ejemplo (a) adscribe la posibilidad de ser racional a un matemático, lo cual coincide con la modalidad *de re*. El ejemplo (b) es la modalidad *de dicto* y corresponde a la proposición de que los matemáticos son racionales es posible; mientras que (c) es una interpretación intermedia que puede resultar ambigua. Ejemplos como éste nos orillan a conside-

32. En las *Refutaciones sofísticas*, Aristóteles se preguntó si es siempre contradictorio decir que un hombre es capaz de escribir mientras no esté escribiendo. Aristóteles se percató de que hay dos interpretaciones posibles de la modalidad y que la respuesta depende de cuál sea la que consideremos. Si ese enunciado se interpreta en el sentido de composición −es decir, como en la oración 'un hombre es capaz de escribir mientras-no-está-escribiendo'− el enunciado comporta una modalidad *de dicto*. Se afirma que la oración 'un hombre que no está escribiendo es capaz de escribir' es posible. Interpretada en sentido de división, 'un hombre que no está escribiendo es-capaz-de-escribir', comporta una modalidad *de re*: Se afirma que la propiedad modal 'ser-capaz-de-escribir' se aplica a cierta cosa.

rar la necesidad de un formalismo en el que suficientes formas sintácticas justifiquen las diferentes lecturas del operador de posibilidad.

Sin embargo, Hacking establece la distinción *de re/ de dicto*, a partir de consideraciones como la siguiente: *L* toma la operación booleana usual mientras *M* no lo hace. El ejemplo de Hacking para ilustrar esto es el siguiente: ‘Es posible que Hecuba ría y que Hecuba llore’ es una construcción gramaticalmente apropiada (es una ocurrencia *L*, es decir *de dicto*); pero ‘es posible para Hecuba llorar y reír,’ no es una construcción *L*, ni *M*. Es ambiguo el alcance del operador y si se afirmara que es una ocurrencia *M*, no es claro si Hecuba es capaz de ambas cosas al mismo tiempo [Hacking 1975, 323].

De esta manera, el método de Hacking indica cuando una construcción arbitraria en la cual hay una ocurrencia de la palabra ‘posible’ está relacionada directamente con una *L* o *M* ocurrencia, o ambas:

> En adición a los ejemplos citados, nótese que ‘probable’ puede remplazar a *posible* en *L*, y ‘permisible’ contrasta característicamente en *M* ... para cualquier construcción gramatical en la cual la palabra ‘posible’ ocurre, hay sólo tres casos. 1) Sólo ‘probable’ encaja. 2) Sólo ‘permisible’ encaja; y 3) ambas encajan [Hacking 1975, 324].

Hacking piensa que cuando ninguno de ellos se ajusta, es porque ‘posible’ está precedido por un adverbio cuyo sentido excluye ambas palabras, entonces, para clasificar la ocurrencia de ‘posible’ es necesario suprimir el adverbio. De acuerdo con la cita anterior, si se da (a), entonces la construcción es una ocurrencia *L*; si se da (b), entonces tenemos un caso de *M* ocurrencia; si (b) es el caso, entonces tenemos una ambigüedad gramatical.

Asumamos que el anterior es un criterio suficiente para la distinción entre posible *de re* y *de dicto* y veamos que es lo característico de cada una de esas posibilidades.

3.3 Posibilidad epistémica y lo lógicamente posible

Hemos visto que de acuerdo al criterio de Hacking, las *L* ocurrencias de posible son *de dicto*, mientras que las *M* ocurrencias son *de re*. Hay, sin embargo, otro rasgo de las posibilidades que es importante destacar, a saber, su carácter epistémico: “Decir que es posible que tal y tal, es decir que tal y tal es consistente con todo nuestro conocimiento” [Hacking 1975, 325]. En el artículo que referimos, Hacking afirma que la *M* posibilidad es inmensamente más importante que la mera posibilidad epistémica. Pero para poder ver la diferencia entre la posibilidad epistémica y la posibilidad en la *M* ocurrencia, debemos considerar lo siguiente:

> La *M* ocurrencia de posible puede ser modificada por muchos adverbios de la forma Φ-mente: técnicamente, económicamente, médicamente, metafísicamente, humanamente. Sin embargo, es importante que la Φ tienda a una disciplina académica [Hacking 1975, 325].

La razón por la cual Hacking exige que la Φ tienda a ser una disciplina académica está en que de esa manera evita compromisos con términos tales como 'perfectamente posible' o 'idealmente posible'. Los adverbios 'disciplinarios' a los que hace alusión Hacking tienen su par con algún adjetivo Φ, el cual debe ajustarse fácilmente dentro de cualquier esquema explicativo de la posibilidad. En otras palabras, si es Φ-mente posible para $A \rightarrow x$, entonces *A* tiene una cierta habilidad o poder Φ para realizar *x*. Pero cuando decimos que es teóricamente posible vivir en Marte no es muy claro que significa ese 'poder o habilidad teórica.' Sin embargo 'una habilidad metafísica' puede ser un sin sentido para Hacking [1975, 325].

Hacking observa que si procedemos positivamente, como hasta ahora, esto nos conduce a considerar las posibilidades como poderes en las cosas o los agentes. La vía negativa le parece más fructífera:

> Es imposible para $A \rightarrow x$ si algo previene a *A* absolutamente de realizar *x*. Es posible para *A* realizar *x* si nada absolutamente previene a *A* de realizar *x*. *Es Φ-mente posible para A realizar x si no hay nada, de suerte que Φ prevenga absolutamente a A de realizar x* [Hacking 1975, 326].

Esta estrategia resulta ser un antídoto contra el punto de vista común que considera a las posibilidades como poderes de las cosas y los agentes. De esta manera queda establecido que la posibilidad epistémica es *L* posibilidad, es una posibilidad *de dicto* y el *dictum* es objeto de creencia o conocimiento. Mientras que la técnica, humana, económica, médica y toda esa suerte de posibilidades[33] son especies de *M* posibilidad, es decir son capacidades de un agente para realizar acciones dentro de un contexto dado, son posibilidades *de re*.

Lo que el análisis de Hacking muestra es que la posibilidad lógica es en última instancia una posibilidad *de re*.[34] En el recuento de lo Φ-mente posible para Hacking, es lógicamente posible para $A \rightarrow x$ si no

33. Esta caracterización excluye adverbios como 'afortunadamente' o 'perfectamente,' los cuales no son disciplinarios y contraen ambigüedades indeseables que ahora queremos evitar.
34. Cuando Hacking llegó a esa conclusión, pensó que nadie creería en ella, pero entonces apareció una publicación de Kripke, *El nombrar y la necesidad*, que cambió la percepción de las cosas. Hacking piensa que a partir de esa publicación, ya podemos contar con una explicación viable de las modalidades lógicas *de re*, sobre las cuales sin embargo, no profundizaremos ya que nos desviarían de nuestro objetivo central.

hay nada de una suerte lógica que prevenga absolutamente a *A* de llevar a cabo *x*.

En este punto la pregunta obligada es la siguiente: ¿qué hay sobre la posibilidad lógica *de dicto*? Hacking [1875, 325] sostiene que debemos rechazar cualquier concepto de posibilidad lógica *de dicto*. Estamos claramente en libertad de decir de un enunciado, el cual no implica una contradicción, que es lógicamente posible y también somos libres de afirmar el enunciado 'es lógicamente posible que p' en el modo indicativo, para expresar ese hecho. Sin embargo, no siempre es sencillo establecer que *p* no implica una contradicción lógica o que *p* implica una contradicción lógica. ¿Cuál será entonces el motivo por el cuál Hacking rechaza la posibilidad lógica *de dicto*? Los lógicos [*e.g.*, Hacking 1967, 143] tradicionalmente han defendido que 'cualquier cosa que no es lógicamente imposible es lógicamente posible; algo que es lógicamente posible pero no lógicamente necesario es contingente'. De esto se sigue que la posibilidad lógica puede entonces ser subdividida, pues "algunos estados de cosas lógicamente posibles son causalmente posibles —esto es, compatibles con las leyes regulativas del universo" [*Ibid.*]. Sin embargo, esas elegantes subdivisiones van inevitablemente acompañadas por la imagen que heredamos de Leibniz sobre los mundos posibles:

> Lo necesario se obtiene en cada mundo posible, mientras que lo lógicamente imposible no se encuentra en ninguno; lo lógicamente posible se satisface en algún mundo posible. Es bien conocido como esta familia de nociones se mueve en círculos [Hacking 1967, 144].

Lo anterior muestra que las nociones modales no son ociosas. Éstas se puede circunscribir por axiomas. Esa parece ser una condición necesaria para la aplicación de 'lógicamente posible.' Si algo no pudiera haber sido, entonces no sería lógicamente posible. Pensemos en una equivalencia que se ha citado tradicionalmente: una proposición falsa es lógicamente posible si ésta pudiera haber sido verdadera.[35]

Resumiendo: La noción epistémica de la posibilidad es la noción más sencilla de intuir dado que lo que es posible epistémicamente no entra en conflicto con nuestro conocimiento. La posibilidad lógica es la noción más difícil de explicar y, sin embargo, es la más frecuente en

35. De esta manera encontramos que lo lógicamente posible, no siempre es posible, es decir, Russell estaría de acuerdo en que una proposición falsa es posible si ésta pudiera haber sido verdadera; pero al parecer rechazó las ideas de posibilidad y necesidad lógica parcialmente, porque al parecer no hay proposición verdadera de la cual no haga sentido decir que podría haber sido falsa, y no parece haber proposición falsa de la cual no se pueda decir con sentido que podría haber sido verdadera.

nuestro discurso científico y filosófico. Otra forma de posibilidad, la posibilidad física, se puede entender en términos de la posibilidad lógica: es una verdad 'físicamente' necesaria, aquella que físicamente no puede ser de otra manera.

La lógica modal se creó teniendo en mente las modalidades lógicas, por eso es que ahora sólo mencionamos la posibilidad física. Tener una noción clara de la posibilidad física supone tener en mente que lo físicamente posible no debe estar en conflicto con las verdades de la física. En palabras de Peirce: "La necesidad y posibilidad *lógica* presuponen sólo 'el entendimiento de los distintos significados de las palabras,' las modalidades *físicas* 'sólo que el conocimiento de ciertos principios de la física no se excluyan'" [Niiniluoto 1988, 304].

4. Posibilidad y teoría de las probabilidades

4.1 Posibilidad en la teoría clásica de las probabilidades

La definición clásica de la teoría de las probabilidades hace uso explícito de una noción de posibilidad. Al respecto, Hacking [1975, 152] se pregunta: "¿cómo pudo una definición tan monstruosa haber tenido tanta viabilidad?", pues esta definición sólo es defendible si se argumenta suficientemente la imposibilidad de dar una definición no circular. Sin embargo, la definición clásica de las probabilidades es considerada una definición matemática. Pero, a pesar de considerar a la definición clásica de la probabilidad como meramente matemática, no deja de surgir ante nosotros:

> la dualidad esencial de la probabilidad, que es tanto epistémica como aleatoria. Las probabilidades aleatorias tienen que ver con el estado físico de las monedas o con los humanos mortales. Las probabilidades epistémicas se vinculan con nuestro conocimiento [Hacking 1975, 153].

La primera definición de probabilidad que apareció en la historia de la matemática se encontró en la correspondencia entre Pascal y Fermat en el siglo XVII, y fue inmediatamente relacionada con un concepto aleatorio y otro epistemológico:

> La probabilidad estaba evolucionando como algo conjuntamente físico y epistemológico. La posibilidad ya era dual de un modo similar (aunque no idéntico). La definición de probabilidad en términos de posibilidad no es un capricho histórico sino un rasgo bastante esencial en el desarrollo de ambos conceptos [Hacking 1975, 153].

Después de esto, no es de sorprender que el concepto epistemológico de probabilidad se haga corresponder con el concepto epistémico de posibilidad, mientras que el concepto aleatorio de probabilidad se hizo corresponder con un concepto de posibilidad física.[36]

Sin embargo, esas dos interpretaciones de la teoría de las probabilidades no fueron distinguidas en una forma clara y sistemática, dados los problemas que implica establecer de manera convincente la distinción entre las dos nociones de posibilidad que ahí se encuentran explícitas. Esto explica por qué los teóricos de las probabilidades en el siglo XVIII, incluyendo a Laplace, titubearon entre las interpretaciones física y epistemológica de la equiposibilidad [Niiniluoto 1988, 278]. De acuerdo a lo anterior, lo que realmente hicieron Laplace y sus seguidores fue concluir a partir del determinismo un punto de vista epistemológico de la probabilidad.

El rasgo sobresaliente de la teoría de las probabilidades clásica es la inmediata y explícita asociación de probabilidad con posibilidad. Leibniz afirmó que probabilidad es un grado de posibilidad, igualando entonces probabilidad con grados de posibilidad [Niiniluoto 1988, 278]. Pero la definición clásica de probabilidad va más allá, puesto que también sugiere que la teoría de las probabilidades es de hecho explicable a partir de una teoría que dé cuenta de las modalidades, es decir, a una lógica modal. Sin embargo, fue la inversa la que sedujo a los lógicos del siglo XIX: Si las nociones de necesidad y posibilidad no son primitivas, entonces una noción matemática de probabilidad puede muy bien ayudar a definirlas. El mismo Boole sugirió que la teoría de las proposiciones hipotéticas podría ser tratada como una parte de la teoría de las probabilidades; en sus *Leyes del pensamiento* dedicó muchas páginas a la aplicación de su nueva álgebra a las probabilidades:

> Otra interpretación del cálculo de acuerdo a la cual la letra establecida para la probabilidad de la proposición X en relación a toda la información disponible, digamos K. Adaptando y simplificando el simbolismo de Boole tenemos: $\mathrm{Prob}_K(X \text{ y } Y) = xy$ si X e Y son independientes dado K, y $\mathrm{Prob}_K(X \text{ ó } Y) = x + y$, si X e Y son mutuamente excluyentes [Kneale y Kneale 1962, 414].

Esta interpretación claramente no satisface el principio mediante el cual Boole transformó su álgebra en un sistema bivalente: 'o bien $x = 0$, o bien $x = 1$'. En el caso de las probabilidades no podemos sostener que toda probabilidad es 'o bien Prob(X) = 0, ó bien Prob(X) =1.' De esta forma se pensó que las probabilidades filosóficas no podrían ser cuantitativas. Lo determinante en esta disputa fue que:

36. Si Hacking tiene razón, entonces el lado aleatorio de la probabilidad se puede poner en correspondencia con la posibilidad *de re*, puesto que ésta tiene que ver con las características físicas de las cosas; mientras que, por otro lado, el aspecto epistémico de la probabilidad se hace corresponder con la posibilidad *de dicto*. En otras palabras, se puede poner en correspondencia con lo que sabemos y se puede expresar por proposiciones (*dictum*).

> Para aquellos filósofos que no estuvieron satisfechos con el estado de la teoría de la modalidad, la reducción de la probabilidad a posibilidad no pudo parecer del todo atrayente. El cálculo de probabilidades tuvo una estructura matemática claramente formulada y bien entendida, mientras que la silogística modal había caído no en "negligencia, sino en desprecio" [Niiniluoto 1988, 279].

Las razones de ese desprecio se han esbozado en la introducción, y se pueden encontrar en la obra de los lógicos más prominentes de fines del siglo XIX y principios del XX. En particular destacamos el desdén que de la modalidad hizo Frege [1879, 16] en su *Conceptografía:*

> Cuando designo una proposición como necesaria, con ello doy una indicación sobre mis fundamentos de juicio. Pero, puesto que con esto no se toca el contenido conceptual del juicio, la forma del juicio apodíctico no tiene para nosotros importancia alguna.

El rechazo de los lógicos por las cuestiones modales, llevó a plantearse otra alternativa, en apariencia mucho más prometedora, pero en muchos sentidos contra intuitiva: Reducir la lógica modal a la teoría de las probabilidades. Veamos que dice Niiniluoto [1988, 279] al respecto:

> Si podemos analizar las condiciones de verdad para enunciados probables sin emplear conceptos modales, entonces la *necesidad* puede ser definida por la *probabilidad uno*, la *imposibilidad* por la probabilidad *cero*, y la *posibilidad* por la probabilidad *no cero*.

Este planteamiento no parece apropiado para el caso de la definición clásica de las probabilidades. Se plantea que si nosotros podemos saber las condiciones de verdad de un enunciado *p*, el cual es un enunciado probabilística, sin recurrir a nociones modales, entonces estas nociones pueden ser definidas por la noción de probabilidad. Pero apelar a una noción modal para calcular un enunciado probabilística es ineludible, pues por definición, donde *p* simboliza la proposición "el evento ε ocurre":

$$P(\varepsilon) = \begin{cases} 0 \text{ si } \neg\Diamond p \\ 0 \leq P(\varepsilon) \leq 1 \text{ si } \Diamond p \\ 1 \text{ si } \neg\Diamond\neg p \end{cases}$$

La posibilidad o imposibilidad de nuestro enunciado es una condición necesaria para conocer su probabilidad, y es una noción presupuesta. Pero, ¿de qué posibilidad estamos hablando aquí?

En primer lugar, la relación de la posibilidad con la probabilidad clásica no es, como Hacking y otros quieren, una relación entre una probabilidad epistémica y una noción *de dicto* de la posibilidad. La manera correcta de apreciar esto, a nuestro parecer, es la siguiente: La noción de posibilidad que está explícita en la probabilidad clásica es una noción de la forma ‘es posible que *p*’ donde *p* es la proposición que hace referencia a nuestro evento ε. De acuerdo con las caracterizaciones de posibilidad expuestas anteriormente, ésta es una posibilidad epistémica, no una posibilidad lógica. De acuerdo al criterio que hemos expuesto, tampoco cabe una interpretación física de la posibilidad; para serlo debiera ser una posibilidad *de re*, pero ésta no es la noción que está inmersa en la definición clásica.

En segundo lugar, parece que la reducción de la modalidad a las probabilidades pasó por alto el hecho de que no todos los ámbitos de aplicación de las modalidades son accesibles a las probabilidades. En otras palabras, hoy nos es intuitivamente verdadero que todo lo probable es posible. Sin embargo, la inversa rara vez es el caso.

Hay otros aspectos de la definición clásica que dejaremos de lado, como por ejemplo el de la equiposibilidad. La razón de ello es que si bien contamos con criterios claros de distinción entre posibilidades, no es así para el caso de la identidad. Además, el problema de la identidad es en sí mismo un tema controvertido.[37]

37. De acuerdo con Aristóteles [1988, 103a6.] lo idéntico se dice de tres formas diferentes: Solemos dar la designación de *idéntico*, bien por el número, bien por la especie, bien por género. Estas manera de considerar la identidad pueden dar pauta a ambigüedades. El símbolo de identidad (=) es un símbolo de las matemáticas, cuyo significado forma parte del lenguaje cotidiano. En este sentido, viene a coincidir con algunos de los sentidos del verbo ‘ser,’ aunque no con los más comunes. “Todos los griegos *son* europeos” ejemplifica la inclusión de una clase en otra que ya aparece en la definición de Aristóteles, y ‘Sócrates *es* griego’ indica la pertenencia de un elemento o individuo a una clase. Éstas son relaciones inequívocas de una parte con el todo. Pero ‘todo triángulo es un polígono de tres lados’ y ‘Sócrates es el maestro de Platón’ son casos muy particulares; el último en especial viene a coincidir con la manera en que en este trabajo consideraríamos el signo ‘=’. Este sentido no dista mucho del que tiene en matemáticas y que se distingue del filosófico, por su precisión. Sin embargo, de acuerdo con Quine, a pesar de que la verdad lógica se ve amenazada por el predicado de identidad, ‘=’, ya que las verdades de la teoría de la identidad (‘$x = x$’, o ‘$\neg(x = y \wedge \neg(y = x))$’) no serían verdades lógicas, pues al sustituir ‘=’ por otros predicados éstas se falsean; a pesar de ello: “la teoría de la identidad parece más próxima a la lógica que a la matemática, por ejemplo, porque es, como la lógica pura, una teoría completa [...] En cambio, el más célebre de los teoremas de Gödel (1931) muestra que, por el contrario, la teoría elemental de los números no es susceptible de ningún procedimiento completo de demostración” [Quine 1970, p 112]. Sin embargo, Kripke [1972, 114] sostiene que: “Los enunciados de identidad deberían ser muy sencillos, pero de alguna manera resultan muy desconcertantes para los filósofos [...]. De manera que algunos filósofos, incluso Frege en una etapa temprana de sus escritos, han considerado que la identidad es una relación entre nombres. La identidad, dicen ellos, no es la relación entre un objeto y sí mismo, sino la relación que se da entre nombres cuando estos designan el mismo objeto” [Kripke1972, 114].

4.2 Posibilidad en la teoría frecuencialista de las probabilidades

Jacques Bernoulli demostró un famoso teorema en el cual muestra que la probabilidad tiene una interesante conexión con frecuencias relativas. Éste fue el primer paso en dirección a abandonar la definición leibniziana de probabilidades basada en casos equiposibles a favor de una definición en términos de frecuencias.

Si nosotros no estamos dispuestos a aplicar la definición clásica para asignar probabilidades a un evento, ya sea porque nuestros eventos no son equiposibles, ya sea porque no tenemos un conocimiento *a priori* de los casos favorables y de la totalidad de los casos posibles, Bernoulli sugirió que la manera de realizar esto es tratando de determinar a partir de los resultados observados en numerosos ensayos similares, aquel valor que no tenemos a priori. Este consejo de Bernoulli tuvo frutos:

> La interpretación frecuencialista de la probabilidad nació en 1843, cuando Robert Lesli Ellis, John Stuart Mill, y A.A. Cournot independientemente uno del otro concibieron esta prueba a posteriori de la probabilidad como siendo una definición válida a priori de probabilidad. Por ejemplo, decir que cara o cruz en una moneda arrojada son equiposibiles significa, en esta interpretación, que ellas ocurren con frecuencias iguales en grandes series de lanzamientos [Niiniluoto 1988, 292].

Aunque muchos autores reaccionaron en contra de la definición clásica, finalmente terminaron por adoptarla. Tal es el caso de Mill quien, a pesar de su definición de frecuencia en las últimas ediciones de su *Sistema de Lógica*, finalmente regresó a una interpretación epistémica Laplaciana de la misma:

> De todos modos en el cálculo de probabilidades es preciso recordar que entre todos los sucesos posibles uno, nada más, ocurrirá, y que no tenemos razón alguna para creer que será uno más bien que otro; se ha dicho que además se necesita, para realizar el cálculo de probabilidades, que estemos convencidos, ya inductiva, ya deductivamente, de que los diversos sucesos posibles son igualmente probables [Mill 1897, 169].

El de Mill no fue un caso aislado, pues de acuerdo con Niiniluoto [1988, 292], Boole también adoptó en *Las leyes del pensamiento* la definición clásica. Aunque Boole no tardó en considerar que la probabilidad había sido expresada de manera satisfactoria a partir del conocimiento de las frecuencias relativas de ocurrencias de eventos.[38] Los lógicos de la época recurrían a la teoría de las probabilidades, con la idea errónea de que ésta nada tenía que ver con modalidades.

38. La definición más satisfactoria de la probabilidad frecuencialista se la debemos a Venn. Uno de sus aciertos fue que llamó la atención sobre el fenómeno que aquí se trata de resaltar, a saber: Había un ámbito del razonamiento que las interpretaciones de las probabilidades habían venido a cubrir.

El propósito ahora es mostrar cómo este nuevo enfoque matemático de las probabilidades,[39] puede presuponer una noción modal si, de acuerdo con Peirce, nos encontramos ante una definición nominalista. Dice Niiniluoto [1988, 293] que:

> La definición de probabilidad de Venn es *extensional* más que *modal* en el sentido de que ésta se refiere sólo a un *mundo*. Este es el mundo externo de los hechos, indefinidamente continuo en las direcciones pasado y futuro en el tiempo.
>
> Al parecer, Peirce estuvo bien informado de la dificultad que origina asignar probabilidades objetivas a ciertas proposiciones cuando nos vemos en la necesidad de apelar a frecuencias relativas de mundos posibles. En realidad Peirce nunca aceptó la idea de Leibniz de que todo mundo posible tiene una propensión a ser real. Aunque en definitiva, el núcleo intuitivo de toda la semántica de lo lógica modal es la idea leibniziana de verdad necesaria como verdad en todo mundo posible.

En esta postura leibniziana, se comenzó a vislumbrar otra interpretación de la teoría de las probabilidades, que no es estrictamente matemática, y que por tal motivo no fue tomada en consideración en nuestro primer capítulo: La teoría propensitivista, en la cual:

> la probabilidad es una disposición numérica de un dispositivo físico o disposición para producir ciertas salidas en un solo ensayo. Los enunciados probabilísticos sobre tales tendencias disposicionales son corroborables a través de las consecuencias que ellos tienen sobre las frecuencias estadísticas a través de la ley de los grandes números (como el teorema de Bernoulli). La interpretación propensitivista, entonces, hace respetable la idea clásica de la probabilidad como un grado de posibilidad física [Niiniluoto 1988, 295].

El señalamiento a esta interpretación se hace con la intención de mostrar que la discusión sobre las modalidades no quedó del todo terminada con la definición frecuencialista, y si hay alguna relación entre los enfoques frecuencialista y el propensitivista, ésta es la asociación con alguna noción de posibilidad física. Sin embargo, esto no es sencillo de ver.

En autores como Cournot y Venn, la posibilidad epistémica asociada a la probabilidad clásica se encontraba en el olvido y superada, pero otra noción de posibilidad ocupa el lugar de la noción relegada en la nueva definición matemática de las probabilidades. Esta noción se encuentra a tono con la postura nominalista de los lógicos de la época, pero estos, al igual que los lógicos anteriores, no alcanzaron a ver la

39. El primer intento sistemático por desarrollar la interpretación de la probabilidad como frecuencias en series de eventos fue dado por John Venn en la *Lógica de probabilidades*, publicado en el año de 1866.

significación e importancia de esto. La siguiente cita de Niiniluoto [1988, 296. La cursiva es nuestra] es clarificadora al respecto:

> Entre los hechos físicos y las realidades con las cuales los sentidos tratan, es natural considerar cada evento como teniendo una fuerte tendencia a ocurrir, o *como siendo más posible en los hechos físicamente, en proporción a cómo éste es producido más frecuentemente en un número más grande de casos. La probabilidad matemática llega, entonces, al límite de la posibilidad física, y las dos expresiones pueden ser usadas equivalentemente* [Cournot 1956, 39-48].

La probabilidad frecuencialista, de acuerdo a nuestro análisis presupone la posibilidad física, es decir, una noción de posibilidad asociada a la definición de probabilidad persistió.

Todavía hace falta ver si alguna de nuestras nociones de posibilidad sobrevivió a la axiomatización de la teoría de las probabilidades. Antes de considerar la teoría axiomática, permítasenos presentar la prueba en la que Niiniluoto relaciona la probabilidad y el principio de plenitud. En primer lugar, Niiniluoto define la posibilidad así:

> Definición: El evento A es posible si y sólo si la probabilidad $P(A)$ de A no es cero.

Ahora bien, de lo que se trata es de saber qué interpretaciones de $P(A)$, clásica o frecuencialista, implican el principio de plenitud (Π):

> Principio Π: Si el evento A es posible, hay un tiempo t tal que A es realizado en t.

Niiniluoto [1988, 297] observa que una caracterización epistémica de la probabilidad no implica Π, y "que en el mejor de los casos un grado de creencia no cero en la ocurrencia de A garantiza que la oración 'A ocurre' no es autocontradictoria".

En segundo lugar, Niiniluoto destaca que la definición de frecuencia de Venn invariablemente lo compromete con el Principio de Plenitud.

> Sea $f(A,s_n)$ la frecuencia del evento A en una serie de tamaño n, donde s_n es una subsecuencia de una serie infinita s. Entonces, para Venn, la probabilidad de A relativa a s es
>
> $$P(A, s) = \lim_{n\to\infty} f(A,s_n)/n$$
>
> Asumiendo que $P(A, s) > 0$, se sigue que, para algún n, $f(A, s_n) > 0$, es decir, que A ocurre en la serie finita s_n [Niiniluoto 1988, 297] .

En otras palabras: si A ocurre en la serie finita s_n, A es físicamente posible. Aún hoy, resulta sorprendente que se olvide el carácter distintivo de la teoría frecuencialista: en principio nuestro experimento debe ser físicamente posible, esto es, un experimento realizable.

4.3 Posibilidad en la teoría axiomática de las probabilidades

En este momento nos encontramos ya en un ámbito en el cual la posibilidad epistémica y física no tienen relevancia alguna. Sin embargo, la manera como se asignan probabilidades en el espacio de probabilidades de la teoría axiomática viene restringida por otras nociones. En particular, nuestra tesis es que las posibilidades de ocurrencia de ciertos eventos compuestos están caracterizadas por la posibilidad lógica de tener tales eventos como subconjuntos del conjunto de los eventos elementales, esto es, del conjunto potencia. Para esto, consideremos primeramente la definición de conjunto potencia:

> Para cualquier X existe un conjunto $Y = P(X)$:
> $\forall X \exists Y \forall u \ (u \in Y \leftrightarrow u \subset X)$
> Un conjunto U es un subconjunto de X, $U \subset X$, si
> $\forall z \ (z \in U \rightarrow z \in X)$
> Si $U \subset X$ y $U \neq X$, entonces U es un subconjunto propio de X
> El conjunto de todos los subconjuntos de X,
> $P(X) = \{ u \colon u \subset X\}$
> Es llamado el conjunto potencia de X [Jech 2002, 9].

La definición de conjunto potencia muestra que la manera en que los eventos compuestos de un experimento se dan, no es arbitraria, ni está sujeta a condiciones físicas, ni a nuestro conocimiento. Contamos con una herramienta matemática poderosa que nos señala cuáles y cuántas son las posibilidades lógicas de la ocurrencia de tales eventos. Con el aparato axiomático nos encontramos en condiciones de saber cuándo tal evento compuesto tiene alguna posibilidad lógica de ocurrir dado cierto conjunto de eventos elementales. Las posibilidades de ocurrencia de los eventos compuestos están acotadas y están en relación con la cardinalidad del conjunto de eventos elementales. Esto es lo que llevó a Cantor a afirmar que:

> Cada conjunto *M* tiene una 'potencia' definida, la cual nosotros podemos llamar también su número cardinal. Llamaremos por el nombre potencia o número cardinal de *M* el concepto general que mediante nuestra facultad activa de pensamiento se origina a partir del conjunto *M* cuando nosotros hacemos abstracción de la naturaleza de sus varios elementos *m* y del orden en el cual ellos son dados [Cantor 1895, 86].

Para considerar las ocurrencias lógicas de los eventos elementales, debemos entonces abstraer la naturaleza de lo que estamos considerando, además del orden en que estos se manifiestan. Recordemos que

Kolmogorov dio una lectura ahora convencional de las nociones conjuntistas:

> Disyunciones de conjuntos se lee como eventos incompatibles, las intersecciones como realizaciones simultáneas de eventos, y complementos como la no ocurrencias de los eventos (conjuntos) complemento. El conjunto vacío es un evento imposible, mientras que todo el espacio es un evento necesario. La relación subconjunto $A \subset B$ dice que de la ocurrencia de A se sigue la ocurrencia de B [von Plato 1994, 226].

Pero hay una noción adicional en Kolmogorov: La de partición finita $A_1+A_2+...+A_n = E$ del espacio. En términos de la teoría de las probabilidades un experimento E_A consiste en determinar cuáles de los eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ ocurrirán. Pero, $A_1, A_2, ..., A_n$ son todos los posibles resultados de E_A. La teoría de Kolmogorov ignora el dominio de aplicación, es decir, el conjunto de los procesos aleatorios para los cuales se ha implementado el modelo; ignora también los procedimientos mediante los cuales los datos han sido obtenidos. La carencia de contenido de esta teoría le permite tener un campo amplio de aplicación que va desde la física hasta las teorías de la conducta [Fine 1973, 83]. Pero no provee guía alguna para la aplicación de las probabilidades ni un procedimiento para interpretar la naturaleza de los fenómenos aleatorios. Es decir, es una teoría abstracta en donde la única noción de posibilidad que vale, es la de posibilidad lógica.

5. Conclusiones

El éxito que logró alcanzar la definición frecuencialista se debió en gran medida a que parte de una sólida base experimental pero, sobre todo al hecho de que en tal definición no figuró más, aparentemente, el elemento extraño y extramatemático que aparece en la definición clásica. Lo anterior fue motivo de júbilo no sólo para los matemáticos del siglo XIX, sino también para los lógicos más sobresalientes de la época. Esto se puede constatar en el hecho de que todos los lógicos, con excepción de Peirce [Niiniluoto 1988, 276], recurrieron a las probabilidades para explicar los futuros contingentes ya que al parecer se encontraban en un terreno no meramente extensional. La lógica modal y la teoría de las probabilidades devienen entonces en programas rivales. Considerarlas como tales implica que una de ellas da cuenta de ciertos fenómenos con mayor éxito que la otra. Sin embargo, a pesar de que la teoría de las probabilidades fue en un principio explicada en términos de posibilidad, ésta última noción quedó finalmente relegada por el programa frecuencialista, y así fue como cada uno de estos enfoques se distanció uno del otro.

Pero, como hemos mostrado, aún la nueva definición de probabilidad presupone una nueva noción de posibilidad, a saber: La noción de posibilidad física.

Con respecto a la definición axiomática de las probabilidades, señalamos que la pretensión de Kolmogorov con respecto a ella fue dar una definición de probabilidad que no estuviera basada en otros conceptos. Eso no es algo que nosotros pongamos en duda. Lo que cuestionamos es que aún cuando la noción de probabilidad ha sido definida en forma axiomática, hay un elemento constituyente de esta nueva definición que nosotros podemos caracterizar como una noción de posibilidad lógica. Es decir, nuestra herramienta matemática no sólo nos dice cuáles, sino además, cuántos eventos compuestos podemos tener a partir de ciertos eventos elementales. Ese número y esas combinaciones, como hemos mostrado, están caracterizadas por la noción de conjunto potencia. Posibilidad en la teoría axiomática de las probabilidades es potencialidad, es decir, ninguna posibilidad de ocurrencia de eventos compuestos va más allá de los eventos comprendidos en la potencia del conjunto.

Si tenemos razón, nos encontramos con que esas tres definiciones de probabilidad presuponen tres diferentes nociones de posibilidad. Entonces la noción de posibilidad no es reducible a la de probabilidad, por lo tanto, la noción de posibilidad es una noción primitiva. Pero sobre todo, una noción lógica.

Para Niiniluoto, lo que nos enseña el análisis de las posibilidades a partir de las probabilidades es que ciertos principios metafísicos como el de plenitud son falsos. Nuestra propuesta en este trabajo consiste en analizar, bajo una nueva luz, las nociones de probabilidad a partir de los marcos de la lógica modal. La investigación sobre la noción de posibilidad muestra que hay lugar para una definición de la probabilidad que no sea circular, pero, sobre todo, reivindica el área de la lógica que da cuenta de proposiciones que van más allá del ámbito meramente extensional.

Agradecimientos

El autor agradece la valiosa ayuda que le brindaron para la elaboración de este trabajo las discusiones con la Dra. Atocha Aliseda, en torno a las lógicas no clásicas, y con el Dr. Alejandro Garciadiego, en torno a todo aquello que guarda alguna relación con las matemáticas en los Seminarios de Filosofía e Historia de las Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Referencias

ALISEDA, Atocha. 2006. *Abductive Reasoning: Logical Investigations into Discovery and Explanation.* Synthese Library, Vol. 330. Springer-Kluwer Academic Publishers.

ARISTÓTELES. 1982. *Tratados de lógica*. (I Tomos). Madrid: Editorial Gredos.

______________. 1988. *Tratados de lógica*. (II Tomos). Madrid: Editorial Gredos, 1995

CHIHARA, Charles S. 1998. *The Worlds of Possibility: Modal realism and the semantics of modal logic*. Great Britain: Oxford.

COHEN, Jonathan. 1989. *The Philosophy of Induction and Probability*. Oxford: Claredon Press.

DEUTSCH, Harry. 1990. "Real possibility". *Noûs*, 24_5.

FINE, Terrence. 1973. *Theories of Probability.* USA: Academic Press.

FRAENKEL, Abraham. 1976. *Teoría de los conjuntos y lógica*. México: UNAM.

FREGE, Gottlob. 1879. *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Otros estudios filosóficos.* México: UNAM-IIF. 1972.

GABBAY, D. M. *et alt.* 2003. *Many-Dimensional modal logics: Theory and applications*, El Sevier, Studies In Logic and Foundations of Mathematics Vol. 148. The Netherlands.

GAMUT, L.T. F. 1991. *Logic, Language, and Meaning, volume II: Intensional Logic and Logic Grammar*. USA: The University of Chicago Press.

GARCÍA Álvarez Miguel Á. 2005. *Introducción a la teoría de la probabilidad.* Primer curso. México: FCE.

GILLIES, Donald. 2000. *Philosophical Theories of Probability*. N. Y.: Routledge.

GÖDEL, Kurt. 2006), *Obras completas.* Madrid: Alianza editorial.

HAACK, Susan. 1978. *Philosophy of Logics.* U.S.A.: Cambridge University Press.

HACKING, Ian. 1967. "Possibility" en *The Philosophical Review.* $\mathbf{76}_2$: 143-168.

_____________. 1975. *El surgimiento de la probabilidad.* Barcelona: Gedisa.

_____________. 1975. "All kinds of possibility". *The Philosophical Review.* $\mathbf{84}_3$: 321-337

_____________. 2001. *Probability and Inductive Logic.* USA: Cambridge University Press.

HEIJENOORT, Jean van. (editor). 1971. *From Frege to Gödel.* Mass: Harvard University Press, Cambridge.

HERNÁNDEZ, Marco Antonio. 2006. *Sobre las nociones de posibilidad en tres enfoques de la teoría de las probabilidades*, Tesis de Maestría. México: UNAM.

HUGHES, G. E. y M. J. Cresswell. 1968. *A new introduction to Modal Logic.* Great Britain: Routledge.

JECH, Thomas. 2002. *Set Theory*. Berlin-N.Y Springer. 3ª edición.

KANT, Immanuel. 1781. *Crítica de la razón pura*. Madrid: Alfaguara 1978.

KOLMOGOROV, A. N. 1933. *Foundations of Probability.* USA: Chelsea Publish. 1956.

KNEALE, William. 1949. *Probability and Induction*. Oxford at the Claredon Press.

KNEALE, William y Martha Kneale. 1962. *The development of Logic*, Oxford University Press.

KRIPKE, Saul. 1985. *El nombrar y la necesidad.* México: UNAM-IIF.

LAPLACE, Pierre Simon. 1814. *Ensayo sobre las probabilidades.* Argentina: Editorial Espasa Calpe. 1974.

ŁUKASIEWICZ, Jan. 1970. *Estudios de Lógica y Filosofía.* Madrid: Biblioteca de la Revista de Occidente.

LEWIS, C. I. 1918. *A Survey of Simbolic Logic.* Berkeley.

MILL, John Stuart. 1897. *Resumen sintético del sistema de lógico,* Ed. de la Vda. De Bouret, Paris.

NIINILUOTO, Ilkka. 1988. "From possibility to probability: British discussions on modality in the nineteenth century", en S. Knuuttila, (ed.). *Modern Modalitys*, 275-309. Kluwer Academic Publishers.

QUINE, W.V.O. 1956. *From a Logical point of view: nine Logico-Philosophical essays*. Mass: Harvard University Press,Cambridge. (2ª edi.) 2001.

______________. 1970. *Filosofía de la lógica*, 1973, Madrid: Alianza Universidad.

RINALDI, F. 1967. "Logical possibility" en *Philosophical and phenomenical Research.* **28**$_1$: 81-99.

SALMON, Wesley. 1984. *The Foundations of Scientific Inference.* University of Pittsburgh Press.

Van BENTHEM, Johan. 1988. *A manual of intensional logic.*, Ed. CSLI/Stanford, 2ª edición.

von PLATO, Jan;. 1994. *Creating Modern Probability.* USA: Cambridge University Press.

WHITEHEAD, Alfred North y Bertrand Russell. 1910. *Principia Mathematica to *56*; United Kingdom: Cambridge Mathematical Library 1999.