Mathesis **III 4_2** (2009) 415 - 430.

Particiones, probabilidad y combinaciones en *Sopra le scoperti dei dadi* de Galileo Galilei

*César Guevara Bravo**
Abel García Gutiérrez

Introducción

El objetivo es presentar el trabajo de Galileo Galilei *Sopra le scoperti dei dadi*[1] en una versión facsimilar junto con su traducción al español. Para poner en contexto la aportación de Galileo se exponen dos trabajos previos, uno del siglo XIII y otro del XVI.

Antecedentes

No es extraño encontrar que algunos paradigmas de la ciencia hayan tenido su punto de partida sobre terrenos totalmente especulativos, azarosos o filosóficos, y que al agregarles elementos extraídos de lo experimental pueden transformarse en representaciones más cercanas de lo que concebimos como un modelo científico.

Una disciplina que emergió con estas características es la teoría de la probabilidad, y junto con ella se generó la necesidad de crear formas de conteo y de representación de enteros positivos como suma de otros enteros positivos, esto es, las particiones. Así, estas áreas se vinculan en tanto sus características inherentes son similares, pues todas conciernen a conjuntos de enteros que se interrelacionan. Las particiones y la teoría del azar tomarían posteriormente su propio perfil dentro de la matemática.

* Agradecemos a Víctor M. Martínez Zavaleta sus valiosas sugerencias para el texto preliminar.
1. Que significa: Concerniente a una investigación sobre dados.

Respecto al origen de los juegos de azar existen registros de datos Egipcios que datan del año 1500 años a. C.; así mismo, la cultura hindú ha aportado la historia de Nala sobre la cosmovisión de esta sociedad; desde alguna de las islas griegas, Homero (o la construcción cultural conocida como Homero[1]) describe en la *Iliada* el destino del hijo de Anfidamante a consecuencia del juego de dados;[2] las obras escritas de la cultura romana muestran la gran afición del emperador Claudio por los juegos, pasión que lo llevó a escribir *Tabula*.

Fue hasta el siglo XIII cuando aparece citada una obra titulada *De Vetula,* que se caracterizó en tratar el tema de los dados de una manera más esquemática y con tendencia a una posible modelación matemática. No se sabe si su autor fue Ovidio o un seguidor suyo; así, al padre de esta obra se le conoce como seudo-Ovidio [1662]. El libro ofrece un modo de clasificar las particiones que generan los dados, con éstas, se puede saber de manera ordenada qué números tienen más posibilidades de aparecer cuando se juega. Posteriormente se conocieron el *Liber de Ludo Aleae* y el *Sopra le Scoperti dei Dadi,* cuyos autores son Cardano [1966] y Galileo [1746], respectivamente.

De Vetula[3]

La obra está estructurada a manera de poema y forma parte de una biografía de Ovidio. Como ya se mencionó, la autoría de la obra no ha quedado bien definida, dentro de las posibilidades que existen está la de que el autor sea Richard de Fournival, lo que la ubicaría en el siglo XIII.[4]

El juego de dados fue abordado en la obra de manera marginal, toda vez que los temas centrales son de corte moral. En ésta se muestra la manera como Ovidio transformó su vida al pasar de los placeres mundanos a la aceptación de la fe cristiana: en la primera parte se describe la juventud de Ovidio, sus amores y algunos de sus pasatiempos; en la segunda parte el lector puede atestiguar la desilusión de Ovidio por los placeres del amor y

1. Es conocida la llamada 'cuestión homérica' que refuta la existencia de Homero o, si se quiere, su autoría respecto a estos dos poemas épicos. En todo caso, no hay registros lo suficientemente sólidos en alguno de los dos sentidos.
2. "[…] juntos [el alma de Patroclo le dice a Aquiles] nos hemos criado en tu palacio, desde que Menecio me llevó de Opunte a vuestra casa por un deplorable homicidio —cuando encolerizándome en el juego de la taba maté involuntariamente al hijo de Anfidamante—, y el caballero Peleo me acogió en su morada, me crió con regalo y me nombró tu escudero […]" Homero (aproximadamente siglo VI a. C.) la *Ilíada*.
3. Una traducción del título sería 'la anciana' o 'la viuda'. La obra fue conocida desde el siglo XIII, algunas de las primeras referencias las podemos encontrar en el *Opus Maius* de Roger Bacon, escrita entre 1266 y 1269 (ver [Robathan, 1968] y [Westacott, 1953]).
4. Véase el artículo de Bellhouse [2000], además del estudio histórico, ahí se encuentra una traducción al inglés de la mencionada sección del juego de dados.

su incursión en actividades filosóficas; la tercera y última parte muestra su fascinación y posterior conversión al cristianismo.

La reducida sección que corresponde al juego de dados no es mayor a sesenta renglones de texto, junto con tres tablas que esquematizan la información. Ésta quedó como parte de una reflexión sobre los vicios, juegos y el regreso a la actividad filosófica. Desde estas directrices se puede entender que el autor no haya tenido la idea de ahondar más en el aspecto matemático.

Por sus características, lo común fue ver en *De Vetula* sólo su perfil humanista, inclinado a los temas morales; lo que refiere a los elementos vinculados a la combinatoria, particiones y probabilidad fueron apreciados por los historiadores de la ciencia hasta después del siglo XIX.[1]

La sección del juego de dados se podría dividir en tres partes: i) listar todas las particiones que se puedan lograr con los tres dados (sin considerar las permutaciones de cada una); ii) reordenar los resultados anteriores en las siguientes categorías:

I) Las tres caras iguales.
II) Dos iguales y una distinta.
III) Todas distintas continuas.
IV) Todas distintas discontinuas.
V) Todas distintas con dos continuas y una discontinua.

Tabula II.

Omnino similes.					
666	555	444	333	222	111
Duo similes et tertius dissimilis.					
665	664	663	662	661	
556	554	553	552	551	
446	445	443	442	441	
336	335	334	332	331	
226	225	224	223	221	
116	115	114	113	112	
Omnino dissimiles continui.					
654	543	432	321		
Discontinui.					
642	531	641	631		
Duo continui et tertius discontinuus.					
653	652	651	621	521	421
542	541	643	431	632	532

Con esta clasificación se tienen cincuenta y seis casos posibles (ver figura [que es la tabla II del original]); iii) se cuentan todos los casos, donde ya se considera el orden, por ejemplo 6+6+5, 6+5+6 y 5+6+6 se toman como casos distintos. Entonces, de los cincuenta y seis casos que se tenían originalmente para las particiones de los números del 3 al 18, ahora se tienen doscientos diez y seis en total para los mismos números.

Liber de Ludo Aleae (El libro de los juegos de azar)

Girolamo Cardano (1501-1576) era un conocedor de los juegos de azar; lo fue desde la posición de un observador que analiza las posibilidades de cada contendiente, hasta la de ser víctima de las pasiones que despierta el juego. Conoció las trampas y desigualdades que esto encerra-

1. A finales del siglo XIX Guerry [1864] publicó uno de los primeros trabajos en el que se mostraba que *De Vetula* sí era un texto que podría aportar elementos al cálculo combinatorio y probabilístico. En la misma dirección se puede consultar a: Todhunter [1865], Kendall [1956] y David F. N. [1962].

ba, seguramente también las padeció. En su obra *Mi Vida* [1991, p.149] escribe lo siguiente:

> Durante años he estado jugando a esos juegos —más de cuarenta años al ajedrez y alrededor de veinticinco a los dados— y en esos años cada uno de esos días, ¡vergüenza me da decirlo! Así pues he estado haciendo desperdicio de mi honra, de mi hacienda y de mi tiempo.
> Tales son las razones de aquella infame holganza. Prueba de ello fue que en cuanto pude llevar una vida digna, dejé el vicio. Por tanto no fue afición al juego la mía ni ansias de dinero, sino amargura y escapatoria.

Aunque contaba con plenas capacidades para hacer un análisis más profundo sobre las particiones y las posibilidades que se tenían para cada número en el juego de dados no lo hizo. Su interés al abordar estos asuntos fueron principalmente canalizados a la reflexión sobre la igualdad de oportunidades en cualquier juego de azar y, por tanto, en la justicia para todos los jugadores. En el *liber de ludo aleae* señala la diferencia entre los juegos de azar y aquéllos en los que interfieren otros elementos; un ejemplo de lo anterior es el juego de dados que se practica de manera abierta (en el juego de cartas éstas no son visibles a los otros jugadores) y el éxito sólo depende de los futuros aciertos, fortuitos, del jugador (en las cartas, amén del factor azar al repartirlas, sólo se requiere tomar decisiones sobre las que tiene el jugador). En consecuencia, el juego de cartas no depende sólo del azar, sino que también contará la habilidad y la mesura de las decisiones del jugador, espacio donde se llegan a dar las trampas o abusos.

Ahora, se comprende que los cálculos que realizó Cardano para conocer las particiones de cada número llevaban como principal finalidad contribuir a que se conocieran las posibilidades que se tenían al jugar, y con ello poder tener un mayor grado de igualdad y justicia.

De manera explícita, Cardano se alineó al pensamiento aristotélico cuando reflexionó sobre lo fundamental que es la equidad en los juegos. Escribió [ver Bellhouse 2005, 188]:

> Otras preguntas deberán ser consideradas más sutilmente, ya que los matemáticos también pueden ser engañados, pero de forma distinta. Yo he deseado que este asunto no quede oculto, ya que mucha gente, al no entender a Aristóteles,[1] han sido engañados y con pérdidas. Así que hay una regla general, a decir, que debemos considerar al circuito completo,

1. Aristóteles en la Etica (Libro V, Capítulo III, De la justicia que consiste en los repartimientos) define lo que es injusto como aquello que es desigual y lo justo como lo que es igual:
> "[…] un acto justo involucra necesariamente al menos cuatro condiciones: dos personas para los que es de hecho justo, y dos partes a compartir en que su justicia está expuesta. Y habrá la misma igualdad entre las partes como entre las personas, porque las partes a compartir tendrán la misma proporción entre ellas, como entre las personas; pues si las personas no son iguales, no tendrán entonces partes compartidas iguales; y es cuando personas iguales tienen, o se les asigna, partes compartidas diferentes, o bien, cuando las personas que no son iguales, tienen iguales partes compartidas, es entonces que se suscitan discusiones y reclamos".

> y al número de aquellos repartos que representan de cuántas maneras el resultante favorable puede ocurrir, y comparar con tal número el resto del circuito, y de acuerdo a tal proporción deberán ser las pagas correspondientes, para que uno compita en términos iguales.

Cardano pudo usar elementos más avanzados para el estudio del juego de dados, por ejemplo, para calcular las particiones de los dados con caras diferentes pudo usar el triángulo aritmético de Tartaglia [1556] —que seguramente conocía—, pero no lo hizo porque su interés se centró en la parte ética y moral.

Las dos obras comentadas, *De vetula* y *Liber de ludo aleae* tienen finalmente muchos paralelismos, y en lo correspondiente al juego de dados la principal diferencia entre ellas se encuentra, primordialmente, en cómo se expone en cada una el tema. El autor de *De Vetula* proporciona una tabla para mostrar cada una de las diferentes sumas que proveen las caras. Por su parte, Cardano es menos explícito en su manera de presentar los datos de las sumas.

Para terminar, cabe recordar que el juego de dados no fue la parte central en ninguna de las dos obras; por ello, no sería justo pensar que *De Vetula* es una obra superior a la de Cardano sólo por la presentación de los datos. A las dos obras se les debe ver como complementarias, porque ambas atienden a épocas y paradigmas diferentes; son, en ese sentido, un par de eslabones en el conocimiento matemático.

Sopra le Scoperti dei Dadi (*Concerniente a una Investigación sobre Dados*)

El año de 1654 es frecuente encontrarlo como fecha significativa para situar los inicios de la teoría de la probabilidad, fue entonces cuando inició la correspondencia entre Fermat y Pascal respecto al cálculo de las posibilidades que se tenían en determinados juegos de azar. Este intercambio terminó aproximadamente en 1660.

Entre las primeras cartas se mencionan los problemas de Chevalier de Méré asociados con los juegos de azar; uno de ellos versa sobre todos los casos posibles del juego de dados (tres generalmente); y el otro sobre la repartición de las apuestas cuando el juego se interrumpe prematuramente.

Las cartas entre Fermat y Pascal pueden ser como un cimiento matemático de lo que sería el cálculo de la probabilidad, pero ello no significa que antes no existieron algunas reflexiones al respecto. Ya se mencionaron los trabajos del seudo-Ovidio y Cardano, que si bien no son considerados unánimemente como los inicios de la probabilidad, sí lo pueden ser del cálculo combinatorio y las particiones. Pero al que sí se le podría ver como uno de los iniciadores de la modelación matemática de los juegos de azar es a Galileo Galilei (1564-1642).

Todo se originó cuando el Duque de Toscana, Fernando I de Medici (1549-1609), le pidió a Galileo que le resolviera un problema sobre juegos de azar. Se trataba del juego de dados llamado *Pasadiez*, que consistía en lanzar tres dados y que la tirada ganadora era aquella cuya suma de los puntos fuese mayor a diez y la perdedora el caso contrario. La interrogante que tenía el Duque iba en el sentido de por qué al arrojar esos tres dados resulta que, desde un punto de vista experimental, el número once aparecía con más frecuencia que el doce, y el diez con más frecuencia que el nueve, lo cual sucedía a pesar de que cada uno de estos cuatro números puede representarse con seis particiones, donde cada una tiene tres sumandos.

La respuesta de Galileo se encuentra en el documento *Sopra le scoperti dei dadi*, escrito posiblemente entre 1613 y 1623, y que no sería conocido sino hasta la publicación de sus obras de 1718, donde tenía como título *Considerazioni sopra il giuoco dei dadi*. Galileo seguramente le informó al Duque sus reflexiones sobre su encargo, pero éste no vio ninguna de las dos versiones escritas pues murió en 1609.

Galileo [1746, p. 436] trató de escribir no sólo para responder el encargo del Duque "[…] sino también para abrir el camino de poder divisar precisamente las razones por las cuales todas las posibilidades del juego han sido con gran cuidado y juicio repartidas por igual". Ahora, respecto a la interrogante inicial, Galileo manifestó que si bien la observación es correcta (el número once sale con más frecuencia que el doce, y el diez con más frecuencia que el nueve), no así el razonamiento del mismo (a pesar de que cada uno de estos cuatro números pueden obtenerse como la suma de seis tercias distintas) que da lugar al problema que se le plantea. Galileo [1746, p. 436] advierte entonces que "Que en el juego de los dados algunos números son más ventajosos que otros […] depende de poderlos formar con más variedad de números". Al considerar el Duque sólo las seis particiones omitió la variedad de casos que cada tercia puede generar.[1]

Galileo inició con las siguientes consideraciones: cuando se tienen uno, dos o tres dados, se pueden lograr 6, 6^2, 6^3 tiradas diferentes, respectivamente. Para el caso de los tres dados Galileo sabe que de entre las doscientos cincuenta y seis particiones los números que pueden

1. Tal omisión es frecuente en el cálculo combinatorio, y le sucedió incluso a Leibniz (1646-1716), al no considerar el orden en la observación de cada uno de los casos. Por ejemplo, sin el cuidado adecuado se puede asumir que el orden no cuenta y llegar a considerar que 3+2+1 es igual a 2+3+1, siendo que son particiones de orden diferente.

aparecer son 3, 4, 5,…, 18, entonces le faltaría encontrar cuántos casos corresponden a cada número de ellos. Menciona que le bastaría con conocer lo que sucede del tres al diez, ya que "aquello que pertenezca a uno de estos números también pertenecerá a su opuesto", es decir, que el comportamiento de las tiradas es simétrico.[1]

Galileo, a diferencia de Cardano y seudo-Ovidio, consideró desde un inicio el orden de los sumandos de cada partición y procedió a analizar el número de permutaciones de cada una de las categorías de las tiradas, a decir: cuando todas las caras son iguales, cuando dos son iguales y una diferente, y cuando son todas diferentes.

De manera esquemática, él dará una clasificación de las diferentes tiradas de los tres dados. Empezó por listar cada una de las combinaciones que generan a cada número del 3 al 10, las clasificó según la suma de sus elementos y señaló el número de permutaciones de cada una de ellas. Finalmente, sumó las cantidades para encontrar el número buscado que nos dice de cuántas maneras diferentes se puede lograr tal o cual número, considerando el orden.

Entonces, al igual que Cardano y seudo-Ovidio, obtuvo que hay –sin tomar en cuenta las permutaciones de cada uno de ellos– a) seis diferentes tiros cuando las caras son iguales (por ejemplo (2, 2, 2)); b) treinta tiros con dos caras iguales y una diferente (por ejemplo, (1, 1, 2)) y c) veinte tiros con las tres caras diferentes (como (1, 4, 3)). Para el caso a) muestra que no hay más permutaciones para cada tirada; en el caso b), como tiene treinta formas diferentes de generar ternas con dos caras iguales y una diferente; entonces, con cada una de ellas puede calcular las permutaciones si considera que tiene dos elementos repetidos. Éste es un caso particular de uno general que permite calcular las permutaciones de n elementos, donde hay grupos de r, s, t,…, k elementos repetidos entre los n.[2]

1. Una forma directa de comprender esto es que pensemos en las caras opuestas de las tiradas resultantes. En un dado la suma de las caras opuestas es siempre 7; por ejemplo, si el resultado fuese 1, 3, 5, con suma 9, las caras opuestas serían 6,4,2, con suma 12; luego entonces, lo que se conozca de suma 9, será lo mismo de la suma 12. Y así en todos los otros casos.
2. Así, se tiene que las permutaciones distintas de n elementos tomadas de n en n, en donde hay un primer tipo de r objetos iguales entre sí, s objetos iguales entre sí de un segundo tipo, y así sucesivamente hasta k objetos iguales entre sí, tienen la representación,

$$\frac{n!}{r!s!t!\cdots k!}$$

y para nuestro caso particular, que son las permutaciones de tres elementos, con dos de ellos repetidos, es 3!/2!

Este tipo de razonamientos no era nuevo para las épocas de Cardano y Galileo, pero ninguno de los dos lo usó. En el caso de Galileo quizá fue por las características del lector que le pidió la investigación.

Para terminar el caso de las treinta formas diferentes que se tenían para sumar dos caras iguales y una diferente, y considerando que cada una se puede permutar de tres formas, entonces son noventa maneras de generar estas sumas con los tres dados.

En el caso c), cuando los tres sumandos son diferentes se logran seis maneras para cada una de las tiradas (sumas). En este caso, Galileo —al igual que Cardano— está usando elementos del cálculo de combinaciones para poder encontrar las de tres elementos tomados de seis, que en nuestra terminología actual sería:

$$\frac{6!}{3!(6-3)!} = 5\times 4$$

Seudo-Ovidio y Cardano no explican cómo enfrentaron el caso c), ellos simplemente se hicieron a la tarea de contarlos y dar un resultado.

Así, teniendo las veinte combinaciones diferentes y multiplicándolas por las permutaciones obtiene las $20 \times 3! = 120$ formas de sumar las caras con tres elementos diferentes.

Finalmente, de los casos a), b) y c) obtiene las $6 + 90 + 120 = 216$ particiones diferentes para representar a los números entre el 3 y el 18, como suma de tres enteros iguales o diferentes tomados de las caras de los tres dados convencionales.

Galileo no presenta más sobre este análisis, pero es claro que no sólo se limitó a responder las dudas del Duque, sino que trató de abrir camino para entender cómo se dan las posibilidades en el juego.

Ahora se presenta el facsimilar y la traducción del trabajo *Sopra le scoperti dei dadi*. La edición que se usó del año 1746 es la que pertenece a la Biblioteca de la Universidad Complutense de Madrid, sección Biblioteca Histórica, y se pudo obtener gracias a los recursos electrónicos del catálogo Cisne.

Sopra le scoperti dei dadi
Galileo Galilei

119 CONSIDERAZIONE

DI GALILEO GALILEI

SOPRA IL GIUOCO DE' DADI.

CHe nel gioco de i dadi alcuni punti ſieno più vantaggioſi di altri, vi ha la ſua ragione aſſai manifeſta, la quale è, il poter quelli più facilmente, e più frequentemente ſcoprirſi, che queſti, il che depende dal poterſi formare con più ſorte di numeri: onde il 3. e il 18. come punti, che in un ſol modo ſi poſſon con tre numeri comporre, cioè queſti con *6. 6. 6.* e quelli con 1. 1. 1. e non altrimenti, più difficili ſono a ſcoprirſi, che v. g. il *6.* o il 7. li quali in più maniere ſi compongono, cioè il *6.* con 1. 2. 3. e con 2. 2. 2. e con 1. 1. 4. ed il 7. con 1. 1. 5., 1. 2. 4., 1. 3. 3., 2. 2. 3. Tuttavia ancorchè il *9.* e il 12. in altrettante maniere ſi compongano in quante il 10. e l' 11. perlochè d' egual uſo dovriano eſſer reputati; ſi vede nondimeno, che la lunga oſſervazione ha fatto da i giuocatori ſtimarſi più vantaggioſi il 10. e l' 11. che il *9.*, e il 12.

E che il *9.* e il 10. ſi formino (e quel che di queſti ſi dice intendaſi de' lor ſoſſopri 12. e 11.) ſi formino dico con pari diverſità di numeri, è manifeſto; imperocchè il *9.* ſi compone con 1. 2. *6.*, 1. 3. 5., 1. 4. 4., 2. 2. 5., 2. 3. 4., 3. 3. 3. che ſono ſei triplicità, ed il 10. con 1. 3. *6.*, 1. 4. 5., 2. 2. *6.*, 2. 3. 5., 2. 4. 4., 3. 3. 4. e non in altri modi, che pur ſon ſei combinazioni. Ora io per ſervire a chi m' ha comandato, che io debba produr ciò, che ſopra tal difficoltà mi ſovviene, eſporrò il mio penſiero, con ſperanza, non ſolamente di ſciorre queſto dubbio, ma di aprire la ſtrada a poter puntualiſſimamente ſcorger le ragioni, per le quali tutte le particolarità del giuoco ſono ſtate con grande avvedimento, e giudizio compartite, ed aggiuſtate. E per condurmi colla maggior chiarezza che io poſſa al mio fine, comincio a conſiderare, come eſſendo un dado terminato da *6.* faccie, ſopra ciaſcuna delle quali gettato, egli può indifferentemente fermarſi; ſei vengono ad eſſere le ſue ſcoperte, e non più, l' una differente dall' altra. Ma ſe noi inſieme col primo getteremo il ſecondo dado, che pure ha altre ſei faccie, potremo fare *36.* ſcoperte tra di loro differenti, poichè ogni faccia del primo dado può accoppiarſi con ciaſcuna del ſecondo, ed in conſeguenza fare *6.* ſcoperte diverſe; onde è manifeſto tali combinazioni eſſer *6.* volte *6.* cioè *36.* E ſe noi aggiugneremo il terzo dado, perchè ciaſcuna delle ſue faccie, che pur ſon ſei, può accoppiarſi con ciaſcuna delle *36.* ſcoperte delli altri due dadi, averemo le ſcoperte di tre dadi eſſere *6.* volte *36.* cioè 21*6.* tutte tra di loro differenti. Ma perchè i punti de i tiri di tre dadi non ſono ſe non 1*6.* cioè 3. 4. 5. ſino a 18. tra i quali ſi hanno a com-
120 partire le dette 21*6.* ſcoperte, è neceſſario, che ad alcuni di eſſi ne tocchino molte; e ſe noi ritroveremo quante ne toccano per ciaſcheduno, averemo aperta la ſtrada di ſcoprire quanto cerchiamo, e baſterà fare tale inveſtigazione dal 3. ſino al 10. perchè quello, che converrà a uno di queſti numeri, converrà ancora al ſuo ſoſſopra.

Tre particolarità ſi debbon notare per chiara intelligenza di quello, che reſta: la prima è, che quel punto de i tre dadi, la cui compoſizione riſulta da tre numeri eguali, non ſi può produrre, ſe non da una ſola ſcoperta, ovvero tiro

CONSIDERACIONES DE GALILEO GALILEI SOBRE EL JUEGO DE DADOS

Que en el juego de los dados algunos números son más ventajosos que otros tiene su explicación de manera clara, la cual se da en el sentido de que poder encontrar unos números más fácilmente que otros, depende de poderlos formar con más variedad de números: por eso el 3 y el 18, son números [puntos de los dados] que se obtienen sólo de un modo usando tres números [determinados], es decir, uno con el 6. 6. 6., y otro con 1.1.1., y de ningún otro modo. Estos [3 y 18], son más difíciles de obtener que por ejemplo el 6 ó el 7, los cuales pueden ser obtenidos de más formas, esto es, el 6 con 1. 2. 3., con 2. 2. 2. y con 1. 1. 4.; y el 7 con 1. 1. 5. con 1. 2. 4. con 1. 3. 3. y 2. 2. 3. Sin embargo, el 9 y el 12 pueden ser obtenidos con la misma cantidad de maneras que 10 y el 11, por lo que deben de ser considerados de uso equivalente. Se nota sin embargo, que la extensa observación ha hecho considerar a los jugadores que el 10 y el 11 son más ventajosos que el 9 y el 12.

El 9 y el 10 (y lo que se diga de ellos entiéndase también para 12 y 11) se pueden obtener con una cantidad [semejante] de ternas, y lo afirmo ya que el 9 es obtenido por 1.2.6, 1.3.5, 1.4.4, 2.2.5, 2.3.4, 3.3.3, que son seis ternas; el 10 con 1.3.6, 1.4.5, 2.2.6, 2.3.5, 2.4.4, 3.3.4, y de ninguna otra forma, que también son seis combinaciones.

Ahora, por servir a quien me encargó desarrollar aquello que se me ocurra acerca de tal problema, expondré mis ideas, [y lo haré] con la esperanza no sólo de resolver tal duda, sino también para abrir el camino de poder divisar precisamente las razones por las cuales todas las posibilidades del juego han sido con gran cuidado y juicio repartidas por igual.

Y para conducirme con la mayor claridad que me es posible para tal objetivo, comienzo por considerar un dado que tiene seis caras, donde cada una cuando [el dado] es arrojado puede aparecer indistintamente. Seis tiradas pueden ser logradas, y no más, cada una diferente de la otra.

Pero si junto con el primer dado arrojamos un segundo, el cual también tiene seis caras, entonces podremos lograr 36 tiradas diferentes entre ellas, y es porque cada cara del primer dado puede combinarse con cada una del segundo, donde es claro que tales combinaciones son 6 veces 6, *i.e*. 36. Si añadimos un tercer dado, y ya que cada una de sus 6 caras puede ser combinada con cada una de las 36 de los otros 2 dados, podremos encontrar que las tiradas de los 3 dados son 6 veces 36, *i.e.* 216, y todas diferentes entre ellas. Pero debido a que los números [diferentes de las sumas de las ternas] al tirar los 3 dados no son sino 16, esto es, 3, 4, 5, 6 ... hasta 18, y entre los cuales se repartirán las mencionadas 216 tiradas, entonces es necesario que muchas tiradas deban pertenecer a algunos [de estos números]; y si se encuentran cuántas [tiradas] pertenecen a cada uno, habremos preparado la manera para encontrar lo que queremos saber, y bastará hacer tal investigación desde el 3 hasta el 10, porque aquello que pertenezca a uno de estos números también pertenecerá a su opuesto.

Tres particularidades deberán ser mencionadas para un claro entendimiento de lo que procede: la primera es que [aquella suma de] los números de 3 dados, que está compuesta de 3 números iguales, puede ser sólo lograda de una forma, ro di dadi, e così il 3. non si può formare se non dalle tre faccie dell' asso, ed il 6. quando si dovesse comporre con tre dui, non si farebbe se non da una sola scoperta. Seconda: il punto, che si compone da i tre numeri, due de' quali sieno i medesimi, e il terzo diverso, si può produrre da tre scoperte, come v. g. il 4. che nasce dal 2. e dalli due assi, può farsi con tre cadute diverse, cioè quando il primo dado scuopra 2. e il secondo, e terzo scuoprano asso, o scuoprendo il secondo dado 2., e il primo e il terzo asso; o scuoprendo il terzo 2., ed il primo e secondo asso. E così v. g. l' 8. in quanto resulta da 3. 3. 2. può prodursi parimente in tre modi; cioè scuoprendo il primo dado 2. e li altri 3. per uno, o scuoprendo il secondo dado 2. ed il primo, e terzo 3. o finalmente scuoprendo il terzo dado 2. ed il primo, e secondo 3. Terza: quel numero di punti, che si compone di tre numeri differenti, può prodursi in 6. maniere, come per esempio, l' 8. mentre si compone da 1. 3. 4. si può fare con 6. scoperte differenti; prima, quando il primo dado faccia 1. il secondo 3. e il terzo 4. seconda, quando il primo dado faccia pur 1. ma il secondo 4. e il terzo 3. terza, quando il secondo dado faccia 1. e il primo 3. e il terzo 4. quarta, facendo il secondo pur 1. e il primo 4. e il terzo 3. quinta, quando facendo il terzo dado 1. il primo faccia 3. e il secondo 4. sesta, quando sopra l' 1. del terzo dado, il primo farà 4. e il secondo 3. Abbiamo dunque sin qui dichiarati questi tre fondamenti, primo, che le triplicità, cioè il numero delle scoperte de i tre dadi, che si compongono da tre numeri eguali, non si producono se non in un modo solo; secondo, che le triplicità, che nascono da due numeri eguali, e dal terzo differente, si producono in tre maniere; terzo, che quelle, che nascono da tre numeri tutti differenti, si formano in sei maniere. Da questi fondamenti facilmente raccorremo in quanti modi, o vogliam dire, in quante scoperte differenti si posson formare tutti i numeri de i tre dadi, il che per la seguente tavola facilmente si comprende, in fronte della quale sono notati i punti de i tiri dal 10. in giù sino al 3. e sotto essi le triplicità differenti, dalle quali ciascuno di essi può resultare, accanto alle quali son posti i numeri, secondo i quali ciascuna triplicità si può diversificare, sotto i quali è finalmente raccolta la somma di tutti i modi possibili a produrre essi tiri, come per esempio

1 3 6 10	10		9		8		7		6		5		4		3	
15	6 3 1	6	6 2 1	6	6 1 1	3	5 1 1	3	4 1 1	3	3 1 1	3	2 1 1	3	1 1 1	1
21	6 2 2	3	5 3 1	6	5 2 1	6	4 2 1	6	3 2 1	6	2 2 1	3		3		1
25	5 4 1	6	5 2 2	3	4 3 1	6	3 3 1	3	2 2 2	1		6				
27	5 3 2	6	4 4 1	3	4 2 2	3	3 2 2	3		10						
108	4 4 2	3	4 3 2	6	3 3 2	3		15								
108	4 3 3	3	3 3 3	1		21										
216		27		25												

nella prima casella abbiamo il punto 10. e sotto di esso 6. triplicità di numeri, 121
con i quali egli si può comporre, che sono 6. 3. 1., 6. 2. 2., 5. 4. 1., 5. 3. 2., 4. 4. 2., 4. 3. 3. E perchè la prima triplicità 6. 3. 1. è composta di tre numeri diversi, può (come sopra si è dichiarato) esser fatta da 6. scoperte di dadi differenti; però accanto ad essa triplicità 6. 3. 1. si nota 6. ed essendo la seconda 6. 2. 2. composta di due numeri eguali, e di un altro diverso, non può prodursi se non in 3. differenti scoperte, però se gli nota accanto 3. la terza triplicità 5. 4. 1. composta di tre numeri diversi può farsi da 6. scoperte, onde si nota

esto es, al arrojar los dados el 3 no se puede obtener sin que las tres caras sean un as [uno]; y el 6, debe estar formado con 3 [números] dos, y no puede obtenerse [con tres caras iguales] si no es sólo de esta manera. La segunda, [corresponde] a la suma que se forma de 3 números, en los cuales dos son iguales y el tercero diferente; éstas pueden ser producidos por 3 tiradas; por ejemplo, el 4 que está formado de un 2 y de los dos ases, puede ser obtenido por 3 diferentes tiradas, esto es, cuando el primer dado muestra 2 y el segundo y el tercero muestran el as; cuando el segundo muestra un 2 y el primero y el tercero el as; el tercero muestra un 2 y el primero y el segundo un as. Otro ejemplo, el 8 cuando está formado por 3.3.2, puede también lograrse de tres maneras: cuando se tiene el primer dado con un 2 y los otros un 3 cada uno; cuando el segundo dado muestra al 2 y el primero y el tercero un 3; finalmente cuando el tercero muestra un 2 y el primero y el segundo un 3. La tercera**,** que la suma de los números está formada por tres números diferentes, puede ser lograda de 6 maneras; por ejemplo, el 8 que está formado por 1.3.4, puede ser [también] logrado con 6 tiradas distintas [usando los mismos números]: primero, cuando el primer dado muestra al 1, el segundo 3 y el tercero 4; segundo, cuando el primer dado muestra al 1, pero el segundo 4 y el tercero 3; tercero, cuando el segundo dado muestra 1, el primero 3 y el tercero al 4; cuarto, cuando el segundo es 1, y el primero 4 y el tercero 3; quinto, cuando el tercero muestra 1, el primero muestra 3, y el segundo 4; sexto, cuando el tercero muestra 1, que el primero sea 4 y el segundo 3.

Hemos expuesto aquí tres casos: el primero, que las ternas (esto es, la suma de las tiradas de los 3 dados) que están formadas por tres números iguales pueden ser obtenidas sólo de una forma; segundo, que las ternas que están formadas por dos números iguales y el tercero diferente, son logradas de tres maneras; tercero, que aquellas ternas que están formadas de tres números diferentes son obtenidas de 6 maneras. De estos casos fácilmente deducimos de cuántas maneras, o dicho de otro modo, con cuántas tiradas diferentes pueden ser formados todos los números [que son suma] de tres dados. Lo anterior puede ser fácilmente comprendido a partir de la tabla siguiente: en la parte superior están indicados los números de las tiradas desde el 10 hasta al 3, y debajo de ellos [se presentan] las diferentes ternas que pueden resultar para cada uno [de los números entre 3 y 10]; al lado de ellos, se encuentra indicado el número de maneras en que cada terna puede ser permutada y bajo ellos está finalmente indicada la suma de todas las posibles formas de producir estas tiradas. Por ejemplo,

1 3	10		9		8		7		6		5		4		3	
6	6 3 1	6	6 2 1	6	6 1 1	3	5 1 1	3	4 1 1	3	3 1 1	3	2 1 1	3	1 1 1	1
10	6 2 2	3	5 3 1	6	5 2 1	6	4 2 1	6	3 2 1	6	2 2 1	3		3		1
15	5 4 1	6	5 2 2	3	4 3 1	6	3 3 1	3	2 2 2	1		6				
21	5 3 2	6	4 4 1	3	4 2 2	3	3 2 2	3		10						
25	4 4 2	3	4 3 2	6	3 3 2	3		15								
27	4 3 3	3	3 3 3	1		21										
108		27		25												
108																
216																

en la primera columna tenemos al número 10, y debajo de él hay 6 ternas de números con los cuales se puede formar [el 10], y son 6.3.1., 6.2.2., 5.4.1., 5.3.2., 4.4.2., 4.3.3. Ahora, como la primera terna 6.3.1 está compuesta por tres números diferentes, entonces puede (como arriba se menciona) ser obtenida por seis tiradas diferentes de los dados, y al lado de la terna 6.3.1 se encuentra el 6. La segundo terna es 6.2.2. que está formado de 2 números iguales y otro diferente, y puede ser lograda únicamente mediante 3 tiradas diferentes, [por ello] al lado se escribe un 3. La tercera terna 5.4.1, formada de tres números diferentes, puede ser lograda por 6 tiradas como

VARJ PROBLEMI

nota col numero 6. e così dell' altre tutte, e finalmente a piè della colonnetta de' numeri delle scoperte è raccolta la somma di tutte: dove si vede, come il punto 10. può farsi da 27. scoperte di dadi differenti, ma il punto 9. da 25. solamente, e l' 8. da 21., il 7. da 15., il 6. da 10., il 5. da 6., il 4. da 3., e finalmente il 3. da 1. le quali tutte sommate insieme ascendono al numero di 108. Ed essendo altrettante le scoperte de i sossopri, cioè de i punti 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. si raccoglie la somma di tutte le scoperte possibili a farsi colle faccie de i tre dadi, che sono 216. E da questa tavola potrà ognuno ch' intenda il giuoco, andar puntualissimamente misurando tutti i vantaggi per minimi che sieno delle zare, degl' incontri, e di qualunque altra particolar regola, che in esso giuoco si osserva.

se indica [en la columna de al lado] con un 6. Y así con todas las otras [ternas].

Para terminar, al final de la columna se encuentra la suma de todos los números de las tiradas. Para el caso del número 10 se ve que puede ser obtenido de 27 tiradas diferentes de los dados, pero el número 9 únicamente por 25, el 8 por 21, el 7 por 15, el 6 por 10, el 5 por 6, el 4 por 3 y, finalmente, el 3 por 1; sumados todos juntos se obtiene el número 108. Y siendo de igual cantidad las tiradas de los opuestos, esto es, para los números 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, se agrupa la suma de todas las posibles tiradas que pueden ser logradas con las caras de los tres dados, y es 216. Y de esta tabla, cualquiera que entienda el juego puede medir, con gran exactitud, todas las ventajas, por pequeñas que puedan ser, del *zare*, del *incontri*, y de cualquier otra regla especial observada en este juego.

Referencias

Aristóteles 1952. *The Nicomachean Ethics*. Traducido por: W. D. Ross. The Great Books, Encyclopaedia Britannica. Vol. 9.

Bellhouse, David. 2000. "*De Vetula*: a medieval manuscript containing probability calculations". *Int. Statist. Rev*. **68**: 123–136.

__________. 2005. "Decoding Cardano's *Liber de Ludo Aleae*". *Historia Mathematica* **32**: 180–202.

Cardano, G., 1953. *The Book on Games of Chance*. Traducido por: S. H. Gould. Holt, Rinehart and Winston, New York.

__________. 1966. "Liber de ludo aleae". En: *Opera Omnia*. Edición facsimilar de 1663. Friedrich Frommann Verlag, Stuttgart/Bad Cannstatt.

Cardano, Girolamo. 1991. *Mi vida*. Madrid: Alianza Editorial.

David, F. N. 1962. *Gods, Games and Gambling.* London: Griffen.

Galileo. 1746. *Opere di Galileo Galilei*. Divise in quattro tomi. Tomo terzo. Padua.

Guerry, A. M. 1864. *Statistique Morale de Angleterre Comparee avec la Statistique Morale de la France*. Paris: Bailliere et Fils.

Kendall, M.G. 1956. *The Beginnings of a Probability Calculus*. Biometrika 43, 1-14. Reimpreso en: Studies in the History of Probability and Statistics, Volumen 1, 1970, Eds. E.S. Pearson & M.G. Kendall. London: Griffen.

Pseudo-Ovid. 1662. *Brunellus Vigelli & Vetula Ovidii. Seu: Opuscula Duo Actorum Incertorum*. Wolfenbiittel, Stern.

Robathan, D. M. 1968. *The Pseudo-Ovidian De Vetula*. Amsterdam: Hakkert.

Todhunter, I. 1865. *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*. Cambridge University Press. Reimpreso en 1965, por Chelsea Publishing, New York.

Westacott, E. 1953. *Roger Bacon in Life and Legend*. Londres: Rockliff. Reimpreso por: Folcroft Library Editions, 1974.