Mathesis **III 2$_1$** (2007) 1-35.

Javier de Lorenzo: por una filosofía dinámica de la praxis matemática

Fernando Zalamea

Resumen

La obra de Javier de Lorenzo en historia y filosofía de la matemática resalta por su incisiva atención a los *modos de hacer de las matemáticas avanzadas* de los siglos XIX y XX, en contraposición con otras visiones filosóficas usuales de la matemática, restringidas a consideraciones sobre lógica, fundamentos o aritmética elemental. En este artículo de conjunto sobre la obra de Javier de Lorenzo, mostramos cómo éste construye una profunda mirada crítica sobre diversos *haceres, estilos, niveles, inversiones y rupturas dentro de la praxis matemática*, donde coexisten dinámicamente la intuición y la demostración, la creatividad y la normalización, la imaginación y el rigor, gracias a múltiples definiciones, relaciones, modelos, contraejemplos y pruebas en las matemáticas avanzadas. De Lorenzo consigue exhibir así a la matemática como un saber vivo, en constante evolución, donde ámbitos irreducibles entre sí incluyen muy diversos *quiebres creativos*, y donde la problemática de los fundamentos pasa a situarse en un apropiado lugar secundario, sin mayor relevancia para una filosofía dinámica de la *práctica real* de la matemática.

Abstract

We study the work of Javier de Lorenzo in the philosophy of modern mathematical knowledge (XIXth and XXth centuries). De Lorenzo's perspective emphasizes the web of *doing* mathematics by its practitioners, a global pragmatic perspective which is able to embrace both style and rupture, intuition and proof, invention and discovery, imagination and standardization, particularization levels and universality. Creativity in higher mathematics is one of the main aspects elucidated by de Lorenzo's approach, which has been kept at dark by main trends in the philosophy of mathematics. Well beyond the usual analytical considerations of foundations, de Lo-

renzo opens up a synthetical view of actual ("real" in Corfield's sense) mathematical practice.

1. Introducción

Dentro de la aplastante cantidad de trabajos de 'filosofía de la matemática' que terminan siendo, en realidad, 'filosofía analítica de los fundamentos clásicos de la matemática' (teoría de conjuntos con una lógica clásica de primer orden subyacente), resultan muy interesantes aquellas voces singulares que se alzan en pro de una filosofía de las matemáticas en acción, una filosofía que debe preocuparse de los modos peculiares de invención y ordenación que se elaboran —más allá de las solas lógicas— en las diversas geometrías, álgebras y topologías de la matemática contemporánea, así como en los notables mixtos donde se han venido delineando su fuerza y su futuro (geometría algebraica, topología algebraica, espacios funcionales, etc.). Cuando, además, una de esas voces, alerta a la energía creativa de las matemáticas avanzadas, surge en un terreno baldío —árido y reseco en matemáticas— como la España de los años 1960, y cuando esa voz consigue luego mantenerse audible a lo largo de más de treinta años de escritura, firme y coherente en contra de las zigzagueantes corrientes de moda, nos encontramos ante una verdadera 'singularidad' que merece ser ampliamente resaltada. En este artículo ofrecemos una visión de conjunto de la obra de Javier de Lorenzo en historia y filosofía de la matemática, una obra notable no sólo dentro del mundo hispánico —donde brilla por su aislamiento y su unicidad— sino dentro del ámbito general de la filosofía de la matemática en el siglo XX, donde sólo muy contadas percepciones filosóficas pueden describirse como realmente atentas a los desarrollos contemporáneos de la matemática y a la especificidad de sus diversos modos creativos.

2. Núcleos conceptuales y polaridades

Una nítida conciencia de la *praxis matemática* subyace en toda la obra de Javier de Lorenzo y sirve de núcleo aglutinador para tensar su mirada crítica. Para de Lorenzo, la práctica matemática escinde a la disciplina en muy diversos ámbitos y niveles, con modos creativos que no resultan reducibles unos a otros; más allá de la reconstrucción conjuntista 'ideal' de las matemáticas, la matemática se jerarquiza en entornos 'reales' de muy diversa complejidad, donde los modos de visión, intuición, relación o demostración no son correlacionables linealmente, ni pueden entenderse como meramente acumulativos. Los 'haceres' de la matemática (en la terminología del autor, donde el 'hacer' enfatiza la acción, la fragua, el quiebre) responden a muy precisos condicionantes

—conceptuales, técnicos, históricos— donde esos haceres adquieren lugar. Como resultado, no sólo ciertos haceres geométricos deben distinguirse de haceres lógicos o algebraicos, por poner el caso, sino que cierto tipo de haceres matemáticos merecen distinguirse de otros, dependiendo de su lugar dentro de una evolución (o ruptura) histórica determinada. Asociados a los diversos haceres de la matemática, de Lorenzo detecta múltiples ‘estilos’ en la praxis matemática, y esto le permite situarse desde una perspectiva global donde contrapone y equilibra aspectos primordiales de la ‘creatividad’ matemática —la intuición, la imaginación, la balanza estética— con otros aspectos de la arquitectónica matemática —la demostración, los fundamentos—. Una dialéctica y una ‘dinámica’ vivas de los haceres matemáticos surgen con fuerza de la visión construida por de Lorenzo.

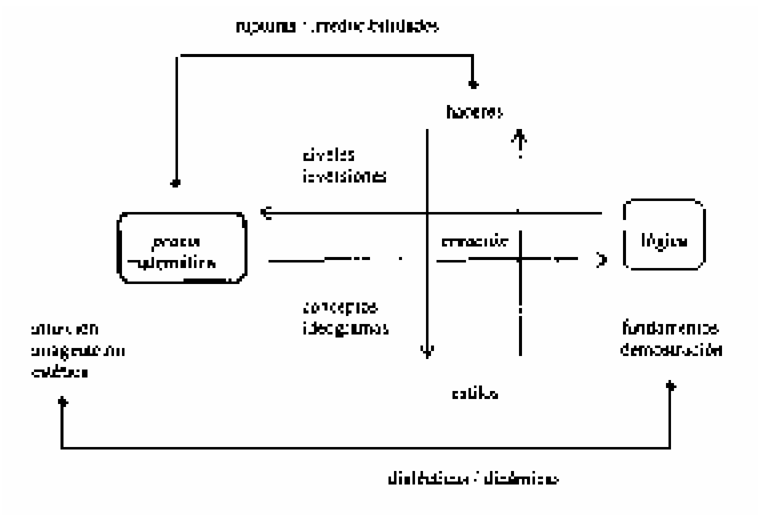


Figura 1
Núcleos y polimerales en la historia y la filosofía de las matemáticas según de Lorenzo

Impregnada por un sostenido rechazo a todo tipo de reduccionismos —mentales, disciplinarios, institucionales— la filosofía de Javier de Lorenzo se compenetra cómodamente con su campo de estudio, un universo matemático lleno de altibajos, diferencias y especificidades, que se han venido allanando fácilmente desde las perspectivas de la filosofía analítica, pero que no corresponden de hecho a la mucho más compleja práctica matemática moderna. Consciente, desde un comienzo, de que toda mirada se inscribe en un preciso contexto cultural subyacente, de

Lorenzo muestra cómo —naturalmente, inevitablemente— una creencia orienta una interpretación; en el caso de nuestro autor, no pueden pasarse por alto su fina formación dialéctica, su hábil percepción de tonos y modos, su rechazo de posiciones dogmáticas, su sensibilidad por las rupturas y los quiebres de todo lo humano. Sus creencias amoldan su visión, pero, por fortuna, resulta que las matemáticas de los siglos XIX y XX incorporan también —en su praxis 'real', independientemente del observador— profundas dialécticas, muy diversas multiplicidades creativas, complejas polaridades y sorprendentes diferencias de enfoque. Cuando se acercan el marco del observador y el contexto que éste pretende observar, puede llegar entonces a producirse una interpretación valiosa para las diversas disciplinas en juego.

En las cinco secciones siguientes de este artículo, estudiaremos en detalle algunos temas básicos en la obra de Javier de Lorenzo realizada entre 1971 y 2001, a lo largo de treinta años de publicaciones continuas, y que han quedado por ahora sólo señalados en la figura 1: (*a*) el papel central que el conocimiento real de la praxis matemática moderna y el reconocimiento de su jerarquización en ámbitos y niveles irreducibles entre sí otorgan a una filosofía dinámica de las matemáticas; (*b*) la consiguiente conciencia de que las matemáticas se entrelazan alrededor de diversos haceres conceptuales, con sus estilos propios y peculiares; (*c*) el lugar fundamental que ocupan la intuición, la imaginación, la visualización y el goce estético dentro de la creatividad matemática; (*d*) la explicitación del marco epistemológico de creencias, rupturas e inversiones en donde se mueve la matemática, entendida como construcción dinámica de la humanidad; (*e*) la labor de la lógica y de los fundamentos para correlacionar los entramados reticulares de la matemática. La articulación de temas tan diversos y delicados en la obra de un solo autor indica, de entrada, su verdadera seriedad e importancia.

3. La praxis matemática

Desde su primera monografía, *Introducción al estilo matemático* [1971], iniciada con una Pensión de Literatura Juan March en 1966, de Lorenzo se muestra inmediatamente alerta a los modos de hacer de las matemáticas avanzadas. En contraposición con el enfoque usual de los filósofos de la 'matemática', quienes se restringen a la aritmética y geometría elemental (caso de Wittgenstein, que llega al extremo de dedicar decenas de páginas a 'filosofemas' sobre la suma de números naturales), o a la lógica y la teoría de conjuntos (Russell, Quine, etc.), de Lorenzo se enfrenta de entrada con el ímpetu creativo de grandes figuras de la matemática de los siglos XIX y XX (Cauchy, Abel, Galois, Jacobi, Poincaré, Hilbert, el grupo Bourbaki, etc.). De Lorenzo parte de una constatación básica que sugiere la práctica matemática: el 'hecho' de que los 'fragmentos' de la matemática avanzada —teoría de grupos, análisis real, geometrías abstractas, por poner tres ejemplos gratos a de Lorenzo— conllevan 'distintos' modos de visión, intuición, manejo operatorio, y, aún, deducción, dentro de cada uno de sus contextos conceptuales. De Lorenzo [1971, 23] señala cómo

> la Matemática crece por yuxtaposición, dialéctica y no orgánicamente. Existen varios tipos de Matemática, sin más enlace entre ellas que el ser producto del espíritu humano. Cada época tiene sus enfoques y temática propios, que pueden ser, incluso, variados dentro de ese instante histórico.

De Lorenzo rompe así con una visión orgánica de la matemática —que crecería por acumulación y que progresaría ascendentemente— y propone en su lugar un ensanchamiento conceptual de la disciplina, donde se entrelazan horizontalmente nuevos ámbitos, sin que deban cabalgar unos encima de otros.

En *La matemática y el problema de su historia* [1977], de Lorenzo postula la "radical historicidad del hacer matemático" [1977, 14] y confirma luego, con múltiples ejemplos de detalle dentro de las matemáticas avanzadas, cómo "el hacer matemático no es un hacer único a lo largo de historia evolutiva alguna" [1977, 111]. El conocimiento matemático se produce mediante permanentes saltos y 'rupturas', a lo largo de muy distintos 'contextos' y ramales, siguiendo múltiples tiempos y ritmos; constantes incorporaciones, *transvases*, osmosis, traducciones y representaciones se producen luego entre los diversos entornos del saber matemático; las nociones ya construidas permiten entonces la fabricación de otras nuevas mediante interrelaciones, deformaciones, 'transfiguraciones'. Surge así una matemática eminentemente dinámica, "no evolucionista, difusionista o cíclica" [1977, 19], "situada en un tiempo no lineal" [1977, 19], donde coexisten diversas formas de la práctica. De Lorenzo fija tres entornos básicos de referencia, donde se fraguan, en su interpretación, las rupturas y las inversiones mayores que dan lugar a los haceres de la matemática moderna: 'entornos de 1827', donde la matemática adopta "la divisa plasmada por Abel, *hallar la razón*" [1977, 40], donde se invierte el programa de resolución de los problemas matemáticos, partiendo desde entonces "de lo que parece inalcanzable para dar razón del por qué (los problemas) pueden o no resolverse" [1977, 40], y donde la matemática comienza a nutrirse de ella misma y de sus limitantes; 'entornos de 1875', donde los haceres de la matemática del medio siglo anterior se unifican (grupos, conjuntos) o se transvasan (haceres geométricos convertidos en haceres algebraicos o axiomáticos), generando importantes *mixturas* (grupos de Lie, topología conjuntista, geometría algebraica, etc.) que impulsan el desarrollo de las matemáticas de comienzos del siglo XX; 'entornos de 1939', donde el hacer del grupo Bourbaki fija la orientación de las matemáticas contemporáneas alrededor de las nociones de 'estructura' y morfismo, invirtiendo el enfoque de estudio de los objetos matemáticos, pasando de lo analítico particular a lo sintético general, y buscando primordialmente las relaciones entre estructuras abstractas (álgebras, topologías, órdenes, etc.), sin preocuparse más por la "polémica sin fin" [1977, 92] ligada a los objetos conjuntistas 'en sí'.

De Lorenzo exhibe su fina atención por la matemática contemporánea al presentar al lector trabajos de tanta trascendencia para el 'hacer' matemático como los de Weil [1977, 88], Noether y Artin [1977, 96], Zariski [1977, 99], Lawvere [1977, 105], o Schwartz [1977, 107]. La consideración de la difícil obra de Lawvere —en un libro sobre la historia de la matemática publicado en un 'segundo mundo' (siendo generosos), sólo siete años después de la creación de la teoría de topos, cuando aún en los centros matemáticos del 'primer mundo' la obra revolucionaria de Lawvere seguía siendo desconocida— sirve como uno de los muchos ejemplos donde se cristaliza la acerada mirada de Javier de Lorenzo, dirigida hacia la 'matemática en acción'. Ya quisieran muchos 'matemáticos' haber podido vislumbrado en 1977 que

> el enlace de la teoría de categorías con la de topos, prehaces y geometría algebraica se está mostrando esencial para los intentos de Lawvere y de quienes trabajan en la misma dirección, de lograr una fundamentación, que él califica de «dialéctica», del trabajo matemático, aun reconociendo que la misma no puede tener otra característica que la meramente descriptiva, logrando así, por ejemplo, una revisión de la lógica intuicionista de Heyting como la más adaptada a la teoría de topos [de Lorenzo 1977, 105].

La investigación matemática 'en curso' ('se está mostrando', 'trabajan') no sólo emerge en las insólitas consideraciones de un historiador y filósofo, sino que lo hace del modo *más acertado* posible, al conseguir detectar el 'núcleo conceptual' de la situación (enlaces de los topos con la geometría algebraica y con la lógica intuicionista): expresión harto inusual en filosofía de las 'matemáticas' que merece encomio.

La práctica matemática, según de Lorenzo, se encuentra en incesante cambio y construcción; lejos de ser eternos y estáticos, "los conceptos matemáticos han ido variando y no han quedado delimitados de una vez para siempre, sino que sus referenciales se transforman" [1987b, 76]; por consiguiente, "quien pretenda reducir a un lenguaje único, con suposiciones únicas, las distintas parcelas de la práctica matemática no podrá dar cuenta del total de dicha práctica” [1987b, 76]. El hecho de que la teoría de conjuntos, en cuanto a sus resultados técnicos, englobe con equivalencias todos los resultados de la matemática moderna, no resulta ser más que una reconstrucción ideal, sin consecuencias reales para la ‘práctica’. “En la práctica matemática no hay, en sus conceptos, la univocidad querida, ni la ausencia de vaguedad; no hay definiciones analíticas, en términos de filosofía lingüística” [1987b, 80]: de Lorenzo devela así la mayor flaqueza de la filosofía analítica, verdadera ‘desconocedora’ de la matemática moderna aunque pretenda filosofar sobre la matemática en general (encuéntrese un Russell hablando de topología algebraica, un Wittgenstein mencionando espacios funcionales, o un Quine estudiando geometría de variable compleja). De hecho, el matemático habla sobre estructuras en niveles de complejidad ‘no equivalentes’, sobre hipótesis ‘no uniformes’ para distintos contextos, sobre métodos y teorías que se quiebran e invierten, que sólo se neutralizan relativamente mediante diversos lenguajes, pero que “cobran una realidad que trasciende y se impone al matemático” [1987b, 84]. La matemática crea así un entramado de ámbitos no equivalentes entre sí, con muy diversos ‘grados y escalas’, con contenidos conceptuales irreducibles, pero con múltiples interrelaciones que se objetivan a través de lenguajes, definiciones, axiomas y demostraciones.

Un inmejorable ejemplo de la acertada percepción de Javier de Lorenzo se encuentra en el notable programa de las ‘matemáticas en reverso” (1970-2000) de Friedman y Simpson, que de Lorenzo no llegó a conocer pero que se adecúa perfectamente con su concepción de la ‘jerarquización real’ de los diversos haceres de la ‘práctica’ matemática, no reducibles, no uniformes y no equivalentes entre sí. Si, desde la teoría de conjuntos ZF, cualquier par de teoremas de la matemática contemporánea son equivalentes entre sí (en el sentido de que ZF $\vdash \phi\leftrightarrow\varphi$, para cualquier par de resultados clásicos ϕ, φ), las matemáticas en reverso de Friedman y Simpson han conseguido detectar, en cambio, unos cuantos subsistemas ‘canónicos’ de la aritmética de segundo orden que ‘distinguen’ (y también llegan a ‘caracterizar’) a los teoremas usuales de la ‘práctica’ matemática. Por ejemplo, mientras que el teorema de Bolzano-Weierstrass resulta equivalente a la existencia de ideales maximales en anillos conmutativos contables ‘a los ojos’ ‘de’ un subsistema ‘minimal’ de la aritmética (RCA_0) con formas restringidas de inducción y de comprensión, en cambio el teorema de completitud de Gödel, la existencia de ideales primos o la unicidad de clausuras algebraicas ‘no’ resultan equivalentes a Bolzano-Weierstrass. Después de treinta años de investigaciones, la extensa monografía de Simpson

[1999], *Subsystems of Second Order Arithmetic*, 'demuestra' fehacientemente cómo la práctica de la matemática ha ido revolucionando el estudio de sus fundamentos. La 'variación' de los conceptos, las 'distintas parcelas' de la matemática, las gradaciones, tonalidades y escalas preconizadas por de Lorenzo han alcanzado ahora una profunda 'vida' técnica gracias a las jerarquías de teoremas de Friedman y Simpson.

La observación y la comprobación de distintos haceres en la práctica matemática va de la mano, en la mirada crítica de Javier de Lorenzo, con una alerta constante por las diversas formas que toma también la lógica matemática contemporánea, como son las lógicas abstractas y el teorema de Lindström (culminación de un notable recorrido por aspectos selectos de la matemática abstracta del siglo XX) [1980, 107-100], la lógica de los haces de Lawvere [1980, 63-64], la teoría de conjuntos alternativa (AST) de Vopenka [1979b, 450], o la lógica computacional de Chaitin [1992d, 435-437]. El espectro de teoremas, nombres y corrientes de la lógica en el que se mueve de Lorenzo se distingue inmediatamente del conjunto de referencias usuales en otros tratados de filosofía de la lógica. Por poner un ejemplo (véase en detalle la tabla incluida en el 'apéndice'), en la primera versión del *Handbook of Philosophical Logic* [Gabbay, Guenther 1983] se incluyen noventa y nueve referencias a Russell y setenta y cuatro a Quine (!) —más que a los mismos Gödel (cincuenta y nueve) o Tarski (sesenta y nueve)— mientras que aparecen dieciseis referencias a Lindström y sólo una a Lawvere. La desproporción es manifiesta, y, por supuesto, ésta surge de las 'creencias' subyacentes —como lo señalaría de Lorenzo— que orientan al *Handbook*; en cualquier caso, se trata de creencias que 'impiden' *ver* los múltiples movimientos dinámicos de la práctica real de la lógica, donde Quine, por poner el caso, tiene una muy escasa influencia (restringida a algunos desarrollos de su teoría alternativa de conjuntos NF) mientras que Lindström o Lawvere han impulsado muy complejos y fructíferos programas de trabajo.

La conciencia que permite observar importantes avances en la lógica matemática —con un potencial filosófico que excede fácilmente las acotadas incursiones de la filosofía analítica en los fundamentos de la matemática— es la misma conciencia que le permite a de Lorenzo develar y romper algunos 'mitos' fuertemente arraigados en la filosofía de la matemática:

> Es un mito el que todo hacer matemático se reduzca a un trabajo derivativo sintáctico lógico. Mito que ha conducido a los lógicos a enfocar fundacionalmente la matemática. Visión de una Matemática creada por algunos lógicos para poder decir, de ella, lo que previamente han puesto en la misma; *visión que nada tiene que ver con la práctica matemática* [1992d, 447, nuestras cursivas].

Al ubicar en su adecuado lugar las creencias, los supuestos y las limitantes de ciertas perspectivas reduccionistas, de Lorenzo puede criticar con firmeza los bizantinismos de aquellas “discusiones en las que, realmente, no hay elementos matemáticos, sino simples alusiones a la aritmética elemental u otras nociones similares. Las discusiones alrededor de una Filosofía de las Matemáticas desde el modo de trabajo matemático resultan ciertamente marginales” [1996, 219, original en inglés]. Cuando una filosofía de la matemática olvida el amplio espectro de la disciplina, cuando ignora el ‘mathematical work mode’, cuando deja de calibrar los múltiples niveles de la práctica matemática —como es el caso de la influyente compilación *Philosophy of Mathematics* [Benacerraf, Putnam 1983], donde se utiliza, aún en su segunda edición, el término ‘matemáticas’ a pesar de sólo incluir textos sobre filosofía de la ‘lógica’— se llega a una delicada escisión entre filosofía y matemáticas. De ahí un importante ‘trabajo a realizar’ [1992d, 448] en el acercamiento de la filosofía a la praxis matemática.

En *La matemática: de sus fundamentos y crisis* [1998], de Lorenzo explicita varias reflexiones críticas de gran valor, donde se resquebrajan dos de los mitos mayores de la filosofía de la matemática: la pretendida ‘crisis’ de los fundamentos y el pretendido hacer rígido y derivativo de la matemática. De hecho, según de Lorenzo, “no hubo ni hay crisis de fundamentos en la praxis matemática, sino que en dicha praxis se producen inversiones respecto a los tipos de Hacer anteriores [...] Y son esas inversiones las que obligan a precisiones conceptuales en el nuevo hacer con sus diferentes niveles [...]” [1998, 14]. La determinación de los marcos de los haceres matemáticos, así como la exploración de las limitantes de esos marcos, no generan realmente ninguna crisis en el interior de esos haceres, donde se adelantan las investigaciones matemáticas; más aún, las demarcaciones y los límites ayudan a definir y establecer nuevos niveles, contextos y conceptos que ayudan al desarrollo interno de cada hacer. Las inversiones y los niveles son plenamente dialécticos, no se encuentran determinados desde un comienzo, y se van refinando progresivamente a lo largo de la praxis matemática, con ideas, analogías, imágenes, correlaciones, métodos que siempre se encuentran en permanente movimiento y contrastación. Merece aquí citarse extensamente a de Lorenzo [1998, 15-16, nuestras cursivas]:

> La praxis científica, en particular el Hacer matemático, *no se lleva a cabo como quiere el tópico y aceptan quienes no lo practican.* Hasta en los textos de Lengua, en aquellos que ‘enseñan’ lo que es el lenguaje científico, se mantiene que la praxis científica, la matemática en particular, tiene como punto de partida conceptos plena y claramente definidos, proposiciones iniciales explícitas, maneja un lenguaje unívoco, con

> proposiciones o teoremas demostrados en su totalidad de forma rigurosa y donde la opinión de los matemáticos no cuenta para nada [...].
>
> Desde la reflexión crítica como método o criterio aquí impuesto, y haciendo camino, aparece una *tesis radicalmente contraria* a la visión anterior: los conceptos-núcleo no están delimitados o precisados en sus puntos de partida, sino que se muestran difusos y se van delimitando, precisando a lo largo de la praxis. Las proposiciones no están plenamente demostradas y hay teoremas que han de aceptarse por un acto de fe porque muy pocos matemáticos pueden llegar a entender, dominar y controlar su demostración; demostración que jamás se presenta como una derivación sintáctica, mera sucesión de proposiciones formales; hay teoremas que se demuestran una y otra vez utilizando en cada ocasión contenidos conceptuales diferentes, porque en la praxis matemática *lo que interesa no es el teorema en sí, sino las ideas, analogías y los posibles nuevos instrumentos metodológicos y conceptuales* que puedan asociarse a cada una de las demostraciones del teorema. [...].
>
> En otras palabras, el Hacer matemático no es un saber ya plenamente cristalizado sino *un saber vivo, en constante proceso*, un saber manifestación de la *razón constructiva* matemática en la que se incardina, también, una *imaginación ensoñadora*. [...].

4. Haceres, estilos

Una aproximación no reduccionista al amplio panorama de las matemáticas de los siglos XIX y XX induce rápidamente en el espectador una visión de enorme complejidad, donde se tensan y se entrelazan hondos análisis conceptuales y largas derivaciones de detalle, grandes intuiciones globales y marcados refinamientos locales, series de aproximaciones conjeturales y sucesivos entornos axiomáticos, todo en un permanente vaivén dialéctico, que se nutre sin cesar a sí mismo, entre ‘visión’ (núcleo conceptual, idea global, intuición, conjetura) y ‘escritura’ (marco local, cálculo, derivación intermedia, definición, axiomática, prueba). El vaivén entre imaginar un núcleo conceptual de interés y delimitarlo por medio de sucesivas definiciones, entre observar diversas propiedades de una estructura y jerarquizarlas en un orden derivativo, entre conjeturar consecuencias de un estado de correlaciones y someter esas predicciones a diversas contrastaciones, entre intuir un camino de prueba y entrelazar retroducciones intermedias hasta conseguir elaborar una demostración completa —en suma entre modelar y calcular, entre ver y escribir— resulta ser un vaivén de una extrema fuerza dinámica, que impregna todo el andar dinámico de las matemáticas contemporáneas.

Plenamente consciente de la ‘vida compleja’ de las matemáticas, Javier de Lorenzo descarta, desde el comienzo, cualquier aproximación unilateral al uso en la historia y la filosofía de la disciplina. Multiplicidad, pluralidad, multiformidad son piedras de toque en todos sus escritos; los haceres y los estilos, en plural, le otorgan a la matemática toda su riqueza. Cuando surge la unidad —la ‘Matemática’ o el ‘Hacer matemático', con una extraña mayúscula (discutiremos el 'estilo' mismo de Javier de Lorenzo en la última sección de este artículo)— ésta sólo puede entenderse realmente como enlace transversal de lo previamente múltiple. Al ubicar el desarrollo de las matemáticas en un (hiper)plano conceptual, con múltiples haceres verticales y eventuales enlaces horizontales, de Lorenzo escapa de las reconstrucciones lineales del devenir, y *abre* el campo de la investigación histórica y filosófica hacia una comprensión *real* de las matemáticas en acción. La explosiva creatividad de las matemáticas poco tiene que ver con la lineal y estática fundamentación conjuntista; la práctica matemática incorpora múltiples haceres que coexisten, se influencian, se correlacionan, pero rara vez se subsumen unos en otros.

Un par de confesiones de Javier de Lorenzo [1977, 7] nos muestran a un autodidacta en el verano de 1965 leyendo los escritos matemáticos de Pascal, y descubriendo atónito en las páginas de Descartes y Pascal una nítida expresión de la coexistencia de distintos haceres dentro de la matemática. En entornos académicos donde aún se desconocía a Kuhn, de Lorenzo descubre así, en dos verdaderos 'creadores' matemáticos, las nociones de ruptura e irreducibilidad que le acompañarán desde entonces. Cuando, en otro breve apunte autobiográfico, encontramos a de Lorenzo, en 1966, estudiando por su cuenta, a las 8.30, la geometría proyectiva 'según' 'Staudt', y luego, a las 11.30, revisándola 'según Artin' [1996, 228] —contrastando así con suma conciencia dos estilos antagónicos— observamos cómo, desde muy pronto, van encajando algunas de las piezas principales de la filosofía de las matemáticas según de Lorenzo. Todo lector de tratados de matemáticas avanzadas conoce bien las 'notables diferencias de haceres y de estilos' que tanto impactaron a de Lorenzo; el gran mérito de éste último consiste en haber registrado esas especificidades a fondo, en haberlas explorado con gran perseverancia más allá de las modas filosóficas del momento, en haber construido tipologías locales y globales de los haceres y estilos matemáticos, en suma, en haberse tomado muy 'en serio' la diversidad de la creación y la expresión matemática, y en haberla entendido como una de las características primordiales de su 'práctica', una diversidad que 'no puede ser eliminada' en ninguna consideración plena de la disciplina.

Para de Lorenzo [2000b, 86], "la Matemática es un Hacer en el que se va dando un producto que se construye, que se transforma"; "el Hacer matemático es algo más que lenguaje: requiere del lenguaje pero no se resuelve en el lenguaje" [2000b, 115]; de hecho,

> la Matemática no aparece como lenguaje ideográfico para expresar, sin más, la praxis científica o, al menos, una parte de esa praxis. No es mera forma expresiva neutral que no actúa sobre aquello de lo que habla o nombra, ni el instrumento en el que se resuelve la praxis científica. Sino elemento constitutivo de una determinada concepción de la physis [2000b, 100].

Dos características básicas del 'hacer' matemático —peculiaridades no siempre bien entendidas y, en muchos casos, ni siquiera registradas— se mencionan en las citas anteriores: su incesante construcción y transformación (*versus* una concepción eterna y estática de la matemática), y su entrelazamiento intrínseco con el mundo, que lo modula y al cual el hacer matemático a su vez moldea (*versus* una concepción lingüística y gramatical de la matemática). Contrastando con una matemática repleta de modos y haceres diversos, en transformación, estrechamente ligada con el mundo, de Lorenzo [1997, 312, original en inglés] oberva que una "historia del hacer matemático desde una visión de los fundamentos es una reconstrucción ideológica parcial". Como "cabe aceptar que los conceptos matemáticos no están dados de una vez para siempre, con naturaleza única, determinada plenamente, sino que tal naturaleza depende del marco de una teoría en la cual cobran sentido" [1992e, 106], la variación de las teorías y de los haceres de la matemática va siempre revelando nuevas facetas de los conceptos-núcleo, así como de las estructuras parciales con que esos núcleos conceptuales van luego enriqueciéndose. De Lorenzo exclama una vez más, con nitidez, con tesonera valentía: "no cabe el reduccionismo" [1992e, 106].

Al ligar estrechamente matemáticas y realidad, de Lorenzo se encuentra lejos de una versión ingenua de la matemática como instrumentario para describir la naturaleza. Para de Lorenzo, "el hacer matemático es un hacer constructivo, igualmente, de modelos de la realidad. Modelos de lo posible y no meros juegos sintácticos en los que no se sabe de qué se habla" [1992c, 384]; una construcción y un modelo contrastan con una descripción neutral: "desde el marco matemático, la razón conceptual ha llegado a la creación de constructos conceptuales que no son «reflejo» de la naturaleza, sino constructos con los que capta, fuerza y transforma a esa naturaleza" [1992c, 384]. De Lorenzo distingue dos grandes ámbitos (o 'burbujas', uno de los términos idiosincráticos del autor) para la razón: el ámbito de lo 'simbólico' (otra acepción personal del autor), donde se pretende un conocimiento directo de la naturaleza, sin mediaciones, y el ámbito de lo 'conceptual' —lugar propio de la matemática— donde "la captación y transformación de lo real se hace a través del conocimiento mediador" [1992c, 384]. En la razón conceptual, múltiples *formas* adquieren una verdadera realidad propia (es decir, son 'independientes' de un observador particular), sin constituirse por ello en meros reflejos naturales. "El hacer matemático, así, se me muestra como un hacer cognoscitivo de la realidad; bien entendido que de una *realidad transformada, captada ahora desde lo formal posible* y nunca en su totalidad, sino según el ámbito elegido y las cualidades ónticas que ese ámbito establezca" [1992c, 385, nuestras cursivas]. Los múltiples haceres de la matemática entrelazan entonces —indisolublemente— estratos de realidad, interpretación y creencia.

En su primera monografía, *Introducción al estilo matemático* [1971], de Lorenzo intenta una tipología de diversos estilos en la matemática, donde se fraguan las formas de expresión de otros tantos haceres. La tipología se fuerza desde una perspectiva donde se acumulan demasiadas descripciones históricas y resulta excesiva: sin pretender exhaustividad, de Lorenzo distingue doce estilos a lo largo de la historia de la matemática ('geométrico', 'poético', 'cósico', 'algebraico-cartesiano', 'de indivisibles', 'operacional puro', 'de los ε', 'sintético y analítico', 'dual', 'axiomático', 'formal', 'semiformal') y estudia algunas de sus expresiones en los actos creadores de algunos grandes matemáticos. Aunque una adecuada separación de los linderos de los doce estilos deja bastante que desear desde un punto de vista teórico —con etiquetas más bien artificiales, sin fronteras naturales o conceptuales de fondo— el 'ejercicio práctico' llevado a cabo muestra ya la 'originalidad' y la 'pertinencia' del enfoque. Independientemente del éxito de la tipología intentada, aquejada de una elaboración teórica insuficiente —que hubiese podido aprovechar los quiebres teóricos introducidos por grandes historiadores del arte (los 'dinamogramas' de Warburg), de la filosofía (las 'formas simbólicas' de Cassirer), o de la literatura (la 'dialéctica de la mirada' de Benjamin), pero que de Lorenzo no parece haber llegado a conocer—, independientemente del resultado, son de gran valor, 'aún hoy en día', los denodados esfuerzos de ese extraordinario autodidacta que emergió en las áridas tierras conceptuales de la España de los años 1960: el énfasis en la noción de 'estilo' dentro de una disciplina aparentemente aséptica como las matemáticas, la soberbia lectura de textos 'clásicos' de la matemática dentro de una estilística que contrapone rigor e intuición, la firme presentación de aspectos de la práctica matemática avanzada de los siglos XIX y XX, la elaboración de diversos apartados dedicados a los modos de la creación matemática (entre los cuales un magnífico análisis del estilo de Galois), la construcción de una lúcida conciencia donde se explicitan las continuas metamorfosis del pensamiento matemático.

En *La matemática y el problema de su historia* [1977], de Lorenzo supera las descripciones tipológicas algo artificiales de sus comienzos, y se concentra en dos haceres conceptuales de fondo, que, junto con los tres grandes entornos de la matemática (1827, 1875, 1939) donde cree haber detectado las mayores inversiones conceptuales de la disciplina, le permiten acercarse con mejores herramientas a una epistemología de las matemáticas modernas. Un primer hacer, el 'hacer figural' (término tomado de García Bacca [1971, 62]), parte de los objetos concretos, singulares, y los manipula mediante fórmulas, esquemas y diagramas; corresponde a los inicios de la experimentación y la creación matemática, pero puede darse en numerosas franjas de desarrollo histórico, dependiendo de la complejidad de los problemas en juego [1971, 1977, 1993, 1997, 2001b]. Un segundo hacer, el 'hacer global', parte de las multiplicidades, los agregados, las totalidades, y procede luego hacia los objetos singulares; las funciones, las relaciones, los morfismos se convierten en el objeto de estudio del matemático, y se requiere un alto umbral de complejidad para que el hacer se desenvuelva adecuadamente [1977, 1979b, 1991, 1993, 1994, 1997, 1998]. (Un tercer hacer, que no revisaremos aquí, emerge en los últimos escritos de Javier de Lorenzo [1993, 1996, 2000a], un 'hacer computacional' ligado al manejo matemático de los avances informáticos reales impulsados por los ordenadores y la *web*.)

El hacer global se torna, sin duda, en el hacer más interesante para entender los modos de acción y de creación de las matemáticas contemporáneas, con "vías de demostración donde se establece la existencia de algunos elementos de la totalidad, elementos con propiedades definidas aunque ninguno de ellos pueda ser dado exactamente" [de Lorenzo 1997, 317, original en inglés]. El interés de contrastar diferentes haceres de la matemática se manifiesta cuando, en una notable lectura conceptual, de Lorenzo consigue ligar la emergencia de la lógica clásica de primer orden con la inversión mucho más profunda que representa el hacer global con respecto al figural: En efecto, de Lorenzo indica cómo, de la aporía entre existencia (hacer global) y construcción (hacer figural), surge una urgente "*demanda de cuantificadores*" [1997, 318, nuestras cursivas] para conseguir manejar esos objetos que pueden existir pero no construirse, cuantificadores "inexistentes en el hacer figural" [1997, 318] pero imprescindibles en el nuevo hacer global. Dentro del hacer global, el impulso de la lógica matemática, con una semántica adecuada para los cuantificadores (modelos y equivalencia elemental) se entrelaza así 'naturalmente' con el impulso de los espacios funcionales y las álgebras abstractas (estructuras y morfismos), para abrir enormes campos de trabajo donde explota la inventividad matemática. Merece citarse de nuevo extensamente a de Lorenzo [1998, 101, nuestras cursivas]:

> Todo ello [la emergencia del hacer global] supone una inversión conceptual radical. Una inversión respecto al hacer anterior. Desde la aceptación de unos conceptos-núcleo como los de agregados, sistemas o multiplicidades, y los de función, transformación o correspondencia para manejarlos, *se tiene que hacer una nueva praxis matemática*. Praxis matemática que conduce a elaborar nuevas disciplinas, imposibles desde la praxis anterior. Así, surge la Teoría de funciones, como ya he mencionado, la Teoría de conjuntos, la Teoría de la medida y la noción de integral de Lebesgue, el Álgebra, la Geometría algebraica [...]. Con nuevos modos demostrativos: El manejo de la biyección, de la diagonal; nuevas formas de definición: por relación de equivalencia o implícita, por recursión; y el permanente recurso a la reducción al absurdo que obliga que las demostraciones tengan un carácter existencial no constructivo.

Una de las prácticas primordiales del hacer global consiste en manejar adecuadamente el método axiomático, que "no actúa como un mero algoritmo, sino que es el que *permite el ejercicio de la imaginación creadora*, que es la que llega a establecer las analogías, pero siempre entre teorías acerca de estructuras" [1980, 35, nuestras cursivas]. La práctica axiomática permite construir múltiples contextos y niveles, donde consiguen plasmarse los análisis, las teorías, las estructuras, los enlaces de la matemática moderna: "Análisis que parte, insisto, de la *existencia de varios planos o niveles*: 1. Estructura como objeto conceptual; 2. Teoría acerca de esa estructura; 3. Estudio de dicha teoría bien en sí, bien tras la elaboración de un lenguaje, o condiciones que de esta teoría puedan predicarse; 4. Conjunto de modelos o interpretaciones de la estructura o de la teoría [...] con sus *representaciones pictóricas* en algunos casos, y que, siendo reflejo de una misma estructura, poseen referenciales semánticos diferentes, y componen todo un *haz* o clase de aplicaciones; *clase abierta de realizaciones particulares, que poseen su historia, desarrollo, evolución* [...] Niveles o planos sólo posibilitados, en su existencia, por el método axiomático" [1980, 36, nuestras cursivas]. Los saltos de nivel, las inversiones, las saturaciones en un contexto dado (teoría, estructura, categoría) y las nuevas perspectivas desde otro contexto no saturado, dan lugar a muchas de las mayores rupturas creativas en matemáticas.

Una consecuencia radical de la escisión en distintos niveles de los haceres matemáticos es el fracaso de cualquier tipo de reduccionismo, que "falla precisamente por no reconocer y aceptar la existencia de estos diferentes niveles y querer formar un cuerpo de complejidad única con todo el hacer matemático" [de Lorenzo 1988a, 47]. La multiplicidad de los haceres, reflejada en estilos contrastantes, y la muy diversa complejidad de niveles y contextos dentro de cada uno de esos haceres es una constatación básica dentro de las matemáticas modernas, no adecuadamente apreciada por muchos de los enfoques 'canónicos' de la filosofía de las matemáticas. En particular, la teoría causal del conocimiento, la pretensión de que toda verdad debe poseer un referente absoluto, y las predicaciones del tipo sujeto-objeto 'no cursan' 'ya' dentro del hacer matemático global, donde el conocimiento es eminentemente contextual y funcional, con múltiples referencias y correlaciones a lo largo de los diversos niveles de la matemática. De esta manera, por ejemplo, fallan de entrada —para la matemática contemporánea— tres de los supuestos básicos (causalidad, referencia, predicación monádica) subyacentes en el 'dilema de Benacerraf' ("lo que parece necesario para la verdad en la matemática hace imposible el conocimiento de esa verdad; lo que haría posible el conocimiento matemático hace imposible la verdad del mismo") [de Lorenzo 2000a, 35-51; cita dilema 38]. Anclado aún en una matemática rígida, sin jerarquías de complejidad —y enfocado, una vez más, a la aritmética y a la lógica clásica elemental— el 'dilema' no contempla los modos de hacer de las matemáticas avanzadas, donde las verdades (en plural) dependen de contextos axiomáticos variables (y son perfectamente cognoscibles desde aproximaciones funcionales relativas), y donde el conocimiento matemático se libera de causas, referencias, predicaciones disyuntivas y pretensiones absolutas, para ocuparse de mixturas, nudos, transvases —en una palabra, de 'contaminaciones'— dentro de complejas ramificaciones, contextos y niveles que sólo se rigen ya por criterios de consistencia relativa.

5. La creatividad matemática

Partiendo de que "hay que admitir que en la Matemática coexisten tanto el elemento lógico como el intuitivo" [1971, 19], de Lorenzo estudia en repetidas ocasiones cómo se refina ese elemento intuitivo mediante el 'uso' de muy diversos y contrastantes estratos imaginales, estéticos y diagramáticos, así como de oposiciones, saltos y analogías entre esos estratos. Para de Lorenzo, la intuición matemática, lejos de preexistir, se 'construye'; la creación matemática se desarrolla entonces de acuerdo con el progresivo 'ejercicio' dual de la intuición y de la prueba dentro de la praxis matemática. La influencia del pensamiento de Poincaré, a quien de Lorenzo dedica su segunda monografía, *La filosofía de la matemática de Poincaré* [1974], es manifiesta en su formación. Por un lado, las lecturas 'polares' de Poincaré, quien sostiene que "es por intuición como se inventa, por lógica como se demuestra" [1974, 49], y que "la lógica y la intuición tienen cada una un papel necesario. 'Ambas son indispensables'" [1974, 94], se convierten en imprescindibles puntos de apoyo para el mismo de Lorenzo. Por otro lado, el estudio de la 'virtud creadora' según Poincaré —enlaces de inducción completa, repeticiones y homogeneidad, basándose en una intuición previa del continuo y ejecutando permanentes 'inversiones' conceptuales (como en la creación de los grupos fuchsianos por Poincaré, cuyas representaciones naturales entroncan con la geometría no euclídea de Lobachevski [1974, 88-90, 152])— abre las compuertas de la reflexión matemática a las inversiones de haceres que describirá de Lorenzo. Además, la observación de que "lo fundamental, para Poincaré, no es la proposición en la cual pueda formularse tal virtud creadora, sino la *actividad* del espíritu matemático [...]", y de que "lo primario no es, por consiguiente, el lenguaje —aunque no por ello éste deba ser despreciado u olvidado— sino la *acción* por la cual se crea dicho lenguaje" [1974, 105-106, nuestras cursivas], se convierte en otra de las puntas de lanza de la filosofía de las matemáticas propugnada por de Lorenzo.

La búsqueda de equilibrio y armonía es uno de los motores centrales de la creatividad matemática: "es la percepción de analogías entre estructuras al parecer distintas uno de los principios fundamentales de la invención matemática" [de Lorenzo 1971, 32]. En ese acto creativo no resulta aún indispensable el detalle lógico riguroso: "los matemáticos auténticamente creadores, los «matemáticos de raza» como los calificara Poincaré, han cometido fallos en las demostraciones, o ni siquiera han llegado a darlas, y, curiosamente, no han fallado en sus ideas centrales, creadoras" [1987b, 68]. De hecho, para entender la matemática, más que fundamentar o entender lógicamente una demostración, hay que tratar de rehacer, romper, equivocar —*crear*— de nuevo la demostración:

> en el hacer matemático no se «comprende» hasta que no se ha pasado por la experiencia de ese hacer matemático, hasta que no se ha vivido el problema, su resolución, hasta que no se ha incardinado en el sujeto; y no basta pasar por la matemática creyendo que una lectura o el aprendizaje más o menos memorístico de unos teoremas es suficiente; *hay que integrarla, rehaciéndola*, aunque ello no implique que el sujeto se convierta en matemático creador, sino que, más simplemente, posee una *experiencia originaria* de un hacer determinado y, gracias a la misma, puede apreciar la belleza y armonía de una proposición, de una teoría" [1992b, 85, nuestras cursivas].

Los innumerables 'ejercicios' que debe realizar un matemático para intentar manejar algunas partes de su disciplina no se ejecutan en balde; no puede seguir pasándose por alto que es la praxis matemática la que abre un acceso 'real' a la comprensión de la disciplina, y, por lo tanto, que si se desea realizar una filosofía de las matemáticas 'medianamente fiel' a su objeto de estudio, hay que 'enfrentarse' necesariamente con la práctica matemática avanzada —es decir con la variable compleja, con la topología algebraica, con la geometría diferencial, con la teoría analítica de números, con los espacios vectoriales topológicos, con la teoría abstracta de modelos, con la teoría de categorías, etc.— Una filosofía de las matemáticas que, a comienzos del siglo XXI, no considere 'muy seriamente' esa praxis se convierte por desgracia en un auténtico contrasentido.

Uno de los grandes méritos de Javier de Lorenzo consiste en haber repetido hasta la saciedad la importancia de 'ver' a las matemáticas contemporáneas en acción, incluyendo en esa visión algunos de sus mayores quiebres creativos. Cuando de Lorenzo exclama que, en aquellos "enfoques marginados a la praxis matemática y con nula repercusión sobre la misma" [2000a, 157], 'no se ve', lo que hace es constatar un muy desafortunado 'estado de la cuestión' en filosofía de las matemáticas. De Lorenzo es diáfanamente crítico con aquellos 'profesionales' de la filosofía de la 'matemática' que han venido reduciendo arbitrariamente su campo de estudio [2000a, p154-155, nuestras cursivas]:

> Con una limitación propia de quienes adoptan los temas matemáticos para hacer filosofía: quedarse en la Aritmética elemental, discutir el papel, naturaleza, estatuto del número natural, bien en sí, bien a partir de la noción de conjunto si se estima éste como noción más fundamental. Pero ello implica que *no se ve la riqueza del Hacer matemático* que va mucho más allá del número tres, del numeral 3, de las rayitas ||| [...].
>
> *No se ve* la riqueza conceptual, metodológica, epistemológica que tiene un teorema como el de Weyl sobre los grupos finitos, y la genialidad de su demostración, tras los trabajos de Elie Cartan, y donde el Hacer global muestra toda su potencia, *inexplicada y quizá inexplicable* si se sigue discutiendo del número tres [...]. Praxis que no queda justificada, explicada, por ninguna de las corrientes de la Filosofía de la Matemática que hacen Filosofía y que tampoco parecen tener en cuenta los cambios, radicales, que se están produciendo en el Hacer matemático fin de siglo.

Para poder 'ver', por supuesto, hay que acercarse a la creatividad matemática y sumergirse en el "carácter proteico del Hacer matemático" [de Lorenzo 2001b, 197, retomando una formulación de MacLane]. Como apoyo al acto creativo, el recurso a la intuición no es contradictorio de manera alguna, pues no invoca ningún matiz psicologista: la intuición, "de la que todo matemático de raza se precia, no es la perceptivo-orgánica, sino una intuición establecida por lo cultural y que se superpone a la orgánica" [1992b, 199], una intuición "que ha de ser adquirida mediante un trabajo, mediante un proceso de ascesis" [1992b, 200]. Esa intuición —'cultural, construida, trabajada'— es la que permite que algunos grandes matemáticos, en sus mejores momentos creativos, sean capaces de 'visualizar' novedosos balances o rupturas de simetría:

> la lemniscata que aparece en el borrador de Abel durante su estancia en París, como clave de su «visión» de las funciones elípticas como funciones doblemente periódicas, o la de Poincaré en su viaje a Caen enlazando la geometría hiperbólica con las funciones meroformas, [...] o los diagramas de Weierstrass para los teoremas de prolongación analítica [...]. Diagramas que permiten plasmar la idea que luego se reflejará mediante la proposición o cascada de proposiciones que siguen al término «teorema» [de Lorenzo 1992b, 200].

Dentro de la creatividad matemática se enlazan ideas, diagramas, esquemas, hipótesis, definiciones, modelos, contraejemplos, inferencias, y se articulan entre ellos 'recursivamente'; un diagrama puede ser refinado, por ejemplo, con modelos, definiciones e hipótesis; las hipótesis pueden ser, a su vez, sometidas a inferencias y contraejemplos, hasta adecuarse mejor al diagrama inicial; algunas inferencias pueden entonces dar lugar a ideas derivadas dentro de otros niveles, los conceptos pueden ramificarse y jerarquizarse dando lugar a nuevos esquemas y contraposiciones, y así sucesivamente. Dentro de ese hacer creativo, el goce estético adquiere un lugar fundamental, como lo señala Poincaré: "si trabajamos, es menos para obtener esos resultados positivos a los cuales el vulgo nos cree únicamente ligados, que por experimentar esa emoción estética y comunicarla a aquellos que son capaces de sentirla" [1974, 159]. Una filosofía que pretenda dar cuenta de la actividad real de los matemáticos no puede prescindir, entonces, de considerar seriamente el papel 'irreducible' que la intuición, la visualización, la imaginación y la sensibilidad estética ejercen dentro de la praxis matemática. La obra de Javier de Lorenzo enfrenta con determinación todas esas componentes.

6. Marcos, creencias

Una emocionada admiración por la razón humana, a pesar de todos los horrores de que la especie es capaz, subyace en la obra de Javier de Lorenzo. La matemática, 'honor del espíritu humano" en el *dictum* de Jacobi, se entiende como uno de los mayores actos creativos de la humanidad en la filosofía impulsada por de Lorenzo:

> la Matemática es un Hacer y, como tal, una producción y un producto de la especie humana. Como *hacer construido por la razón conceptual imaginativa* se encuentra incardinado en dicha especie y, más aún, en unos ciertos tipos de sociedad que son los que han posibilitado y posibi-

> litan el mismo. El Hacer matemático no puede desgajarse de la sociedad en la que ese hacer se tiene, por mucho que el producto obtenido en él provoque la ilusión de un saber verdadero, universal y objetivo [...] [2001b, 183, nuestras cursivas].

Arrancando de la matemática como ‘producto humano’, se siguen inmediatamente múltiples refutaciones de su carácter pretendidamente eterno, atemporal o absoluto. Sin embargo, el hecho de que la matemática merezca entenderse contextualmente, dentro del ámbito de la razón humana, no invalida su rango de validez dentro de aquellos entornos a los que esa razón accede ‘en su conjunto’. Más allá de escepticismos singulares o de idiosincracias particulares —es decir, dentro de una ‘comunidad’ cultural que ha ido creciendo a lo largo de muchos siglos— las matemáticas se constituyen en un fragmento estable de la civilización. Aunque sólo podamos entender la matemática ‘desde’ el marco de la especie humana (imposible imaginarla desde otro marco, pues es algo que escaparía a nuestro mismo ‘hacer’), ello no conlleva, ni mucho menos, la famosa ‘pérdida de las certidumbres’ tan apreciada por el ‘post’modernismo. Las creencias, los marcos, los contextos —imprescindibles en nuestra concepción del saber humano desde el ‘giro copernicano’ introducido por Kant en la filosofía— relativizan el conocimiento matemático, pero no lo tornan ni arbitrario, ni irrelevante. Con su visión de una matemática relativa, pero no por ello caprichosa o desligada de lo real, Javier de Lorenzo desmonta con prontitud la implicación falaz ‘todo es relativo, por tanto todo vale’, una deducción injustificada que ronda muchos escritos postmodernos pero que sólo puede sostenerse asumiendo creencias adicionales (como la idea de que sólo existen ‘universales absolutos’, mientras que todo indica que pueden pensarse también ‘universales relativos’).

Dentro de una adecuada relativización del saber matemático, de Lorenzo señala cómo “cabe admitir el uso de lógicas minimales para cada campo concreto de trabajo” [1979b, 40], ya que “de hecho es lo que el matemático ha venido haciendo y hace en todo su trabajo. *Manejar lógicas minimales que se adaptan en cada trabajo que hace*” [1980, 150, nuestras cursivas]. De Lorenzo detecta así con suma fineza el gran interés de la lógica matemática contemporánea, entendida como ‘haz de sistemas’ que capturan el contenido lógico (proposicional, cuantificacional, modal, etc.) de clases de estructuras dadas. De esta manera, pierde toda su razón de ser una conceptualización de la lógica que pueda servir para proveer un fundamento último o absoluto de las matemáticas; lo que adquiere importancia y, de hecho, lo que impulsa el desarrollo de la lógica matemática, son las ‘lógicas minimales’ que ayudan a caracterizar la estabilidad (o volatilidad) de ciertas clases de estructuras.

Prefiguración de las incisivas labores de los 'meteoros' lógicos de las tres últimas décadas del siglo XX —Shelah, Zilber, Hrushovski—, la intuición filosófica de Javier de Lorenzo indica el valor lógico de los planos proyectivos finitos, de los teoremas de coordinación de grupos, de los avances en teoría de categorías. Aunque de Lorenzo no parece haber llegado a conocer la enorme cantidad de resultados en lógicas minimales ('adaptadas' al trabajo matemático real: grupos, álgebras, geometrías) que Shelah, Zilber y Hrushovski han conseguido construir, una buena muestra de su acumen filosófico se encuentra en su 'coligazón' de un detallado recorrido sobre la 'práctica geométrica' con otro cuidadoso recorrido por la 'teoría de modelos' (de Löwenheim-Skolem a los teoremas de Lindström, pasando por categoricidad y definibilidad) [1980, 63-110].

La multiplicidad de los marcos de referencia no frena, así, ni el desarrollo de la lógica, ni el de la matemática. Más aún, las rupturas, las irreducibilidades, los nudos, la no linealidad, hacen que se elaboren matemáticas enteramente nuevas para poder abordar las limitantes a las que se enfrenta cada teoría. De hecho, delimitado un marco mediante el método axiomático, surge de modo automático "un haz de problemas referidos al mismo" [1980, 144]; se trata de un enorme "salto cualitativo que hace variar el objeto del hacer matemático, y, por supuesto, el enfoque epistemológico del mismo. *Cambio dialéctico de nivel* o nueva etapa en la elaboración o construcción conceptual" [1980, 144, nuestras cursivas]. El hacer global pasa a ocuparse de complejas 'características estructurales de clases de estructuras', una 'autoreferencia' que no es en ningún modo circular, gracias a los diferentes niveles en los que se mueven y habitan ahora los objetos matemáticos. Los 'teoremas de representación' adquieren entonces una prominencia constante a lo largo del siglo XX, ya que con ellos pueden elaborarse reflejos parciales entre diversos niveles estructurales de clases de objetos, y caracterizar así la complejidad (cualitativa y, en muchos casos, aún cuantitativa) de familias de soluciones a problemas dados. Como lo señala de Lorenzo, la 'ruptura epistemológica' de los entornos de 1939 consiste, por un lado, en tomar plena conciencia de los marcos de referencia (estructuras / teorías) en los que se mueve la matemática, y, por otro lado, en intentar situarse en las fronteras de cada marco, en saturar sus vecindades, en salir al exterior, y en construir nuevas interacciones con otros marcos aledaños.

Una verdadera 'cascada pragmática' —en el sentido científico y riguroso de 'pragmática' según C.S. Peirce— inunda los entornos del hacer global matemático. En efecto, dentro de ese hacer contextual, se registran tres importantes deslindes conceptuales (1: Signos; 2: Relaciones entre signos; 3: Transformaciones entre relaciones), que se entreveran luego a lo largo de una compleja jerarquía de marcos y niveles (estructuras, teorías) y que —siguiendo una plena dinámica peirceana— se determinan progresivamente (1: Ideogramas, conceptos; 2: Morfismos, funtores; 3: Modelizaciones, cálculos). De Lorenzo muestra cómo esa cascada pragmática se extiende naturalmente a todo un haz más amplio de 'burbujas' culturales, creencias implícitas y mitologías subyacentes, de las que no puede escapar la matemática: "si el hacer matemático se acepta como una producción y un producto de la especie humana, entonces, como producto, es un mecanismo cultural, con todas las vicisitudes que esa producción y ese producto puedan revelar a lo largo del tiempo" [1997, 314, original en inglés]. De allí se deducen no sólo las 'inevitables' diferencias de haceres y estilos de la matemática —"diferentes vías demostrativas que reflejan y determinan los diferentes momentos culturales en los que el hacer matemático se produce" [1997, 314]— sino la inevitable presencia de creencias e ideologías detrás de muchos programas de trabajo (en particular, detrás de la "pretensión fundacional en su versión formal sintáctica" [1992d, 441] que pretende imponer un triple reduccionismo —fundamentación, formalización, sintaxis— a un hacer que se beneficia de esas corrientes, pero que, a la vez, 'requiere' escapar constantemente de ellas en sus modos básicos de creación).

De Lorenzo [1992b, 269] delata las trampas del "reduccionismo en cuya base se encuentra todo un haz de residuos míticos", y muestra cómo, en lo que denomina el problema de la "causación ascendente" —donde pretende explicarse una totalidad por una suma de las propiedades de las partes—, se encuentran múltiples asunciones adicionales (linealidad, causalidad, estatismo, absolutismo) que son las que subyacen en una eventual reducción de lo global a lo local [1992b, 270-275]. Sin que de Lorenzo lo haga explícito (aunque puede colegirse perfectamente de su obra), el detenido análisis metodológico del problema de la causación ascendente según de Lorenzo puede aplicarse, término por término, al problema de la fundamentación conjuntista de la matemática. De hecho, detrás de la pretensión de explicar el todo de la matemática gracias a una reconstrucción conjuntista, son perfectamente identificables las 'asunciones analíticas adicionales' que subyacen al programa de los fundamentos: una creencia en la 'linealidad' del esqueleto cardinal (denodados esfuerzos por asegurar que todo cardinal se sitúa en la escala de los alephs, aunque tal linealidad requiera introducir el axioma de elección (Zermelo); denodados esfuerzos por situar el cardinal del continuo entre χ_1 (Gödel) y χ_2 (Woodin), aunque tal fijación requiera exigentes axiomas adicionales), una creencia en la 'causalidad' de la derivación matemática (denodados esfuerzos por imponer deducciones y reglas al estilo Hilbert, en vez de contemplar cálculos de secuentes o de deducción natural), una creencia en el 'estatismo' de la lógica (denodados esfuerzos por normalizar la lógica clásica de primer orden como sostén *sine qua non* de la matemática, en detrimento de otras lógicas), y una creencia en el 'absolutismo' del universo conjuntista (denodados esfuerzos por situar toda creación matemática dentro de la jerarquía bien fundamentada de los $(V_\alpha)_{Ord(\alpha)}$, aunque ello requiera usar axiomas excesivamente potentes que llegan a desfigurar la reconstrucción del concepto o del objeto).

Sin una firme 'convicción' en las 'creencias' anteriores, por parte de extensas comunidades de estudiosos, en determinados momentos de la historia de la disciplina, y en determinados entornos geográficos, habría sido sencillamente imposible adelantar los difíciles y dispendiosos programas 'técnicos' de trabajo sostenidos por esas creencias. Sin embargo, los haceres de la matemática moderna, aunque contemplan también el hacer de los fundamentos, se entrelazan realmente en una 'urdimbre dialógica' mucho más extensa y heterogénea, con múltiples contrapuntos, tensiones y deformaciones. Como señala de Lorenzo [1992b, 34, nuestras cursivas], "cualquier método [es], siempre, arbitrario y, además, falsificador, si es que dicho método se toma como *único* y radicalmente adecuado, *finalizado*"; de Lorenzo [1992b, 261] confía, en cambio, en aquellos espacios de la razón donde "reactuará el diálogo, profundizándolo, ensanchándolo, sin llegar jamás a un cierre sistemático, dogmático". La 'visión dialógica' de Javier de Lorenzo —la visión de un verdadero maestro, dedicado con generosidad, durante décadas, a una tarea permanente de enseñanza y de comunicación con sus alumnos— sostiene una obra siempre abierta, sin cierres dogmáticos, como la suya. Tan atento a Pascal como a Lindström, a la fundamentación logicista como a los desarrollos de la geometría algebraica, de Lorenzo [1985, 88, nuestras cursivas] es perfectamente capaz de exclamar: "Parto del principio de que la historia de cualquier disciplina *no puede desgajar*, arbitrariamente, el núcleo de la «metafísica» que lo entorna; ni siquiera la Matemática. Y ello exige *situar* el hacer matemático en el contexto, en las *redes tanto conceptuales como de creencias* que, en cada momento, constituyen la burbuja conceptual a la que ese hacer pertenece". Una cosa es 'escindir' cuidadosamente marcos y niveles de referencia, contextualizar, analizar, sintetizar: una metodología del *back-and-forth* que de Lorenzo maneja con habilidad. Otra cosa, muy distinta, es intentar 'suprimir' marcos y entornos "inconvenientes" (la metafísica, el compromiso ético del científico [2000c], o el tema de la 'matemática' en Marx y Engels [1984], por ejemplo). La obra de Javier de Lorenzo nos enseña a escindir múltiples estratos de la razón, sin por ello tener que llegar a tergiversarla, reducirla o empobrecerla.

7. El papel de la lógica matemática

Consecuencia de una mirada siempre atenta a la praxis matemática, cuando Javier de Lorenzo habla de 'lógica' se refiere en la mayoría de los casos al hacer de la 'lógica matemática', un muy 'amplio' hacer que no se reduce a discusiones sobre aspectos derivativo-sintácticos, fundacionales, clásicos o conjuntistas, sino que engloba también los otros grandes ámbitos de la lógica matemática construidos a lo largo del siglo XX: Teoría de modelos, teoría de la recursión, constructividad, lógicas no clásicas. En una impactante formulación, que remite a la influencia del programa bourbakista en la visión de Javier de Lorenzo, éste señala la importancia de considerar el hacer lógico 'a la par' de los otros grandes haceres que tensan y dinamizan el 'interior' de la matemática [1998, 110, nuestras cursivas]:

> El intento de tal fundamentación ['reduccionista logicista'], por increíble que se considere, quizá se deba a que no se ha visto que L_1 posibilita 'expresar' parte del Hacer matemático, como indicara Skolem, pero es muy distinto de 'fundamentar' aquello que expresa.
>
> *No se ha visto* que la Lógica formal, construida desde el *interior* del Hacer global, no es más que una *estructura* que pretende captar una compleja noción como la de 'consecuencia de'. Una estructura del mismo tipo que las que Bourbaki calificara 'estructuras-madre' y a las que, *realmente*, debe incorporarse sabiendo que su operador central no es ya la operación interna algebraica, la relación de orden reticular o la relación 'entre' o noción de proximidad topológica, sino la de 'consecuencia de'.

De Lorenzo explicita así el papel 'estructural' de la lógica matemática, un papel a la vez 'demarcador y amalgamador', que diversas corrientes de la lógica en el siglo XX han ayudado a precisar (teoría de modelos, álgebra universal, teoría de retículos, lógica algebraica, teoría de categorías). Dentro del hacer global —en el *back-and-forth* entre marcos y amalgamas, entre contextos y transferencias, entre modelos y morfismos, entre categorías y funtores— la lógica matemática ha producido muchos deslindes mayores, de enorme importancia para la filosofía de las matemáticas, aunque aún no debidamente apreciados, y, en la mayoría de los casos, 'ni siquiera aún registrados': Teoremas de representación y de jerarquización relativa (Freyd) *versus* fundamentos y derivaciones absolutas, teoremas de estructura y de no estructura (Shelah) *versus* reconstrucciones uniformes, teoremas de adecuación axiomática y de complejidad de la práctica demostrativa matemática (Simpson) *versus* axiomas conjuntistas universales. Los 'lentes deformantes' utilizados por muchos enfoques reductores en la filosofía de las matemáticas —propios de una concepción analítica que 'no ve' sino fundamentos, deducciones o números— han impedido que la filosofía se enfrente a esos nuevos haceres de la lógica matemática, que exceden con creces las consideraciones sintácticas o gramaticales, las preocupaciones sobre la 'esencia' de los números o las investigaciones sobre la generatividad del universo de conjuntos. Dicho con mayor crudeza, por poner un ejemplo sobradamente indicativo, una filosofía 'actual' de las matemáticas no puede seguir pretendiendo que un pensamiento sobre las 'matemáticas' como el de Wittgenstein sea aún válido y cuente con un valor atemporal, útil o ajustado para la filosofía de la disciplina (aunque, por supuesto, sí tenga un inmenso valor arqueológico para estudiar la pragmática interna del sistema wittgeinsteiniano). Resulta evidente, sin embargo, que el traslape ideológico e institucional que ha tratado de identificar 'filosofía de las matemáticas' con 'filosofía analítica de las matemáticas' —construyendo así consigo los 'mitos' de un Russell, de un Wittgenstein o de un Quine como supuestos filósofos *sine qua non* de la matemática (véase el 'apéndice')— prima con fuerza, todavía, sobre cualquier consideración alterna que intente acercar la filosofía a los haceres reales de la práctica matemática avanzada. Dentro de ese panorama bastante desolador, una obra como la de Javier de Lorenzo sirve para refrescar y remover los supuestos y las creencias que enrigidecen cualquier intento de normalización filosófica.

Después de sus tres monografías de los años setenta [1971, 1974, 1977], los dos primeros artículos publicados por Javier de Lorenzo se centran en las dos figuras más conocidas y citadas de la lógica moderna: Frege [1979a] y Gödel [1979b]. De inmediato, la orientación se dirige a las 'peculiaridades del hacer' de ambos lógicos, dando lugar a las dos primeras presentaciones 'fieles' de las obras de Frege y de Gödel realizadas tal vez en el mundo hispánico. De Lorenzo, de hecho, se enfrenta de entrada con el *Begriffsschrift*, la gran 'ideografía' sólo mencionada al pasar en la mayoría de las consideraciones sobre Frege, y muestra ante el lector (de *Investigación y ciencia* (!)) cómo la ideografía se pone en 'acción'. Con múltiples comentarios detallados, 'e imágenes' sobre los procedimientos visuales de la deducción, de Lorenzo no tiene reparos en explicitar, en contra de la opinión usual, lo que son las 'ventajas indudables' de la conceptografía bidimensional de

Frege: “La combinación del condicional con la negación y la concavidad permiten obtener cualquier tipo de expresiones, porque la *flexibilidad* de este simbolismo es muy superior a cualquier otro. Logra tanto la supresión de paréntesis como mostrar cuál es la *estructura* de la expresión total [...]” [1979a, 112, nuestras cursivas]. A la falta de hábito para romper la escritura lineal, al uso excesivo de espacio, a las incomodidades del impresor, de Lorenzo agrega otras dos razones que permiten explicar el fracaso de la conceptografía fregeana: La necesidad de contar con ‘mixturas’ entre lenguaje ordinario y lenguaje formal para poder vehicular el pensamiento conceptual, y la creación de otro lenguaje simbólico donde pueden elaborarse más cómodas mixturas con el lenguaje ordinario —como el de Peano, donde la ideografía fregeana puede reconstruirse (tarea adelantada por Russell)—. La crítica certera de Javier de Lorenzo nos muestra así a un Frege “*fuera de cauce*” [1979a, 112, nuestras cursivas], a un revolucionario visual del pensamiento conceptual, cuya revolución realmente se ignora. Cuando, en todas las historias usuales de las matemáticas, se sigue repitiendo que el ‘cauce’ de la lógica matemática se abre con Frege, una detallada percepción ‘fuera de cauce’ de la *Begriffsschrift*, como la que nos presenta de Lorenzo, nos revela los muchos olvidos, matices, solapamientos, creencias e intereses en los que se mueve la historia.

A su vez, al situar a Gödel dentro del hacer matemático, de Lorenzo se enfrenta con otros ‘mitos’ arraigados, como aquel de que “la Lógica se muestra analítica y transparente a la razón, mientras que la Matemática supone una construcción de carácter más bien sintético” [1979b, 430], opinión que

> olvida que L_1 es indecidible, por lo que se mostrarían como más transparentes a la razón aquellas teorías que además de completas fueran decidibles, para lo cual basta agregar a los axiomas de L_1 otros axiomas escritos en el mismo lenguaje formal, cambiando, como lo indicó Gödel en 1931, el conjunto de proposiciones decidibles y trasparentes a la razón. En este caso, teorías como la de los cuerpos algebraicos cerrados —con característica cero o primo— o la de los grupos abelianos libres sin torsión, por ser completas y decidibles se mostrarían como más transparentes aún a la razón que la propia Lógica [...]” [1979b, 430].

La visión de los resultados técnicos ‘en su contexto’ y la continua percepción de la ‘práctica’ matemática matizan las posiciones adoptadas *a priori*. La lógica no debe optar entonces por ningún estatuto filosófico privilegiado: Merece entenderse ‘dentro’ del entramado de las matemáticas avanzadas como un hacer más, “como un producto matemático más” que “permanece en el mismo plano que cualquier otro producto matemático” [1979b, 436]. La derivación formal es sólo ‘un’ aspecto más del hacer matemático (“quizá el menos importante?” [1995, 42]), dentro de un complejo vaivén dialéctico entre detecciones de conceptos-núcleo y acotaciones definicionales, construcciones de estructuras y adecuaciones de sistemas parciales, ejercicios imaginativos y contrastaciones factuales, elecciones de hipótesis y escalas de demostraciones.

De Lorenzo señala con fineza cómo “lo geométrico espacial, *lo topológico queda radicalmente ausente*” de la noción de derivación formal, concepción que “cae bajo la noción de sucesión de fórmulas escritas en una conceptografía convenientemente elegida”, y en la que “prima, por ello, el elemento iterativo numérico, aritmético, esencialmente discreto” [1995, 62-63, nuestras cursivas]:

> Lo topológico, lo espacial, con su continuidad asociada que sólo puede darse y captarse mediante la imagen visual, queda ausente o, como mucho, se intenta su subordinación a lo discreto. Sin embargo, el hacer matemático no queda reducido, en su totalidad, a lo discreto, sino que *exige*, en gran parte, de la *captación topológica espacial de la forma*, de la *imaginación* del espacio, hasta de la *forma de los signos* en los cuales se materializa lo discreto [...]. Es lo topológico lo que permite la captación de elementos tan esenciales como la simetría, semejanza, identidad [...]; o las transformaciones como traslación, homotecia, giro [...]. El hacer matemático requiere, con Hilbert, de la “imaginación geométrica”, con rechazo de reduccionismos numéricos que se convierten en mera superstición [...].
>
> Pretender eliminar lo geométrico y topológico no equivale a otra cosa que a pretender la eliminación de una de las raíces del pensamiento matemático, ya que lo continuo es irreducible a lo discreto, a lo aritmético.

Una comprensión tendenciosa (¿perversa?) de los grandes logros analíticos de la teoría de conjuntos —y, en particular, de la reconstrucción del continuo cantoriano desde la aritmética, pero gracias a los hiperpotentes axiomas de ZF— ha llevado a acentuar, desde las tendencias ‘normales’ de la filosofía de las matemáticas (ya que ‘no’ desde la práctica matemática misma), un ‘desbalance interpretativo’ a favor de lo “manipulativo configuracional sígnico discreto” [1995, 62] y en detrimento de lo topológico, lo geométrico, lo continuo. Al ‘desequilibrar’ así la “aporía fundadora” de las matemáticas —la “dialéctica irreducible continuo / discreto” [Thom 1982]— los enfoques usuales de la filosofía de las matemáticas ‘han dejado de ir observando’ su objeto de estudio. Cuando un medallista Fields indica que desea “enfrentarse a un mito profundamente anclado en la matemática contemporánea, a saber que el continuo se engendra (o se define) a partir de la generatividad de la aritmética” [Thom 1992, 141] —o cuando algunas de las tendencias más espectaculares de la lógica matemática actual (teoría topológica de modelos, teoría de modelos de la variable compleja, lógica geométrica categórica, lógica de los haces) intentan denodadamente reintroducir el pensamiento geométrico y topológico dentro de la lógica— es cuando las reflexiones críticas de Javier de Lorenzo adquieren todo su valor.

8. El estilo de Javier de Lorenzo

El estudio de cualquier equilibrio —rupturas y enlaces, vaivenes entre lo particular y lo general, contraposiciones y tendencias— “pertenece por entero a la Estilística”, como lo señala de Lorenzo en su *Introducción al estilo matemático* [1971, 19]. Obra donde siempre se busca conservar un difícil equilibrio conceptual entre tendencias antitéticas, donde la reflexión intenta seguir de cerca el dinámico caracter proteico de la creación matemática, la obra de Javier de Lorenzo se elabora, a su vez, siguiendo un ‘estilo’ muy peculiar, que refleja la ‘tirantez dialéctica’ misma de la práctica observada. Tres niveles básicos articulan la práctica del ‘estilo’ en de Lorenzo —un estilo de vida, un estilo conceptual y un estilo gramatical— y explican en buena medida la inapropiada ‘marginación’ de una obra de gran valor, tan excepcional en el marco hispánico, como notable en el marco general de la filosofía de las matemáticas del siglo XX. Un iterado ‘fuera de cauce’ en los entornos universitarios margina al autor: fuera de cauce por su autodidactismo, por su enclave geográfico, por sus temas de estudio, por la originalidad de sus enfoques. Otro fuera de cauce en la reflexión conceptual acentúa la marginación: Por su lucha contra todo reduccionismo, por su independencia de la filosofía analítica, por su concepción de la matemática como producto cultural, por su atención a los verdaderos desarrollos técnicos y creativos de la disciplina. Finalmente, un muy duro fuera de cauce en la escritura misma, con todo tipo de rupturas gramaticales, enlaces sin verbo y puntuaciones flotantes, termina de situar la obra en un difícil *margen* que ha impedido su justa valoración.

La marcada escritura de Javier de Lorenzo [1992a, 18] no contempla comodidades con el lector:

> Es el plano conceptual puro el que parece presidir el pensamiento leibniziano. Plano al que, sin embargo, agrega una condición modal, la necesidad de las verdades de razón. Existencia de dos tipos de conocimiento, conceptual-fáctico; de un método analítico o resolutivo conceptual; de un criterio de consistencia que conlleva la condición modal de necesidad. Notas que me interesa destacar [...]”.

Como queriendo en cierta manera romper, escindir, la linealidad misma de la escritura, adecuarla al ágil tránsito de los conceptos y multiplicarla geométricamente, de Lorenzo procede a permanentes reenvíos e iteraciones de términos:

> Variaciones o encuadres que jamás pueden ser considerados como definitivos, cerrados porque no lo es el tema al que se busca solución. Tema que, en definitiva, y en su dinámica, ha de ir reelaborándose y permitiendo sucesivas variaciones y encuadres, distintas aproximaciones, como diferentes son las lecturas, nunca inacabadas [*sic*], de un mismo texto. Texto que, en este caso, es la naturaleza enfocada en su globalidad [...]" [1992b, 91].

Se trata, a menudo, de un estilo donde se 'eliminan' las conjunciones, los verbos y los modismos gramaticales, para jugar con la iteración, la yuxtaposición y el reenvío, para 'dinamizar y romper', en suma, la exposición. Por supuesto, un tal estado de cosas no se encuentra siempre meditado, y corresponde a un cierto aislamiento del autor; sin embargo, el producto final, una vez asimilado con bastantes renuencias por el lector, produce una muy interesante correspondencia entre una manera de pensar y una manera de expresar ese pensamiento.

Dentro del estilo de pensar de Javier de Lorenzo, la 'balanza pascaliana' adquiere un lugar de enorme preponderancia. Cuando en su artículo sobre Pascal [1985], de Lorenzo observa que en la "mezcla radical" de lo geométrico y lo combinatorio, de los *esprits* de *finesse* y de *géometrie*, "se encuentra toda la grandeza de Pascal" [1985, 110], cuando señala que "todo el arte matemático de Pascal se va a centrar en la búsqueda de un eje, sea en la base o en la curva, que haga el papel de balanza" [1985, 109], de Lorenzo está también, en el fondo, definiendo su aproximación misma a la historia y la filosofía de las matemáticas. 'Todo en de Lorenzo es arte de la balanza, atención polar, figuración dialéctica, vaivén irreducible'. En grandes maestros como Pascal, Kant o Poincaré, de Lorenzo apoya una visión dinámica y constructiva de las matemáticas, donde se contraponen y entrelazan múltiples haceres. Una atención inusual a los avances de las matemáticas en los siglos XIX y XX completa su bagaje. Un brillante análisis de un aspecto de la balanza pascaliana —el vaivén pendular entre el axioma de Arquímedes (que regula lo discreto a través de lo infinitamente grande, vale para enteros y falla con indivisibles) y el axioma 'simétrico' de Arquímedes (que regula lo continuo a través de lo infinitamente pequeño, vale para indivisibles y falla para enteros) [1985, 113]— sirve de preciso reflejo para que de Lorenzo pueda explicitar la 'aporía fundadora' de las matemáticas. Cuando en una visión crítica consiguen plasmarse, y adecuarse al mundo presente, algunas de las grandes enseñanzas de los grandes maestros del pasado, esa visión cuenta realmente entonces con un 'futuro'. Es sin duda el caso de la obra de Javier de Lorenzo.

Apéndice.

En la tabla siguiente se presentan algunas estadísticas que intentan registrar, algo más objetivamente, ciertos énfasis y temáticas en la historia y la filosofía de la lógica, según se realizan dentro del 'ámbito angloamericano'. Se consideran recopilaciones de artículos tanto 'canónicos" ([Benacerraf, Putnam 1983], [Gabbay, Guenther 1983], [Prawitz, Skyrms, Westertahl 1991]) como "emergentes" ([Tymoczko 1986], [Drucker 1991], [Grattan-Guinness 1994], [Goble 2001]). Pueden resaltarse algunas 'tendencias' de la tabla, así como algunas de sus 'singularidades':

Tendencias:

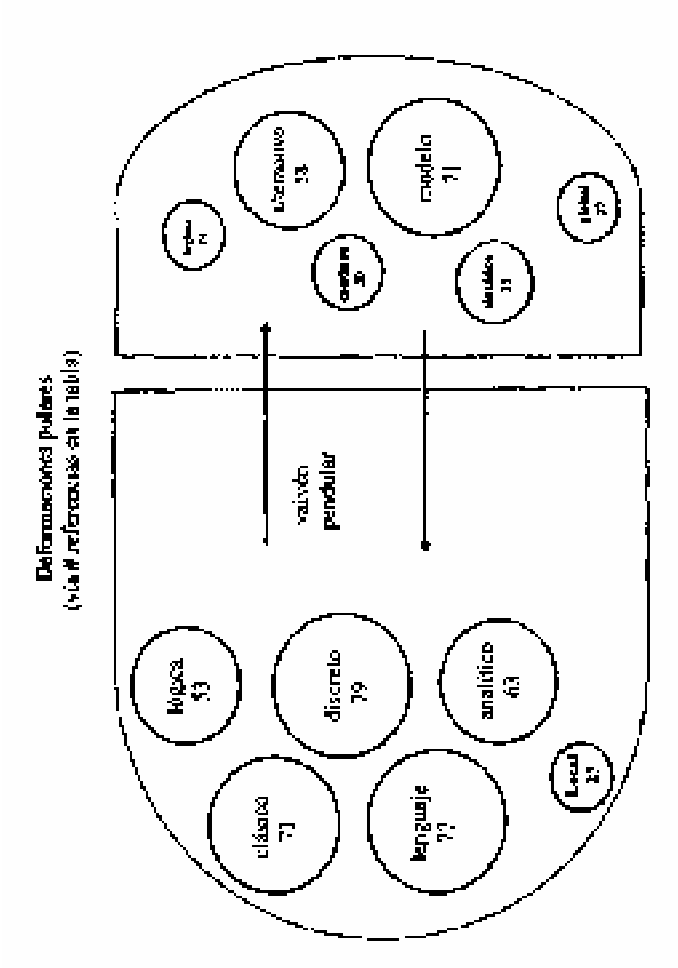
- Neto énfasis en la exploración lógica y filosófica de lo 'discreto' *versus* lo 'continuo'.
- Neto énfasis en la exploración lógica y filosófica de lo 'analítico' *versus* lo 'sintético'.
- Mayor énfasis en una percepción unitaria de la 'lógica' (singular) que en una visión múltiple de las 'lógicas' (plural).
- Equilibrio y vaivén pendular entre el estudio de 'lenguajes' y 'modelos'.
- Equilibrio entre el estudio de la lógica 'clásica' y el de lógicas 'alternativas'.
- Falta de tendencia en el nudo 'local *versus* global', rara vez explícitamente abordado.

Singularidades:

- Inexistencia de referencias a [Lautman 1977]: Indicador de una historia y filosofía de las matemáticas nítidamente orientada hacia una 'historia y filosofía de la lógica y de los fundamentos' *versus* una historia y filosofía de la matemática moderna en acción. Obsérvese, curiosamente, que Javier de Lorenzo tampoco menciona nunca los trabajos pioneros de Lautman (1937-39) sobre filosofía de las matemáticas avanzadas, aunque se encuentra muy cerca de muchos de los planteamientos del filósofo francés.
- Muy pocas referencias a Lindström o Lawvere: Indicador de una historia y filosofía de la lógica poco atenta a desarrollos contemporáneos de importancia.
- Gran cantidad de referencias a Russell y a Quine: Indicador de un énfasis excesivo en los cauces 'normales' —analíticos— de la historia y filosofía de la lógica (desproporción manifiesta al observar que, en varios casos, el número de referencias a Russell y Quine *supera* el número de referencias a Gödel y Tarski).

Niveles de oposiciones	Gabbay Guenthner 1983		Prawitz Skyrms Westerståhl 1994		Grattan-Guinness 1994		Goble 2001		Benacerraf Putnam 1983 (1964)		Tymoczko 1986		Drucker 1991	
nombres	# pp	índice	# pp	índice	# pp	índices	# pp	índice	# refs	bibliogr.	# refs	bibliogr.	# pp	índice
Russell vs. Peirce	88	5	42	1	16	12	20	3	12	1	5	0	27	25
Gödel vs. Tarski	59	59	27	18	14	13	41	27	17	12	4	3	66	9
Quine vs. Lautman	74	2	37	0	5	0	15	0	22	0	8	0	5	0
Lindström vs. Lawvere	18	1	3	4	0 (fin 1940's)	0	10	2	0 (fin 1950's)	0	0	0	0	5
temas	# artículos		# artículos		# artículos		# artículos		# artículos		# artículos		# artículos	
lógica vs. física	19 (# refs	17 anál.)	14 (# pp	3 introd.)	6 (# refs	3 introd.)	5 (# pp	4 introd.)	(ss fundamentos) 0 (# refs	0 introd.)	(ss fundamentos) 0 (# refs	0 introd.)	5 (# pp	0 introd.)
clásico vs. alternativo	11	19	13	10	10	3	9	9	16	8	3	5	7	5
discreto vs. continuo	15	9	14	3	11	5	10	4	13	6	6	5	10	3
lenguaje vs. modelo	10	13	15	11	12	8	13	13	7	13	4	8	0	5
analítico vs. sintético	6	5	12	4	10	3	7	5	13	6	4	9	8	3
local vs. global	7	3	5	3	0	3	4	5	3	6	2	0	3	4

[illegible]


Deformaciones polares
vaivén pendular
lógica
discreto
analítico
clásico
lenguaje
modelo

Referencias

Benacerraf & Putnam 1983. P. (eds.). *Philosophy of Mathematics: Selected Readings.* Cambridge: Cambridge University Press. (1. ed. Prentice-Hall, 1964).

de Lorenzo, Javier. 1971. *Introducción al estilo matemático*, Madrid: Tecnos, 1971 (2ª ed. 1989).

__________. 1974. *La filosofía de la matemática de Poincaré*. Madrid: Tecnos.

__________. 1977. *La matemática y el problema de su historia.* Madrid: Tecnos.

__________. 1979a. "Frege". *Investigación y ciencia* No. 36: 100-112.

__________. 1979b. "Lógica y matemática en Gödel". *Estudios filosóficos* **79**: 391-453.

__________. 1980. *El método axiomático y sus creencias.* Madrid: Tecnos.

__________. 1984. "La matemática en Marx y Engels". *Sistema* **63**: 59-83.

__________. 1985. "Pascal y los indivisibles". *Theoria* **1** (2ª época): 87-120.

__________. 1987a. "Estudio preliminar". En: Gottfried Wilhelm Leibniz, *Análisis infinitesimal.* Madrid: Tecnos. pp. ix-lxxix (2ª ed. 1994).

__________. 1987b. "¿De qué habla el matemático?". En: C.M. Vide (ed.), *Lenguajes naturales y lenguajes formales II.* Barcelona: Universitat de Barcelona. pp. 65-84.

__________. 1988a. "La matemática y el ámbito conceptual". *Revista de filosofía* **1** (3ª época): 43-53.

__________. 1988b. "Historia de la matemática. Problemas, métodos", *Arbor* **505**: 111-141.

__________. 1991. "Leibniz-Frege, ¿Utopías de la razón conceptual?". *Theoria* **14-15** (2ª época): 97-114.

__________. 1992a. *Kant y la matemática.* Madrid: Tecnos.

__________. 1992b. *Experiencias de la razón.* Valladolid: Universidad de Valladolid.

__________. 1992c. "Dónde situar la matemática", *Mathesis* **8**: 369-387.

__________. 1992d. "La matemática, ¿incompleta, aleatoria, experimental? Consideraciones sobre algunas consecuencias de distintas versiones del teorema de incompletud de Gödel", *Theoria* **16-18** (2ª época) (1992), 423-450.

__________. 1992e. "En lugar de discutir, calculemos". En: C.M. Vide (ed.), *Lenguajes naturales y lenguajes formales VII.* Barcelona: Universitat de Barcelona. pp. 99-106.

__________. 1993. “La razón constructiva y sus haceres”. *Mathesis* **9**: 129-153.

__________. 1994. “El discurso matemático: ideograma y lenguaje natural”. *Mathesis* **10**: 235-254.

__________. 1995. “Derivación formal: análisis crítico”. *Estudios filosóficos* **125**: 35-65.

__________. 1996. “The mathematical work-mode and its styles”. En: E. Ausejo, M. Hormigón (eds.). *Paradigms and Mathematics*, Madrid: Siglo XXI. pp. 215-232.

__________. 1997. “Demonstrative ways in mathematical doing”, en: A. Ibarra, T. Mormann (eds.), *Representations of Scientific Rationality. Contemporary Formal Philosophy of Science in Spain*, Poznan Studies in the Philosophy of Sciences and the Humanities vol. 61, pp. 301-319.

__________. 1998. *La matemática: de sus fundamentos y crisis.* Madrid: Tecnos. 1998.

__________. 2000a. *Filosofías de la matemática fin de siglo XX*. Valladolid: Universidad de Valladolid.

__________. 2000b. “La matemática: un lenguaje para las ciencias [...] y algo más”. En: C. Palencia, J.G. Tena (eds.), *Matemática, ciencia y sociedad.* Valladolid: Universidad de Valladolid. pp. 83-116.

__________. 2000c. “De revolución industrial a revolución tecnológica”. En: Javier de Lorenzo (ed.), *Medios de comunicación y sociedad: de información, a control y transformación.* Valladolid: Universidad de Valladolid. pp.13-35.

__________. 2001a. “Reflexiones críticas en torno a Kant y el hacer matemático”. *Estudios filosóficos* **143**: 7-35.

__________. 2001b. “De la matemática, de la educación y su enseñanza”. *Éndoxa: series filosóficas* **14**: 183-197.

Drucker, T. (ed.). 1991. *Perspectives in the History of Mathematical Logic.* Boston: Birkhäuser.

Gabbay, D. & Guenther, F. (eds.). 1983. *Handbook of Philosophical Logic.* Dordrecht: Reidel, 4 vols.

Goble, L. (ed.). 2001. *The Blackwell Guide to Philosophical Logic.* Malden/Oxford: Blackwell.

Grattan-Guinness, I. (ed.). 1994. *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences.* London: Routledge. 2 vols.

Lautman, A, 1977. *Essai sur l’unité des mathématiques, et divers écrits* (originales de 1937-1939), Paris: 10/18.

Prawitz, D., Skyrms, B. & Westertahl, D. (eds.). 1991. *Logic, Methodology and Philosophy of Science IX*, Amsterdam: North-Holland, 1994 (Congreso Uppsala).

Simpson, S. G. 1999. *Subsystems of Second Order Arithmetic.* Berlin / New York: Springer-Verlag.

Thom, R. 1982. "L'aporia fondatrice delle matematiche". En: R. Romano (dir.), *Enciclopedia Einaudi*, vol. 15 (Sistematica), pp. 1133-1146.

__________. 1992. "L'anteriorité ontologique du continu sur le discret". En: J.M. Salanskis, H. Sinaceur (eds.), *Le Labyrinthe du Continu*, Paris: Springer-Varlag. pp. 137-143.

Tymoczko, T. (ed.). 1986. *New Directions in the Philosophy of Mathematics.* Boston: Birkhäuser.