651 Cuestion 4. *Quadrar la elipse.* Fig.

Llamo la BD, x; la DR, y; la CB, a; y la CE, b, con lo qual la equacion de la curva será $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$, é $y = \frac{b}{a}(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{b}{a}x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(2a - x)}$. Luego la area $BDR = S.ydx$ será $S\frac{b}{a}x^{\frac{1}{2}}dx(2a - x)^{\frac{1}{2}}$. 100.

Si comparamos esta expresion con la fórmula general $x^p dx(a + bx^n)^m$ (615) echarémos de ver que $p + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ no es múltiplo del exponente $n = 1$. Luego la diferencial propuesta solo es integrable por series y por aproximacion, motivo por que la elipse no sufre una quadratura cabal.

Ahora bien; $(2a - x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2a} - \frac{x}{2\sqrt{2a}} - \frac{x^2}{16a\sqrt{2a}} - \frac{x^3}{64a^2\sqrt{2a}} - \frac{5x^4}{1024a^3\sqrt{2a}}$ (416 y sig.); luego $x^{\frac{1}{2}}dx\frac{b}{a}(2a - x)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}dx\frac{b}{a}\left(\sqrt{2a} - \frac{x}{2\sqrt{2a}} - \frac{x^2}{16a\sqrt{2a}} - \frac{x^3}{64a^2\sqrt{2a}} - \frac{5x^4}{1024a^3\sqrt{2a}}\right) = \frac{b}{a}\left(x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{2a} - \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{2\sqrt{2a}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}dx}{16a\sqrt{2a}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}dx}{64a^2\sqrt{2a}} - \frac{5x^{\frac{9}{2}}dx}{1024a^3\sqrt{2a}}\right)$ cuya integral es $\frac{b}{a}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\sqrt{2a} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5\sqrt{2a}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{7.8a\sqrt{2a}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{9.32a^2\sqrt{2a}} - \frac{5x^{\frac{11}{2}}}{11.512a^3\sqrt{2a}}\right.$ &c.

Si hacemos $DB = x = a$, expresará esta integral la area del quadrante elíptico BCE, cuyo va-

Fig. valor será por lo mismo $\frac{b}{a}\left(\frac{2a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\sqrt{2}}{3} - \frac{a^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}}{5\sqrt{2}}\right.$

$$- \frac{a^{\frac{7}{2}-\frac{3}{2}}}{56\sqrt{2}} - \frac{a^{\frac{9}{2}-\frac{5}{2}}}{9.32\sqrt{2}} - \frac{5a^{\frac{11}{2}-\frac{7}{2}}}{11.512\sqrt{2}}\ \&c.\Big) =$$

$$\frac{b}{a}\left(\frac{2a^2\sqrt{2}}{3} - \frac{a^2}{5\sqrt{2}} - \frac{a^2}{56\sqrt{2}} - \frac{a^2}{9.32\sqrt{2}} - \frac{5a^2}{11.512\sqrt{2}}\ \&c.\right)$$

$$= ab\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{5\sqrt{2}} - \frac{1}{9.32\sqrt{2}} - \frac{5}{11.512\sqrt{2}}\ \&c.\right).$$

Si multiplico arriba y abaxo por $\sqrt{2}$, el primer término de la serie $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ será $\frac{2\sqrt{2}.\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{2.2}{3\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$, con lo que, la expresion general quedará reducida á $\frac{ab}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{56} - \frac{1}{288} - \frac{1}{1126}\ \&c.\right)$ Finalmente, si se multiplica por 4 toda esta area, saldrá el valor de la area de toda la elipse.

652 Cuestion 5. *Quadrar el quadrante de circulo.*

El circulo es una elipse cuyos dos exes son iguales; luego si en el valor hallado del quadrante elíptico hacemos $b = a$, la area del quadrante circular será $= \frac{aa}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{56} - \frac{1}{288} - \frac{1}{1126}\ \&c.\right)$ Luego la area del circulo es á la de la elipse $:: \frac{aa}{\sqrt{2}} : \frac{ab}{\sqrt{2}} :: a : b$, esto es, como el exe mayor al menor, quando el diámetro del círculo es igual al exe mayor de la elipse.

Por consiguiente, si el círculo se pudiera quadrar cabalmente, y llamáramos su area A, la area de la elipse será $= \frac{Ab}{a}$, y por lo mismo la quadratura de la elipse pende de la quadratura del círculo.

100. Ya que $CA = a$, será $2a$ el diámetro del círcu-
lo

lo AGB; y si suponemos $1 : \pi$ la razon entre el diámetro y la circunferencia, la circunferencia del circulo AGB será el quarto término de la siguiente proporcion $1 : \pi :: 2a : \pi 2a$, y la area del mismo círculo será $= \pi 2a \times \frac{a}{2} = \pi a^2$, y la llamaremos C. Luego por lo probado poco ha $a : b :: \pi a^2 : \pi ab =$ la area de la elipse, la qual es igual al rectángulo de los semiexes multiplicado por $\pi = 3.141$ &c.

Llamemos R el radio del círculo AGB; será $\pi a^2 = \pi RR$; y como πa^2, superficie del círculo cuyo radio $= a$, es igual á πab, superficie de la elipse cuyos semiexes son a y b, será $\pi RR = \pi ab$, ó $RR = ab$, y $R = \sqrt{ab}$. Luego la superficie de la elipse es igual á la superficie de un círculo cuyo radio es medio proporcional á los dos semiexes.

Por la naturaleza del círculo $DF = \sqrt{(2ax - xx)}$, y por la propiedad de la elipse $DR = \frac{b}{a}\sqrt{(2ax - xx)}$; luego $DF : DR :: \sqrt{(2ax - xx)} : \frac{b}{a}\sqrt{(2ax - xx)} :: 1 : \frac{b}{a} :: a : b$. Esto supuesto,

Si desde un punto qualquiera H del exe de la elipse, se tiran las líneas HR, HF á las ordenadas DR, DF, que tienen comun la abscisa BD, los sectores FHB, RHB estarán en razon de BC á CE, ó de a á b. Porque segun probamos antes $BFD : BRD :: a : b$; y el triángulo FDH : triángulo $RDH :: a : b$. Luego $BFD : BRD :: FDH : RDH$; luego $BFD + FDH : BRD + RDH :: FBH : RHB$.

Si las abscisas se contasen desde el centro C, de modo que fuese $CD = x$, sería $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - xx)}$, y $RDCE = S.ydx = S.\frac{bdx}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$, cuya diferencial tampoco se puede integrar sino por series.

Fig.

Pero $\sqrt{(a^2-x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5}$ &c.

Luego $RDCE = S.\frac{bdx}{a}\sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{b}{a}\Big(ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5}$ — &c.) Si hacemos $x = a = CB$, tendremos la quadratura del quadrante elíptico, cuya area es $= \frac{b}{a}\big(a^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{40} - \frac{a^2}{112}$ &c.) $= ab\big(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112}$ &c.)

653 Cuestion 6. *Quadrar la area hyperbólica*
101. ABD, *y el sector hyperbólico* CAD, *estando en* C *el centro, y en* A *el vértice principal de la curva, y el origen de las abscisas.*

Sea, pues, AB, x; BD, y; CA, a; su conjugado b; será por lo mismo (329) $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax+xx)$, $y = \frac{b}{a}\sqrt{(2ax+xx)}$, y la area hyperbólica $= S.ydx = S.\frac{b}{a}dx\sqrt{(2ax+xx)} = S.\frac{b}{a}.x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{(2a+x)}$, cuya diferencial solo por series puede integrarse. Pero $\sqrt{(2a+x)} = \sqrt{2a} + \frac{x}{2\sqrt{2a}} - \frac{x^2}{16a\sqrt{2a}} + \frac{x^3}{64a^2\sqrt{2a}} - \frac{5x^4}{1024a^3\sqrt{2a}}$ + &c.

Luego $S.\frac{b}{a}x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{b}{a}S.\Big(x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{2a} + \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{2\sqrt{2a}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}dx}{16a\sqrt{2a}} + \frac{x^{\frac{7}{2}}dx}{64a^2\sqrt{2a}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}dx}{1024a^3\sqrt{2a}}$ + &c.) $= \frac{b}{a}\Big(\frac{2x^{\frac{3}{2}}\sqrt{2a}}{3} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5\sqrt{2a}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{7.8a\sqrt{2a}} + \frac{x^{\frac{9}{2}}}{9.32a^2\sqrt{2a}}$ —

Fig.

$-\frac{5x^{\frac{11}{2}}}{11.512a^4\sqrt{2a}}+$ &c.$\Big)$, cuya expresion, despues de practicar con $\sqrt{2a}$ lo mismo que antes, se reduce á $\frac{b}{\sqrt{2a}}\left(\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{x^{\frac{7}{2}}}{5a}+\frac{x^{\frac{9}{2}}}{128a^2}-\frac{5x^{\frac{11}{2}}}{5632a^3}\ \text{\&c.}\right)$

La area del sector CAB se hallará restando de la area del triángulo DBC la del espacio ABD.

654 Cuestion 7. *Quadrar la hypérbola equilátera entre sus asymtotas.*

Sea $xy = aa$ (352) la equacion de la hypér- 102.
bola, siendo $AG = x$, $GH = y$. Si hacemos $aa = 1$, será $xy = 1$, $y = \frac{1}{x}$, y $S.ydx = S.\frac{dx}{x} = L.x$ (617). Será, pues, $L.x + C$ el valor de la area $EAGHMD$, la qual será $= 0$ quando $x = 0$. Por consiguiente en este caso la tal area será $Lo + C = 0$, y por lo mismo $C = -L.o$, y la area será $L.x - L.o = L.\frac{x}{o}$ (1.237). Luego si hacemos $x = AL = b$, el espacio $EALMD$ será infinito, considerando o como una cantidad infinitamente pequeña.

Si contamos las abscisas desde el punto B, siendo $AB = 1$, y $aa = 1$, será $AC = 1+x$, y $GH = \frac{1}{1+x}$ (1.351). Luego será $ydx = \frac{dx}{1+x}$, y $S.ydx = S.\frac{dx}{1+x} = L.(1+x) = L.AC$. Todo esto manifiesta que los logaritmos hyperbólicos traen su origen de una hyperbola equilátera cuya potencia $= 1$. Si llamáramos aa la potencia de la hyperbola; AB, b; BG, x; GH, y, sacaríamos $CBGH = aaL(b+x) = L.AG \times aa$.

Claro está que entre unos mismos asymtotos se pueden trazar infinitas hypérbolas equiláteras, y que por tanto a una misma abscisa $b+x$ pueden cor-

Fig. responder infinitos espacios hyperbólicos ó logarítmicos. Si trazáramos v. gr. otra hypérbola ebf, cuya potencia fuese ee, probaríamos, discurriendo como poco ha, que el espacio $BGbe$ sería en esta hypérbola el logaritmo de $b+x$, cuyo espacio $= eeL.(b+x)$; luego $BGHC : BGbe :: aaL.(b+x) : eeL.(b+x) :: aa : ee$. Luego los logaritmos de un mismo número tomados en distintas hypérbolas son como las potencias de las mismas hypérbolas.

Aplicacion del cálculo integral á la rectificacion de las curvas.

655 Rectificar una linea curva es determinar quanto coge de largo tendida en plano, ó averiguar con que linea recta es igual la curva. Esto se logra considerando la curva AM como un polígono de una infinidad de lados, y el pequeño lado Mm como la diferencial del arco AM, porque $Mm = Am - AM$
103. $= dAM$. Despues se tira Mr paralela á AP, con lo que $Mm = \sqrt{[(Mr)^2+(rm)^2]} = \sqrt{(dx^2+dy^2)}$, y la integral de esta cantidad expresa el valor del arco AM. Para hallar esta integral, se diferencia la equacion de la curva, y despues de hallar con su auxilio el valor de dx en y, y dy, ó el valor de dy en x y dx, se le substituye en $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, en cuya expresion ya no queda entonces mas que x y dx^2, ó y y dy^2, se saca dx^2 ó dy^2 fuera del radical, y se integra. Luego $S.\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ es la fórmula general para la rectificacion de las curvas.

656 Lo primero que haremos ahora será rectificar el círculo, ó un arco suyo. Hemos apuntado (548 y sig.) diferentes expresiones de la diferencial de un arco, segun sea la linea trigonométrica suya que se considera seno, coseno, tangente, &c. al tiempo de buscar la diferencial del arco; y en sabien-

biendo que parte de la circunferencia es el tal arco, se hallará la rectificacion de toda ella. Claro está que conocido que sea el arco cuya diferencial expresa la fórmula, tambien por esta se podrá sacar el valor de la linea trigonométrica que llevare. Por consiguiente, puede buscarse por varios caminos la rectificacion del circulo, así como para averiguar el valor de las lineas trigonométricas de un arco suyo, es preciso resolver varias cuestiones. Fig.

657 Cuestion 1. *Dado que sea el seno de un arco A, hallar el valor del arco en potencias del mismo seno.*

Llamemos u el arco AR; x su seno BR; $CR = R = 1$, con lo que la diferencial RE del arco será $du = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, ó $du = dx(1-xx)^{-\frac{1}{2}}$. Ya que $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{2.4} + \frac{3.5x^6}{2.4.6} + \frac{3.5.7x^8}{2.4.6.8}$ &c. será $du = dx + \frac{x^2dx}{2} + \frac{3x^4dx}{2.4} + \frac{3.5x^6dx}{2.4.6} + \frac{3.5.7x^8dx}{2.4.6.8}$ &c. de donde, integrando, sacaremos 99.

$$u = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{3x^5}{2.4.5} + \frac{3.5x^7}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7x^9}{2.4.6.8.9} \text{ \&c.}$$

cuya expresion, despues de substituir A en lugar de u, y sen A en lugar de x, se convierte en $A = \text{sen } A + \frac{\text{sen}^3 A}{2.3} + \frac{3 \text{ sen}^5 A}{2.4.5} + \frac{3.5 \text{ sen}^7 A}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7 \text{ sen}^9 A}{2.4.6.8.9}$, sácase de aquí que

$$A - \text{sen } A = \frac{\text{sen}^3 A}{2.3} + \frac{3 \text{ sen}^5 A}{2.4.5} + \frac{3.5 \text{ sen}^7 A}{2.4.6.7} + \text{ \&c.}$$

cuya equacion está diciendo, que quando el arco es infinitamente pequeño, la diferencia que va del arco á su seno consiste en infinitamente pequeños de tercera, quinta orden, &c. y que por lo mismo se puede tomar, sin recelo de error substancial, el arco por el seno.

De la equacion $A = \text{sen } A$ &c. sacaremos el valor del arco en potencias de su coseno, porque el coseno del arco A es el seno de su complemento $90^\circ - A$, $\mathrm{sen}(90^\circ - A) = \cos A$ (I. 701); y como

$$90^\circ - A = \mathrm{sen}(90^\circ - A) + \frac{\mathrm{sen}^3(90^\circ - A)}{2.3} + \frac{1.3\,\mathrm{sen}^5(90^\circ - A)}{2.4.5}\ \&c.$$

será tambien

$$A = 90^\circ - \cos A - \frac{\cos^3 A}{2.3} - \frac{3\cos^5 A}{2.4.5} - \frac{3.5\cos^7 A}{2.4.6.7}\ \&c.$$

658 Cuestion 2. *Dada la tangente, hallar en potencias suyas el valor del arco.*

Queda probado (552) que si hacemos el arco $= u$, su tangente $= x$, y $R = 1$, $du = \frac{dx}{1+xx}$, ó $du = dx(1+xx)^{-1}$. Por la fórmula (416) sale $(1+xx)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 -$ &c. será, pues, $du = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx$ &c. de donde, despues de executada la integracion y las substituciones correspondientes, sale

$$A = \mathrm{tang}\,A - \frac{\mathrm{tang}^3 A}{3} + \frac{\mathrm{tang}^5 A}{5} - \frac{\mathrm{tang}^7 A}{7} + \frac{\mathrm{tang}^9 A}{9}\ \&c.$$

Si en esta equacion hacemos substituciones análogas á las que hemos hecho en la equacion de antes (657), sacarémos la siguiente equacion

$$90^\circ - A = \mathrm{tang}(90^\circ - A) - \tfrac{1}{3}\mathrm{tang}^3(90^\circ - A) + \tfrac{1}{5}\mathrm{tang}^5(90^\circ - A)\ \&c.$$

y para expresion del arco en potencias de su tangente, esta serie

$$A = 90^\circ - \cot A + \frac{\cot^3 A}{3} - \frac{\cot^5 A}{5} + \frac{\cot^7 A}{7} - \frac{\cot^9 A}{9} + \&c.$$

659 Cuestion 3. *Dado que sea el valor de un arco, hallar en potencias suyas el valor de su seno.*

Sabemos que siendo u un arco, x su seno, y $R = 1$, es $du = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, ó $du\sqrt{(1-xx)} = dx$; quadrándolo todo, $du^2(1-xx) = dx^2$, cuya equacion despues de diferenciada, haciendo constante la du, dá $-2xdxdu^2 = 2dx\,ddx$, ó $-xdu^2 = ddx$. Quando el arco es infinitamente pequeño es igual con su seno (657), quiero decir que entonces $x = u$. Podémos, pues, hacer

$x = u + bu^3 + cu^5 + eu^7 +$ &c. y tendrémos

$dx = du + 3bu^2du + 5cu^4du + 7eu^6du +$ &c.

$ddx = 2.3budu^2 + 4.5cu^3du^2 + 6.7eu^5du^2 +$ &c.

Si en la equacion $-xdu^2 = ddx$, substituimos en lugar de x su valor, y en lugar de ddx el suyo, tendrémos $-udu^2 - bu^3du^2 - cu^5du^2 - eu^7du^2$ &c. $= 2.3budu^2 + 4.5cu^3du^2 + 6.7eu^5du^2 +$ &c. de donde se sacará $b = -\frac{1}{2.3}$, $c = \frac{1}{2.3.4.5}$, $e = -\frac{1}{2.3.4.5.6.7}$ &c. cuyos valores, despues de substituidos en $x = u + bu^3 + cu^5 + eu^7 +$ &c. A en lugar de u, y sen A en lugar de x, sale

$$\text{Sen } A = A - \frac{A^3}{2.3} + \frac{A^5}{2.3.4.5} - \frac{A^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{A^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} \text{ \&c.}$$

Esta expresion tambien dá

$$A - \text{sen } A = \frac{A^3}{2.3} - \frac{A^5}{2.3.4.5} + \frac{A^7}{2.3.4.5.6.7} - \text{ \&c.}$$

de la qual tambien se saca la misma consequencia de antes (657); es á saber que quando el arco es infinitamente pequeño, se confunde con su seno.

Si en esta última equacion, y en la de antes (657) substituimos $\frac{1}{2}A$ en lugar de A, y las multiplicamos ambas por 2, sacarémos las dos expresiones siguientes de la diferencia que va del arco á su cuerda

$$A - 2 \text{ sen } \tfrac{1}{2}A = \frac{\text{sen}^3 \frac{1}{2}A}{3} + \frac{3 \text{ sen}^5 \frac{1}{2}A}{4.5} + \frac{3.5 \text{ sen}^7 \frac{1}{2}A}{4.6.7} \text{ \&c.}$$

$$A - 2 \text{ sen } \tfrac{1}{2}A = \frac{A^3}{2.3.4} - \frac{A^5}{4.4.2.3.4.5} + \frac{A^7}{4.4.4.2.3.4.5.6.7} \text{ \&c.}$$

660. Cuestion 4. *Dado el arco A, hallar en potencias suyas el valor de su tangente.*

Ya que dada tang A es

$$A = \text{tang } A - \frac{\text{tang}^3 A}{3} + \frac{\text{tang}^5 A}{5} - \text{ \&c. } (656),$$

y ahora dado A, hemos de hallar tang A, hemos de acudir al regreso de las series. Porque si llamamos $A = u$, y llamamos tang $A = y$, la cuestion

se

se reduce á que en el supuesto de ser

$$m = ay + cy^3 + ey^5 + gy^7 + iy^9 + \&c.$$

saquemos el valor de y en m. Haremos, pues,

$$y = Am + Cm^3 + Em^5 + Gm^7 + Im^9 + \&c.$$

Por consiguiente será

$$m = \begin{cases} ay = aAm + aCm^3 + aEm^5 + aGm^7 + aIm^9 + \&c. \\ cy^3 = \qquad cA^3 + 3cA^2C + 3cA^2E + 3cA^2G + \&c. \\ \qquad\qquad + 3cAC^2 + 6cACE + \&c. \\ \qquad\qquad + cC^3 + \&c. \\ ey^5 = \qquad eA^5 + 5eA^4C + 5eA^4E + \&c. \\ \qquad\qquad + 10eA^3C^2 + \&c. \\ + gy^7 = \qquad + gA^7 + 7gA^6C + \&c. \\ iy^9 = \qquad iA^9 + \&c. \end{cases}$$

Si sacamos ahora los valores de las indeterminadas A, C, E, G, I &c. expresados en a, b, c, e, g, i &c. y los substituimos en $y = Am + Cm^3 + Em^5 + Gm^7$ &c. saldrá el valor de y = tang A. Los valores de a, c, e, g, i los hemos de sacar de la equacion A = tang $A - \frac{1}{3}$ tang$^3 A$, &c. por la qual consta que $a = 1$, $c = -\frac{1}{3}$, $e = \frac{1}{5}$ &c. substituyendo finalmente A en lugar de m, tang A en lugar de y, saldrá por último

$$\text{tang } A = A + \frac{A^3}{3} + \frac{2A^5}{3.5} + \frac{17A^7}{3.3.5.7} + \frac{62A^9}{3.3.5.7.9} \&c.$$

661 Cuestion 5. *Dado el arco, hallar en potencias suyas el valor de su coseno.*

Sabemos que tang $= \frac{\text{sen.}}{\text{cos.}}$; luego cos $= \frac{\text{sen.}}{\text{tang.}}$. Luego para sacar cos A, partiremos por las reglas del Algebra la serie (659) por la serie (660), y hecha la division, saldrá

$$\text{Cos } A = 1 - \frac{A^2}{2} + \frac{A^4}{2.3.4} - \frac{A^6}{2.3.4.5.6} + \frac{A^8}{2.3.4.5.6.7.8} - \&c.$$

Con el auxilio de esta serie y de la antecedente se podrá calcular el coseno y la tangente de todo arco, tomando el arco en la tabla. Pero como es-

tas

tas series son tanto mas convergentes, quanto menor es el arco, quando se busque el seno de un arco que pase de 45°, mejor será calcular el coseno de su complemento por la serie. Y quando se haya de calcular el coseno de un arco que pasa de 45°, mejor será apelar á la serie (659).

66a La serie (661) da la siguiente expresion del seno verso

$$1 - \cos A = \frac{A^2}{2} - \frac{A^4}{2.3.4} + \frac{A^6}{2.3.4.5.6} - \&c.$$

de la qual se infiere, que quando A es infinitamente pequeño, el coseno discrepa del radio cantidades infinitamente pequeñas de segundo, quarto, &c. grado.

Si el arco A fuese negativo, no por eso mudará de signo término alguno de la serie (661), porque en cada uno de ellos hay una potencia par de A. Por el contrario, si A es negativo, los términos de las series (657) y (660) mudarán de signo. De donde inferiremos que: el seno, la tangente, y por consiguiente la cotangente de un arco negativo son negativos, y su coseno es positivo; quiero decir que en todos los casos su seno, su tangente, y su cotangente tienen un signo contrario al que tienen en las tablas, y que su coseno guarda el mismo signo que les da la tabla.

663 Todas las series sacadas pueden servir para rectificar el círculo; pero haremos aplicacion de una de ellas no mas, y será la (657), por cuyo medio buscaremos quanto coge tendido en plano el arco de 30° v. gr. como sen $30° = \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}$ (1.705) con hacer en la fórmula las substituciones correspondientes, saldrá

$$\text{Arco } 30° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{3}{2.4.5.2^5} + \frac{3.5}{2.4.6.7.2^7} + \frac{3.5.7}{2.4.6.8.9.2^9} \&c.$$

Executaremos las divisiones indicadas en cada tér-

término hasta ocho decimales para sacar seis cabales, y saldrá

$$\frac{1}{2} = 0,5$$
$$\frac{1}{48} = 0,02083333$$
$$\frac{3}{1280} = 0,00234375$$
$$\frac{15}{43008} = 0,00034877$$
$$\frac{105}{1769472} = 0,00005934$$
$$\frac{945}{86507520} = 0,00001092$$
$$\frac{10395}{4907335680} = 0,00000212$$

$$\text{Suma} = 0,523598$$

sacamos, pues, que el arco de $30^{\circ} : R :: 0,523598 : 1$. Los dos últimos guarismos de la suma se desechan porque no son cabales. El valor del arco se podria sacar tan cabal y con quantas decimales se quisiera, prosiguiendo las divisiones con mas términos de la serie, cuya ley es muy patente. Este es un trabajo hecho ya; multiplicando por 6 el valor del arco de 30°, se ha sacado el de la semicircunferencia hasta 127 decimales, quiero decir que se ha hallado el arco de $180^{\circ} = R \times 3,141592\ 653589\ 793238\ 462643\ 383279\ 502884\ 197169\ 399375\ 105820\ 974944\ 592307\ 816406\ 286208\ 998628\ 034825\ 342117\ 067982\ 148086\ 513272\ 306647\ 093844\ 6+$. Luego la semicircunferencia del círculo tendida en plano es igual á tres veces el radio, mas una parte del mismo radio cuyo valor expresa la decimal que le acompaña. El último guarismo de esta decimal no es el límite del valor hallado, porque se pueden sacar muchos mas al infinito, prosiguiendo la operacion, todo lo qual es una conseqüencia de la equacion (657), cuyo segundo miembro es inde definito. Esto manifiesta que solo por aproximacion, bien que continuada quanto se quiera, se puede sacar la razon del diámetro á la circunferencia.

Una vez hallado el valor de un arco, se puede señalar sin mas operaciones que las de la arismética el de todos los demas. La mitad del valor del arco de 180° será el valor del arco de 90°, su tercio será el valor del arco de 60° &c.

664 Por este camino se ha formado la tabla puesta al fin de este tomo, la qual da en partes del radio el valor de un arco de un número qualquiera de grados, minutos, segundos y décimas, centésimas, &c.

Si se quiere con siete decimales la expresion de un arco de 6° 22′ 17″ 3; se tomarán en la tabla las cantidades siguientes, con una ó dos decimales mas, para sacar cabal la suma

El arco de 6° =	0,104719755
20′ = ...	5817764
2′	581776
10″	48481
7″	33937
$\frac{3}{10}$ ó 0″,3	1454
Valor del arco de 6° 22′ 17″,3 =	0,1112032

665 Quando se quiera hacer uso de la fórmula (659) para hallar el valor del seno de un arco determinado, se le podrá dar esta forma

$$\text{sen } A = A - B + C - D + E - \&c.$$

sal-

saldrá $B = A^2 \frac{1}{6} A \qquad C = A^2 \frac{1}{20} B$

$$D = A^2 \frac{1}{42} C \qquad E = A^2 \frac{1}{72} D.$$

Por donde se echa de ver que basta calcular sola una vez A^2, única potencia de A que lleva ahora cada término, y que los divisores son acomodados y muy pequeños. Hay todavia mas: dispongo verticalmente estos quatro primeros divisores, como sigue, tomo sus diferencias primeras y segundas; y como las últimas salen constantes, prosigo las tres columnas, guardando la ley que siguen, y de la derecha á la izquierda.

Divisores.	*Dif. primeras.*	*Dif. segundas.*
6		
	 14	
20		 8
	 22	
42		 8
	 30	
72		 8
	 38	
110		 8
	 46	
156		 8
	 54	
210	&c.	

Mediante esta consideracion se puede continuar la serie, y para sacar, sin necesidad de la multipliplicacion, los partidores correspondientes á los valores de F, G &c. y sin mas auxilio que el de la regla de sumar, nos guiarémos por las columnas. Aqui se ve patentemente quanto merecen atenderse las diferencias constantes, por lo muy socorridas que son en muchos cálculos.

666 Apliquemos ahora la equacion para hallar el seno de un arco, v. gr. el de 30°. Por la tabla el arco de 30° = 0,5235987756, cuyo quadrado hemos de formar para sacar los valores de los diferentes términos de la serie. Como A es una cantidad decimal, harémos la operacion por el método abreviado de multiplicar las decimales (I. 161).

$$\begin{array}{r}
A = 0,5235987756 \\
0,5235987756 \\
\hline
0,2617993878 \\
1047197551 \\
15707963 \\
2617994 \\
471239 \\
41888 \\
3665 \\
367 \\
26 \\
3
\end{array}$$

De

De donde se saca sumando unos con otros los valores de A^2

$$\left\{\begin{aligned} A^2 &= 0{,}2741556778 \\ 2A^2 &= 0{,}5483113556 \\ 3A^2 &= 0{,}8224670334 \\ 4A^2 &= 1{,}0966227112 \\ 5A^2 &= 1{,}3707783890 \\ 6A^2 &= 1{,}6449340668 \\ 7A^2 &= 1{,}9190897446 \\ 8A^2 &= 2{,}1932454224 \\ 9A^2 &= 2{,}4674011002 \end{aligned}\right.$$

Estos múltiplos de A^2, preparados como aquí se ve abrevian mucho el cálculo de la serie (665). Con este motivo prevenimos de paso que siempre que haya de servir un mismo factor constante, será de mucho alivio tenerle así preparado. Para manifestar en el caso presente la utilidad de esta preparacion, $\frac{1}{6}A = 0{,}0872664626$, por cuya cantidad se ha de multiplicar el valor de A^2, y saldrá el valor de B. Pero como acabamos de multiplicar el valor de A^2 por cada uno de los nueve guarismos de la Aritmética, tenemos ya á mano todos sus productos por cada uno de los guarismos del valor de $\frac{1}{6}A$. Solo falta asentar estos productos particulares, como sigue, por el orden que corresponde, apuntando, con el fin de precaver todo error, cada guarismo valor del $\frac{1}{6}A$ á medida que se escriben aquí sus productos correspondientes

$$
\begin{array}{rr}
0,08A^2 = & 0,02193245422 \\
0,007A^2 = & 0,00191908974 \\
0,0002A^2 = & 0,00005483114 \\
0,00006A^2 = & 0,00001644934 \\
\&c. & 164493 \\
 & 10966 \\
 & 1645 \\
 & 55 \\
 & 16 \\
\hline
\end{array}
$$

$$B = 0,0239245962$$

Partiendo despues B por 20, se sacará del mismo modo, con sola una operacion de sumar, el producto del cociente por A^2, cuyo producto será $C = 0,0003279532$. Por el mismo camino se hallará, bien que mas pronto, el valor de D y E. Aquí van los términos, separados los positivos de los negativos.

$$
\begin{array}{ll}
A = 0,5235987756 & -B = 0,0239245962 \\
C = 0,0003279532 & -D = 0,0000021407 \\
 & \overline{} \\
E = 0,0000000082 & -\ 0,023926737 \\
\hline
\end{array}
$$

$+0,523926737$ Suma de los térm. posit.
$-0,023926737$ Suma de los negativos.

Luego sen $30° = 0,5000000000$, Valor cabal.

667 Cuestion 6. *Rectificar la parábola cuya equacion es* $2ax = yy$.

La diferencial de esta equacion es $adx = ydy$, Fig. la qual dá $dx^2 = \frac{yydy^2}{aa}$. Si este valor de dx^2 se substituye en su lugar en la fórmula $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, saldrá $\frac{dy}{a}\sqrt{(yy+aa)} = du$, llamando u el arco de la curva por rectificar. Luego $dy \times \sqrt{(yy+aa)} = adu$, y $S.adu = au = S.dy\sqrt{(yy+aa)}$, cuya equacion está diciendo que la rectificacion de la parábola pende de la quadratura de la hypérbola.

Sea AMN la parábola propuesta, en cuyo vér-
104. tice sea tangente la AQ. Si llamamos AP, y, será $au = S.dy\sqrt{(y^2+a^2)}$. Tiremos á la AP la perpendicular $AA' = a$, y tracemos una hypérbola equilátera $N'A'P'$, cuyo centro esté en A, y el vértice en A'. Desde el punto P tirémosle á la parábola la ordenada PM, prolongándola hasta que encuentre la hypérbola en P'; será $AA'P'P = S.dy\sqrt{(y^2+a^2)}$; luego $au = AA'P'P$; por consiguiente el arco AM de la parábola será igual al espacio hyperbólico $AA'P'P$ dividido por la mitad del parámetro.

668 Cuestion 7. *Rectificar el arco de elipse*
105. FM, *en el supuesto de ser* AD $= a$, AF $= b$, AB $= x$, BM $= y$, FM $= u$.

La equacion de la curva dá $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, de la qual sale $dy = \frac{-bxdx}{a\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Será, pues, el arco elíptico, ó $S.du = S.dx\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = S.dx\sqrt{\left(1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}\right)} = S.dx\,\frac{\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2-x^2)}}$, cuya integral solo por series se puede sacar.

669 Cuestion 8. *Rectificar el arco* FM *de hypérbola.*
106. En el supuesto de ser el primer semiexe $AF = a$, el segundo semiexe $AB = b$, $AP = x$, $PM = y$, la equacion de la curva dará $y = \frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)}$, y saldrá $FM = S.dx\,\frac{\sqrt{(a^4 - (a^2+b^2)x^2)}}{a\sqrt{(x^2-a^2)}}$.

Apli-

Fig.

Aplicacion del cálculo integral para medir la solidez de los cuerpos.

670 Para medir la solidez de los cuerpos, podemos suponer que se componen de rebanadas infinitamente delgadas y paralelas unas á otras, ó de una infinidad de pirámides cuyos vértices se juntan todos en un punto comun. Quando se consideran como formados de rebanadas infinitamente delgadas y paralelas, la diferencia de las dos superficies opuestas que terminan cada rebanada es infinitamente pequeña, y por lo mismo se debe omitir én los cálculos, si queremos dar á entender que dicha rebanada es infinitamente delgada. De donde resulta que su solidez se ha de expresar con el producto de la una de sus dos bases opuestas por su 107.
altura infinitamente pequeña. Si nos figuramos v.gr. que la pirámide $SABC$ se compone de rebanadas como $abcfeg$ infinitamente delgadas, podremos expresar su solidez con el producto de la superficie abc ó de la superficie gef por el grueso de la rebanada.

Si consideramos el sólido de revolucion engendrado de la curva AM dando la vuelta al rededor de la recta AP, como compuesto de rebanadas pa- 108.
ralelas é infinitamente delgadas; habremos de expresar la medida de cada rebanada por el producto de la superficie del circulo cuyo radio es PM, por el grueso Pp.

671 Todo esto sentado, declaremos como se ha de valuar la solidez de los cuerpos. Consideraremos cada rebanada como la diferencial del sólido, porque en la realidad $MmlL = AmlA - AMLA = d(AMLA)$; y despues de determinada la expresion algebráica de dicha rebanada, se integrará.

672 Propongámonos medir v.gr. la pirámide $SABC$. 107.

 Su-

Fig. Supondremos que la superficie ABC de su base es igual á la cantidad conocida bb, y su altura $ST = a$; llamaremos x la distancia St de una rebanada qualquiera al vértice S, y será dx el grueso de la rebanada. Por lo que mira á la superficie abc nos la dará esta proporcion (I.640 3.º) $(ST)^2 : (St)^2 :: ABC : abc$, esto es, $aa : xx :: bb : abc = \frac{bbxx}{aa}$; será, pues, la solidez de la rebanada igual á $\frac{bbxxdx}{aa}$, cuya integral es $\frac{bbx^3}{3aa} + C$, ó solamente $\frac{bbx^3}{3aa}$, si contamos la solidez desde el vértice S. Esta cantidad que expresa la solidez de una porcion piramidal qualquiera $Sabc$ es lo mismo que $\frac{bbxx}{aa} \times \frac{x}{3}$, lo propio que $abc \times \frac{St}{3}$, cuyo valor concuerda con el que sacamos tiempos ha (I.645).

672 Por lo que mira á los sólidos de revolucion, se puede sacar una fórmula general que exprese la rebanada elemental ó diferencial. Sea $r : c$ la razon entre el radio y la circunferencia; la circun-

108. ferencia cuyo radio es PM ó y nos la dará esta proporcion $r : c :: y : \frac{cy}{r}$. Si multiplicamos este valor $\frac{cy}{r}$ de la circunferencia cuyo radio es PM, por $\frac{1}{2}y$ mitad del radio, será $\frac{cy^2}{2r}$ la superficie (260), cuyo producto por el grueso Pp ó dx es $\frac{cy^2dx}{2r}$, la qual es la expresion del elemento de la solidez de todo el sólido de revolucion.

Y como en el supuesto de ser $r : c$ la razon entre el radio y la circunferencia, ha de ser (260) $\frac{c}{2r}$ la area del circulo cuyo radio $= 1$; si llamamos p esta area, y substituimos p en la fórmula en lugar de $\frac{c}{2r}$, se transformará en $pyydx$. De donde inferiremos que en el supuesto de ser p la area del circulo cuyo radio $= 1$, será pyy la area de un cir-

círculo cuyo radio $= r$, pues $r : c :: y^2 : p : pyy$ (580). Fig.
Para aplicar esta fórmula á los casos particulares, se substituirá por y su valor en x sacado de la equacion de la curva generatriz AM, y se integrará.

673. Cuestion 1. *Hallar la solidez del cono engendrado por el triángulo rectángulo* ABD, *dando la vuelta al rededor del lado* AB.

Llamemos AB, x; BD, y; y u el ángulo BAD. Si tomamos AD por radio, tendremos $\cos u : \operatorname{sen} u$ 109.
$:: x : y = \frac{x \operatorname{sen} u}{\cos u}$, y por consiguiente $yy = \frac{(\operatorname{sen} u)^2}{(\cos u)^2} xx$. Luego el cono será $\frac{c}{2r} \cdot S.\frac{\operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u} xxdx = \frac{c}{2r} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u} \cdot \frac{x^3}{3}$
$= \frac{c}{2r} \cdot \frac{xy^2}{3}$ cuya cantidad (I. 646) es la tercera parte del cilindro que tiene una misma base y altura que él.

Por el mismo camino sacaríamos que el cono engendrado por el mismo triángulo dando la vuelta al rededor del exe ó lado BD, sería $\frac{c}{2r} \cdot \frac{x^2 y}{3}$. Luego el primer cono será al segundo $y : x :: \operatorname{sen} u : \cos u$.

674. Cuestion 2. *Hallar la solidez de un conoide parabólico, ó de un paraboloide.*

Llámase *conoide* todo cuerpo formado por la revolucion de la area de alguna de las tres secciones cónicas dando la vuelta al rededor del exe, de la ordenada, ó de la tangente de dicha seccion. Quando el sólido resulta de la revolucion de una semiparábola girando al rededor de su exe, el sólido se llama *conoide parabólico* ó *paraboloide*; se llama *conoide elíptico* ó *elipsoide*, si se origina de la revolucion de una semielipse al rededor del uno de sus exes; quando la area elíptica dá la vuelta al rededor del exe mayor de la curva, engendra el *elipsoide prolongado*, y si dá la vuelta al rededor del exe menor, engendra el *elipsoide aplanado*. El elipsoide, sea el que fuere, se llama tambien *esferoide*. Finalmente, quando el só-

Fig. lido resulta de la revolucion de una area hyperbólica al rededor del uno de sus exes, se llama *conoide hyperbólico* ó *hyperboloide*. Todo esto presupuesto, determinaremos la solidez del paraboloide.

Como la equacion de la parábola es $yy = ax$, la fórmula $\frac{cyydx}{2r}$ se transformará en $\frac{caxdx}{2r}$, cuya integral es $\frac{caxx}{4r} + C$, ó $\frac{cax}{2r} \times \frac{x}{2} + C$. Si queremos expresar la solidez del paraboloide desde el punto A, como en este supuesto el sólido es cero, quando x es cero, la constante C ha de ser cero, y la solidez se

108. reduce á $\frac{cyy}{2r} \times \frac{x}{2}$; pero $\frac{cyy}{2r}$ expresa (672) la superficie del circulo cuyo radio fuese PM, ó la base del paraboloide $AMLA$; luego el paraboloide es la mitad del producto de su base por su altura x; luego es la mitad del cilindro de igual base y altura que él.

Si quisiéramos apreciar la solidez desde un punto dado K, tal que $AK = e$; como en este supuesto sería cero la solidez en el punto K, esto es, quando $x = e$, la integral general ha de ser cero en este caso, quiero decir que $\frac{cae^2}{4r} + C$, la qual será $\frac{cae^2}{4r} - C$ ha de ser cero; luego $\frac{cae^2}{4r} + C = 0$, y $C = -\frac{cae^2}{4r}$; luego la solidez de una porcion de paraboloide comprendida entre dos planos paralelos distantes respectivamente x y e del vertice, es $\frac{cax^2}{4r} - \frac{cae^2}{4r}$.

675 Cuestion 3. *Hallar la solidez del elipsoide prolongado.*

110. Si llamamos el exe mayor AB, a; el menor CD, b; AP, x; PM, y, la equacion de la elipse (295) será $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$. Por consiguiente la fórmula $\frac{cyydx}{2r}$ se transformará en $\frac{cbb}{2raa}dx(ax - xx)$ ó $\frac{cbb}{2raa}(axdx - x^2dx)$, cuya integral es $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$ +

$+C$, ó solamente $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)$, si contamos la solidez desde el punto A.

Para sacar la solidez de todo el esferoide, haremos $x = AB = a$, y saldrá $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}\right)$ que se reduce á $\frac{cabb}{12r} = \frac{cbb}{4r}\times\frac{1}{3}a$, ó á $\frac{cbb}{8r}\times\frac{2}{3}a$; pero $\frac{cbb}{8r}$ expresa la superficie del círculo cuyo diámetro es $b = CD$, y por lo mismo $\frac{cbb}{8r}\times a$ es la solidez del cilindro circunscripto al elipsoide; luego una vez que, por lo hallado, la solidez del elipsoide es $\frac{cbb}{8r}\times\frac{2a}{3}$, hemos de inferir que la solidez del elipsoide es los $\frac{2}{3}$ del cilindro circunscripto. Y como la esfera es lo mismo que un elipsoide cuyos dos exes son iguales, será tambien la esfera los $\frac{2}{3}$ del cilindro circunscripto.

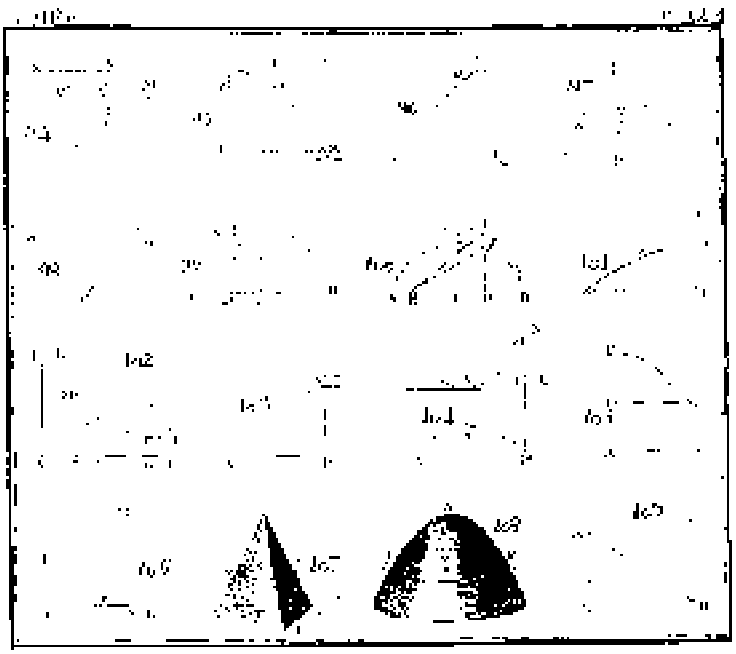
676 Por el mismo camino hallaríamos que el elipsoide aplanado es los $\frac{2}{3}$ del cilindro circunscripto; quiero decir, que en el supuesto de ser a y b los dos exes mayor y menor de la elipse generatriz, la solidez del esferoide aplanado será $\frac{caab}{12r}$; por consiguiente el esferoide prolongado es al aplanado $:: \frac{cabb}{12r} : \frac{caab}{12r} :: b : a$, como el exe menor es al mayor.

677 Si en lo propuesto (675) hubiéramos contado la solidez desde un punto determinado K, tal que $AK = e$, hubiéramos sacado la integral general $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)+C$; y como la solidez hubiera empezado desde el punto K, dicha integral sería cero en este punto, esto es, quando $x = e$. Pero entonces se transforma en $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ae^2}{2}-\frac{e^3}{3}\right)+C$; luego

Fig. $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ae^2}{2}-\frac{e^3}{3}\right)+C=0$, y por consiguiente $C=-\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ae^2}{2}-\frac{e^3}{3}\right)$, luego la expresion de la solidez contada desde el punto K es $\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)-\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ae^2}{2}-\frac{e^3}{3}\right)$. Esta es la expresion de una rebanada de esferoide comprehendida entre dos planos paralelos, perpendiculares al exe, entre los quales hay la distancia $x-e$.

678 Cuestion 4. *Hallar la solidez del hyperboloide* AMm *engendrado por la hypérbola dando la vuelta al rededor de su primer exe.*

La equacion de la curva (329) será $y^2=$
311. $\frac{b^2}{a^2}(ax+xx)$, siendo a el primer exe, y b el segundo, y $AP=x$. Pero (320) $a:b::b:p=\frac{b^2}{a}$; luego $b^2=ap$, y $\frac{b^2}{a^2}=\frac{p}{a}$. Luego la fórmula $\frac{c}{2r}S.y^2dx=\frac{cp}{2ra}\times S.(axdx+x^2dx)=\frac{cp}{2ra}\left(\frac{ax^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)$. Si hacemos $x=a$, el conoide hyperbólico será $\frac{c}{2r}\cdot\frac{p}{a}\left(\frac{5a^3}{6}\right)=\frac{c}{2r}\left(\frac{5pa^2}{6}\right)$. Si hacemos $r:c::a:\frac{ca}{r}$, será este quarto término la circunferencia del radio a. Si multiplicamos esta circunferencia por $\frac{a}{2}$, sacaremos $\frac{ca^2}{2r}$, superficie del círculo cuyo radio $=a$. Si multiplicamos esta superficie por $\frac{5p}{6}$, sacaremos un cilindro cuya altura será $\frac{5}{6}p$, el qual tendrá con otro cilindro de la misma base, y cuya altura sea a, la razon de $\frac{5p}{6}:a::5p:6a$. Por consiguiente un conoide hyperbólico cuya altura es igual al primer exe, es al cilindro de igual base y altura, como el quíntuplo del parámetro del primer exe es al séxtuplo del mismo exe. Si la hypérbola fue-



PAGINA EN BLANCO

fuese equilátera, será $p=a$, y el conoïde hyperbólico cuya altura es igual al exe, será al cilindro de la misma base y altura como 5 es á 6. Fig.

679 Cuestion 5. *Hallar la solidez del hyperboloide engendrado por la hypérbola dando la vuelta al rededor de su segundo exe.*

Sea CM la hypérbola generatriz, cuyo centro está en A; y llamemos AC, b; su semiconjugado AD, a; AP, x; PM, y. La propiedad de la curva (332) dará $yy=bb+\frac{bbxx}{aa}$; luego $pyydx$ será $=pbbdx+\frac{pbbxxdx}{aa}$, cuya integral $pbbx+\frac{pbb}{3aa}x^3$ $=\frac{2}{3}pbbx+\frac{1}{3}pyyx$, despues de substituido en lugar de $\frac{bb}{aa}xx$ su valor $yy-bb$ sacado de la equacion de la curva. Es, pues, $\frac{2}{3}pbbx+\frac{1}{3}pyyx$ la solidez del cuerpo que forma la area $CAPM$ al tiempo de dar la curva una vuelta. 112.

680 Cuestion 6. *Hallar el sólido formado por la revolucion de una hypérbola equilátera al rededor de su asymtoto.*

Sea MGN la hypérbola; AE, AL sus asymtotos. Para hallar el valor del sólido engendrado por la area $GFDB$ dando la vuelta al rededor de AB, llamarémos $AF=FG$, a; y será (352) $aa=xy$, ó $yy=\frac{a^4}{xx}$, cuyo valor substituido en $\frac{c}{2r}\int y^2dx$ dará $\frac{c}{2r}\int\frac{a^4dx}{xx}$. Y como la integral de $\frac{a^4dx}{xx}$ ó $a^4x^{-2}dx$ es $-\frac{a^4}{x}+C$, será la expresion del hyperboloide que buscamos $\frac{c}{2r}(C-\frac{a^4}{x})$. El valor de la constante C le hallarémos con suponer que el sólido es nulo quando $x=a$, en cuyo supuesto $C=a^3$; luego el valor cabal del sólido será $\frac{c}{2r}\times(a^3-\frac{a^4}{x})=\frac{c}{2r}(a^3.\frac{x-a}{x})$; de cuya fórmula inferirémos que si crecieren las abscisas en progre- 113.

Fig. gresion arismética, de modo que sean a, $2a$, $3a$ &c. resultarán sólidos iguales á $\frac{c}{2r}a^3$ multiplicados sucesivamente por 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ &c. Si fuese x infinita, el sólido será $\frac{c}{2r}a^3$, igual al cilindro engendrado en la misma revolucion por el rectángulo $AFGC$. Si fuese x menor que a, el sólido será negativo; é infinito, si fuese $x = 0$. Por lo que, el sólido infinitamente largo engendrado por el espacio $GFLN$ es finito, y el que engendra la area $FAEMF$ dando la vuelta al rededor de la asymtota AL es infinito.

681 Cuestion 7. *Hallar la solidez de un sólido parabólico* ACBDA *engendrado por la rotacion de una parábola* ACB *al rededor de la ordenada* AB.

114. Llamemos a la abscisa CM de la parábola dada; y b la semiordenada AM ó BM; y suponiendo que sea ENF una seccion del sólido paralela á DC, llamaremos u la distancia MN ó EP que hay entre la expresada seccion y la linea CD. Sentado esto, la propiedad de la parábola (265) dá $(AM)^2 : (EP)^2 :: CM : CP$, ó $bb : uu :: a : CP = \frac{auu}{bb}$; luego $EN = CM - CP = a - \frac{auu}{bb} = \frac{abb - auu}{bb}$, y por consiguiente será $p \times (EN)^2 = \frac{pa^2}{b^4} \times (b^4 - 2bbuu + u^4)$ la expresion de la area de la seccion EF (672). El producto de esta area por la diferencial du de MN dará $\frac{pa^2}{b^4}(b^4du - 2b^2u^2du - u^4du)$, elemento del sólido que buscamos. Luego su integral $\frac{pa^2}{b^4}(b^4u - \frac{2}{3}b^2u^3 + \frac{1}{5}u^5)$ será el valor de la mitad del sólido quando $u = b$, en cuyo supuesto dicha integral será $\frac{8pa^2b}{15}$.

682 Cuestion 8. *Hallar el valor del sólido*

115. ACBDA *engendrado por la rotacion del segmento de círculo* ACB *al rededor de la cuerda ú ordenada* AB.

Su-

Supongamos el centro en O, y llamemos el radio OE, r; OM, m; y EP, u. Será $OP = \sqrt{[(OE)^2 - (EP)^2]} = \sqrt{(rr - uu)}$, y $EN = OP - OM = \sqrt{(rr-uu)} - m$. Se transformará pues, en este caso la fórmula general (672) en $pdu(\sqrt{(rr-uu)}-m)^2 = pdu[r^2 - u^2 - m^2 - 2m\sqrt{(r^2-u^2)}] = pdu(r^2 - u^2 - m^2) - pdu(2m\sqrt{(r^2 - u^2)} - 2m^2)$. La integral de $pdu(2m\sqrt{(r^2-u^2)}-2m^2) = 2mp \times du \times [\sqrt{(rr-uu)}-m] = 2mp \times du \times EN$, será $2mp \times$ area $MNEC$; por consiguiente toda la integral será $pu(r^2 - m^2 - \frac{1}{3}u^2) - 2mp \times$ area $MNEC$, que es igual á $p \times MN \times [(AM)^2 - \frac{1}{3}(MN)^2] - 2p \times OM \times$ area $MNEC$, la qual en el supuesto de ser $MN = MA$ es $p \times \frac{2}{3}(AM)^3 - 2p \times OM \times ACM$, y será el valor de la mitad del sólido. Fig.

683 Cuestion 9. *Hallar la solidez del cuerpo prismoidal ó del prismoide* ABGB, *siendo los quatro lados* AH, AF, CH, CF *superficies planas, y* ABCD, EFGH *rectángulos dados, paralelos uno con otro.* 116.

Llamemos AB, a; AD, b; EH, c; EF, e; la altura perpendicular del sólido, h; x, la distancia, considerándola como variable, á que está del plano EG una seccion IL del sólido hecha con un plano paralelo á la base. Por el punto H supondrémos tirada en la superficie AH la HP paralela á EA, y en la cara BG la HN paralela á GC.

La naturaleza misma de la figura está diciendo que la seccion IL es un rectángulo, y de los triángulos semejantes HPB, HKM sacarémos $h : x :: PB = AB - EH : KM :: IM - EH$; los triángulos semejantes HBN, HMQ dán $h : x :: BC - HG : ML - HG$. De estas proporciones sacarémos $IM - EH = \frac{ax - cx}{h}$, y $ML - HG = \frac{bx - ex}{h}$; luego $IM = \frac{ax - cx}{h} + c$, y $ML = \frac{bx - ex}{h} + e$; y por consiguiente la area del rectángulo $IL = \frac{(a-c)(b-e)}{h^2}x^2$ +

Fig. $+ \frac{bc+ae-2ce}{h}x + ce$. Si multiplicamos esta expresion por dx, y sacamos despues la integral, resultará $\frac{(a-c)(b-e)x^3}{3h^2} + \frac{bc+ae-2ce}{2h}x^2 + cex$, valor del sólido $IFGL$, el qual quando $x = h$ se transforma en $\frac{(a-c)(b-e)h}{3} + \frac{(bc+ae-2ce)h}{2} + ceh = (2ab + ae + bc + 2ce) \times \frac{1}{6}h = [AB \times AD + EH \times EF + (AB + EH) \times (AD + EF)] \frac{1}{6}h$, valor de todo el prismoide.

Si $EF = e$ llegára á ser nula, las lineas EH, FG se confundirian una con otra, y los planos $AEHB$, $DFGC$ formarian un ángulo en la parte superior del sólido, el qual en este caso tendria la forma de la armadura de un texado; su solidez se sacaria muy facilmente, y sería $= (2ab+bc) \times \frac{1}{6}h$, ó $(2AB+EH) \times AD \times \frac{1}{6}h$.

Si fuese $EF = EH$, y $AD = AB$, el sólido seria un trozo de pirámide quadrada, y su solidez sería $= (a^2+ac+c^2) \times \frac{1}{3}h = [(AB)^2 + AB \times EH + (EH)^2] \times \frac{1}{3}h$; y si supusiéramos $EH = 0$, resultaria la solidez de toda la pirámide cuya base fuese $(AB)^2$, y la altura h, y cuya solidez seria $= (AB)^2 \times \frac{1}{3}h$.

684 Cuestion 10. *Hallar la solidez del sólido llamado* groin.

El sólido que los Autores Ingleses llaman groin es de tal configuracion, que todas las secciones paralelas á la base son quadrados, y las dos secciones hechas perpendicularmente á la base por el medio de los lados opuestos son semicírculos. Sea, pues, $cfeg$ una seccion paralela á la base; llamemos x la
115. distancia Ab que hay desde el vértice del sólido á dicha seccion, y supongamos $= a$ el radio $AB = BN$ de la seccion circular $ANBMA$ perpendicular á la base. En estos supuestos será $bn = \sqrt{(2ax - xx)}$ por la naturaleza del círculo (241), el lado del quadrado $cfeg$ será $2\sqrt{(2ax - xx)}$, y su area será $4(2ax$

$-xx$). Será, pues, el elemento de la porcion $cfegA$ Fig.
del groin $= 4dx(2ax-xx)$, cuya integral será $4ax^2 - \frac{4x^3}{3}$, y expresará el valor de dicha porcion. Luego si hacemos $x = a$, resultará $\frac{(2a)^3}{3}$, expresion de todo el sólido.

Por el mismo camino sacaríamos la solidez del groin, aun quando las secciones perpendiculares al medio de los lados opuestos en lugar de ser semicírculos, fuesen otras curvas qualesquiera, y las secciones paralelas á la base fuesen rectángulos y no quadrados.

684 Cuestion 11. *Hallar la solidez de la pirámide ó cono* ABCD *formado con tirar muchas lineas rectas desde todos los puntos de un plano dado* BDC *á un punto dado* A *fuera de dicho plano.*

Sea EFG una seccion paralela á BDC; llamemos x la distancia perpendicular AQ á que está dicha seccion del vértice A; a, la altura dada AP del sólido, y b, la area de la base BDC que suponemos dada. 118.

Por lo dicho (L640) los dos planos BDC, EFG son semejantes: y como las figuras semejantes tienen unas con otras la misma razon que los quadrados de sus lados homólogos (610), será $(AP)^2 : (AQ)^2 :: BDC : EFG$ ó $a^2 : x^2 :: b : EFG = \frac{bx^2}{a^2}$, cuya expresion multiplicada por la diferencial de la altura AQ, ó $\frac{bx^2dx}{a^2}$, será el elemento del sólido $AEGF = S.\frac{bx^2dx}{a^2} = \frac{bx^3}{3a^2} = \frac{ab}{3}$ quando $x = a$; será, pues, $\frac{ab}{3}$ la solidez del sólido propuesto.

685 Cuestion 12. *Hallar la solidez de una úngula cilíndrica.*

Llamamos *úngula cilíndrica* el sólido $ADBE$ 119.
que resulta de cortar un cilindro con un plano obli-

Fig. cuo á la base, el qual para escusar complicaciones, supondremos que pasa por el centro de su base.

Si nos figuramos la úngula cortada con planos paralelos infinitamente inmediatos unos á otros, y perpendiculares á la base AEB, las secciones serán triángulos semejantes cuyas superficies estarán en razon de los quadrados de sus lados homólogos (I. 568). Por consiguiente, si llamamos r el radio CE de la base; a, la altura DE; é y, la base PM del triángulo PMN, tendremos $CED : PMN :: rr : yy$; pero $CED = \frac{ar}{2}$; luego $PMN = \frac{ary y}{2rr} = \frac{ayy}{2r}$. Luego si llamamos AP, x; será dx el grueso de la rebanada terminada por dos planos paralelos, y será $\frac{ayydx}{2r}$ su valor. Como y es la ordenada del círculo que sirve de base, y es $yy = 2rx - xx$ (241), la rebanada elemental será $\frac{adx(2rx - xx)}{2r}$, ó $\frac{a}{2r}(2rxdx - xxdx)$, cuya integral, contando desde el punto A, es $\frac{a}{2r}(rx^2 - \frac{x^3}{3})$. Por consiguiente, sacaremos el valor de todo el sólido con hacer $x = 2r$, y resultará $\frac{a}{2r}(4r^3 - \frac{8r^3}{3})$, ó $\frac{2}{3}ar^2$, ó $\frac{ar}{2} \times \frac{4}{3}r$, ó $CED \times \frac{4}{3}AC$, ó finalmente $CED \times \frac{2}{3}AB$; quiero decir, los dos tercios del prisma cuya base fuese el triángulo CED, y la altura el diámetro AB.

687 Cuestion 13. *Hallar la solidez de una úngula cónica* EFGC *cortada en el cono* ABC *con un plano* EFG *que pasa por su base.*

120. Sea AD la altura perpendicular del cono; tirémos la AM perpendicular á HB, exe de la seccion FEG, y sea FAG otra seccion del cono hecha con un plano que pasa por el vértice A, y la linea FG.

Esto supuesto, los dos sólidos $CAFG$, $EAFG$, cuyas bases son respectivamente FCG, y FEG, serán

rán por lo probado poco ha (685) respectivamente $FCG \times \frac{1}{3}AD$, y $FEG \times \frac{1}{3}AM$; restando el segundo del primero, su diferencia $\frac{FCG \times AD - FEG \times AM}{3}$ será el valor de la úngula $CEFG$. Fig.

Si las bases FCG, FEG fuesen secciones cónicas, se buscarían sus areas por lo dicho (645 y sig.) y se resolvería la qüestion. Supongamos v. gr. la EH paralela á AB, la seccion FEG será (364) una parábola cuya area es (649) $\frac{2}{3}FG \times EH$: luego la solidez del segmento $EFGA = \frac{2}{9} \times FG \times EH \times AM$; y rebaxando esta cantidad del sólido $CFGA$, el residuo será el valor de la úngula.

Usos del cálculo integral para hallar las superficies curvas de los sólidos.

688 Tratarémos aqui de las superficies de los sólidos de revolucion. Para cuyo fin nos figurarémos que mientras la curva AM dá la vuelta al rededor de AP, su porcion Mm infinitamente pequeña traza una zona, faja ó porcion de cono truncado, la qual es el elemento de la superficie, é igual con el producto de Mm por la circunferencia cuyo radio fuese la perpendicular tirada desde el medio de Mm á AP, ó lo que es lo propio, una vez que Mm es infinitamente pequeña, por la circunferencia cuyo radio fuese MP ó el diámetro MM'. Luego si llamamos p la razon entre la circunferencia y el diámetro, la circunferencia del círculo cuyo diámetro fuese $MM' = 2y$, será $2py$. Será, pues, $2py\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ el elemento de la superficie de los sólidos de revolucion. 123.

Si llamáramos u la curva AM, sería $Mm = du$, y substituyendo en $2py\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, du en lugar de $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, la fórmula se convertiría en esta otra $2pydu$ que parece mas sencilla.

Caso-

Fig. 689 Cuestion 1. *Hallar la superficie del cono recto* ABD.

Nos figuraremos el cono cortado con un plano MNO paralelo á su base; siendo el exe AP. Si llamamos AB, a; BC, b; PM, y; AM, u; los triángulos semejantes ABC, AMP darán $AB : BC :: AM$
121. $: MP$; esto es, $a : b :: u : y = \frac{bu}{a}$. Substituyendo este valor de y en $2pydu$, resultará $\frac{2pbudu}{a}$ elemento de la superficie del cono parcial AMN, cuya integral $\frac{pbu^2}{a}$ será el valor de la superficie del mismo cono. Quando $u = a$, la expresion $\frac{pbu^2}{a}$ expresará la superficie de todo el cono; y como entonces $\frac{pbu^2}{a} = \frac{pba^2}{a} = abp$, será la superficie convexa de todo el cono $= p \times AB \times BC$.

690 Cuestion 2. *Hallar la superficie de la esfera* AMBDA *cuyo radio* CM $=$ a.

Llamaremos AP, x; PM, y; AM, u; y será $Mo = du$; $Pp = Mn = dx$. De los triángulos semejantes CPM, Mno sacaremos $PM : MC :: Mn : Mo$, esto es $y : a :: dx : du = \frac{adx}{y}$. Sustituyendo este valor de du en la fórmula $2pydu$, resultará $2padx$, y por consiguiente la superficie $= 2pax = AP \times$ circunf. $AMBMA$. Como $2ap$ es la periferia del círculo $AMBM$, y la periferia multiplicada por la mitad del radio a vale la area del expresado círculo (I.556), dicha periferia multiplicada por a valdrá el duplo de dicha area, y si la multiplicamos por $2a = AB$, el producto $AB \times$ perif. $AMBM$ será quádruplo de la area del mismo círculo. Y como en el supuesto de ser $x = AB$, representa la fórmula la superficie de toda la esfera, síguese que la superficie de toda la esfera es quádrupla de la area de uno de sus círculos máximos, conforme ya lo tenehemos averiguado por otro camino (I. 654). Fig.

Luego, ya que $AP \times$ periferia $AMBM'$ es la superficie del segmento esférico $AMPM$, inferirémos que la superficie de un segmento esférico es á la superficie de toda la esfera :: $AP \times$ perif. $AMBM'$; 122.
$AB \times$ perif. $AMBM'$ :: $AP : AB$, esto es, como la altura ó grueso del segmento al diámetro de la esfera.

691. Cuestion 3. *Hallar la superficie del paraboloide engendrado de la parábola* AM *al rededor de su exe.*

La equacion de esta curva $yy = ax$ dá $x = \frac{yy}{a}$, 123.
$dx = \frac{2ydy}{a}$, y $dx^2 = \frac{4yydy^2}{aa}$; luego $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{\left(dy^2 + \frac{4yydy^2}{aa}\right)} = dy\frac{\sqrt{(aa+4yy)}}{\sqrt{aa}}$. Luego la fórmula $2pyds$ se transformará en $\frac{2pydy}{a} \times \left(a^2 + 4y^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Para integrar esta diferencial, acudirémos á un medio muy socorrido en muchísimos casos parecidos á este, harémos $(a^2+4y^2)^{\frac{1}{2}} = z$, y $a^2+4y^2 = z^2$; diferenciarémos, y saldrá $8ydy = 2zdz$, cuya cantidad, dividiéndolo todo por 4, dá $2ydy = \frac{zdz}{2}$. Si hacemos en $\frac{2pydy}{a}(a^2 + 4y^2)^{\frac{1}{2}}$ las substituciones correspondientes, saldrá $\frac{2pydy}{a}(a^2 - 4y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{pzzdz}{2a} = \frac{pz^2dz}{2a}$, cuya integral es (608) $\frac{pz^3}{6a}$, y como $z^3 = (a^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}$, síguese que la integral de $\frac{2pydy}{a}(a^2+4y^2)^{\frac{1}{2}}$ es $\frac{p \times (a^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}}{6a}$; completando esta integral como pide el supuesto de $y = 0$ (611), será $\frac{p(a^2+4yy)^{\frac{3}{2}}}{6a} - \frac{pa^2}{6}$ el valor cabal de la superficie del paraboloide.

Fig. 692 Cuestion 4. *Hallar la superficie de un esferoide.*

Figuremos en *ACFHGA* la mitad del esferoide
124. propuesto, engendrado por la revolucion de la semielipse *FAG* al rededor del exe *AH*; y llamemos *AH*, a; *FH* ó *HG*, c; *BH*, x; *BC*, y; *FC*, u. La naturaleza de la curva dará $y = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$; luego $dy = -\frac{cxdx}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}$; y por consiguiente $du = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{c^2x^2dx^2}{a^2(a^2 - x^2)}\right)} = \ldots \frac{dx\sqrt{[a^4 - (aa - cc)xx]}}{a\sqrt{(aa - xx)}} = \frac{dx\sqrt{(a^4 - b^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ (con hacer $\sqrt{(a^2 - c^2)} = b) = \frac{bdx\sqrt{\left(\frac{a^4}{bb} - x^2\right)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}$. Por consiguiente $2pydu$ será $\frac{2pbcdx}{aa}\sqrt{\left(\frac{a^4}{bb} - x^2\right)}$, cuya integral expresada con una serie infinita es $2pcx \times \left(1 - \frac{b^2x^2}{2.3a^4} - \frac{b^4x^4}{2.4.5a^8} - \frac{3b^6x^6}{2.4.6.7a^{12}} \text{ \&c.}\right)$

La integral del elemento hallado de la superficie del esferoide se puede sacar mas facilmente por medio de la quadratura del circulo. Porque si desde el centro *H*, y con un radio $= \frac{aa}{b}$ trazamos el circulo *IER*, y prolongamos hasta *E* la ordenada *BC*; es evidente (240) que $BE = \sqrt{\left(\frac{a^4}{bb} - xx\right)}$, y que el elemento de la area *EIHB* será $dx\sqrt{\left(\frac{a^4}{bb} - xx\right)}$, el qual tendrá con el elemento $\frac{2pbcdx}{aa}\sqrt{\left(\frac{a^4}{bb} - xx\right)}$ de la superficie la misma razon que 1 con $\frac{2pbc}{aa}$, y sus integrales tendrán tambien la misma razon. Y como la última expresa la superficie *CFGD*, se sigue que esta superficie es $= \frac{2pbc}{aa} \times BEIFH = 2p \times \frac{FH}{HI} \times BEIFH$.

Es de reparar que esta resolucion sirve para el es-

esferoide prolongado; pero si fuese AH el exe menor, Fig.
el esferoide engendrado por la semielipse FAG será aplanado, y como AH sería menor que FH, el valor de $b = \sqrt{(a^2 - c^2)}$ sería imposible. Pero si hiciéramos $b = \sqrt{(c^2 - a^2)}$ y $m = \frac{a^2}{b}$, la cantidad $\frac{4pb\,dx}{c^2} \times \left(\sqrt{\frac{a^4}{b^2}} - xx\right)$ sería $= \frac{4pdx}{a}\sqrt{(m^2+x^2)} = \frac{2pc}{a} \times \left[dx\sqrt{(m^2+x^2)}\right]$. La integral de esta diferencial se hallará por medio de los logaritmos; porque podemos transformar la parte variable $dx\sqrt{(m^2+x^2)}$

en $\frac{dx(m^2+x^2)}{\sqrt{(m^2+x^2)}} = \frac{m^2dx+x^2dx}{\sqrt{(m^2+x^2)}} = \frac{m^2xdx+x^3dx}{\sqrt{(m^2x^2+x^4)}}$

$= \frac{\frac{1}{2}m^2xdx+x^3dx}{\sqrt{(m^2x^2+x^4)}} + \frac{\frac{1}{2}m^2xdx}{\sqrt{(m^2x^2+x^4)}}$; de cuya expresion el primer término se integrará por lo dicho (608), y hallaremos que su integral $= \frac{1}{2}\sqrt{(m^2x^2+x^4)}$, y añadiéndole á esta cantidad la integral del otro termino $\frac{\frac{1}{2}m^2xdx}{\sqrt{(m^2x^2+x^4)}}$ ó $\frac{\frac{1}{2}m^2dx}{\sqrt{(m^2+x^2)}}$, sacaremos $\frac{1}{2}x\sqrt{(m^2+x^2)} + \frac{1}{2}m^2 \times L.[x+\sqrt{(m^2+x^2)}]$, cuya expresion será la integral de $dx\sqrt{(m^2+x^2)}$. Multiplicándola por $\frac{2pc}{a}$, y practicando lo dicho (611) resultará $\frac{pcx}{a} \times \sqrt{(m^2+x^2)} + pcm \times L.\left[\frac{x+\sqrt{(m^2+x^2)}}{m}\right]$, valor de la superficie del esferoide aplanado.

693 Cuestion 5. *Hallar la superficie de un conoide hyperbólico.*

Llamemos c el primer exe de la hypérbola generatriz; c, ... conjugado; y x, la distancia entre la ordenada y el centro de la curva. Por la pro-

 pie-

Fig. piedad de la hypérbola será $y = \frac{c}{a}\sqrt{(x^2-a^2)}$. luego $dy = \frac{cxdx}{a\sqrt{(xx-aa)}}$, $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ será $\frac{dx\sqrt{[(aa+cc)xx-a^4]}}{a\sqrt{(xx-aa)}}$, y $2pydu = 2py\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ será $\frac{2pcdx}{aa} \times \sqrt{[(aa+cc)xx-a^4]}$, cuya cantidad, con suponer $\frac{a^4}{aa+cc} = m^2$, será $\frac{2pcdx}{a}\sqrt{(x^2-m^2)}$, de la qual hallaremos la integral por el mismo camino que en la última cuestion, $= \frac{pcx\sqrt{(xx-mm)}}{a} - pcm \times L.\left[x+\sqrt{(x^2-m^2)}\right]$, y añadiendo la constante hallada con suponer $x = a$, será $\frac{pcx}{a}\sqrt{(xx-mm)} - pc^2 - pcm \times L.\left[\frac{x+\sqrt{(x^2-m^2)}}{a+\frac{cn}{a}}\right]$, verdadero valor de la superficie del conoide hyperbólico.

117. 694 Cuestion 6. *Hallar la superficie del groin.*

Sea $cgef$ una seccion del sólido paralela á su base, y llamemos x la distancia á que está del vértice A; llamemos u el arco correspondiente An de la seccion semicircular NnA; y su radio $AB = BN$, a.

Consta que $du = \frac{adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$ (633), multiplicando esta cantidad por $2\sqrt{(2ax-xx)}$ valor de $ge = 2gn$, resultará $2adx$ (638), elemento de una de las quatro superficies iguales convexas que terminan el sólido. Luego toda la superficie del sólido, no contando la de la base, será $= 8a^2$, la qual por lo mismo es cabalmente dupla de la base.