Filosofía de la matemática: Tres preguntas fundamentales

Francisco Rodríguez Consuegra

Resumen

El contenido de este artículo es la transcripción de un breve curso introductorio a la filosofía de las matemáticas, en cuatro sesiones. La primera fija los objetivos, caracteriza la pregunta por la naturaleza de la matemática y describe los rasgos esenciales del logicismo, formalismo e intuicionismo. La segunda analiza el problema de la naturaleza de los números y discute la célebre propuesta de Benacerraf. La tercera se dedica a la verdad matemática y, tras comparar varias posibilidades, utiliza también a Benacerraf como hilo conductor. La cuarta compara brevemente las axiomatizaciones de la geometría de Pieri y Hilbert.

Abstract

This paper contains the transcription of a brief, introductory course to the philosophy of mathematics. The first section is devoted to point out the general goals of the course, then to characterize the question about the nature of mathematics and to describe the essential features of logicism, formalism and intuitionism. The second one analizes the problems of the nature of numbers through a discussion of Benacerraf's celebrated proposal. The third is devoted to mathematical truth; after comparing several possibilities, Benacerraf's ideas are again considered. The fourth one is mainly a comparison between Pieri's and Hilbert's axiomatizations of geometry.

I. Introducción

Los materiales impresos en este artículo proceden de la transcripción de una cinta de video en la que se registraron cuatro conferencias del autor en la UNAM, constitutivas de un cursillo introductorio a la filosofía de la matemática, seguidas cada una de ellas de un coloquio con la audiencia. A ello ha de atribuirse el carácter informal de la prosa que aparece aquí. Las tres primeras conferencias, que constituyen el núcleo del cursillo, se dedicaron, respectivamente, a las tres preguntas fundamentales aludidas en el título y dan contenido a las tres primeras secciones del artículo.

La primera sección, que aborda la pregunta ¿qué es la matemática?, comienza con una breve introducción a los objetivos generales del cursillo, para pasar después a centrar el carácter de la pregunta misma, que se clasifica como una pregunta externa a la matemática, pero interna a la filosofía de la matemática. Tras ello se alude brevemente al problema de las implicaciones filosóficas de ciertos resultados y problemas matemáticos, para pasar entonces a una caracterización más o menos esquemática de las tres escuelas clásicas de fundamentación de la matemática: logicismo, formalismo e intuicionismo. La segunda sección se dedica a la pregunta ¿qué son los números? Tras una introducción al sentido de la pregunta misma, en el contexto de algunas de las contribuciones científicas básicas al problema, se escoge el planteamiento ya clásico del célebre artículo de Benacerraf sobre los números (véase la bibliografía). Su conclusión principal, que como los números son conjuntos, pero no pueden ser estos o aquellos conjuntos más bien que otros, entonces no son objetos, se pone en cuestión partiendo de diversas objeciones.

La tercera sección plantea la pregunta ¿qué es la verdad matemática? y comienza comparando distintas respuestas históricamente propuestas (verificabilidad empírica; demostrabilidad matemática). Tras ello, se toma de nuevo a Benacerraf como hilo conductor de la discusión, esta vez partiendo de otro de sus artículos más conocidos: el dedicado a la verdad matemática (véase también la bibliografía), que plantea un ya famoso dilema: lo que exige de nosotros la verdad matemática clásica (que existan objetos abstractos implicados en los hechos de la matemática, necesarios para que existan proposiciones matemáticas verdaderas) nos resulta imposible en la visión clásica del conocimiento (que los objetos conocidos sean percibidos causalmente por nosotros). De nuevo se indican posibles líneas de respuesta a la desoladora conclusión de Benacerraf.

La cuarta y última sección se dedicó, a petición de los organizadores, a una exposición divulgativa del enfoque de la escuela de Peano, y más en concreto de Mario Pieri, en fundamentación de la geometría, en comparación con el enfoque de Hilbert. Así, se pasa breve revista a lo que ambos tuvieron que decir en materia de conceptos primitivos, de definiciones, de postulados y de demostraciones, con objeto de hacer la obra de Pieri más conocida, así como de relativizar algo la enorme fama de la de Hilbert.

II ¿Qué es la matemática?

El objetivo central aquí es simplemente estimular a aquellas personas que en principio se sienten un poco atraídas por lo que es la filosofía de la matemática, o a personas que, siendo ellas mismas matemáticos o cursando estudios de matemáticas, se planteen algún problema de carácter filosófico. También a aquellos que se hayan topado, en sus lecturas de los titanes de la matemática o de alguna otra forma, con el planteamiento de algún problema estrechamente filosófico que les haya desconcertado o causado algún interés; o hayan sencillamente pensado ¡caramba!, sería interesante ver algo más sobre esto, etc.

Así, mis objetivos son muy modestos, simplemente plantear algunos problemas de lo que trata cierta parte de la filosofía de la matemática, la parte más elemental, y como segundo objetivo estimularles en este sentido.

Desgraciadamente ésta es una asignatura que tiene un estatus poco desarrollado. En la mayoría de los países que yo conozco, tal vez con la excepción de Estados Unidos y algunas universidades europeas, y en concreto en España, la filosofía de la matemática es una materia que prácticamente no existe en el curriculum académico. En España hay bastantes universidades y difícilmente alguna que ofrezca con regularidad algún curso de filosofía de la matemática: esto es una gran desgracia, pero en fin, nos interesan ahora otros temas que vamos a intentar abordar.

Bien, dicho esto quisiera pasar a tratar el primer tema de esta sesión que es plantear la pregunta ¿qué es la matemática? El enfoque que normalmente voy a perseguir en estas sesiones va a ser más bien informal; es decir, no me voy a preocupar demasiado por transmitir mucha información, no es esto lo que me interesa, para eso está la bibliografía que proporcione (en algunos casos me referiré a ella); sino más bien suscitar interés, provocar la estimulación en torno a la filosofía de la matemática, y la mejor forma que se ha descubierto para hacer esto es la de plantear problemas. A los filósofos a veces nos acusan un poco porque dicen que nos pasamos la vida planteando problemas y no aportando soluciones, pero muchos se olvidan de que no puede haber solución a un problema que no haya sido planteado con anterioridad, de ahí que vaya lo uno por lo otro; por ello he puesto títulos con interrogantes a las tres primeras secciones. ¿qué es la matemática?, ¿qué son los números? y ¿qué es la verdad matemática?

Al decir lo que es la matemática, naturalmente lo que en ningún caso hubiera hecho sería decir que la matemática es esto y aquello: esto sería lo más contraproducente posible. Sin embargo, si podemos examinar algunas de las respuestas que han sido dadas —insisto, de una manera también informal—, limitándonos a las ideas esenciales, viendo qué es lo que pretendían y porqué estaban orientadas en ese sentido, ir notando a continuación qué fallos o problemas hacen que esas respuestas hayan sido aceptadas sólo en un momento muy preciso de la historia y después, prácticamente, rechazadas en su totalidad. Ya de entrada el problema mismo de qué es la matemática, con independencia de que tenga la forma de interrogación, suscita obviamente un problema filosófico: ¿cuál es el estatus de esa pregunta?, ¿qué sentido tiene preguntarse: qué es la matemática? En principio pudiera parecer que es una cuestión a plantearse por los matemáticos, los matemáticos hacen matemáticas y por lo tanto parece que son los destinados a formularse esa pregunta y contestarla; así, suponemos que los físicos en principio serían los más idóneos para contestar la pregunta de qué es la física y los médicos qué es la medicina; y así siguiendo con una serie de preguntas que podemos ir formulando en torno a preguntas similares. Bien, los filósofos protestan de tal planteamiento y lo hacen con varios argumentos.

A mí el que más me gusta es el argumento de Danto, filósofo norteamericano de una línea magnífica, que tiene un libro muy interesante titulado *¿Qué es la filosofía?*. Una de las tesis de ese libro, que recomiendo fervientemente, es que hay un problema cuando tratamos de caracterizar la filosofía, y que la mejor solución consiste en dividir los problemas en general, las cuestiones que nos podemos plantear sobre una determinada materia, en problemas internos y problemas externos.

Los problemas internos son los problemas que esa materia o ciencia abordaría y trataría de resolver; y los problemas externos son los problemas que no tienen esa propiedad. Entonces, decía Danto que entre los problemas internos más importantes de la filosofía, sino el que más, está el de su propia naturaleza, es decir, el saber qué es la filosofía es un problema interno de la filosofía, pero es un problema que tiene la característica especial de que casi define la propia esencia de lo que es la filosofía o por lo menos la demarca. Eso de definir la esencia de algo es una expresión que tiene connotaciones de filosofía aristotélica que no es necesario abordar ahora, pero nos sirve para demarcar un poco el territorio dentro del cual nos movemos cuando hacemos filosofía; en cambio, continuo con la tesis de Danto, esto no sucede en ninguna otra ciencia, así, el problema de ¿qué es la física? no es un problema físico, por lo que en ningún laboratorio de física y en ningún proyecto de investigación de física del mundo que haya ahora mismo, haya habido nunca, ni habrá jamás, se tendrá como contenido de la investigación saber ¿qué es la física?

¿Qué es la física? es un problema, pero no es un problema físico. Si aplicamos este planteamiento al problema de la matemática obtenemos el mismo resultado. Luego determinar qué es la matemática no es un problema matemático porque no es un problema interno de la matemática, sino que es un problema externo a la matemática; pero si es un problema externo a la matemática ¿de quién es ese problema? Rápidamente los filósofos levantamos la mano y decimos ¡nuestro! Este tipo de problemas, que nadie quiere, es el que los filósofos abrazamos estrechamente con todo fervor y entusiasmo (y con escepticismo también, porque ya aprendimos un poco de la historia), con objeto de intentar, si no solucionarlos, por lo menos tratarlo en nuestros libros, artículos o correos electrónicos y mirar todo lo que hay dentro de ellos. Esa sería la justificación filosófica del título de esta primera charla. Esto significa que no quiero ser nada dogmático con el tema; estoy simplemente haciendo una propuesta, pero esa propuesta, a su vez, la considero sumamente polémica y discutible.

El aceptar el estatus del problema de ¿qué es la matemática? como problema filosófico quisiera conectarlo también con un tipo de cuestiones muy estrechamente relacionadas (pero que no se identifican) con ella. Porque claro, el saber qué es la matemática no es el único problema filosófico de la matemática; hay muchos otros problemas filosóficos que se plantean dentro de la matemática, y vamos a tener ocasión de ver ahora algunos.

Por ejemplo, está el problema de las famosas implicaciones filosóficas de ciertos resultados o descubrimientos de la matemática, que a veces extraen las personas que hacen matemáticas. Se ha dado el caso de que en algunas ocasiones se han hecho descubrimientos puramente matemáticos, es decir, se han probado teoremas dentro de la matemática, o de alguna rama en particular, y después se ha visto que esos resultados, que en principio eran estrictamente matemáticos y se demostraban según una prueba matemática rigurosa y admitida por la

1. Kurt Gödel (1906-1978)

comunidad de los matemáticos, eran sin embargo, resultados que parecían tener implicaciones filosóficas.

¿Qué son implicaciones filosóficas? Esto nos llevaría otra charla, pero para quitarnos el problema de encima podríamos decir que las implicaciones filosóficas son las cosas de carácter filosófico que le dan ganas de decir a quienes se enteran por primera vez de ese resultado. Cuando uno se entera de un resultado a veces se plantea problemas filosóficos de una manera casi inevitable, por ejemplo el famoso teorema de incompletud de la aritmética de Kurt Gödel (imagen 1) en 1931 planteó, no ya implicaciones filosóficas, sino verdaderos torrentes de tinta en torno a cuál era la naturaleza de los sistemas axiomáticos; de si realmente la mente humana podría o no abarcar algorítmicamente la matemática o si sería necesario para ello una mente divina con todas sus potencias; o si ese resultado era simplemente provisional y debía contener algunos errores, como se plantearon algunos matemáticos al principio, pues de no ser así iba a ser devastador para la matemática. En fin, cuando se descubre un teorema matemático, y hay que pensar que cada año se demuestran más teoremas matemáticos, no sé si cientos de miles, tal vez cien mil (si se demuestran cada año cien mil teoremas matemáticos en las revistas, de la mayoría nadie se entera, a no ser los cuatro o cinco que trabajan en ese campo pequeñito), nadie se preocupa de sus implicaciones filosóficas, aunque algunos de pronto parece que sí tienen implicaciones filosóficas. Entonces, ¿qué hace que ciertos resultados matemáticos tengan implicaciones filosóficas? Bueno, pues que entran dentro de (o parece que dan pie a) ciertos problemas filosóficos. Esto no ocurre sólo en la matemática, también ocurre en la física y en la biología, donde a veces hay descubrimientos que tienen implicaciones filosóficas porque pueden utilizarse como instrumentos para la polémica. Esgrimiendo esos resultados, los filósofos que están divididos en cierta polémica creen que si los adoptan y extraen de ellos determinadas implicaciones filosóficas, su postura filosófica anterior se va a ver reforzada.

Uno de los problemas de ese proceder es que cuando tiene lugar un resultado avasallador, como por ejemplo el teorema de Gödel de incompletud de 1931, curiosamente casi todas las escuelas filosóficas se lo quieren apropiar y casi todos los filósofos que están teniendo polémicas importantes afirman que el resultado que se acaba de demostrar refuerza su posición. Hay que tener mucho cuidado con las implicaciones filosóficas porque todo el mundo las quiere hacer suyas, y más si los resultados son espectaculares. Valga todo esto, junto a lo dicho sobre el problema interno de la naturaleza de la matemática, para situar el derecho que tenemos los filósofos a entrar dentro de ese ámbito. Esto no quiere decir que para hacer filosofía de la matemática haya que ser matemático, aunque cuanta más matemática se sepa mejores y más rigurosos serán los argumentos, y más respetuosos serán con la ciencia.

Históricamente, y estoy hablando del último siglo y medio, el problema de la naturaleza de la matemática se ha abordado desde una óptica que, aunque hoy en día está completamente abandonada, sin embargo es extraordinariamente instructivo el echarle una ojeada, porque nos va a permitir conocer los senderos que se recorrieron desde ese punto de vista. Esa óptica común es a la que hoy podemos referirnos de una manera global como fundacionalismo. El fundacionalismo fue el punto de vista común a todas las grandes escuelas de filosofía de la matemática del siglo XIX y principios del XX. Ellos tenían en común la creencia, que hoy suena quizá un poco extraña, de que la manera de saber qué era la matemática era ir a sus fundamentos. Es como si la matemática tuviera un peso extraordinariamente alto y para que nosotros pudiéramos tener constancia de que ese edificio inmenso es firme y fiable, debiéramos ver sus fundamentos. (A veces por fundamentos en castellano se refiere uno a los cimientos en los que algo descansa.)

2. Bertrand Russell (1872-1970)

Los filósofos fundacionalistas creían que la matemática estaba falta de una fundamentación, por eso se desesperaban en buscar una garantía para ella. Pensaban que de no encontrarse esa garantía es que estaban en un edificio inestable que en cualquier momento podría derrumbarse y arrastrarlos a todos con él, aunque ésta no fuera una creencia general. Y es que muchas cuestiones propiamente matemáticas estaban en disputa dentro y entre los mismos matemáticos, especialmente sobre la fiabilidad de determinadas pruebas o la verdad de ciertos teoremas. Si cierta prueba era admisible o correcta para algunos matemáticos, otros decían que no, ya que pruebas que en determinado momento se dieron como perfectas al cabo de veinte años otros matemáticos descubrieron en ellas defectos inadmisibles, hasta el punto de cuestionar cómo otros matemáticos las habían considerado correctas.

Estas cuestiones que le daban a la matemática un aire problemático y que arrojaban algunas dudas sobre su naturaleza hicieron que algunos filósofos se plantearan la necesidad de poner orden dentro de la matemática, de construir un edificio definitivo, es decir, de asegurarse que los cimientos sobre los que descansaba toda esa inmensa estructura eran definitivos, para que no ocurriera nunca el día de mañana que determinado matemático hiciera cierto descubrimiento y diera al traste con toda la certidumbre que los matemáticos atribuyen a su ciencia y, por tanto, los obligara a replantearse todo.

Ya sé que a algunos de ustedes les puede extrañar que no haya mencionado las famosas paradojas de la teoría de conjuntos de finales del XIX y principios del XX. Como la clásica paradoja de Russell [imagen 2], la famosa paradoja de la clase de todas las clases que no se pertenecen a sí mismas: si esa clase se pertenece a sí misma es que no se pertenece y si no es que sí. No lo he hecho por una razón implícita, porque los filósofos fundacionalistas de la matemática, los filósofos que creían que la matemática requiere una fundamentación, ya estaban buscándola con anterioridad a que se conocieran las paradojas.

La aparición de las paradojas en la teoría de conjuntos hizo que algunos filósofos se plantearan la necesidad de una fundamentación de la matemática para saber su verdadera naturaleza, sin embargo, ese trabajo ya se estaba haciendo antes y se pueden dar ejemplos gráficamente de dos o tres líneas primordiales que existían ya de fundamentación de la matemática. Es decir, que el trabajo filosófico, y técnico también, de dar una fundamentación a la matemática no fue una consecuencia absoluta del descubrimiento de las paradojas de la teoría de conjuntos de Cantor, Zermelo y Russell, sino que era una ambición anterior: no hay más que recordar el caso de Frege, que intentaba dar una fundamentación de la matemática basada en la lógica desde los primeros años de la década de 1880, sino antes. Es decir, que aún no habían aparecido las paradojas.

Había ya razones para pensar que las matemáticas necesitaban una fundamentación. Después aparecen las paradojas y naturalmente entonces la necesidad de la fundamentación, a juicio de los filósofos y de algunos matemáticos, se convirtió todavía en algo mucho más perentorio. En todo caso, la óptica que tenían en común todos los filósofos y matemáticos que compartían la idea fundacionalista era ésta: la manera de resolver el problema de la naturaleza de la matemática es asumir que la matemática tiene unos fundamentos y buscar entonces esos fundamentos, una vez que se hayan encontrado y que estén completamente firmes y perdurables, nos tienen que dar una certidumbre absoluta y definitiva de todo el edificio. Sólo entonces nos podemos quedar tranquilos y decir, bueno, ahora que el edificio está plenamente asentado entonces podemos hacer matemáticas normales; mientras que si hacemos matemáticas normales y no nos preocupamos por los fundamentos entonces el día de mañana todo se puede ir a tierra y nuestro trabajo no habrá servido absolutamente para nada porque contenía errores de base. Quiero decir que aunque hoy en día el enfoque fundacionalista en filosofía de la matemática, e incluso en filosofía de la física, les provoca a muchos una sonrisa y dicen: ¡pobres ingenuos esos fundacionalistas!, sin embargo, la idea ha tenido una formación histórica muy interesante.

Hay tres grandes escuelas fundacionalistas, por tanto es imposible no referirse aunque sea muy sumariamente a cada una de ellas. Cada una participaba de la óptica común del fundacionalismo descrito en términos rasos; naturalmente, porque si se pusieran a discutir sobre qué se daba a entender concretamente por 'fundamentación' tampoco se iban a poner de acuerdo. Las tres escuelas, digamos más conocidas —las que están asociadas con nombres importantes, que han creado un equipo de personas que trabajaron con el que planteó cada solución por primera vez, y que instauraron una línea de publicaciones que duró en algunos casos varios decenios— son tres: el logicismo, el formalismo y el intuicionismo, muy conocidas y descritas en cualquier manual de filosofía de la matemática antiguo. Digo antiguo porque los manuales de ahora ya no hablan de esto. Los filósofos de la matemática han abandonado el dogma del fundacionalismo, y en general no creen que la matemática tenga necesidad de una fundamentación. Un buen libro que viene en la bibliografía es el de Stefan Körner, un libro bastante anticuado que se escribió en los años sesenta, aunque da una visión bastante completa de lo que fueron estas escuelas.

Vamos a decir algo, pero muy brevemente, sobre cada una de ellas, más que nada para dar pie después a suscitar problemas, extraer alguna conclusión, o hacer alguna comparación; simplemente con ese objetivo, y no el de transmitir toda la información relevante, que es una tarea ardua que nos llevaría muy lejos y requeriría un curso completo.

El logicismo es la escuela de fundamentación de la matemática tal vez más conocida porque sus dos fundadores máximos, que fueron Frege [imagen 3], en la Alemania de finales del siglo XIX, y Russell en Cambridge, Inglaterra, también en ese siglo, han alcanzado fama con independencia de su posición en filosofía de la matemática. Así, Frege no es conocido sólo por su obra en fundamentación filosófica de la matemática, sino por varios tratados sobre las leyes fundamentales de la aritmética o la teoría de la lógica, entre otros. En concreto, nada más y nada menos que elaboró lo que podría entenderse como la primera formalización de la lógica elemental y, además, publicó una serie de artículos sobre semántica como instrumentos auxiliares en su análisis de las ideas matemáticas. Por ejemplo, introdujo las nociones de sentido y referencia, y una clara ontología sobre lo que son el con-

3. Gottlob Frege (1848-1925)

cepto y el objeto. Esos artículos, que escribió de una manera totalmente modesta y con el único objetivo de auxiliarse en su trabajo de fundamentación de la matemática, paradójicamente para él se han convertido en objeto de estudio en sí mismos por los filósofos analíticos del siglo XX, por los filósofos que tienen interés y gran respeto por la ciencia y ven en ellos una extraña sabiduría que otros no comparten. Después está Russell, que jugó en todos los campos, tanto políticos, académicos, sociales, como psicológicos, históricos, y demás, por lo que su figura rebasa con mucho la aportación que hizo a la fundamentación de la matemática. Por eso la postura que se suele llamar logicismo se ha hecho más conocida, aunque hay que manejarla con cuidado, porque no existe la postura logicista como tal, sino que solamente existe el logicismo de Frege, el logicismo de Russell o el logicismo de *X*, pero para abreviar, por comodidad, nos referimos al logicismo como si fuera una posición objetivamente existente.

Básicamente, la idea del logicismo fue plantearse la mejor manera de conseguir que las entidades de la matemática mostraran el carácter de objetos, y de que sus verdades tuvieran un carácter absolutamente firme e inamovible. Es decir, que en el caso de las entidades de la matemática fueran verdaderos objetos: una cosa que existe es un objeto, si no existe no es un objeto, no es nada. Por tanto, si conseguimos mostrar que las entidades de la matemática son objetos eternos, habremos encontrado una fundamentación ontológica segura, y así conseguimos mostrar que las verdades de la matemática no son simplemente verdades contingentes, pasajeras, sino que tienen el carácter de verdades absolutamente verdaderas o, como pensaban los filósofos, de verdades necesarias.

Voy a introducir otra palabreja filosófica que es la de *a priori*. A esos filósofos les encantaba la idea de que las verdades de la matemática, a diferencia de las de las ciencias empíricas, eran verdades *a priori*. ¿Qué quiere decir *a priori*? Pues que podemos conocerlas con independencia y antes de haberlas sometido al tribunal de lo empírico, antes de haberlas podido verificar en la experiencia, así 7 + 5 = 12 debería ser una verdad necesaria, una verdad absoluta, una verdad *a priori*.

De tal manera que, ocurriese lo que ocurriese, o de tal manera que viajáramos al universo que viajáramos, 7 + 5 = 12 continuaría siendo cierto por toda la eternidad. Ésa era la propiedad que ellos querían mostrar que poseen las verdades de la matemática y que poseen los objetos fiables de la matemática. En esa línea, Frege y Russell —este último con bastante independencia de Frege— debieron pensar que eso solamente se podía lograr si se demostraba que los objetos de la matemática eran objetos lógicos, y si se podía demostrar que las verdades de la matemática eran verdades de la lógica. Por entonces la expresión "verdades lógicas" era entendida por la mayor parte de las personas que habían oído en esa época algo de filosofía y de lógica, y eso era lo que les venía a la mente, como los famosos principios de la lógica: que eran principios inamovibles y tenían el carácter de absolutos y de *a priori*, por lo que se tenían que cumplir en cualesquiera condiciones, países, épocas históricas, galaxias, etc. Parecía una buena idea, puesto que se había encontrado una ciencia paradigmática, la lógica, cuyos principios tenían esas características y quizá se pudieran reducir al menos las verdades más elementales de la matemática, de la aritmética por ejemplo, a verdades de la lógica, para así conseguir ese fundamento definitivo que se buscaba. Ésa fue la idea, y en cuanto a los objetos de la matemática también había que intentar reducirlos a objetos de la lógica.

El problema es que para Frege y Russell la lógica era algo muy diferente a lo que entendemos ahora. Para ellos, la lógica era algo mucho menos preciso, de hecho ni siquiera tenían la distinción explícita entre lógica de primer orden y lógica de orden superior; y, de hecho, consideraban, de una manera implícita, que lo que ahora conocemos como teoría de conjuntos formaba parte de la lógica. Por tanto, eso les facilitó extraordinariamente su tarea.

La idea de reducción entre objetos que ellos tenían en mente era sencilla: consistía en dar definiciones de los objetos de la matemática en términos de los objetos de la lógica, tales que si tenemos una definición en la que a la izquierda hay (el símbolo de) un objeto de la matemática y a la derecha, en el *definiens*, hay (los símbolos de) objetos de la lógica, de forma que haya así desaparecido el término con el que nos referíamos al objeto de la matemática, entonces así conseguimos demostrar que las entidades de la matemática se reducen a las entidades de la lógica, en el sentido de que las entidades de la matemática son ya entidades lógicas, y como las entidades lógicas no parecían ofrecer ningún problema, pues ya tenemos una matemática fundamentada por la vía de los objetos. Sólo que en lugar de utilizar la definición como único elemento de construcción se utilizaba la demostración. Por tanto el logicismo, resumiendo, venía a ser el intento de definir las entidades de la matemática en términos de las entidades de la lógica y de sustentar las supuestas verdades de la matemática en verdades lógicas por un proceso de demostración. Si eso se conseguía, se lograba una cadena continua de entidades y verdades sin

4. Alfred N. Whitehead (1861-1947)

ningún corte, que, comenzando en la lógica, con sus objetos y auxiliares sencillos, pasara a la aritmética, etc., mediante un proceso continuo de definiciones y demostraciones.

Como decía Russell, la matemática no es más que la edad adulta de la lógica. Es como si la matemática, conforme va creciendo a partir de la lógica, fuera dando lugar a la aparición de sus distintas partes: la aritmética, el análisis y otras cosas más serias. Esa era la idea logicista y el desafío de Russell, que publicó la mayor contribución al logicismo junto con Alfred Whitehead [imagen 4], su maestro, los *Principia mathematica* (1910-13). Era como decir: bueno, aquí tienen ustedes la mejor prueba de que la tesis logicista es cierta; ahí tienen los tres tomos, que empiezan con la lógica, se remontan a la aritmética y pasan al análisis (a la geometría no llegaban porque se cansaron). Como los lectores de *Principia* serán, creía Russell, obviamente incapaces de decir dónde termina la lógica y dónde comienza la matemática, entonces no hay ninguna línea que trazar en ningún punto del primer tomo (donde se hallaría presumiblemente el corte). Por tanto, se habrá demostrado con esta tesis que las matemáticas *no* son más que lógica; por tanto el único fundamento posible de la matemática es la lógica. Esta línea de pensamiento se ha rechazado con posterioridad, aunque en sí misma es discutible. Pero también es cierto que ha habido filósofos como Russell, que murió en los años setenta, o como Carnap que murió en los sesenta, que fueron logicistas (en sentidos distintos) durante toda su vida.

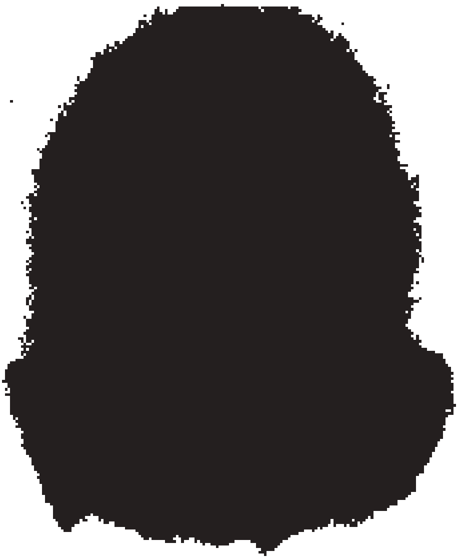
En un sentido estricto el término logicismo no denota ya una postura que se pueda mantener en la misma forma que se mantuvo en el pasado. Pero aún hay filósofos y matemáticos que simpatizan tanto con aquella corriente que creen que es cuestión de arreglar aquí o allá algunas cosas, de extender un poco más nuestra noción de lógica y hacer algunos arreglos internos, para poder decir que la garantía suprema que tiene la matemática está y debe estar dentro de la lógica, aunque no seamos lo suficientemente inteligentes para desarrollar esa idea en todos sus detalles, y prefiramos trabajar ramas más agradecidas de la matemática y dejar el problema técnico de la fundamentación a unos cuantos iniciados.

En todo caso, también se ha considerado que el teorema de Gödel de incompletud de la aritmética es un ataque al logicismo. Para ello se defiende la versión según la cual el logicismo se formula diciendo que está en situación de construir un solo sistema formal axiomático a partir del cual reducir *todas* las verdades de la matemática o las de ningún corte, que, comenzando en la lógica, con sus objetos y auxiliares sencillos, pasara a la aritmética, etc., mediante un proceso continuo de definiciones y demostraciones.

Como decía Russell, la matemática no es más que la edad adulta de la lógica. Es como si la matemática, conforme va creciendo a partir de la lógica, fuera dando lugar a la aparición de sus distintas partes, la aritmética, el análisis y otras cosas más serias. Ésa era la idea logicista y el desafío de Russell, que publicó la mayor contribución al logicismo junto con Alfred Whitehead [imagen 4], su maestro: los *Principia mathematica* (1910-13). Era como decir: bueno, aquí tienen ustedes la mejor prueba de que la tesis logicista es cierta, ahí tienen los tres tomos, que empiezan con la lógica, se remontan a la aritmética y pasan al análisis (a la geometría no llegaban porque se cansaron). Como los lectores de *Principia* serán, creía Russell, obviamente incapaces de decir dónde termina la lógica y dónde comienza la matemática, entonces no hay ninguna línea que trazar en ningún punto del primer tomo (donde se hallaría presumiblemente el corte). Por tanto, se habrá demostrado con esta tesis que las matemáticas no son más que lógica, por tanto el único fundamento posible de la matemática es la lógica. Esta línea de pensamiento se ha rechazado con posterioridad, aunque en sí misma es discutible. Pero también es cierto que ha habido filósofos como Russell, que murió en los años setenta, o como Carnap que murió en los sesenta, que fueron logicistas (en sentidos distintos) durante toda su vida.

En un sentido estricto el término logicismo no denota ya una postura que se pueda mantener en la misma forma que se mantuvo en el pasado. Pero aún hay filósofos y matemáticos que simpatizan tanto con aquella corriente que creen que es cuestión de arreglar aquí o allá algunas cosas, de extender un poco más nuestra noción de lógica y hacer algunos arreglos internos, para poder decir que la garantía suprema que tiene la matemática está y debe estar dentro de la lógica, aunque no seamos lo suficientemente inteligentes para desarrollar esa idea en todos sus detalles, y prefiramos trabajar ramas más agradecidas de la matemática y dejar el problema técnico de la fundamentación a unos cuantos iniciados.

En todo caso, también se ha considerado que el teorema de Gödel de incompletud de la aritmética es un ataque al logicismo. Para ello se defiende la versión según la cual el logicismo se formula diciendo que está en situación de construir un solo sistema formal axiomático a partir del cual reducir *todas* las verdades de la matemática a las de



5. David Hilbert (1862-1943)

la lógica, lo cual por el mencionado teorema es imposible. Pero Russell jamás formuló el logicismo de esa manera.

Ahora vamos a decir algunas cosas del formalismo y del intuicionismo y por último haremos una breve comparación.

El formalismo tampoco nació con las paradojas; nació gracias a David Hilbert [imagen 5], un genial matemático alemán. El formalismo en sentido amplio era una corriente anterior a Hilbert, muy anterior a la aparición de las paradojas. Una prueba es que habían existido muchas versiones del formalismo que afirmaban que la naturaleza de la matemática es que juega con una serie de signos sin significado, a los que atribuye unas reglas de funcionamiento convencionales y arbitrarias. Curiosamente esas reglas funcionan y, como funcionan, obtenemos con ellas ciertos objetos que nos interesan por lo que sea. Así la matemática sería una especie de juego, como por ejemplo el ajedrez. Las reglas de la matemática no se pueden alterar, así como tampoco las reglas del ajedrez. La tesis formalista viene a decir que las reglas son convenciones y que los supuestos objetos de la matemática no son nada en sí mismos.

La posición, más precisa, que hoy entendemos por formalismo y atribuimos a Hilbert es la que él formuló a partir de los años veinte. Tras dedicar una serie de años a problemas de física y a problemas técnicos de la física matemática. Hilbert decidió dedicarse al problema de la fundamentación de la matemática, tomando como marco de referencia los tres volúmenes avasalladores que habían escrito Russell y Whitehead unos años atrás y, naturalmente, partiendo de las fisuras que los estudios posteriores habían encontrado en esa magna construcción. La fisura básica era que, en el transcurso de la demostración de que las verdades de la aritmética se pueden reducir a verdades de la lógica, habían echado mano de algunos axiomas cuyo carácter lógico era muy dudoso. Había dos o tres axiomas imprescindibles para la construcción de la matemática en el logicismo de Russell y Whitehead (de reducibilidad, de elección, de infinitud), que fallaban por su base porque no eran axiomas de la lógica. Luego, si el logicismo es la construcción de la matemática en términos de lógica, pero a la hora de la construcción efectiva se cuelan por la puerta de atrás axiomas que no salen de la lógica, sino que más bien tienen que ver con la matemática, entonces estoy haciendo trampa. Russell hizo estudios muy interesantes de esos axiomas, defendiendo la tesis de que, aunque en algunos casos no eran axiomas de la lógica y en otros eran axiomas que intuitivamente parecieran verdaderos, sin embargo eran axiomas que tenían un alto grado de certeza empírica (¡funcionaban!).

Entonces sobre esas fisuras, sobre esos defectos que hacían que el programa logicista no fuera sostenible, y aun con toda la admiración que Hilbert tenía y que tuvo siempre por esa obra y concediéndole el mayor mérito, el fundador del formalismo intentó clarificar lo que es la matemática. Partiendo de que tiene que haber alguna manera de construir un cierto sistema formal como era el de Russell y Whitehead, la idea de Hilbert era dar cuenta, a través de la definición axiomática (o implícita) de los objetos introducidos y la consiguiente demostración de los teoremas, si no de toda la matemática, al menos de alguna parte relevante de ella. Por tanto, ahora la preocupación está en tratar de conseguir más o menos lo que había conseguido Russell, pero sin cometer los mismos errores y sin descuidar las molestas paradojas. La solución de Hilbert fue pensar que se pueden construir sistemas puramente formales de tal manera que definan sus objetos de forma puramente axiomática, sin entrar para nada en la naturaleza intrínseca de esos objetos y en el bien entendido de que no hay que hacer ninguna apuesta por la naturaleza de esos objetos primarios con los que trabajamos en nuestros sistemas formales.

La única precaución que hay que tener es cuando, en lugar de hacer la matemática cotidiana del 2 + 2 = 4, nos vamos naturalmente remontando y pasamos a la matemática del infinito. Sólo cuando se utiliza la cuantificación irrestricta es cuando se nos van de las manos las entidades de la matemática al ámbito del infinito. Según Hilbert, la única solución para controlar todo eso, dentro del espíritu de la certidumbre de la matemática, está en dar una prueba de su consistencia, que garantice que no caeremos en contradicciones (o paradojas).

Para ello Hilbert divide la matemática en dos partes: la parte finita (donde están los objetos reales) y todo el resto (donde están los objetos ideales infinitos). La prueba de consistencia para los objetos ideales tenía como objetivo fundamentalmente hacer ver que, recurriendo a ellos, puesto que son consistentes, no introducimos contradicción alguna en los objetos reales; en cuanto al estatus ontológico último de esos objetos ideales, lo dejamos indeterminado. Son simplemente recursos de los que nosotros nos servimos porque nos son imprescindibles para construir la matemática. Pero a efecto nuestros, son entidades ideales, recursos que nos vienen bien, que pragmáticamente nos son extraordinariamente útiles para conseguir nuestros fines. Por tanto, los recursos admisibles para la matemática son los recursos finitarios, ¿qué pasa con los otros?, de ellos no nos preocupamos, más allá de la necesaria prueba de consistencia. Pero la alegría de Hilbert duró poco: justo hasta los resultados gödelianos de incompletud, exactamente igual que la de Frege duró hasta la recepción de la célebre carta de Russell comunicándole su paradoja, entre la publicación del primer tomo y el segundo del *magnum opus* fregeano.

La idea básica del intuicionismo es que hay que irse con mucho cuidado en la matemática, porque normalmente manejamos objetos que no tienen fundamento. El único fundamento posible de los objetos de la matemática tiene que depender de lo que ellos llamaban la intuición básica de la matemática, que radica en el paso del tiempo.

De acuerdo con los intuicionistas, la dualidad fundamental a través de la cual construimos toda la matemática está en la aritmética y no en la lógica, no en el lenguaje, ni en los sistemas formales, sino en la matemática misma y dentro de la matemática en la aritmética, justamente cuando hacemos el paso de una entidad cualquiera a la siguiente; esa es la dualidad fundamental que rige y ha de aguantar todo el peso de la matemática.

Puesto que hace depender la fundamentación de la matemática de una constatación nuestra, de un acto último de nuestra intuición como seres humanos, el intuicionismo hace de la matemática algo —digamos— pasajero y poco fiable como son las mentes humanas. Por tanto, el intuicionismo ha sido visto dentro de las escuelas de fundamentación de la matemática como la más sospechosa y la menos potente. Más sospechosa porque es subjetivista y lo hace depender todo de un problemático acto fundamental de la intuición; menos potente porque corta ramas enteras de la matemática que no se pueden construir con sus métodos que, aunque finitarios como los de Hilbert, son mucho más estrictos y restringidos respecto a ciertos recursos.

Uno de los caballos de batalla del intuicionismo para sospechar de la lógica como posible fundamento está en que algunos de sus principios no se cumplen, como la ley del tercio excluso. Una pregunta típica del intuicionismo es, ¿existe en el desarrollo decimal del número *pi* alguna serie periódica?; un pensador, un filósofo, un matemático de tendencia realista diría: hombre, yo no sé si en el desarrollo decimal de *pi* en cierto momento va a haber una serie periódica, pero lo que sí sé es que o la hay o no la hay. La postura del intuicionismo es que esto carece de sentido, pues no estamos en posición de dar una respuesta taxativa con medios finitarios, es decir, una respuesta admisible para el intuicionismo. Por lo tanto, no es una cuestión de que nuestra ciencia no haya progresado lo suficiente, sino que ha solido depender de una mala lógica, por tanto no nos sirve para nada, a menos que la reconstruyamos sin tales dependencias. La lógica no nos sirve para fundamentar la matemática porque tiene problemas que son iguales o peores a los de la matemática.

Voy ya muy escaso de tiempo, así que terminaré señalando simplemente una línea de posible comparación filosófica entre estas escuelas. La antítesis del realismo, o platonismo, sería, en primer lugar, el nominalismo, que consiste en decir que los términos que utilizamos para referirnos a los objetos son sólo nombres, carentes de referencia objetiva. Una postura que se establece como intermedia es que las supuestas entidades son conceptos y esos conceptos son operaciones mentales. A partir de ahí, los logicistas serían realistas en filosofía de la matemática; los formalistas serían nominalistas y, por último, los intuicionistas se pueden asimilar a ciertas formas de conceptualismo.

II ¿Qué son los números?

El título de esta segunda sesión es: ¿qué son los números?, pero sólo vamos a explorar la pregunta.

El problema de los números no es un problema práctico para los matemáticos. El problema de la naturaleza de los números es esencialmente un problema filosófico. No hace falta tener alguna teoría filosófica acerca de la naturaleza de los números para hacer, por ejemplo, teoría de números. Sin embargo, los filósofos, en su extraña fascinación por la matemática, que viene de la época de los griegos, se han interesado siempre precisamente por ese concepto, el del número.

El problema de qué son los números tiene dos vertientes ontológicas: una de ellas es, primero, saber si los números existen o no. Es una pregunta previa, porque si se llega a la conclusión de que no existen los números, entonces el problema de la naturaleza de los números queda absolutamente erradicado. Pero si se decide por alguna razón que los números existen, entonces es donde entra la segunda rama de la pregunta. Si existen los números, ¿qué demonios son?, ¿cuál es su naturaleza? Esto, en la jerga filosófica, es el problema de la naturaleza de los números. En ella, nos solemos referir a esa naturaleza utilizando el término 'objeto'. Así, para el filósofo, plantearse si los números existen o no, es saber si los números son o no objetos. Si son objetos es que existen, si no existen es que no son objetos. Se supone, pues, que sólo lo que existe es alguna forma de objeto. Por eso, naturalmente, hay que tener un concepto de 'objeto' mucho más amplio de aquel que usamos en el lenguaje ordinario. Desde el punto de vista metodológico, para los filósofos a menudo un objeto es cualquier cosa que existe, con lo que hay distintas formas de existencia.

El problema de la existencia y la naturaleza de los números —a partir de ahora nos vamos a referir a ambas vertientes de una manera indistinta— se ha planteado de una manera digamos rigurosa sólo a partir de la segunda mitad del siglo XIX, cuando se dispuso de un cierto arsenal de instrumentos lógicos conjuntistas. Entonces, podríamos decir, se abrieron dos enfoques que veían los números, alternativamente, bien como fundamentalmente cardinales, bien como fundamentalmente ordinales. Quienes veían los números fundamentalmente como algo de carácter ordinal hacían hincapié en la naturaleza de la progresión de los números naturales y trataban de captar, de aprehender la esencia de esa progresión que daba pie a los números ordinales. Los trabajos de Dedekind [imagen 6] y Peano [imagen 7], básicamente, consiguieron axiomatizar o caracterizar la serie de los números en cierto sentido, aunque después se vio que tales axiomatizaciones eran incompletas.

Durante muchísimo tiempo se creyó que ésta era la forma perfecta de identificar lo que son los números. Paralelamente, y un poco más tarde a esta caracterización, que podríamos llamar ordinalista o si se quiere axiomática (refiriéndonos a los axiomas de Peano y Dedekind), ya que hacía hincapié en la axiomatización y en el carácter ordinal de los números, aparece la caracterización logicista de los números de Russell y Frege. El punto de vista logicista, con respecto a los números, da la primacía a su faceta cardinal, en el sentido según el cual se pueden definir los números como clases de clases. Así el número de una clase es la clase de todas las clases similares a la clase dada (siendo la similaridad la propiedad de dos clases de poder ponerse en correspondencia biunívoca). Con esa definición en el bolsillo, Frege y Russell consiguieron construir lógicamente una buena parte de la aritmética, pero el interés de la construcción de Russell y Frege estaba en que, con ella en la mano, los famosos cinco axiomas de Peano dejan de ser principios fundamentales no demostrados (axiomas) y se convierten en teoremas.

Cuando decimos que los números son conjuntos, inmediatamente hay que apresurarse a hacer una cierta matización. Supongamos que

6. Richard Dedekind (1831-1916)

la versión logicista de Frege es aceptable, es correcta y se puede mantener. Si eso es así, planteemos, por un momento, qué significa decir que los números han sido reducidos a clases o a conjuntos. Significa que los números son algo más que conjuntos, porque si significara que los números no son nada más que conjuntos querría decir que los números son una especie de construcción teórica hecha con conjuntos. Es decir, que si las entidades que forman la materia última de los números son entidades lógicas (suponiendo que los conjuntos o clases lo sean) entonces, ¿cuál es el estatus de los números?, ¿serían entidades derivadas?, ¿entidades meramente construidas? Esto no es una mera sutileza, sino un problema urgente para el filósofo.

En ambos casos, tanto en la tradición de Frege-Russel como en la de Peano-Dedekind, la respuesta fue muy parecida. Los números son objetos por sí mismos. Ni para Russell ni para Frege era admisible la consecuencia de que los números se pueden reducir completamente a clases de clases. Para ellos, que eran filósofos realistas platónicos, los números tienen una existencia objetiva, tal como la tienen las sillas. Los números son objetos lógicos, pero el que sean objetos lógicos no quiere decir que no sean objetos matemáticos por sí mismos. Así que esa reducción no es una reducción eliminativa, sino que es una reducción que conserva las características y la esencia propia de las entidades reducidas. Y para el caso de Dedekind y Peano exactamente lo mismo, para ellos los números, que existen por sí mismos, se presentan a través de su axiomatización. Ése es el contexto histórico en el que aparecen los análisis del concepto de número mediante dos tendencias que no son en realidad contrapuestas.

7. Giuseppe Peano (1858–1932)

8. Ernst Zermelo (1871-1953)

De todos los análisis posteriores del número que son interesantes desde el punto de vista filosófico, el más influyente es el que publicó en el año 1965 Paul Benacerraf, artículo realmente legendario entre los filósofos y del que aparece una traducción en *Mathesis* ["Qué no podrían ser los números", 12, (1993) 317-343]. El de Benacerraf ha sido un artículo estrella en este siglo, comparable sólo con los más célebres de Quine y Russell. Sin excepción, todos los trabajos actuales hacen referencia al trabajo de Benacerraf.

Su idea es brevemente la siguiente. Aborda el tema contando una historia de dos niños, Ernie y Johnny. Los nombres no son casuales, sino que están buscados para aludir, de entre las diferentes definiciones conjuntistas de los números que se han dado, a las dos que han sido más influyentes: la de Ernst Zermelo [imagen 7] y la de John von Neuman [imagen 8]. De ahí Ernie, por Zermelo, y Johnny por von Neuman. Se supone que por un momento renace una especie de fantasía científica, según la cual nos imaginemos que Zermelo tuvo un hijito, y von Neuman otro, y a ambos les enseñaron su propia visión de los números, de modo que los niños se entusiasman con la idea explicada por los correspondientes papás. Cuando esos niños juegan, sus juegos fundamentales son en base a las teorías que les han enseñado a cada uno: demostrar teoremas matemáticos, intentando ver cuál de las dos teorías es más convincente, o cuál es mejor, o simplemente por jugar. En el transcurso de esos juegos, en cierto momento se dan cuenta de que los teoremas que van demostrando llegan, si son comparados, a poner en duda supuestas verdades de la lógica.

La construcción de Johnny es muy sencilla: viene dada por el conjunto vacío, que se hace corresponder con el 0; el 1 sería el conjunto cuyo único miembro es el conjunto vacío, el 2 se obtendría al añadir una llave más; y, así sucesivamente: llave, llave, llave y vamos pasando al 3, al 4, al 5, etc. En cambio, en la construcción de Ernie, aunque los dos primeros términos de la progresión coinciden, O y {O}, el tercer miembro se forma con el primero y el segundo, {O, {O}}. Esto tiene la particularidad de que cuando Johnny y Ernie se ponen a jugar y se plantean si 1 pertenece a 3, a uno le sale que sí y al otro le sale que no, sin que

9. John Von Neumann (1903-1957)

medie error alguno en sus deducciones, lo cual parece atentar contra la lógica.

Esta es la historieta que a Benacerraf se le ocurre para enfrentarnos con dos hechos objetivos. (i) se pueden realizar varias reducciones conjuntistas de la progresión de los números; (ii) algunas de las verdades que surgen en cada una de esas reducciones no son ciertas en otras.

Entonces, los niños inmediatamente llegan a la conclusión de que uno de ellos no puede estar en lo cierto y se preguntan quién se equivoca, que es el punto donde empieza la sustancia filosófica del trabajo de Benacerraf.

La conclusión de Benacerraf, de una manera muy breve, es fundamentalmente que los números no son objetos. Basándose esencialmente en el argumento de que los números pueden modelarse de manera distinta e incompatible, según como construyamos la progresión y la hagamos corresponder con la teoría de conjuntos, la conclusión última es que los números no son objetos. Si los números son conjuntos, deberían ser más bien unos conjuntos que otros, cosa que no sucede, por lo que no pueden ser conjuntos, ni por tanto objetos. Si los números no son objetos, desde el punto de vista filosófico de la ontología, que es la que se encarga de estas cosas, entonces no existen, o en todo caso si existen son sólo términos que no se refieren a entidades reales. Lo que dice Benacerraf es que los números no son nada más que numerales, nada más que palabras; pero que no cumplen lo que normalmente estamos acostumbrados a que cumplan las palabras que se refieren a objetos.

Así es como Benacerraf se desembaraza del argumento que se podría llamar del polimorfismo conjuntista, es decir, del argumento que demuestra que los números pueden adquirir numerosas formas cuando las modelamos en la teoría de conjuntos, pues tales formas pueden resultar incompatibles entre sí, y llega a la conclusión de que la existencia de los números es una existencia ficticia y, que, por tanto, no nos tenemos que preocupar de caracterizar la esencia de los números, pues su existencia como objetos es simplemente pura mitología.

A partir de aquí vamos a plantear problemas. Una primera observación que habría que hacer sobre Benacerraf es que no menciona en forma alguna la construcción cardinalista de Russell y Frege, que se puede considerar paralela a la construcción de Zermelo y von Neuman. No le debió parecer que valía la pena detenerse unos instantes en esa construcción logicista clásica.

Si fuese cierto que los números existen, parece que tendrían que existir como objetos no físicos. Las virtudes de la ontología de Quine, o de su compromiso ontológico, están en que no distingue entre objetos físicos y objetos no físicos. Así, si en una teoría bien hecha cuantificamos sobre números, entonces naturalmente éstos existen como objetos, formando parte de un esquema global que caracteriza el todo de nuestro lenguaje y, por tanto, el todo de nuestro esquema mental, que engloba las ciencias. En consecuencia, una teoría sobre los números tiene una función muy importante que cumplir dentro de nuestro esquema global de la ciencia, pues la matemática está inserta en la ciencia empírica, así que plantearse la existencia de los objetos aisladamente carece de sentido en la teoría de Quine. Definitivamente ambas teorías, Benacerraf y Quine, parecen complementarse.

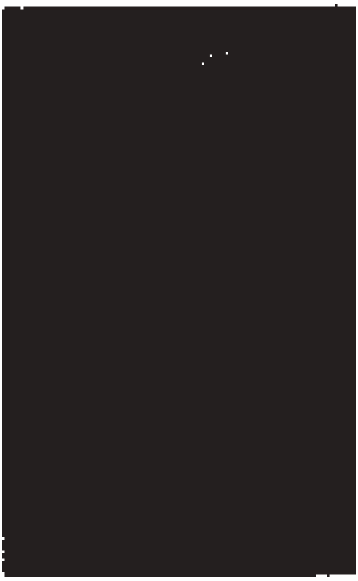
Hay una crítica muy interesante de Benacerraf en un artículo de Wetzel [1989] donde reconstruye el argumento original en los siguientes términos: según Benacerraf la aritmética de Peano tiene infinitos modelos en la teoría de conjuntos. A partir de aquí aparecen tres posibilidades: o ninguna de esas explicaciones es correcta, o todas la son, o sólo una es correcta. Ahora bien, si varias fueran correctas entonces un número cualquiera sería igual a conjuntos distintos entre sí, lo cual es falso, por tanto parece que esta posibilidad habría que desecharla.

Si la verdadera es la que dice que sólo una explicación es correcta, entonces deberíamos estar en disposición de dar razones convincentes de porqué una es la buena, pero esto no es aceptable porque carecemos de esas razones. Queda la tercera: ninguna de las explicaciones conjuntistas es correcta: ésta es la que dice Wetzel que es la correcta, por lo que concluye que los números no son conjuntos en el sentido en que Benacerraf se ha planteado la pregunta.

Una idea original de Wetzel es reconstruir el argumento de Benacerraf, pero aplicado a otras cosas que no son conjuntos. Así, el argumento de Benacerraf de que los números no son objetos no es concluyente. Indica que los números pueden estar tranquilos porque Benacerraf sólo demuestra que no son un tipo específico de objetos, mas no, en general, que no sean objetos. Para demostrarlo, Benacerraf tendría que haber pasado revista a todos los tipos de objetos posibles. Como dijo Resnik, al respecto: Benacerraf ha demostrado quizá que los números no son conjuntos, pero que venga alguien y que nos demuestre, además, que los números no son números. Con ello vuelve a insistir en el hecho de que Benacerraf nos quiere vender conclusiones para las cuales no ha pagado el precio correspondiente en forma de premisas.

No puedo terminar sin hacer mención de un argumento importante en la filosofía de la matemática actual que pretende garantizar la existencia de los números; mejor dicho, pretende simplemente convencernos de que tenemos buenos argumentos para pensar que los números existen.

El argumento lo dio originalmente Quine y se puede aplicar a muchas otras entidades que estén en problemas para existir; se suele llamar argumento de la indispensabilidad. Si somos capaces de aportar la evidencia suficiente como para convencer a aquellos que duden de la existencia de cierta entidad, de que ésta es indispensable en nuestro esquema total del mundo y de la ciencia, entonces negarle la existencia significaría el derrumbe completo de todo nuestro esquema científico. Por tanto, el mejor criterio de existencia y objetividad sería el de nuestro esquema científico considerado en su conjunto, así que el argumento de la indispensabilidad es extraordinariamente poderoso.



10. John S. Mill (1806-1873)

IV ¿Qué es la verdad matemática?

El problema que vamos a examinar hoy es el de la verdad matemática: ¿qué es? Como siempre, exploraremos las ramificaciones del problema, evaluando su importancia y examinando algún que otro argumento de forma crítica para que nuestro análisis sea estimulante.

Los conceptos que están involucrados, en términos generales, cuando hablamos de verdad son fundamentalmente de dos tipos. En primer lugar, siempre que pensamos en la verdad de una proposición, tanto en general como en la matemática, pensamos que hay objetos que son la referencia de los términos de esa proposición: por ejemplo, si digo que 7 + 5 = 12 y creo que eso es una verdad de la aritmética, entonces creo que hay unos objetos que son la referencia de esos términos. Este es el punto de vista semántico a través del cual nos imaginamos la verdad; la referencia a ciertos objetos que presupongo existentes es lo que hace que las proposiciones sean verdaderas. Las proposiciones son verdaderas en función de esos objetos existentes; porque si se tratase de pseudo objetos, ficciones, o lo que sea, difícilmente diríamos que tales 'entidades' las pueden hacer verdaderas. Así, el asunto de la referencia de los términos y la existencia de los objetos es vital en la matemática, como en cualquier ciencia o incluso en el lenguaje ordinario.

El segundo punto que es vital cuando nos referimos a la verdad es el concepto de hecho. Se supone que nuestras proposiciones son generales en cualquier ciencia. Cualquier proposición es verdadera en función de los hechos y los hechos son lo que hacen verdaderas a las proposiciones, con lo que se supone que tiene que haber cierta correspondencia entre nuestras proposiciones y esos hechos. Los hechos, por así decirlo, están formados por objetos. Éste es el punto de vista del sentido común acerca de la verdad. Sin embargo, para nosotros, seres humanos, el punto de vista epistemológico es ineludible. Una cosa son los hechos y otra nuestro conocimiento de ellos. Los hechos pueden darse y nosotros ignorarlos. Podemos manejar un enunciado físico o matemático y no saber si es verdadero o falso, por no conocer hechos que poner en correspondencia con ese enunciado. Por tanto, no es suficiente decir que una teoría de la verdad tiene que serlo en función de los hechos que la hagan tomar cuerpo, sino que también tenemos que tener en cuenta nuestro propio conocimiento de esos hechos.

En ciencias empíricas normalmente hablamos de verificación, y decimos que nuestro conocimiento de las verdades está en función del conocimiento de los hechos. Este camino en matemática parece que lo tenemos vedado. ¿Tendría sentido que alguien nos dijera que para saber si una proposición de la aritmética es verdadera o no, lo que tenemos que hacer es verificarla? Es decir, nuestro conocimiento de que 7 + 5 = 12 dependería de que podamos verificar que esa suma se cumple en la realidad empírica.

Dudosamente, como filósofos de la matemática, admitiríamos que esto es así. Algunos filósofos empiristas (el más conocido es John Stuart Mill [imagen 9]) han sostenido que efectivamente la verdad de los enunciados de la matemática es una verdad empírica, que parte del hecho de que en nuestro contacto con la realidad hacemos generalizaciones de la experiencia cotidiana. Ésta es una teoría bastante desacreditada entre los filósofos de la matemática actual, que exigen que la verdad matemática sea algo más riguroso que la mera generalización empírica extraída de los hechos.

Normalmente a los filósofos no les gusta asimilar la verdad matemática a la verdad empírica. Además, para proposiciones aritméticas sencillas como 7 + 5 = 12, la verificación es fácil e inmediata. Pero cuando hablamos de grandes números la verificación empírica se nos escapa completamente y, sin embargo, seguimos confiando en las reglas de la suma.

Por eso en los primeros treinta años del siglo pasado los matemáticos, una vez que la teoría empirista de la matemática fue más o menos desechada (sobre todo a manos de Frege, que hizo una crítica devastadora de Mill), adoptan un concepto de verdad más cercano al de demostrabilidad. Así, hasta los años treinta —que es cuando se producen los resultados célebres de Gödel acerca de la incompletud de la aritmética— lo que más o menos estaba en el ambiente de los matemáticos, y de los filósofos que se interesaban en la matemática, es que el concepto de verdad matemática, lejos de ser un concepto empírico, venía a coincidir con el concepto de demostrabilidad: un enunciado de la matemática es verdadero si es demostrable en un sistema bien especificado a través de unos axiomas y unas reglas de inferencia.

Esta postura duró bastantes años, y aunque nunca se llegó a articular de una manera precisa, en los artículos que se publicaban sobre filosofía de la matemática estaba clarísimamente latente y todo el mundo estaba convencido de que era cuestión de pulir un poco esa teoría. Se esperaba que en un futuro se conseguiría una teoría de la verdad de la matemática fehaciente, basada en la idea de demostrabilidad, pero es claro que con los resultados de Gödel de la incompletud de la aritmética de 1931 hubo que abandonar, desafortunadamente, la equivalencia entre la verdad matemática y la demostrabilidad. Lo que demostró Gödel, entre otras cosas, es que en todo sistema lo suficientemente potente como para aspirar a incluir en él las verdades de la aritmética, siempre hay proposiciones que son intuitivamente verdaderas pero que son esencialmente indemostrables dentro del sistema. Por lo tanto, la verdad matemática y la demostrabilidad no coinciden.

Podríamos decir entonces que la demostrabilidad es una especie de recurso del que nosotros, los seres humanos, disponemos para intentar construir pruebas. Pero el concepto de demostrabilidad, aunque en la práctica es el que se usa, filosóficamente ha sido abandonado como correlato del concepto de verdad matemática. Así, había que buscar un análisis distinto al de la demostrabilidad, y a partir de los 1930s todas las cosas que se han escrito y se han investigado para intentar dilucidar el concepto de verdad matemática obviamente han abandonado la vía muerta de la demostrabilidad.

Volvemos entonces al concepto de verdad en general, una vez excluidas la verificabilidad y la demostrabilidad como criterios de verdad para las proposiciones de la matemática, por haber visto que ambas son de alguna manera relativas a nosotros. Sin embargo, tenemos que seguir manteniendo nuestros puntos de vista de partida incluyendo también la vertiente epistemológica. La verdad matemática exige conocimiento de los hechos de la matemática y de los objetos de la matemática. Por tanto, así como la ontología y la epistemología se dan la mano en el concepto de verdad en general, también lo hacen respecto al concepto de verdad matemática en particular.

Existe un argumento muy conocido en filosofía de la matemática, procedente de Benacerraf, que en 1973 publicó un célebre artículo sobre la verdad matemática; este argumento se conoce como el dilema de Benacerraf. El dilema en cuestión está diseñado única y exclusivamente para romper nuestra creencia, aparentemente de sentido común, de que una teoría de verdad de la matemática debe exigir tanto hechos y objetos matemáticos como nuestro conocimiento de ambos; si el dilema de Benacerraf está bien planteado ambas cosas no se pueden conseguir al mismo tiempo.

Los dilemas son construcciones que tienen dos vías, o cuernos, aparentemente exclusivos y exhaustivos, pero que poseen la extraordinaria propiedad de que tanto si escogemos uno como si escogemos el otro nunca llegamos a un resultado satisfactorio.

En nuestro caso el primer cuerno es el ontológico, que se refiere a los hechos y objetos de la matemática, y el segundo es el cuerno epistemológico, que se refiere a nuestro conocimiento de ellos, según Benacerraf las exigencias de cada uno de ellos son incompatibles entre sí.

El cuerno ontológico está basado en dos premisas. La primera dice que la verdad matemática requiere la referencia a objetos matemáticos: ¿cómo nos imaginamos los objetos matemáticos? Son objetos que no podemos atrapar con la mano, no son objetos físicos, pero tampoco son objetos que construimos o modificamos con nuestra mente y, por tanto, son objetos que podríamos llamar inertes desde nuestro punto de vista: no podemos interactuar con ellos. Así, la primera premisa establece que la verdad matemática exige la referencia a objetos abstractos, entendiendo por abstractos aquellos objetos que no son físicos ni mentales.

La segunda premisa es que deseamos que la matemática sea un cuerpo de verdades. Si la matemática no fuese nada más que un cuento de hadas nadie estaría interesado en ella. Es decir, lo que queremos de una teoría de la matemática es que nos permite seguir haciendo lo que ya hacemos, seguir confiando en que la matemática es un cuerpo de verdades y no un cuerpo de ficciones. Por tanto —y esta sería la conclusión de la primera vertiente del dilema—, la verdad matemática debe de ser la correspondencia con hechos abstractos, sin olvidar que esos hechos son inertes para nosotros.

Los problemas comienzan cuando pasamos a la vertiente epistemológica, pues vamos a tener bastantes dificultades al intentar dilucidar un tipo de conocimiento específicamente matemático. Si la verdad matemática requiere la existencia de objetos y hechos matemáticos, también requiere la existencia de conocimiento matemático. Vamos a ver si esto es posible; vamos al segundo cuerno.

Aquí hay una serie de afirmaciones básicas que difícilmente podríamos poner en duda. Tenemos tres de ellas. La primera dice que el conocimiento en general exige un cierto nexo, una cierta relación entre el sujeto que conoce y el objeto que es conocido. La segunda afirmación se refiere a las características de esa relación que tiene que existir entre sujeto cognoscente y objeto conocido. Esa relación tiene que ser una relación que podríamos llamar de percepción, en el sentido de que cuando un sujeto conoce un objeto es que de alguna manera lo percibe.

Ahora viene una tercera afirmación que trata de dar un contenido al tipo de percepción, al tipo de nexo entre sujeto y objeto, que tiene que ser un nexo perceptivo. La tercera afirmación nos dice que esa percepción solo es fiable si es causada por el objeto percibido. Si hay una relación causal con ese objeto percibido, tiene que haber un marco causal que nos permita confiar en nuestras percepciones; de lo contrario desconfiaremos de ellas y creeremos que son un producto de nuestra mente. Ahora apliquemos todo esto al conocimiento matemático.

El conocimiento matemático requiere un nexo causal entre el sujeto y los objetos conocidos, si es que queremos seguir manteniendo una teoría del conocimiento apoyada en una teoría causal de la percepción. La esencia última del dilema consiste en reconocer que lo que exige por un lado la verdad matemática hace imposible el conocimiento matemático. Por tanto, o renunciamos a la caracterización de los objetos de la matemática como objetos abstractos inertes y les otorgamos propiedades distintas, que hagan posible el conocimiento en el sentido causal del término, o nos vamos a la primera vertiente del dilema y renunciamos al conocimiento en el sentido causal, lo que exigiría inventarnos una teoría del conocimiento alternativa, en la que el conocimiento no se base en la percepción de los objetos y en la que, en última instancia, la percepción no necesite ser causal para ser fiable; pero ambas cosas son imposibles.

Con independencia del grado de convicción de cada una, voy a terminar planteando, de manera informal, algunas líneas de ataque al dilema de Benacerraf, ya sin tiempo para desarrollarlas. Una posible defensa contra el argumento sería decir que es posible conocer sin causación. Otra posible defensa está en intentar introducir la noción de intuición matemática que los seres humanos supuestamente tendríamos: según esto, esa facultad, que no sería causal, nos permitiría el acceso directo a los objetos de la matemática. Este acceso no es del todo fiable, pero puede consolidarse y cultivarse con la educación y con la práctica del trabajo matemático concreto (como creía Gödel). Por último, cabría quizá decir, en línea con una posición holística, que nuestro conocimiento de los objetos matemáticos, como el de los objetos de la física, no es directo, sino que depende de otras cosas que damos por sabidas, pero que a lo mejor también son dudosas.

V. Pieri, Hilbert y la geometría

El objetivo general de esta cuarta sección es reivindicar un poco la escuela de Peano. Una escuela que se desarrolló en Italia, que introdujo una serie de novedades muy importantes en el campo de la formalización de la lógica y la matemática, no sólo una notación simbólica o los famosos axiomas de Peano sino mucho más cosas, como por ejemplo una axiomatización de la geometría, de varios tipos de geometría, en la década de los 1880s.

La escuela de Peano se formó en torno a la figura de Giuseppe Peano y contó con un numeroso grupo de matemáticos de casi todas las partes de Italia, que se vieron muy atraídos por la figura de este hombre, que era de un empuje y una personalidad bastante avasalladora. Su proyecto fundamental era desarrollar una notación simbólica y con ella axiomatizar toda la matemática partiendo de la lógica. Los resultados que fueron alcanzando iban saliendo periódicamente en fascículos, que después se recogían en tomos (el *Formulario Matematico*), así como en una revista (la *Rivista di Matematica*), donde el trabajo en equipo primaba sobre lo individual. Uno de los objetivos de esta sección es revindicar la originalidad de esta escuela, de cuyos logros por desgracia se sabe muy poco, fundamentalmente porque en el desarrollo de la axiomática han sobresalido sobre todo las ideas de Hilbert y en el de la lógica matemática las de Frege y Russell.

Los principales componentes de esta escuela, aparte del maestro y fundador Giuseppe Peano, fueron Alessandro Padoa, Cesare Burali-Forti, y Mario Pieri. Aunque en cierto momento los miembros llegaron a rebasar la cuarentena, los más importantes fueron estos tres; de ellos, Mario Pieri es el menos conocido y, sin embargo, fue probablemente el más original.

Cuando se habla de los fundamentos de la geometría, siempre se piensa en Hilbert. Se ha llevado prácticamente todo el crédito en lo que entendemos como axiomatización de la geometría. Realmente quien primero construyó una axiomatización de la geometría fue otro alemán, Pasch, pero su axiomatización tenía algunas lagunas y estaba basada en una filosofía de la matemática realmente sorprendente, mezcla de empirismo y formalismo. Pasch pensaba que las entidades de la geometría, sus objetos y verdades, tienen su fundamento en la experiencia; sin embargo, también es cierto que introdujo un pequeño pasaje en su axiomatización de la geometría de 1882 donde estableció una idea importante que se fue desarrollando a lo largo del tiempo y que influyó tanto en la escuela alemana de Hilbert como en la italiana de Peano. Esa idea, *grosso modo*, era que aunque las palabras que se utilicen para referirse a los objetos de la geometría sean las clásicas (punto, recta, etc.), a esas palabras se les puede dar una interpretación distinta a la habitual, siempre y cuando el trabajo de deducción sea el mismo. Así, aunque al hacer una axiomatización y al deducir teoremas de los axiomas conservemos en la mente la interpretación intuitiva de los términos primitivos, lo que realmente cuenta es el conjunto de relaciones que existe entre ellos a efectos formales.

Con esta idea se iniciaba el punto de vista formal o abstracto en filosofía de la geometría, aunque Pasch no la desarrolló. Simplemente se dio cuenta de esa posibilidad, pero no estaba interesado en los sistemas formales porque su filosofía de la matemática era empirista.

El trabajo de Hilbert se basó fundamentalmente en la axiomatización de Pasch. Sin embargo, parece ser que Hilbert no conoció los trabajos anteriores de los italianos, como las axiomatizaciones que Peano había hecho ya en las décadas de 1880 y 1890, y que tenían una enorme ventaja sobre la de Pasch, ya que estaban hechas en un lenguaje simbólico formal.

Sin embargo, Peano no consiguió una axiomatización del todo satisfactoria de la geometría proyectiva ni de la geometría elemental, y esa fue la tarea que se propuso Pieri en 1897 y 1899. En 1897 Pieri presenta la primera axiomatización completamente satisfactoria de la geometría proyectiva, siguiendo la misma línea de Peano pero con la ventaja adicional de reducir el número de ideas primitivas a dos y valerse sólo con una veintena de axiomas. En 1899 hace lo mismo con la geometría elemental, dándose la circunstancia de que esta obra aparece en prensa antes que la de Hilbert.

Unos meses después aparece la célebre fundamentación de Hilbert, que no se preocupa por reducir al mínimo las ideas primitivas, ya que utiliza cinco o seis distintas, y una serie de axiomas bastante numerosos, con la particularidad de que a diferencia de la escuela italiana los divide en grupos. Este es un poco el contexto general de cómo fue a grandes rasgos el proceso de axiomatización de la geometría.

Veamos algunos de los detalles del trabajo de Hilbert y Pieri, empezando por la concepción que ambos tenían de las ideas primitivas. Para Pieri las ideas primitivos son los conceptos fundamentales en los cuales se basa la axiomatización, y tienen la característica de que pueden interpretarse de manera arbitraria dentro de los límites asignados por los postulados, siempre y cuando se cumplan, es decir, siempre que verifiquen o satisfagan los postulados.

La segunda concepción importante de Pieri, en torno a los conceptos primitivos, es que en base a ellos tiene que ser posible definir de manera constructiva el resto de los conceptos que aparezcan posteriormente. Vemos, por tanto: una concepción formal, un esfuerzo en la máxima reducción del número de conceptos, y una exigencia de que los conceptos que aparezcan con posterioridad se puedan definir de manera nominal, de manera explícita, en términos de los primitivos, sin recurrir a nada más.

En cuanto a Hilbert, es cierto que a él se le atribuye la famosa anécdota de principios de la década de los 1890 en la que, durante un viaje y pensando en cuestiones de axiomatización, afirmó que, cuando uno construye una axiomatización de la geometría, en lugar de pensar en puntos, líneas y planos, lo mismo da que piense en jarras de cerveza, sillas y mesas, siempre y cuando por sus propiedades esas entidades cumplan los axiomas. Sin embargo, si uno va a la obra publicada no ve nada de esto, sino una introducción muy breve (de 1903), en la cual se dice que el objetivo de la axiomatización es llevar a cabo el análisis lógico de nuestras intuiciones geométricas, lo cual no parece estar muy a favor de un punto de vista abstracto y formal, como el que aparece en la escuela de Peano.

Para ser completamente sinceros, hay que tener en cuenta que disponemos también de una correspondencia que Hilbert mantuvo con Frege en 1900-1901, en la que Hilbert proporciona otra versión de su concepción de las ideas primitivas de los sistemas axiomáticos de geometría. En ella, le viene a decir a Frege que, en su idea de la cosa, los objetos, los conceptos primitivos de su sistema se pueden escoger de una manera distinta a como se hizo en la publicación, siempre y cuando tales conceptos cumplan los axiomas.

En materia de definiciones la ventaja vuelve a caer del lado de Pieri de una manera clara. Por aquella época. Hilbert no tenía alguna teoría de la definición, sino que parece que utilizaba el término de una manera intuitiva. En cuanto a cómo veía la relación entre axiomas y conceptos primitivos, a veces se le atribuye la idea de que los axiomas definen implícitamente los conceptos primitivos, lo que es perfectamente compatible con su trabajo, sin que se halle además algún texto que lo desmienta.

Pieri utilizó a menudo la expresión "definición implícita" y escribió que los axiomas definen implícitamente los conceptos primitivos, pero siempre insistió en que los términos que utilizamos para referirnos a los conceptos primitivos son bastantes aleatorios y podemos sustituirlos por cualesquiera otros, con tal de que se sigan verificando los mismos axiomas. Además, Pieri tenía una concepción global de lo que se debe entender como sistema axiomático, en el marco de una clasificación de las definiciones en implícitas y explícitas. Las explícitas son las definiciones nominales habituales en las que se reducen o eliminan los conceptos definidos en términos de los primitivos; de las implícitas introduce dos categorías: las definiciones por postulados (o axiomas) y las definiciones por abstracción, que se caracterizan por definir no los términos mismos sino su igualdad con otros.

La idea que tenía Pieri de los postulados y de los axiomas era extraordinariamente coincidente con su concepción abstracta de la geometría y con su énfasis en lo formal. Para Pieri, los axiomas en sí mismos no son ni verdaderos ni falsos, sino que dependen de la interpretación que se les dé. Parafraseando a Pieri, podemos decir que los postulados pueden considerarse como proposiciones condicionales, que no son ni verdaderas ni falsas en sí mismas, sino que se limitan a expresar las condiciones que pueden o no ser verificadas según cómo se interpreten los conceptos primitivos. Así, por ejemplo, cierta igualdad puede ser verdadera si sus variables son números reales y falsa si son cuaterniones.

Se da la paradoja de que Hilbert, uno de cuyos méritos más importantes es haber inventado lo que ahora se conoce como teoría de la prueba, empezó a desarrollar sus ideas en el terreno de la axiomatización antes de que tuviera alguna teoría clara y explícita de la demostración. En la axiomatización de la geometría que comentamos no define lo que es una demostración, sino que se limita a darlas donde son necesarias. Peano había dado también una idea muy pobre de la demostración, pero esa idea sirvió de punto de partida para otros miembros de su escuela, que en materia de práctica de la demostración no parecen desmerecer en nada del Hilbert de esa época. Además, algunos de los miembros de la escuela, como por ejemplo Pieri, solían desarrollar las demostraciones de manera completamente simbólica, no verbal, lo cual es una clara ventaja para el rigor y la claridad.

Un último ejemplo del claro punto de vista formal de Pieri está en su idea de que cualquier modificación o interpretación de los entes primitivos, que satisfaga los postulados, es una representación del tipo de espacio definido por los axiomas. Así, si un espacio es cualquier interpretación de los primitivos que satisfaga los axiomas, entonces, presumiblemente, habrá muchas interpretaciones que satisfagan los axiomas, y, por tanto, cada una de ellas sería o podría ser un espacio. Es en este punto cuando se le ocurre dar una definición revolucionaria de espacio como la clase de todas las interpretaciones posibles en el dominio de los postulados, que desde luego es una definición claramente semántica, en el sentido de la teoría de modelos, que carece de parangón en el Hilbert de la época.

Francisco Rodríguez Consuegra es profesor del Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia de la Universidad de Valencia, España. Una lista completa de sus publicaciones e investigaciones en curso está disponible en su página web http://www.uv.es/~rodrigue/. En la actualidad trabaja en dos libros: *Estudios sobre lenguaje y ontología* y *Mario Pieri's work on the foundations and philosophy of Mathematics* (con E. Marchisotto).

Referencias

BENACERRAF, P. 1965. "What numbers could not be". Reimp. en Benacerraf y Putnam. Trad. cast. de X. Arnaval y F. Rodríguez Consuegra. *Mathesis* 9 (1993) 317-343.

__________ 1973. "Mathematical truth". Reimp. en Benacerraf & Putnam.

BENACERRAF, P. y PUTNAM, H. (eds.) 1983. *Philosophy of mathematics*. Londres y Nueva York: Cambridge University Press.

DAVIS, P.J. y HERSH, R. 1988. *The mathematical experience*. Boston: Birkhäuser. Trad. cast. de L. Bou. Barcelona: MEC-Labor.

DUMMETT, M. 1978. *Truth and other enigmas*. Londres: Duckworth.

__________ 1991. *Frege. Philosophy of mathematics*. Londres: Duckworth.

GÖDEL, K. "What is Cantor's continuum problem?". Reimp. en Gödel 1990. Trad. cast. de F. Casanovas y J. Mosterín en Gödel 1981.

__________ 1990. *Collected Works*, vol. II: *Publications 1938-1974*. S. Feferman *et al.* (eds.) Oxford University Press.

__________. 1981. *Obras completas*. J. Mosterín (ed.) Madrid: Alianza.

__________ 1994. *Ensayos inéditos*. F. Rodríguez Consuegra (ed.) Barcelona: Grijalbo-Mondadori.

GOODMAN, N. 1985. "Mathematics as an objective science". Reimp. en Tymoczko 1985.

HART, W. D. 1991. "Benacerraf's dilemma". *Crítica* **68**: 87-104.

KITCHER, P. 1983. *The nature of mathematical knowledge*. Nueva York y Oxford: Oxford University Press.

KÖRNER, S. 1960. *The philosophy of mathematics*. Londres: Hutchinson. Trad. cast. de C. Gerhard en México: Siglo XXI, 1967.

MADDY, P. 1990. *Realism in mathematics*. Oxford: Clarendon.

RODRÍGUEZ CONSUEGRA, F. 1991. *The mathematical philosophy of Bertrand Russell: origins and development*. Basilea, Boston, Berlín: Birkhäuser.

__________ 1991. "Números, objetos y estructuras". *Crítica* **68**: 1-86.

__________. 1994. "Kurt Gödel y la filosofía de la matemática". Ensayo introductorio a Gödel 1994.

SHAPIRO, S. 1983. "Mathematics and reality". *Philosophy of science* 50: 523-548.

TAIT, W. W. 1986. "Truth and proof: the Platonism of mathematics". *Synthese* 69: 341-370.

TYMOCZKO, T. (ed.) 1985. *New directions in the philosophy of mathematics*. Boston, Basilea, Stuttgart: Birkhäuser.

WETZEL, L. 1989. "That numbers could be objects". *Philosophical Studies* **56**: 273-292.