Mathesis 11 (1995) 283-294

Método de máximos y mínimos

Jesús Hernández

Leonhard Euler. *Método de máximos y mínimos*. Barcelona: Universitat Autónoma de Barcelona y Universidad Politécnica de Catalunya. 1993. Selección del *Methodus*. Introducción, traducción, notas y apéndices a cargo de Albert Dou.

1 La Universidad Autónoma de Barcelona es una de las pocas españolas donde la historia de la ciencia ha conseguido una situación académica algo satisfactoria: existe un *Seminario de Historia de las Ciencias* que publica además, en colaboración con la Universidad Politécnica, una colección de 'Clásicos de las Ciencias' que se atiene a criterios respetables de exigencia intelectual y editorial. Dicha colección es casi la única de su género, dentro del ámbito universitario, en el país, si bien hay que decir que otras universidades han publicado también libros sobre la materia. Estas publicaciones participan, desde luego, de las limitaciones propias de las editoriales universitarias españolas y, en general, latinas, que afectan en particular a la distribución.

El libro que nos ocupa es el tercero de dicha colección, precedido por obras de Galileo (*La nueva ciencia del movimiento*) y Hertz (*Las ondas electromagnéticas*) y seguido por una nueva edición —ya había otra de Luis Vega, publicada por Alianza Editorial en 1986— del *Método*, de Arquímedes, debida a Pedro González Urbaneja. Las normas de la colección, bastantes estrictas, suponen la inclusión en facsímil de un texto fiable que ha sido sometido a crítica y el añadido de notas de distintos tipos (véase más abajo); hay, por otra parte, restricciones en cuanto a la longitud de los textos, lo que puede dar lugar, como es el caso aquí, a supresiones de cierta consideración.

2 La obra que nos ocupa, cuyo título original latino es *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, publicada en 1744 en Lausana y Ginebra, es uno de los textos fundamentales del

Cálculo de Variaciones y una contribución decisiva para su constitución en tanto que rama autónoma (con las salvedades del caso) de las matemáticas.

Su autor, Leonhard Euler (1707-1783), es uno de los más grandes matemáticos de todas las épocas, y también uno de los más prolíficos: la enorme tarea de la publicación de sus obras completas, que incluyen su abundante correspondencia, ha venido realizándose de manera ejemplar a lo largo de muchos años y va acercándose a su fin: en ella han colaborado gentes de la talla de C. A. Truesdell, R. Taton o el recientemente desaparecido A. P. Yuskievitch, autor igualmente del artículo "Euler", del *Diccionario de Biografías Científicas* de C. C. Gillispie. A Euler debemos no sólo aportaciones importantísimas en casi todas las ramas de la matemática, desde la teoría de números y los inicios de la topología (teorema de Euler sobre los poliedros, problema de los puentes de Koenisberg) y la teoría de grafos, hasta las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones en derivadas parciales, junto con sus aplicaciones a la mecánica de fluidos, la elasticidad, y la física en general, sino también buena parte de las nociones y notaciones que manejamos hoy. De su vida se da sucinta noticia en la *Introducción*, y es posible hallar más información en los manuales de historia de la matemática o en el capítulo a él dedicado de los *Men of Mathematics*, de E. T. Bell, capítulo que precede al del otro gran cultivador de la disciplina en el siglo XVIII, Lagrange. Allí puede verse el espectáculo de un trabajador infatigable, al que no detuvo la ceguera, dotado de una asombrosa capacidad de cálculo, procreador de abundantísimos frutos del espíritu y no pocos-trece-de la carne, sereno y equilibrado, que muere en calma al final de una vida cumplida: "dejó de vivir y de calcular", en frase famosa del elogio fúnebre de Condorcet. En suma, una vida que hace pensar más en J. S. Bach que en Rimbaud.

3. El Cálculo de Variaciones estudia (tal y como aparece en el título mismo de nuestro libro) problemas de máximos y mínimos, pero no en el sentido en que se habla habitualmente de ellos para funciones reales de una o varias variables reales, y que son una de las aplicaciones más extendidas del cálculo infinitesimal. Aquí la solución que se busca es una función $y(x)$ y no un número (o varios); dicho de otro modo, en nuestro lenguaje de hoy, la solución está en un espacio de funciones, de dimensión infinita, y no en uno de dimensión finita. Hoy disponemos de un cálculo diferencial en espacios de Banach, pero no hará falta decir que no era éste ciertamente el caso en la época de Euler, cuando la teoría de funciones de varias variables estaba aún en fase un tanto

embrionaria, de la que no saldría en muchos aspectos hasta bien avanzado el siglo XIX.

El problema más conocido de este tipo es seguramente el de hallar la curva de longitud dada que encierra un área máxima, y que la leyenda hace remontarse a la reina Dido y Cartago, cuya solución es la circunferencia. De ahí el nombre de *isoperimétricos* que se ha dado tradicionalmente a tales problemas y que aparece también en el título de nuestra obra. Obra que, por cierto, no sólo posee interés por sus contenidos sino también como ejemplo de (una fase de) la constitución y posterior evolución de una rama de la matemática, aspecto muy sugestivo sobre el que volveremos.

Digamos, para terminar, que Euler *también* da su nombre al Cálculo de Variaciones, y que la publicación de este libro le convierte en el mejor matemático vivo, como se dice en la *Introducción* y en otros muchos lugares, como por ejemplo el libro de Kline.

4. Tal y como se dice en la introducción [p. 13]

> Que estos problemas eran difíciles lo muestra la historia, pues después del planteamiento de los primeros ejemplos concretos por los hermanos Bernoulli a fines del siglo XVII, quienes al mismo tiempo que Newton, Leibniz y Huygens dan las primeras soluciones, los nuevos problemas permanecen mucho tiempo sin resolver a pesar de su gran atractivo; y aún más, los matemáticos que dan las primeras soluciones algo más generales, J. Hermann (1729), B. Taylor (1685-1731) y el mismo Euler (1732), dan soluciones equivocadas.

Esta circunstancia surge ya desde los comienzos del Cálculo de Variaciones y no desaparece sino tardíamente: se trata de algo que merece un estudio más completo y sistemático a partir de los materiales disponibles, que son muchos. Galileo plantea el problema de la braquistocrona —curva a lo largo de la cual se desciende de un punto a otro que no está en su vertical en un tiempo mínimo— y lo resuelve mal, dando como respuesta la circunferencia, cuando la solución correcta es la cicloide. También Jean Bernoulli dio abundantes respuestas equivocadas a los problemas que le propuso su hermano Jacques.

Se nos dice que hacia 1732 Euler mejora y extiende métodos de los Bernoulli: "... también aplica la ley de Bernoulli, incluso cuando no es correcto aplicarla, de modo que la mayoría de los resultados son erróneos" [Introducción, 23]. Sólo después de 1734 descubre Euler casos en los que la ley de Bernoulli no es necesariamente válida [véase asimismo la nota H3. 53]. También se alude a errores en el uso de los multiplicadores en el capítulo 6 (suprimido). Euler comete igualmente errores [véase Fraser 1992 nota 10] en su memoria de 1741, muchas de cuyas investigaciones son continuadas en el *Método*.

Una explicación provisional de estos deslices puede ser lo novedoso de la situación con respecto al cálculo infinitesimal tal y como se había cultivado hasta entonces, la falta de familiaridad con estos problemas nuevos y las mayores dificultades técnicas que planteaban cuando, como ya indicamos, las funciones de varias variables eran un territorio todavía poco explorado y dominado.

5. Como ya dijimos, las limitaciones de espacio impuestas han obligado a realizar cortes importantes en el texto traducido, habiéndose suprimido más de la mitad del original. La situación se puede describir con más detalle como sigue.

El primer capítulo, que es una introducción general a los problemas estudiados, se incluye entero, seguido de los parágrafos 1 al 31 del segundo. Aquí se estudian los problemas llamados de *primera especie*, en los que se investiga el mínimo de una integral de la forma

$$J(y) = \int_0^a Z(x, y, y', y'') \, dx,$$

donde y(x) es una función de la variable x definida en el intervalo $[0, a]$, admitiéndose como posibles soluciones todas las funciones definidas en $[0, a]$. Se estudia en particular la posible aplicación de la llamada ley de Bernoulli.

De aquí se salta a una segunda parte formada por los parágrafos 1 a 46 del capítulo quinto. Se busca ahora la solución entre aquellas curvas que satisfacen además una restricción adicional, lo que se llama una condición *isoperimétrica*: estos son los problemas llamados de *segunda especie*. Han sido pues suprimidos los capítulos tres y cuatro, donde se estudian problemas de primera especie para una función Z *indeterminada* [en un sentido técnico preciso, ver *Glosario*] y la ecuación diferencial llamada precisamente de Euler. El capítulo seis, también eliminado, está dedicado a los problemas de *tercera especie*, es decir, aquellos en que han de cumplirse dos o más condiciones isoperimétricas. Se ha incluido como apéndice un corto resumen (tres páginas) de los capítulos tres y cuatro.

6. La traducción continúa con un largo fragmento del *Additamentum I*, que comienza con un párrafo clásico, abundantemente citado

> Desde hace tiempo los grandes matemáticos han reconocido que los métodos empleados en este libro no sólo han sido muy útiles en análisis, sino que han aportado una ayuda muy extensa a la resolución de problemas físicos. Como la fábrica del universo mundo sea perfectísima y acabada por un creador sapientísimo, nada sucede en el mundo sin que reluzca una condición de máximo o mínimo; no hay duda, por tanto, de que todos los efectos del mundo se pueden determinar por las causas finales mediante el método de máximos y mínimos, tan felizmente, como por las causas eficientes.

En lo que sigue del *Aditamento*, Euler desarrolla la primera teoría matemática de la elasticidad y encuentra la carga crítica que hace pandear una columna, estudiando lo que hoy llamamos un problema de valores propios para una ecuación de cuarto orden no lineal. La sección traducida (la más interesante) es aquella en que:

> Euler resuelve el problema planteado mediante el Cálculo de Variaciones, clasifica adecuadamente todas las curvas elásticas, apela a la experimentación y concluye la sección con su famosa fórmula que da la carga crítica en relación con el pandeo de una columna [Introducción, 26]

Dicho con otras palabras, Euler pone en práctica su programa general antes expuesto en el caso concreto que nos interesa, ya que

> a pesar de que hace tiempo que se conoce la forma que toma un fleje sometido a tensión, nadie ha advertido todavía cómo se puede investigar la forma de la curva por el método de máximos y mínimos, es decir por las causas finales [*Ibid.* 134]

Cuando Daniel Bernoulli le indica que dispone de una expresión de la fuerza almacenada en un fleje elástico, advierte inmediatamente que está ante una oportunidad ideal para la aplicación de su método general.

7. El *Aditamento* II [p. 159], aquí traducido —entero— por primera vez, arranca también con un enunciado general lleno de consecuencias

> Puesto que todos los efectos de la naturaleza obedecen a una ley de máximo o de mínimo, no cabe duda que también en las trayectorias curvas que los proyectiles describen cuando son solicitados por fuerzas arbitrarias hay alguna propiedad que se hace máxima o mínima. Ahora bien, cuál sea esa propiedad no es tan fácil decirlo a priori, partiendo de principios metafísicos.

Para Dou [nota T1, 159], "en este parágrafo se publica por primera vez el principio variacional de mínima acción". En la misma nota discute el papel de Maupertuis, a cuyo nombre va hoy asociado el principio y en particular, hablando del artículo (*Mem. de l'Acad. des Sci.*, Paris, 25 abril 1744), dice "El segundo, sobre la ley de la refracción no hace al caso, aparte de que está globalmente equivocado". A este artículo se remite Kline en su libro a la hora de tratar el asunto de modo algo distinto [ver Kline 1992, 767-771]. Para Dou, "desde el punto de vista actual, en cuanto se trata de un principio de física teórica, parece que la prioridad corresponde a Euler", remitiendo a Carathéodory y al libro de Goldstein para discusiones más extensas.

Señalemos que, de todos modos, lo general del principio y su trascendencia (en casi todos los sentidos de la palabra) son compatibles con una postura crítica y reservada por parte de Euler:

> Por tanto, estos casos muestran brillantemente la conformidad del principio que aquí hemos establecido con la verdad. Pero, si esta conformidad se verifica también en casos más complicados, resulta dudoso. Por consiguiente, hay que investigar más diligentemente cuán general es este principio, para que no se le atribuya más de lo que su naturaleza permite [p. 170].

El análisis se completa en las voces 'vía por causas eficientes' y 'vía por causas finales' del *Glosario* donde, aparte de otras consideraciones, se recuerda que Lagrange no entiende el principio variacional "... como un principio metafísico, sino como un resultado simple y general de las leyes de la mecánica".

B. La *Introducción* no es muy extensa y hasta puede decirse que peca, si acaso, de lo contrario; muy probablemente ello se deba a las limitaciones ya mencionadas. En efecto, en sólo 17 páginas caben una presentación general de la obra, su marco histórico y su contenido, la biografía del autor (acompañada de una útil cronología), la justificación de los detalles de la edición, en particular los cortes hechos, y diversas orientaciones bibliográficas.

Las notas y los apéndices son, por el contrario, abundantes en contenido y variedad. Las notas han sido divididas en tres clases:

> Las notas didácticas (señaladas con una D) tienen por objeto principal y prioritario respecto de la otra ayuda a la comprensión del contenido científico del texto. Las notas históricas (señaladas con una H) quieren informar acerca de datos o hechos históricos que son aludidos o sugeridos por el texto. Las notas textuales (señaladas con una T) son observaciones a la materialidad del texto original o son para precisar algún punto de la traducción.

Tales notas constituyen un espléndido complemento del texto, ayudan mucho a su comprensión e ilustran de varios modos al lector. Pueden señalar errores explicados con detalle (D24 y D25, p. 157) o recordarnos que Euler introdujo en el análisis las funciones trigonométricas (seno, coseno, etc.) como funciones del arco del círculo unidad [véase también la DI, p. 67, sobre el simbolismo y su papel en el método euleriano]. Otras [D18, p. 99] abundan en su talento para el cálculo, mientras que en otros lugares [D12, p. 116] se habla del grado de rigor aplicado a los comentarios que ha merecido:

> P. Stackel ... ha visto en ello una falta de rigor, mientras que C. Carathéodory considera que no hay tal. En todo caso la intuición de Euler es certera y hoy día justificable con todo rigor.

Algunas señalan la importancia de un resultado, como es el caso de la obtención de la ecuación de Euler [p. 76], que se sitúa en su contexto; en otro lugar [p. 26] se ha indicado que Euler demuestra el carácter invariante de la ecuación, adelantándose así en más de un siglo a la consideración de problemas de ese género. Otras veces se glosa la aparición de un concepto hoy familiar —y fundamental, las funciones elípticas— en sus comienzos: en la página 128 se indica cómo han aparecido los dos casos particulares más importantes, las funciones circulares y las hiperbólicas, mientras que en otros lugares [pp. 139 y 184] se alude a su relación con la integración elemental de las ecuaciones diferenciales. En este mismo dominio aparece [pp. 51-52] la ecuación diferencial de Riccati.

Hay, asimismo, aclaraciones muy necesarias de la terminología de Euler y de lo que representa: un ejemplo importante es la *integral indefinida*, entendida aquí como una integral $W = \int Z\,dx$ donde la función $Z(x, y, p, q, \ldots)$ depende de x (única variable independiente) y de $y, p, q, \ldots$ que son funciones de x, tal que no es posible realizar la integración $\int Z\,dx$ independientemente de cuál sea la función $y(x)$. Esto equivale a decir que Zdx no es una diferencial exacta. Esta noción, desde luego distinta de la que hoy recibe ese nombre en el cálculo, es bastante próxima a la función *determinada* $Z(x, y, p, q, \ldots)$, cuando dada $y = f(x)$ el valor de Z en un punto depende sólo de los valores de $y, p, q, \ldots$ en el mismo punto x [véanse las notas D8 (p. 48) y D11 [p. 51] y el *Glosario*]. Estas puntualizaciones resultan muy oportunas para el lector, ya que 'indeterminado' se usa en otro sentido en el libro [nota D5, p. 109].

Otras ilustraciones se refieren a asuntos de orden bien diverso, como puede ser la aplicación de la fórmula de Newton para la resistencia al movimiento de un sólido que se mueve en un fluido a la construcción de barcos [nota 114, 84]. Allí se cita un pasaje de una carta de Federico II a Voltaire, tomado de la *Obras completas* de este último, donde se dice:

> Los ingleses han construido navíos con el perfil más ventajoso que Newton había indicado, y sus almirantes me han asegurado que tales navíos eran mucho menos veleros que los construidos siguiendo las reglas de la experiencia.

9. Se da, además, una idea de la evolución posterior del cálculo de variaciones, que ha pasado de la intuición geométrica, espléndidamente manejada por los Bernoulli, a Lagrange, en cuya obra "ya no hay figuras, todo es puro análisis, incluyendo el cálculo infinitesimal" [p. 15]. En el camino estaba Euler, para quien "la intuición geométrica queda reducida a un mínimo, pero su función es importante pues precede y guía todo el aparato analítico ..." [p. 15]. Se dedica atención particular a Jacobo Bernoulli [nota 112, 105] por ser el primero en darse cuenta de que no bastaba con variar un punto y sí con variar *dos*, pasándose de ahí a Euler y al joven Lagrange, que hace variar todos, "aunque para ello tuvo que crear el difícil concepto de variación de una función". Una noción con tales virtualidades era precisamente lo que pedía Euler en el siguiente pasaje del *Método*.

> Por consiguiente, se echa de menos un método, que sea independiente de consideraciones geométricas y de líneas, en virtud del cual resulte claro que en esta investigación de máximo o mínimo puede escribirse ... [p. 88]

Con esta cita empieza igualmente el apéndice 5, dedicado a una breve exposición de la creación por Lagrange de dicha noción de variación. La variación δy de la función $y(x)$ es introducida de una manera casi exclusivamente formal, y muestra analogías con la diferenciación ordinaria de las funciones; además, dos de las leyes formales indicadas son $\delta d = d\delta$ y $\delta\int = \int\delta$ donde d y $\int$ designan, respectivamente, la derivación y la integración (indefinida) habituales.

10. La presentación y organización del *Método* que venimos comentando se deben a Albert Dou, matemático e ingeniero, que ocupó cátedras en la Universidad Complutense de Madrid y en la Escuela de Ingenieros de Caminos de la misma ciudad, siendo más tarde profesor emérito de la Universidad Autónoma de Barcelona. Enseñó sobre todo ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales, materias sobre las que ha escrito varios libros, pero también análisis numérico e historia de las matemáticas en una época (hacia 1960) en que tal cosa era poco

frecuente; hay que decir que la situación ha cambiado bien poco en lo que a la segunda se refiere. Más datos sobre él pueden encontrarse en el libro de homenaje que se le dedicó, citado en las referencias del final.

Esta labor ha sido realizada de manera excelente, que va desde una traducción pensada y meditada que trata —y creemos que consigue— de dar el estilo de la época, hasta el amplio despliegue de notas y complementos de todo tipo que hemos descrito sin entrar en todos sus detalles en lo anterior. Por lo que al aspecto más puramente matemático se refiere, Dou dice explícitamente que se ha atenido a Carathéodory para todo lo que va hasta 1744. También recurre a menudo al libro de Goldstein, una de las mejores referencias disponibles. En cuanto a manuales generales de historia de la matemática, cita el de Boyer, pero no el de Kline, cuyo capítulo dedicado a la materia durante el siglo XVIII [pp. 759-782] puede ayudar al lector.

No se tiene en cuenta, en cambio, ninguno de los artículos de un conocido especialista canadiense, Fraser. El primero de ellos [Fraser 1985, 152] arranca justamente con una cita ilustrativa de Lagrange.

> en el estado actual del análisis podemos considerar estas discusiones (de la matemática del pasado) como inútiles, en tanto que conciernen a métodos olvidados que han dado paso a otros más sencillos y generales. Sin embargo, tales discusiones pueden tener todavía algún interés para aquellos que gusten de seguir paso a paso los progresos del análisis, y ver cómo los métodos sencillos y generales nacen de cuestiones particulares y de procedimientos complicados e indirectos.

El artículo tiene como fin explícito el estudio de un tema que el autor considera todavía no ha sido abordado satisfactoriamente: Lagrange y los *fundamentos* del Cálculo de Variaciones. Ello le conduce a la obra de Euler y en particular al *Método*:

> Aunque se trata de un progreso fundamental, las técnicas del *Methodus Inveniendi* suponen construcciones y razonamientos geométricos complicados: su aplicación a un ejemplo concreto no era sencilla, tal y como reconocía el propio Euler [*Ibid.*, 155].

Entre muchas observaciones interesantes podemos entresacar las advertencias que en 1756 hace Euler al joven Lagrange para que use con cuidado su delta y no se deje llevar por su tendencia a las manipulaciones algebraicas; también la discusión de la integrabilidad y la ecuación de Euler y las consideraciones finales del artículo sobre las distintas concepciones del rigor en la investigación y en la enseñanza son dignas de ser señaladas.

En otro artículo [Fraser 1992], publicado por cierto en esta revista, se trata de llenar otro hueco: la ausencia de un tratamiento histórico sistemático de los problemas de extremos con restricciones. Ello le lleva al *Método*, poniéndolo en relación con obras anteriores y mostrando que éste corrige errores de su memoria de 1741, en la que, por cierto, aparecería por primera vez la ecuación de Euler. Se analiza en detalle la memoria de 1738, indicándose primero que la variación lleva en el caso de una condición isoperimétrica a la relación diferencial $RdP = PdR$, de donde se obtiene $P = cR$, con c constante, mientras que si hay *dos* condiciones en vez de una la situación es mucho más complicada, el análisis de Euler es incompleto y no demuestra realmente que la relación que él obtiene se deduzca de las correspondientes relaciones diferenciales. Para Fraser [1992, 36]

> en su estudio subsecuente de problemas isoperimétricos de 1741 y 1744 Euler nunca mejoró el análisis presentado, así en su principal tratado de 1744 simplemente hace notar que $P + mp + cm = 0$ satisface (17)[3]. No obstante que el requisito de demostración parecería haber estado disponible por los principios contemporáneos del cálculo, él no fue capaz o, probablemente, tuvo aversión a dar los detalles necesarios[4]

En la nota 3 del párrafo anterior se indica que para Carathéodory ese era 'un defecto sustancial' del *Método*, y que Lagrange no había ido mucho más allá que Euler. En la nota 4 se incluye una forma de obtener la deducción que falta de un modo disponible en la época. Se habla asimismo del uso que hace Euler en 1766, por primera vez, del algoritmo delta de Lagrange y se incluye el siguiente juicio general.

> El *Methodus Inveniendi* de 1744 proporcionó un desarrollo extensivo y sistemático de los resultados de las primeras memorias. El tema de los problemas isoperimétricos fue separado de la investigación principal y presentado en los dos capítulos finales. No obstante que varios ejemplos que involucran condiciones auxiliares en forma de integral, son trabajados en detalle, la teoría avanzó poco respecto al estado que había alcanzado en 1738 [p. 37].

También discute Fraser una cuestión que no aparece muy explícitamente en los comentarios de Dou, y es la de si Euler aproxima las derivadas mediante cocientes diferenciales y las integrales mediante sumas finitas, tal y como parecen creer Goldstine y Kline: para este último, Euler no emplea el cálculo de la manera más eficaz. Tampoco está de acuerdo con la versión que da Goldstein, siguiendo a Carathéodory, del análisis de Euler en términos del método directo del Cálculo de Variaciones [ver Fraser 1985, 156-158].

11. El último aspecto técnico sobre el que queremos decir algo es el de los llamados multiplicadores de Lagrange. En la *Introducción* de Dou se dice [p. 26] que

> Euler introduce también por primera vez el concepto de multiplicador que da lugar a la teoría o técnica de multiplicadores que ahora llamamos de Euler-Lagrange.

En otro lugar [p. 196] se hace la afirmación más matizada de que "También contribuye a clarificar la regla de los multiplicadores...". En [Fraser 1992] se indica cómo la 'regla de Euler' relativa a los multiplicadores aparece por primera vez en la memoria de San Petesburgo de 1738. Fraser discute con cuidado los detalles de la memoria de Euler de 1766 sobre el asunto, así como los intentos realizados por diversos matemáticos a lo largo del siglo XIX para intentar justificar o hacer verosímil la 'regla de Euler' y resume su postura [Fraser 1992, 42] en el juicio siguiente.

> Aunque Euler fue el creador del cálculo de variaciones, su conceptualización de éste fue esencialmente limitada. Su sentido de síntesis y su intención de generalidad fueron confinados en gran parte al estudio de las formas generales que aparecen en la obtención de las ecuaciones diferenciales de problemas individuales. El tipo de consideraciones que habrían motivado un tratamiento unificado de los multiplicadores requirió, al mismo tiempo, de ideas nuevas así como de mayor sentido del desarrollo teórico del que él poseía.

Fraser rechaza la pretensión de Kneser, Bolza y Goldstein de atribuir a Euler algún caso particular de la regla de los multiplicadores alegando que ello implica conceder a Euler una visión teórica que no tenía, algo que ya había dicho en [Fraser 1985, 160]. Para él, el método de los multiplicadores es mencionado por primera vez en la *Teoría* de Lagrange de 1797 y desarrollado en las *Lecciones* de 1806 [véanse las notas 14 y 18 de (Fraser 1992), así como la Postdata, en cuanto a la evolución de la teoría].

12. Para terminar con los detalles formales de esta excelente edición de un clásico de la matemática, añadiremos a todo lo dicho hasta aquí que al final del libro figura un útil y cuidado *Glosario* de algunos términos que pueden presentar dificultades de comprensión, que las

erratas son pocas y la tipografía agradable y que, salvo en un caso (Voltaire) no se citan las traducciones castellanas, ni para los clásicos (los *Elementos* de Euclides o las *Cartas a una princesa...* del propio Euler) ni para el manual de Boyer. De las *Cartas a una princesa de Alemania* hay versión castellana, debida a C. Mínguez, publicada por la Universidad de Zaragoza en 1990. También se han publicado unas *Reflexiones sobre el espacio, la fuerza y la materia*, introducción y selección de Ana Rioja. Madrid, Alianza, 1985.

Referencias

Bell, E.T. 1937. *Men of Mathematics*. Nueva York: Simon and Schuster.

Díaz, J.I. y Vegas, J.M. (eds.) 1989. *Actas de la reunión matemática en honor de Alberto Dou*. Madrid: Ediciones de la Universidad Complutense.

Fraser, Craig G. 1985. "J.L. Lagrange changing approach to the foundations of the calculus of variations". *Archives for the History of Exact Sciences* 32: 151-191.

Fraser, Craig G. 1992. "Problemas isoperimétricos en el cálculo variacional de Euler y Lagrange". *Mathesis* 8: 31-55.

Goldstein, H.H. 1980. "A history of the calculus of variations from the 17th through the 19th century". Berlin: Springer Verlag.

Kline, M. 1992. *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza.

Kline, M. 1972. *Mathematical thought from ancient to modern times*. Nueva York: Oxford University Press.

Jesús Hernández, nacido en Oviedo, España en 1944. Profesor titular de análisis matemático en la Universidad Autónoma de Madrid. Autor de artículos sobre historia y filosofía de las matemáticas.