Mathesis 11 (1995) 55-101
Impreso en México. Derechos reservados © 1995 por UNAM [illegible]

Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: el caso de la serie de Taylor

Ricardo Cantoral Uriza

El arte de transmitir conocimientos
científicos ha sufrido cambios espectaculares,
y puede decirse que la expresión 'aprender
matemáticas' tiene hoy un significado
totalmente distinto del que tenía hace cien años.
G. Glaeser

Resumen

Este artículo es fruto de una investigación en el terreno de la matemática educativa. En él presentamos un estudio epistemológico acerca de las distintas concepciones que subyacen a la noción matemática de función analítica, así como una reflexión acerca de su relevancia en la didáctica actual. La visión histórica que se maneja no es la propia de un historiador, obedece a las preocupaciones de un didacta. Pues constituye una búsqueda de factibles respuestas a preguntas planteadas en el ámbito educativo: ¿por qué enseñamos lo que enseñamos? Principalmente, usamos como fuentes primarias los libros de texto de otras épocas así como algunos escritos matemáticos originales.

Abstract

This paper is the result of a research project in the field of mathematics education. It shows an epistemological view on the diversity of mathematical conceptions that underly to the mathematical notion of analytical function; it also has an insight on the relevance in teaching. The historical view arises from didactical motivations and not from an historian's perspective. It constitutes a search for reasonable answers to questions posed in the educational context: why do we teach what we teach? Our principal sources are historical textbooks and some original mathematical papers

1. Presentación

Nuestro título es sugestivo. De qué otras maneras podemos enriquecer el futuro si no es con el apoyo del pasado La enseñanza actual con la enseñanza de antes Epistemológicamente ello es válido, puesto que no hay generación espontánea del conocimiento. Asumimos entonces que tanto el saber como el conocimiento son productos culturales.

Desarrollamos en este escrito una de tantas posibles respuestas. Buscamos, fundamentalmente para el cálculo, maneras alternativas de presentación didáctica Nos nutrimos de fuentes históricas originales y de estudios de investigación en el terreno de la matemática educativa.

Aunque las preocupaciones por la enseñanza de la matemática son tan antiguas como la enseñanza misma y ésta tanto como la vida en sociedad, el estudio de los fenómenos ligados a la enseñanza de la matemática sólo ha adquirido un estadio científico apenas después de veinte años de arduo trabajo de investigación en todo el mundo. Es pues en este ámbito disciplinar, el de la *matemática educativa*, donde ubicamos este escrito.

Cuando se pretende explicar las causas del bajo rendimiento escolar en matemáticas, los profesores tienden a considerar que éstas son debidas a las condiciones de ingreso de sus estudiantes, a las de ellos mismos como profesores o bien, a las de los propios sistemas escolares en su conjunto. Condiciones que van desde aquéllas relativas al bajo nivel académico heredado de las experiencias educativas preliminares, pasando por los aspectos referentes al desinterés que suele producir el estudio por la matemática, llegando incluso a lo irrealizable que resulta un extenso programa escolar.

Sin embargo, aunque ésas son claramente dificultades mayores que nadie podría poner en duda, creemos que no todos los males provienen de la escuela. Particularmente, algunas vienen desde el sitio en el que se piensa el funcionamiento didáctico. Por ejemplo, no encontramos como uno de los problemas por considerar el que las causas de las dificultades que se presentan en los procesos de aprendizaje de la matemática estén originadas, también, por la manera en que se ha articulado al contenido matemático que se enseña, y no sólo en la forma en que lo transmitimos. Digámoslo de otro modo, pensemos también como un problema didáctico la determinación del *qué* enseñar y no sólo el de *cómo* enseñar.

Este cambio de perspectiva plantea de entrada una serie de interrogantes que permiten hacer una construcción racional de la enseñanza de la matemática: ¿por qué enseñamos lo que enseñamos?, ¿de dónde procede esta matemática?, ¿cuál fue su motivación?, ¿cómo se construyó?, ¿cuáles fueron sus éxitos y cuáles sus fracasos?, ¿qué debe esta matemática a otras ciencias, a la experiencia y al experimento?, ¿cómo contribuyó a su vez al enriquecimiento general de éstas? Finalmente, en las circunstancias en que hoy nos encontramos ¿qué parte de todo ese saber acumulado debe procesarse y pasar a ser saber enseñado? ... ¿Cómo hacerlo?

Hoy es imprescindible enfrentar esta situación e ir en busca de estrategias que posibiliten el acceso al contenido matemático del curso actual o bien —y en este sentido es que el que se dirige nuestro trabajo— reconociendo la complejidad de la teoría, desentrañarla para construir presentaciones accesibles para el que aprende sin perder la funcionalidad de las nociones centrales. Es decir, hagamos fácil lo que es difícil. El camino para lograrlo lo buscamos en el momento de la creación del conocimiento analizando las distintas maneras de transmisión; examinando las circunstancias que posibilitaron su construcción y precisando cuáles son factibles de asimilarse a las prácticas escolares actuales.

Esta búsqueda nos ha permitido formular la hipótesis de que es posible reconstruir el discurso didáctico del cálculo tomando como idea central de su desarrollo a la serie de Taylor. En otro sentido, dicha hipótesis señala que es posible rediseñar el currículum y su discurso didáctico en torno de aquello que, consideramos, resultó epistemológicamente indispensable en su génesis.

Los modos de transmisión y construcción del saber matemático han sido diferentes a lo largo de la historia, baste comparar los del intento de difusión científica del siglo dieciocho con aquéllos de la elementarización del saber fruto de la tradición educativa francesa de principios del siglo diecinueve, o con los de estructuralización del conocimiento a consecuencia del movimiento de la enseñanza de la matemática moderna de la segunda mitad del siglo veinte. Estas distintas formas de llevar el conocimiento a la escuela producen efectos notables, piénsese por ejemplo que nociones simples, en algunas de estas etapas del pensamiento, aparecen francamente complejas en otras.

Responder a las interrogantes antes planteadas para la matemática en su conjunto resultaría no sólo difícil sino virtualmente imposible. Preferimos abordar una etapa, aquélla concerniente al campo conceptual de los inicios del análisis matemático clásico. Centrándonos en la serie de Taylor, sus antecedentes, motivaciones, situaciones contextuales, evoluciones temporales, presentaciones en textos clásicos y posibilidades de uso (algunas aún inexploradas) en los textos actuales, al impregnarnos de su manejo podremos, a la usanza de los analistas de otras épocas, replantear el estudio del cálculo diferencial e integral, las ecuaciones diferenciales, el análisis complejo y ciertos elementos del análisis vectorial, y reconstruir la presentación del discurso de manera integradora, logrando lo que pretendidamente hemos señalado: hacer fácil lo que se presenta difícil.

2. Introducción

Este artículo relata el desarrollo de la serie de Taylor desde sus antecedentes inmediatos en la cultura occidental, esto es, a partir del último tercio del siglo XVII hasta principios del XX.

Los temas aquí reseñados, tratados aisladamente, han sido objeto de largos estudios por parte de los historiadores de la matemática, pero el tipo de tratamiento que damos aquí no es el usual, porque al mismo tiempo que discutimos en detalle la matemática en cuestión, tratamos también de articularlos con preguntas didácticas. Nuestra lectura de la historia se matiza por las exigencias didácticas.

Como señalamos anteriormente, hemos elegido a la serie de Taylor como objeto de estudio, pues en cierto sentido se constituyó como el instrumental de descubrimiento en un sinnúmero de resultados del análisis clásico. Más específicamente, nos centraremos en la evolución que sufriera la serie tanto en textos clásicos de distintas épocas como en artículos originales.

Nuestra hipótesis de trabajo consiste, grosso modo, en considerar que impregnados de la concepción y el manejo de la serie de Taylor podremos, efectivamente, hacer fácil lo que es difícil. Estaremos en condiciones de reconstruir las justificaciones y argumentaciones de ciertos aspectos de cursos como cálculo diferencial e integral, cálculo avanzado, análisis real y complejo, ecuaciones diferenciales y teoría del potencial o la geometría diferencial, en forma más efectiva desde la óptica del manejo y el entendimiento de dichos elementos por parte de los profesores y de sus alumnos. Sin embargo, debido a que en la enseñanza de nuestros días, el estudio de la serie de Taylor aparece tan tarde, que muchos de los resultados para los que pudiera ser útil se han obtenido previamente, luce ante los ojos de alumnos y maestros como aislada del resto de contenido de los cursos de cálculo.

Esta hipótesis nos ha sido sugerida, en gran medida, por el estudio de la evolución de las ideas en la historia. La hemos percibido en las primeras formulaciones de diversas teorías como el argumento central en ciertos teoremas y como elemento de enlace entre teorías frecuentemente separadas en la práctica educativa.

Sabemos, ciertamente, que la demostración de la factibilidad del acercamiento deberá darse ineludiblemente en el terreno de la práctica educativa sin embargo, como etapa inicial y necesaria, emprendimos la búsqueda de los elementos que soporten la posibilidad teórica de replantear el discurso matemático asociado con estas ideas. Para ello, presentamos en este escrito el desarrollo de la serie de Taylor partiendo de sus antecedentes más inmediatos en la cultura occidental, hasta llegar a las presentaciones de los textos de nuestros días, cubriendo las etapas que a nuestro entender son más significativas.

Nos preocupa precisar su desarrollo histórico desde la óptica de la creación y transmisión del conocimiento, para extraer de ahí pistas de una reconstrucción del saber como objeto de comunicación en los procesos educativos actuales.

De tal suerte que iniciamos con el antecedente inmediato de las series de Taylor: el binomio de Newton con exponentes racionales (algo en desuso en la enseñanza actual) como originalmente lo concibió el mismo Newton. Con ella podremos desarrollar en serie de Taylor a ciertas funciones algebraicas. De hecho, si se introducen consideraciones infinitesimalistas, se puede desarrollar en serie algunas funciones trascendentes elementales en todo curso de cálculo actual: trigonométricas, logarítmicas y exponenciales. Sin embargo, en este escrito sólo nos interesa el teorema del binomio como una herramienta para construir a la serie de Taylor.

Posteriormente, presentamos las contribuciones que, relacionadas con la serie de Taylor, hiciera L'Hôpital en su texto de cálculo. De él nos interesa la identificación gráfica de los diferenciales sucesivos de una variable continua. Pues con ello es factible concebir a la serie de Taylor en una variable como una expresión que se presenta en el problema de estimar el valor de una ordenada próxima a otra conocida. Enseguida presentaremos los trabajos de Taylor y de Maclaurin en los que desarrollan la serie y las condiciones para la localización de máximo y mínimo.

Con estos elementos tendremos a la serie de Taylor para una variable construida mediante procedimientos ausentes en los textos actuales, con ella se busca construir a la manera de Euler y Lacroix la serie de Taylor para varias variables. Enseguida apuntaremos algunos elementos sobre el proceso de formalización del programa de Cauchy y discutiremos en qué medida éste afectó el tratamiento de la serie de Taylor así como a su ubicación en la teoría durante un periodo que terminamos a principios del siglo XX.

Nos interesaría, como dijimos anteriormente, pensar estos temas como hilos a tejer para posibles diseños didácticos, resaltando su valor heurístico y operativo, así como su riqueza conceptual. Concluiremos el escrito con algunas consecuencias interesantes de la serie de Taylor que usualmente no aparecen en los textos escolares de nuestros días, así como con algunas reflexiones sobre la enseñanza de la matemática en la escuela contemporánea. Esperamos que este artículo sea útil para los directamente partícipes de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática.

3. Consideraciones teóricas

La palabra transponer significa poner una cosa más allá, en un sitio distinto del lugar que ocupaba. El término transposición didáctica se refiere así, en lo general, al proceso mediante el cual tiene lugar la acción de transponer un saber hacia un sitio didáctico, digámoslo así: llevar el saber al ámbito escolar.

La enseñanza tradicional ha creído en la posibilidad de pasar de una consideración de los saberes en juego hacia el interior de una relación didáctica de una manera simple y transparente. Los saberes así, aparecen como un 'dato', un objeto previamente fijado, de modo que se puede definir las características de su introducción mediante elecciones externas a los, propiamente dichos, actos didácticos, como si se tratara de un simple 'resumen' de los saberes más desarrollados en la ciencia. De este modo, el cálculo escolar se ha vuelto una colección lineal de verdades compartamentalizadas que esperan ser asimiladas de algún modo por los estudiantes.

Sin embargo, consideramos que los objetos destinados para enseñar no pueden en ningún caso analizarse como simplificaciones de objetos más complejos, proporcionados por la sociedad científica. Ellos son, por el contrario, el resultado de ajustes didácticos, de una construcción, que les hace diferir cualitativamente de sus saberes de referencia.

Suposiciones como éstas son las que dan soporte epistemológico a nuestra búsqueda de pistas didácticas en el pasado. Particularmente, esta postura epistemológica podría considerarse como especializada e interna. Lo uno puesto que alude a delimitaciones en las regiones del saber que analizan y se especializan en un cierto nivel de análisis, y lo otro porque surgen de la problemática y necesidades de la propia disciplina, la matemática educativa.

4. El binomio de Newton

Desde 1665, Newton desarrolló su enfoque sobre fluxiones —o velocidades de cambio— de magnitudes variables. Magnitudes que fluyen continuamente, tales como longitudes de curvas, áreas de superficies, temperaturas o velocidades. Desde entonces denominó 'mi método' a la asociación del manejo de las series infinitas con el estudio de las velocidades de cambio, de las que a su vez se servía para determinar la fluente, o lo que fluye. De este modo hizo del hoy llamado teorema fundamental del cálculo una herramienta de uso.

La intención de Newton al introducir el empleo de las series, consistía en operar más o menos de la misma manera a los polinomios que a los números. Así, por ejemplo, para desarrollar en serie a la variable $\sqrt{1+x}$, extrae la raíz cuadrada haciendo uso del método de Viète desarrollado para números. Desde entonces, las series infinitas no serían ya consideradas como meros recursos de aproximación, sino como expresiones alternativas para las variables que representaban. La declaración de Wallis respecto del binomio de Newton describe bien esta idea:

> ... sugieren la designación de alguna cantidad particular mediante una progresión regular o sucesión de cantidades que se aproximen a ella de una manera continua y que, si se prolonga indefinidamente, debe terminar por ser igual a ella ...

En 1671, Newton publicó un artículo al que llamó "Methodus fluxionum et serierum infinitorum" en el que establece, en analogía con lo realizado por Stevin a principios del siglo XVII referente a la teoría de los números decimales, la forma de expresar y operar relaciones algebraicas complicadas reescribiéndolas como series infinitas de términos más simples. Argumentando al respecto, que así como para la aritmética los quebrados y las raíces se expresan en decimales y se trabajan como si fuesen enteros, en el álgebra se puede expresar a los cocientes y potencias como series infinitas, operándose como si fuesen polinomios. Por ejemplo,

$$\frac{1}{3} = 0.333 \quad \text{pues} \quad \begin{array}{r} 0.111 \\ 3\,\overline{)\,1.000} \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ \vdots \end{array}$$

y

$$\sqrt{2} = 1.4142\ldots \quad \text{pues} \quad \begin{array}{r|l} \sqrt{2.000000} & 1.4142 \\ 100 & 24 \\ 400 & 281 \\ 11900 & 2824 \\ 604 & \end{array}$$

Así tendríamos para el caso algebraico,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \quad \text{pues} \quad \begin{array}{r} 1 + x + x^2 + \ldots \\ 1-x\,\overline{)\,1.000000000} \\ 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \end{array}$$

y

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \ldots \quad \text{pues} \quad \begin{array}{r|l} \sqrt{1+x} & 1 + \frac{x}{2} \\ x & -\frac{x}{2} \\ & 2 + \frac{x}{2} \\ -\frac{x^2}{4} & \end{array}$$

Posteriormente, en 1676 Newton comunica a la *Royal Society* su ya célebre teorema del binomio como una síntesis de sus hallazgos anteriores. Así, establece la siguiente igualdad general:

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \text{etc.}$$

donde

$$A = P^{\frac{m}{n}}, \quad B = \frac{m}{n}AQ, \quad C = \frac{m-n}{2n}BQ, \quad D = \frac{m-2n}{3n}CQ, \text{ etc.}$$

En una comunicación posterior, pero del mismo año, Newton explica que al leer a Wallis y examinar las magnitudes de algunas áreas de círculos e hipérbolas, encontró el binomio y su representación en serie infinita. Lo cual logró mediante una ingeniosa técnica de interpolación. Por medio de la cual encontró la expresión en serie del área del círculo $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ para el que plantea el desarrollo en serie de algunas áreas asociadas a curvas de la forma $(1-x^2)^n$.

curva	área	características
$(1-x^2)^0$	x	Los componentes crecen en progresión aritmética como lo hace la sucesión 1, 3, 5, 7, ...
$(1-x^2)^1$	$x-\frac{1}{3}x^3$	Los denominadores crecen al igual que los exponentes
$(1-x^2)^2$	$x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$	Los numeradores aparecen como las cifras de las potencias de 11, esto es:
$(1-x^2)^3$ ...	$x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$	

Desarrollando las potencias de once, tendremos:

potencias	dígitos
$11^0 = 1$	1
$11^1 = 11$	1, 1
$11^2 = 121$	1, 2, 1
$11^3 = 1331$	1, 3, 3, 1
etc.[1]	etc.

1 La operación siguiente habrá que hacerla a la usanza antigua que consistía en sumar sin pasar a la columna de la izquierda los excesos de la columna de la derecha. De esta manera, la afirmación de Newton sigue siendo válida.

De ahí propuso a la expresión infinita

$$1 \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2n} \cdot \frac{m-2n}{3n} \cdot \frac{m-3n}{4n} \ldots$$

como generadora de los coeficientes del binomio y resolvió de este modo su problema original.

5. Hacia la difusión del saber. Inicios del modelo diferencial del cálculo

El trabajo que Leibniz publicó sobre el cálculo no permitía un acceso fácil ni a sus ideas ni a los métodos empleados. Sin embargo, con una cierta preocupación didáctica al buscar difundir este saber, L'Hôpital publicó en 1696 lo que sería el primer libro de texto sobre cálculo diferencial o geometría diferencial en el plano, titulado *Analyse des Infiniment Petits, pour l'intelligence des Lignes Courbes*.

Este texto, inspirado por los trabajos de Leibniz y por las lecciones que Johann Bernoulli dictaba al marqués L'Hôpital, es el paradigma de lo que hemos dado en llamar la etapa de la 'difusión del saber'. Etapa caracterizada fuertemente por una especie de pedagogía impresionista que pretende en el lector, evocar una serie de impresiones que contextualicen al concepto o campo de conceptos que el texto transmite. Esto supone de quien lo lea un ejercicio mayor que aquel que se requiere para dar seguimiento a un razonamiento lógicamente encadenado. En cierto sentido solicita del lector una especie de joroba matemática que le permita, por así decirlo, leer entre líneas. Veamos esto en los siguientes extractos [L'Hôpital 1715, 1]:

PRIMERA PARTE
DEL CÁLCULO DE LAS DIFERENCIAS
PRIMERA SECCIÓN
DONDE SE DAN LAS REGLAS DE ESTE CÁLCULO
Definición I

> Se llaman cantidades *variables* aquellas que aumentan o disminuyen continuamente, y por lo contrario, cantidades *constantes* las que permanecen siendo las mismas mientras las otras cambian. De esta manera, en una parábola las ordenadas y las abscisas son cantidades variables, en tanto que el parámetro es una cantidad constante.[2]

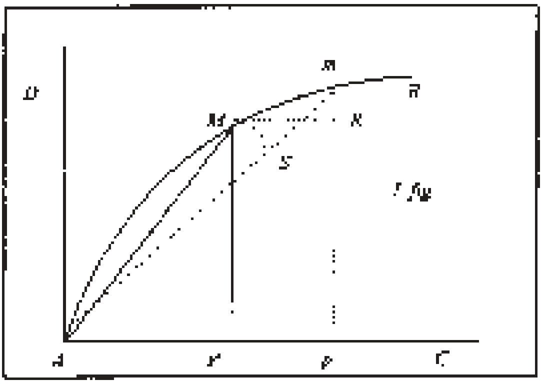
2.

PREMIERE PARTIE
DU CALCUL DES DIFFERENCES
Section Premiere
Où l'on donne les Regles de ce Calcul
DÉFINITION I.

On appelle quantités *variables* celles qui augmentent ou diminuent continuellement.

Se habla de cantidades variables y constantes, pero no sobre el significado de "... aumentan o disminuyen continuamente ..." Esto presupone del lector cierta noción de variación continua. Muestra el significado de lo definido en un contexto propio del estudio de curvas, llamando a manera de ejemplo, variables a x e y, y constante a k en la expresión $y = kx^2$.

En la segunda definición presenta la idea más importante del cálculo: el diferencial, del que habría que decir que es un tanto diferente del empleado por el propio Leibniz. Precisemos, las diferenciales de Leibniz son diferencias infinitamente pequeñas entre valores sucesivos de una variable, en tanto que para L'Hôpital, las variables no recorren una sucesión de valores infinitamente próximos, sino que crecen o decrecen en forma continua de manera que el diferencial (o diferencia como él les llamó) sea la parte infinitamente pequeña en que aumentan o disminuyen esas variables [L'Hôpital 1715, 2]. La figura siguiente sirve de apoyo a su definición segunda y a sus postulados



Definición II

La parte infinitamente pequeña en la que una cantidad variable aumenta o disminuye continuamente, es llamada la *Diferencia*. Sea, por ejemplo, una línea curva cualquiera *AMB* (Fig. 1), que tiene por eje o diámetro a la línea *AC* y por una de sus ordenadas a la recta *PM*, y sea *pm* otra ordenada infinitamente cercana a la primera. Admitido eso, si se trazan *MR* paralela a *AC*, las cuerdas *AM* y *Am*, y luego se describe, con centro en *A* y radio *AM*, el pequeño arco de círculo *MS*, [entonces]:

& au contraire quantités constantes celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainsi dans une parabole les appliquées & les coupées sont des quantités variables, au lieu que le paramètre est une quantité constante. [La versión en castellano de los textos en francés o en inglés citados es de Rodrigo Cambray Núñez.]

Pp será la diferencia de *AP*,
Rm la de *PM*,
Sm la de *AM*, y
Mm la del arco *AM*.[3]

Resulta interesante observar que la parte más llena de significado en la definición anterior y la que al parecer más objeciones encontró: '... la porción infinitamente pequeña ...', se deja a la libre impresión que el enunciado genere en la mente del lector. Pareciera como si todos habrán de aceptar como natural el tratamiento de una cantidad variable con elementos infinitamente pequeños.

De estas dos definiciones se desprende como una consecuencia obvia lo que en un texto actual requeriría de alguna demostración [L'Hôpital 1715, 2]:

Corolario

1. Es evidente que la diferencia de una cantidad constante es nula o cero, o (lo cual es lo mismo) que las cantidades constantes no tienen diferencia.[4]

Enseguida presenta los dos postulados básicos sobre los que habrá de edificar ¡todo! el cálculo diferencial y que darán apoyo a la mecánica de los diferenciales en sus contextos geométrico y algebraico [L'Hôpital 1715, 2-3].

I. Demande o suposición (postulado)

2. Se pide que se puedan tomar indiferentemente una por la otra a dos cantidades que no difieren entre sí más que por una cantidad infinitamente pequeña: o (lo cual es lo mismo) que una cantidad que no se incremente ni se haga disminuir más que por otra cantidad infinitamente menor que ella, pueda considerarse como que permanece siendo la misma. Se requiere, por ejemplo, que se pueda tomar n

---

3.

DÉFINITION II.

La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appellée la *Différence*. Soit par exemple une ligne courbe quelconque *AMB*, qui ait pour axe ou diametre la ligne *AC*, & pour une de ses appliquées la droite *PM*; & soit une autre appliquée *pm* infiniment proche de la premiere. Cela posé, si l'on mene *MR* parallele à *AC*; les cordes *AM*, *Am*; & qu'on décrive du centre *A*, de l'intervalle *AM* le petit arc de cercle *MS*; *Pp* sera la différence de *AP*, *Rm* celle de *PM*, *Sm* celle de *AM*, & *Mm* celle de l'arc *AM*. De même le petit triangle *MAm* qui a pour base l'arc *Mm*, sera la différence du segment *AM*; & le petit espace *MPpm*, celle de l'espace compris par les droites *AP*, *PM*, & par l'arc *AM*.

4.

COROLLAIRE

I. Il est évident que la différence d'une quantité constante est nulle ou zero; ou (ce qui est la même chose) que les quantités constantes n'ont point de différence.

Ap por *AP*,
pm por *PM*,
el espacio *Apm* por el espacio *APM*,
el pequeño espacio *MPpm* por el pequeño rectángulo *MPpR*;
el pequeño sector *AMm* por el pequeño triángulo *AMS*;
el ángulo *pAm* por el ángulo *PAM*.
etcétera

II. Demanda o suposición (postulado)

3. Se pide que una línea curva pueda ser considerada como el ensamblaje de una infinidad de líneas rectas, cada una infinitamente pequeña; o (lo cual es lo mismo) como una poligonal de un número infinito de lados, cada uno infinitamente pequeño, los cuales determinan, por los ángulos que forman entre sí, la curvatura de la línea. Se requiere, por ejemplo, que la porción de curva *Mm* y el arco de círculo *MS* se puedan considerar como líneas rectas debido a su pequeñez infinita, de modo que el pequeño triángulo *mSM* pueda ser supuesto rectilíneo.[5]

En este sentido, los dos postulados especifican cómo se comportan las magnitudes variables infinitamente pequeñas. El Postulado I establece las reglas para el manejo algebraico extendiendo la noción usual de igualdad. Diríamos que dos magnitudes son iguales si lo son en el sentido usual hoy día (esto es, que su diferencia es cero) o si difieren por una magnitud infinitamente pequeña. Mientras que el Postulado II, en cambio, lo hace en el contexto geométrico, diciendo que una curva (necesariamente continua) se puede considerar como una poli-

---

5

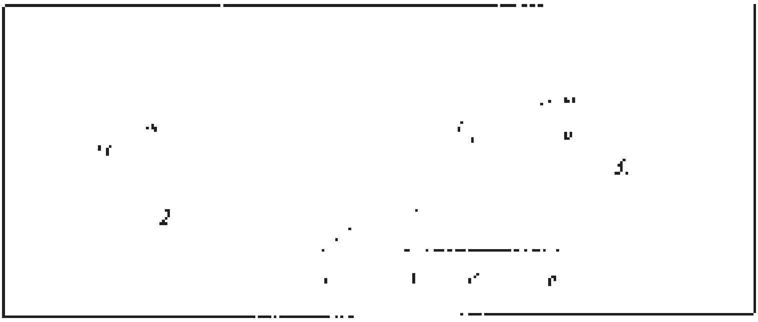
I. DEMANDE OU SUPPOSITION

2. On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite: ou (ce qui est la même chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même. On demande par exemple qu'on puisse prendre *Ap* pour *AP*, *pm* pour *MP*, l'espace *Apm* pour l'espace *APM*, le petit espace *MPpm* pour le petit rectangle *MPpR* le petit secteur *AMm* pour le petit triangle *AMS*, l'angle *pAm* pour l'angle *PAM*, &c.

II. DEMANDE OU SUPPOSITION

3. On demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite: ou (ce qui est la même chose) comme un poligône d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne. On demande par exemple que la portion de courbe *Mm* & l'arc de cercle *MS* puissent être considérés comme des lignes droites à cause de leur infinie petitesse, en sorte que le petit triangle *mSM* puisse être censé rectiligne.

gonal con una infinidad de lados infinitamente pequeños. Esto es, una curva en una figura infinitoangular.



Posteriormente, en la sección IV del libro define como aplicación natural de las definiciones anteriores a la segunda diferencial (o como él le llama, segunda diferencia), tercera diferencial y así sucesivamente. Su enfoque permite hacer una interpretación geométrica interesante del significado de las diferenciales sucesivas [L'Hôpital 1715, 55].

SECCIÓN IV

Uso del cálculo de las diferencias para encontrar los puntos de inflexión y de retorno

Como en lo que sigue se hará uso de las diferencias segundas, terceras, etc., es necesario dar una idea de ellas antes de avanzar.

DEFINICIÓN I

La porción infinitamente pequeña por la cual aumenta o disminuye continuamente la diferencia de una cantidad variable, es llamada la *diferencia de la diferencia* de esta cantidad, o bien su *segunda diferencia*. De este modo, si se concibe una tercera ordenada *nq* infinitamente cercana a la segunda *mp* (Fig. 46), y si se trazan *mS* paralela a *AB* y *mH* paralela a *RS*, se llamará a *Hn* la *diferencia de la diferencia Rm*, o bien la *segunda diferencia* de *PM*.

Igualmente si se concibe una cuarta ordenada *of* infinitamente cercana de la tercera *nq*, y si se trazan *nT* paralela a *AB* y *nL* paralela a *ST*, se llamará a la diferencia de las pequeñas rectas *Hn* y *Lo* la *diferencia de la segunda diferencia*, o bien la *tercera diferencia* de *PM*. Y así sucesivamente.[6]

6

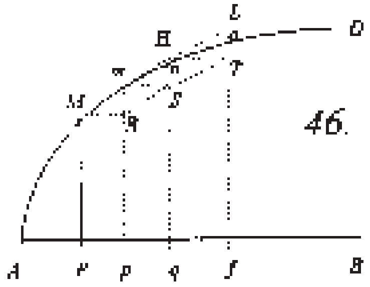
SECTION IV

Usage du calcul des différences pour trouver les points d'inflexion & de rebroussement

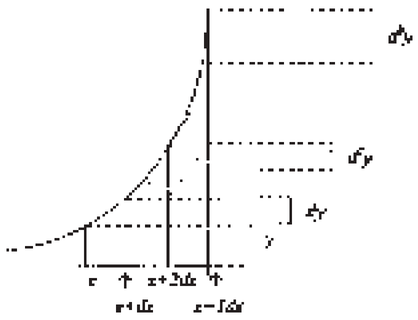
Comme l'on se servira dans la suite des différences secondes, troisièmes, &c. il est nécessaire d'en donner une idée avant que d'aller plus loin.

DÉFINITION I

La portion infiniment petite dont la différence d'une quantité variable augmente ou diminue continuellement, est appellée la *différence de la différence* de cette quantité, ou bien sa



Éste es finalmente el sitio al que pretendemos llegar. Podemos interpretar gráficamente el sentido de los diferenciales sucesivos y así producir una visión distinta de la serie de Taylor. Consideremos con ese fin la siguiente ilustración.



De esta figura se desprenden las relaciones entre x e y en la medida en que la variable x pasa por los lugares x, $x + dx$, $x + 2dx$, $x + 3dx$, etc. Así la variable y irá por los sitios y, $y + dy$, $y + 2dy + d^2y$, $y + 3dy + 3d^2y + d^3y$, etc.

$$f(x) = y$$
$$f(x+dx) = y + dy$$
$$f(x+2dx) = y + 2dy + d^2y$$

---

différence seconde. Ainsi si l'on imagine une troisième appliquée *nq* infiniment proche de la seconde *mp*, & qu'on mène *mS* parallèle à *AB*, & *mH* parallèle à *RS*, on appellera *Hn* la *différence de la différence Rm*, ou bien la *différence seconde* de *PM*.

De même si l'on imagine une quatrième appliquée *rg* infiniment proche de la troisième *nq*, & qu'on mène *nT* parallèle à *AB*, & *nL* parallèle à *ST*; on appellera la différence des petites droites *Hn*, *Lo*, la *différence de la différence seconde*, ou bien la *différence troisième* de *PM*. Et ainsi des autres.

$$f(x+3dx) = y + 3dy + 3d^2y + d^3y$$

que se compongan con una regularidad como lo hace el binomio de Newton. De esta manera el terreno está abonado para que Taylor encuentre y desarrolle su ya célebre resultado.

6. Los trabajos de Taylor y de Maclaurin

Durante el año 1715 Taylor publicó su *Methodus incrementorum directa et inversa*. Este libro incluye la primera publicación del desarrollo en serie, conocida hoy como serie de Taylor. A juzgar por el escrito original, se presenta con el fin de estimar el valor de una ordenada a partir del conocimiento de otra que se encuentre ubicada en sus proximidades. Esto se expresa en la siguiente proposición [Taylor 1715, 21-23].

> Proposición VII. Teorema III. Sean z y x dos cantidades variables, de las cuales z crece uniformemente con incrementos dados Δz. Sea $n\Delta z = v$, $v - \Delta z = \dot{v}$, $\dot{v} - \Delta z = \ddot{v}$, *etc.* Entonces digo que cuando z crece hasta $z + v$, se tiene que x crece hasta
>
> $$x + \Delta x \frac{v}{1\Delta z} + \Delta^2 x \frac{v\dot{v}}{1\cdot 2(\Delta z)^2} + \Delta^3 x \frac{v\dot{v}\ddot{v}}{1\cdot 2\cdot 3(\Delta z)^3} + \ldots$$ [7]

En el escrito anterior debemos interpretar que lo que él llama z es nuestra habitual x, es decir la variable independiente, y que lo que llama x es nuestra $f(x)$ o y. De este modo, si se hace tender n a infinito, se tendrá que Δz tenderá a cero, de donde,

$$\frac{\Delta x}{\Delta z} \to \frac{dx}{dz}, \quad \frac{\Delta^2 x}{\Delta z^2} \to \frac{d^2 f(x)}{dz^2}, \quad etc$$

y $\dot{v} \to v$, $\ddot{v} \to v$, $\dddot{v} \to v$, etc., lo que conduce efectivamente a la obtención de la serie de Taylor

La presentación que hace Taylor se apoya en una tabla de diferencias finitas arregladas adecuadamente, la reproducimos enseguida:

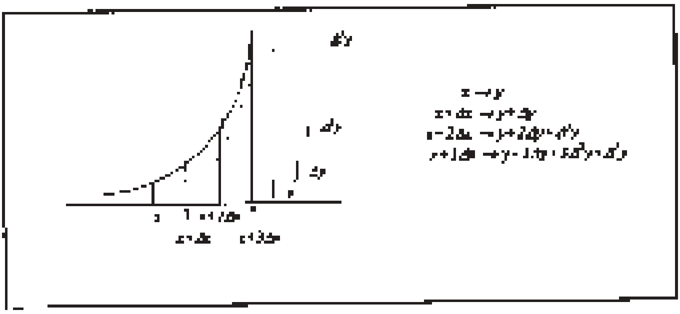
7 Sint z & x quantitates duae variabiles, quarum z uniformiter augetur per data incrementa $\dot{z}$, & sit $n\dot{z} = v$, $v - \dot{z} = \dot{v}$, $\dot{v} - \dot{z} = \ddot{v}$, & sic porro. Tum dico quod quo tempore z crescendo fit $z + v$, x item crescendo fiet

$$x + \Delta x \frac{v}{1\Delta z} + \Delta^2 x \frac{v\dot{v}}{1\cdot 2(\Delta z)^2} + \Delta^3 x \frac{v\dot{v}\ddot{v}}{1\cdot 2\cdot 3(\Delta z)^3} + \ldots$$

[22]
DEMONSTRATIO

x	x	x	x	x	&c
$x + x$	$x - x$	$x + x$	$x - x$	&c	
$x + 2x + x$	$x + 2x + x$	$x + 2x - x$	&c		
$x + 3x + 3x + x$	$x - 3x + 3x - x$	&c			
$x + 4x + 6x - 4x - x$	&c				
&c					

Haremos ahora una adaptación de los argumentos de L'Hòpital para el caso de los diferenciales de orden superior, al de incrementos finitos de Taylor



Así, por el teorema del binomio de Newton, se tendrá

$$x + n\Delta x \;\rightarrow\; y + n\Delta y + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y + \dots$$

haciendo $n\Delta x = h$, se tiene

$$x + h \;\rightarrow\; y + \frac{\Delta y}{\Delta x}h - \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\,\frac{h(h-\Delta x)}{2!} + \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}\,\frac{h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)}{3!} + \dots$$

Vale la pena observar que en este modelo adquieren un sentido holístico la posición de m en las expresiones $\Delta^m y$ o Δy^m, lo que desafortunadamente suele decirse o interpretarse como mera notación en los libros de texto de hoy día

En los siguientes corolarios, mediante una operación de toma al límite cuando n tiende a infinito, [Taylor 1715, 23] obtiene finalmente el equivalente con:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{d\,f(x)}{dx}h + \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\frac{h^2}{2!} + \frac{d^3 f(x)}{dx^3}\frac{h^3}{3!} + \cdots$$

Aunque la notación de primas $f'(x), f''(x), \ldots$ aparece hacia finales del siglo XVIII en los trabajos de Lagrange, ello no impidió que la serie de Taylor se usara y diera diversos resultados interesantes en la teoría del cálculo. Por ejemplo en el *Treatise of fluxions* de 1742, Maclaurin desarrolla criterios para la determinación de máximos y mínimos a partir de la serie de Taylor.

En tanto que Taylor y Maclaurin desarrollaron sus ideas con el cálculo newtoniano, es preciso hacer algunas observaciones. Las variables en esta concepción del cálculo son magnitudes que fluyen con el tiempo. De lo cual todas las relaciones de derivación que se realicen son respecto del tiempo, de manera que tendríamos versiones equivalentes como sigue:

cálculo newtoniano		cálculo leibniziano
$\dot{x},\ \ddot{y},\ \dddot{z}$	$\leftrightarrow$	$\frac{dx}{dt},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^3z}{dt^3}.$
$\frac{\dot{y}}{\dot{x}},\ \frac{\ddot{y}}{\dot{x}^2},\ \frac{\dddot{y}}{\dot{x}^3}$	$\leftrightarrow$	$\frac{dy}{dt},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3}.$

Veamos a continuación una parte del trabajo de Maclaurin. Como señalamos, y representa la variable independiente, mientras que x la dependiente [Maclaurin 1742, 198-199].

> 751 El siguiente teorema también es de gran utilidad en esta doctrina. Supónga que y es cualquier cantidad que se puede expresar por una serie de esta forma $y = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots$ donde $A, B, C, \ldots$ representan coeficientes invariables como es usual, cualquiera de los cuales se puede suponer que se desvanece. Cuando z se desvanece, sea E el valor de y, y sean entonces $\dot{E}, \ddot{E}, \dddot{E}, \ldots$ los valores respectivos $\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}, \ldots$ suponiéndose que z fluye uniformemente. Entonces
>
> $$y = E + \frac{\dot{E}z}{\dot{z}} + \frac{\ddot{E}z^2}{1\times 2\dot{z}^2} + \frac{\dddot{E}z^3}{1\times 2\times 3\dot{z}^3} + \&c. \quad [8]$$

8 751 The following theorem is likewise of great use in this doctrine. Suppose that y is any quantity that can be expressed by a series of this form $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c.$ where

> la ley de la continuación de cuya serie es manifiesta: ya que $y = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots$ se sigue que cuando $z = 0$, A es igual a y, pero (por la suposición) E es igual a y, consecuentemente $A = E$. Tomando las fluxiones, y dividiendo entre $\dot{z}$, ..

Diríamos hoy en día que está desarrollando en serie de Taylor a la función $y = f(x)$ alrededor de $x = 0$, esto es

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

y señala que podría haber excepciones en los casos en que alguno de los coeficientes de la serie se torne infinito. Conviene señalar que aun y cuando reconoce la posibilidad de la existencia de curvas cuyas ordenadas no podrían ser desarrolladas en serie, en tanto que alguna de sus fluxiones fuese infinita, no centra su atención en los aspectos de convergencia de series. Sin embargo habría que observar que su interés no es sólo aplicar el resultado general de Taylor para un desarrollo particular, como suelen sugerirlo los textos actuales, sino discutir un método de determinación de máximos y mínimos como lo presenta enseguida [Maclaurin 1742, 282-283].

> 858. Cuando la primera fluxión de la ordenada se desvanece, si al mismo tiempo su segunda fluxión es positiva, la ordenada es entonces un mínimo, pero es un *máximo* si su segunda fluxión es entonces negativa; esto es, es menor en el primer caso, y mayor en el último que las ordenadas de las partes adyacentes de esa rama de la curva en cualquier lado.[9]

El cual proporciona el hoy conocido criterio de la segunda derivada para la determinación de valores extremos relativos a las curvas. Esto

A, B, C, &c. represent invariable coefficients as usual, any of which may be supposed to vanish. When z vanishes, let E be the value of y, and let $\dot{E}$, $\ddot{E}$, $\dddot{E}$, &c. be then the respective values of $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, &c. z being supposed to flow uniformly. Then

$$y = E + \frac{\dot{E}z}{\dot{z}} + \frac{\ddot{E}z^2}{1 \times 2\dot{z}^2} + \frac{\dddot{E}z^3}{1 \times 2 \times 3\dot{z}^3} + \&c.$$

the law of the continuation of which series is manifest: for since $y = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c.$ it follows that when $z = 0$, A is equal to y, but (by the supposition) E is the equal to y, consequently $A = E$. By taking the fluxions, and dividing by $\dot{z}$.

9 858. When the first fluxion of the ordinate vanishes, if at the same time its second fluxion is positive, the ordinate is then a minimum, but is a maximum if its second fluxion is then negative, that is, it is less in the former, and greater in the latter case than the ordinates from the adjoining parts of that branch of the curve on either side.

es, si $y = f(x)$ cumple con $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$ entonces la variable y tendrá un mínimo sobre la abscisa a. Desarrollando se obtiene

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \dots$$

luego, la diferencia fundamental que mide la variación indica:

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + etc\dots$$

luego $f(a+h) > f(a)$ para h pequeña. Del mismo modo se plantea y discute el caso del valor máximo.

Enseguida generaliza el resultado para el caso en que tanto $f'(a)$ como $f''(a)$ valgan cero [Maclaurin 1742, 283]

> 859. En general, si la primera fluxión de la ordenada, con sus fluxiones de varios órdenes subsecuentes, se desvanece, la ordenada es un mínimo o un *máximo*, cuando el número de todas esas fluxiones que se desvanecen es 1, 3, 5 o cualquier número impar. La ordenada es un mínimo cuando la fluxión siguiente a esas que se desvanecen es positiva, pero es un *máximo* cuando esta fluxión es negativa.[10]

Con estos enfoques se trabajó durante todo el siglo XVIII en el que, hacia su final, se intensificó el trabajo sobre las series de potencias. Particularmente el trabajo de Lagrange es una muestra del impulso que tuvieron algunas de estas ideas.

7. Hacia la elementarización de la enseñanza

Hoy día los estudiantes aprenden grandes cantidades de contenido matemático especializado con gran detalle. Esta tradición de enseñanza se remonta a los años posteriores a la revolución francesa. En ese entonces la matemática adquirió el estado profesional que tiene en nuestros días. La creación de la École Polytechnique en 1794 y de la École Normal en 1795, en París, contribuyó notablemente con el estableci-

10 859. In general, if the first fluxion of the ordinate, with its fluxions of several subsequent orders, vanish, the ordinate is a *minimum* or *maximum*, when the number of all those fluxions that vanish is 1, 3, 5 or any odd number. The ordinate is a *minimum* when the fluxion next to those that vanish is positive; but a *maximum* when this fluxion is negative.

miento del paradigma educativo de casi toda Europa y, en su momento, de América.

A la luz de este proceso de 'masificación' de la enseñanza, la escritura de libros de texto se volvió habitual entre los profesores quienes les dieron la forma de tratados elementales. Este estilo de escritura tuvo la finalidad de acumular y ordenar la mayor cantidad de conocimientos matemáticos en el menor espacio posible (de tiempo en aula y número de hojas en libro), pues ahora el alumno tendría, en un tiempo predeterminado, que alcanzar el conocimiento que la comunidad científica tenía unos años atrás. Se presentaba incluso el caso en que el matemático publicara en clase, como se sabe que habría hecho Cauchy con sus lecciones de análisis.

Es ahí donde se ubica el *Traité Elementaire de Calcul Differentiel et de Calcul Intégral* de 1797 escrito por Lacroix. Veremos enseguida la presentación que él hace de la serie de Taylor en varias variables así como algunas de las consecuencias que se obtienen.

Lacroix parte del conocimiento de la expansión en serie para funciones de una variable

$$f(x+h)=f(x)+\frac{df}{dx}(x)h+\frac{d^2f}{dx^2}(x)\frac{h^2}{2!}+\frac{d^3f}{dx^3}(x)\frac{h^3}{3!}+\ldots$$

En tanto que considera a la función de dos variables $u = f(x,y)$ como compuesta de dos funciones de una variable, obteniendo cada una de ellas al dejar fija una de sus dos variables y dejar a la otra que se incremente [Lacroix 1797, 53].

> 39. Sea $f(x, y)$ una función cualquiera de x y de y, al suponer inicialmente que la variable x cambia sola y se vuelve $x+h$, hará falta considerar a y como una constante, y tratar a la función propuesta igualmente como una función sólo de x; se tendrá entonces, por el teorema del nº 23, al hacer, para abreviar, $f(x, y) = u$, .[11]

Así, se obtiene, aplicando la serie de Taylor de una variable a $f(x,y)$, que

11. 39. Soit $f(x,y)$ une fonction quelconque de x et de y, en supposant d'abord que la variable x change seule et devienne $x+h$, il faudra regarder y comme une constante, et traiter la fonction proposée de même qu'une fonction de x seul: on aura donc par le théorème du nº 23, en faisant pour abréger $f(x,y) = u$,

$$f(x+h,\ y)=f(x,\ y)+\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ y)h+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\ y)\frac{h^2}{2!}+\ \ldots$$

o más sucintamente

$$f(x+h,\ y)=f(x,\ y)+\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{h^2}{2!}+\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{h^3}{3!}+\ldots$$

Equivalentemente, para la otra variable,

> 40. Se ha obtenido el desarrollo precedente al sustituir inicialmente a x por $x+h$, y luego a y por $y+k$; pero se habría podido proceder en el orden inverso, y comenzar por la sustitución de y, entonces $f(x,\ y)$ se volvería $f(x,\ y+k)$, ...[12]

$$f(x,\ y+k)=f(x,\ y)+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{k^2}{2!}+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\frac{k^3}{3!}+\ldots$$

Enseguida, propone la manera de combinar la variación en x y en y simultáneamente $f(x+h,\ y+k)$. Observando que el desarrollo en serie de $f(x,\ y+k)$ es a su vez una función de x e y, desarrolla en serie al arreglo anterior obteniendo con ello:

$$\begin{aligned}f(x+h,\ y+k)=f(x,\ y)&+\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{h^2}{2!}+\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{h^3}{3!}+\ \ldots\\ &+\frac{\partial f}{\partial y}k+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}hk+\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\frac{h^2k}{2!}+\ \ldots\\ &+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{k^2}{2!}+\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\frac{hk^2}{2!}+\ldots\\ &+\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{k^3}{3!}+\ \ldots\end{aligned}$$

Comenta que se obtendría el mismo desarrollo si incrementamos primero la variable x, esto es $f(x+h,\ y)$ y desarrollamos en serie de

---

12. 40. On a obtenu le développement précédent en mettant d'abord $x+h$ au lieu de x, et ensuite $y+k$ au lieu de y, mais on aurait pu procéder dans un ordre inverse, et commencer par la substitution relative à y, alors $f(x,\ y)$ serait devenue $f(x,\ y+k)$, ..

potencias a la serie resultante, de ahí que las parciales cruzadas —dice— deban ser iguales, esto es [Lacroix 1797, 57]

> Es evidente que este segundo desarrollo debe ser idéntico al primero: pues es indiferente cambiar primero x a $x + h$ y enseguida y a $y + k$, o hacer las mismas sustituciones en el orden inverso, dado que de una manera o de la otra se obtiene igualmente $f(x + h, y + k)$ ...[13]

Finalmente, propone reescribir a la serie según aumentan los órdenes de las derivadas e iniciando con las primeras parciales para identificar a la diferencial total de $f(x,y)$ al hacer $h = dx$ y $k = dy$ [Lacroix 1797, 58-59]. Con este esquema desarrolla la idea de diferenciales sucesivas para hablar así de df, d^2f, d^3f, etc. Particularmente la diferencial total de $f(x,y)$ será:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

A partir de consideraciones algebraicas deduce las condiciones sobre f para la localización de los extremos (máximo o mínimo) para funciones de dos variables como veremos enseguida. En este enunciado sólo define lo que entenderá por valor máximo y valor mínimo, enseguida considera al polinomio de Taylor de segundo grado. En el párrafo siguiente resulta interesante la utilización del cambio de variable $k = \alpha h$, pues sin perder generalidad, le permite de una sola vez encontrar que las dos primeras parciales deben ser cero. El estilo de su razonamiento para encontrar que $B + C\alpha = 0$ en un extremo es el mismo que se tenía cuando los inicios del cálculo: a saber, nada pasa de los negativos a los positivos sin pasar por el cero o por el infinito. Puesto que el término $h(B+C\alpha)$ es el más grande de la serie, entonces el factor debe anularse para la determinación de extremos [Lacroix 1797, 228].

> 155. Es evidente que la diferencia
>
> $$u' - u = f(x + h, y + k) - f(x, y),$$
>
> entre dos valores sucesivos de una función, cuando los incrementos se vuelven muy pequeños, pero son además cualesquiera, debe permanecer siempre positiva si el primer valor de u es un *mínimo*, o negativa en el caso contrario

13 Il est évident que ce second développement doit être identique avec le premier; car il est indifférent de changer d'abord x en $x + h$ et ensuite y en $y + k$, ou de faire les mêmes substitutions dans un ordre inverse, puisque d'une manière ou de l'autre on obtient également $f(x + h, y + k)$ ...

Para examinar las consecuencias de esta condición, en general se requiere desarrollar, según las potencias ascendentes de las cantidades h y k, la diferencia indicada antes; pero limitándonos aquí al caso en que los coeficientes diferenciales no se vuelven infinitos, podremos hacer uso de la serie nº41, y para abreviar designaremos por B, C, D, E, F, etc. a las funciones

$$\frac{du}{dx},\ \frac{du}{dy},\ \frac{d^2u}{dx^2},\ \frac{d^2u}{dxdy},\ \frac{d^2u}{dy^2},\ \text{etc.}$$

Colocando enseguida $k = \alpha h$, se obtendrá

$$u_1 - u = h(B + C\alpha) + \frac{h^2}{1.2}(D + 2E\alpha + F\alpha^2) + \text{etc.}$$

serie en la que el término afectado de la primera potencia de h, podrá volverse superior a la suma de todas las otras, y como cambiará de signo al mismo tiempo que h, se requerirá que se desvanezca en el momento del *máximo* o del *mínimo*, lo cual proporciona la ecuación

$$B + C\alpha = 0,$$

que debe subsistir en todas las relaciones de k con h, y se debe verificar, independientemente de α. De este modo

$$B = 0,\ C = 0,\ \text{o}\ \frac{du}{dx} = 0,\ \frac{du}{dy} = 0$$

según se ha dedujo de las consideraciones geométricas[33]

---

33) 135. Il est évident que la différence

$$u_1 - u = f(x + h,\ y + k) - f(x,\ y),$$

entre deux valeurs successives d'une fonction, lorsque les accroissements demeurent très petits, mais sont d'ailleurs quelconques, doit rester toujours positive si la première valeur de u est un *minimum*, ou négative dans le cas contraire.

Pour examiner les conséquences de cette condition, il faut en général développer, suivant les puissances ascendantes des quantités h et k, la différence indiquée ci-dessus; mais en nous bornant ici au cas où les coefficiens différentiels ne deviennent pas infinis, nous pourrons faire usage de la série du nº 41, et pour abréger, nous désignerons par

$$B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ \text{etc.}$$

les fonctions

$$\frac{du}{dx},\ \frac{du}{dy},\ \frac{d^2u}{dx^2},\ \frac{d^2u}{dxdy},\ \frac{d^2u}{dy^2},\ \text{etc.}$$

Posant ensuite $k = \alpha h$, il viendra

$$u_1 - u = h(B + C\alpha) + \frac{h^2}{1.2}(D + 2E\alpha + F\alpha^2) + \text{etc.}$$

série dans laquelle le terme affecté de la première puissance de h, pourra devenir supérieur à la somme de tous les autres, et comme il changerait de signe en même temps que h, il faudra qu'il s'évanouisse lors du *maximum* ou du *minimum*, ce qui fournit l'équation

En el fondo del razonamiento está la consideración de que en un extremo la variación es mínima, es decir, la resta $f(x+h, y+k) - f(x, y)$ tiene su mínima variación cuando $f(x,y)$ alcanza un valor crítico. De ahí que para toda α, se tiene $B + C\alpha = 0$ de modo que $B = C = 0$

Enseguida considera lo que caracteriza a un máximo, a un mínimo y a un punto silla. [Lacroix 1797, 229].

> Al ser cumplidas estas condiciones por los valores de x y de y determinados en consecuencia, se requiere también que los coeficientes D, E y F al desvanecerse no al mismo tiempo, y además, que el signo de la cantidad que forma a la segunda línea del desarrollo anterior, sea independiente de los valores de α. Al dar a esta línea la forma
>
> $$\frac{Fk^2}{1\cdot 2}\left(\frac{D}{F} + \frac{2E}{F}\alpha + \alpha^2\right) \quad \ldots \ldots \quad (a)$$
>
> se ve que su signo permanecerá el mismo si el polinomio
>
> $$\frac{D}{F} + \frac{2E}{F}\alpha + \alpha^2$$
>
> no cambia por ningún valor de α, a lo cual se llegará si, estando igualado a cero, no admite para α sino los valores imaginarios o los valores iguales. Luego, estos valores, expresados en general por
>
> $$\alpha = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - FD}}{F}$$
>
> serán imaginarios cuando $E^2 < FD$, e iguales si $E^2 = FD$
>
> Sin estas condiciones, no habrá ni *máximo* ni *mínimo*; y como de entrada exigen que F y D tengan el mismo signo, el de la cantidad (a) dependerá también además del signo del coeficiente F, o entonces tendrá un *mínimo* si es positivo, y un *máximo* si es negativo.[14]

$$B + C\alpha = 0$$

qui devant subsister dans toutes les relations de k avec h, doit se vérifier indépendamment de α; on aura donc

$$B = 0, \; C = 0, \text{ ou } \frac{dz}{dx} = 0, \; \frac{dz}{dy} = 0$$

ainsi qu'on l'a déduit des considérations géométriques.

14 Ces conditions étant remplies par les valeurs de x et de y déterminées en conséquence, il faut encore que les coefficients D, E et F ne s'évanouissent pas au même temps, et de plus, que le signe de la quantité qui forme la seconde ligne du développement ci-dessus, soit indépendant des valeurs de α. En donnant à cette ligne la forme

De lo anterior se desprende que si D, E y F no se anulan simultáneamente y el signo de la expresión $D + 2E\alpha - F\alpha^2$ es independiente de α se podrá determinar la existencia de un máximo o de un mínimo.

Así que si $F \neq 0$ entonces el signo del polinomio cuadrático en α depende sólo del signo de la expresión

$$\frac{D}{F} - \frac{2E}{F}\alpha + \alpha^2$$

Por lo tanto, si $E^2 = FD$, α tendrá dos valores iguales, mientras que si $E^2 < FD$, tendrá valores imaginarios. De modo que, si $E^2 < FD$ y $F > 0$ se tendrá un mínimo, mientras que si $E^2 < FD$ y $F < 0$, un máximo.

Como se puede observar, el método propuesto por Lacroix y desarrollado antes por Euler permite una generalización inmediata a funciones reales de más de dos variables, puesto que esto se reduciría al estudio de n funciones de una variable. Lo cual lo hace para $n = 3$ en una sección posterior e indica la ruta de la eventual generalización.

Con estos elementos inicia el estudio de las propiedades diferenciales de las curvas en el espacio.

8. Hacia la convergencia de la serie

Hacia el ocaso del siglo XVIII se generalizó la discusión sobre los principios del cálculo diferencial, o a la usanza de entonces, acerca

$$\frac{Fk^2}{1\cdot 2}\left(\frac{D}{F} + \frac{2E}{F}\alpha + \alpha^2\right) \quad \ldots \ldots \quad (a)$$

on voit que son signe restera le même si le polynome

$$\frac{D}{F} + \frac{2E}{F}\alpha + \alpha^2$$

n'en change pour aucune valeur de α, et c'est ce qui arrivera, si, étant égalé à zéro, il n'admet pour α que des valeurs imaginaires ou des valeurs égales; or, ces valeurs, exprimées en général par

$$\alpha = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - FD}}{F}$$

seront imaginaires lorsque $E^2 < FD$ et égales si $E^2 = FD$.

Sans ces conditions, il n'y aura ni maximum ni minimum; et comme elles exigent d'abord que F et D aient le même signe, celui de la quantité (a) ne dépendra plus alors que du signe du coefficient F; on aura donc un minimum s'il est positif, et un maximum s'il est négatif.

de la metafísica del cálculo infinitesimal. En esta atmósfera surgieron las propuestas de D'Alembert con su definición de límite y el estudio de los cocientes límites de los elementos infinitesimales; la de Carnot sobre la idea de la compensación de errores y la de Lagrange sustentada en el desarrollo en serie de potencias de las funciones. De éstas, la que nos interesa por el uso que hace de la serie de Taylor, es la formulada por Lagrange. Grattan-Guinness señala que Lagrange en su artículo "Sur une nouvelle espèce de calcul ..." de 1772, afirma que toda función puede ser desarrollada en serie de Taylor. Con esto, el cálculo sería una parte natural del álgebra con operaciones y algoritmos propios.

Reproducimos a continuación algunos párrafos de la *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange, en los que se exhibe su idea de fundamentar el cálculo a la manera de los *antiguos*,[15] e introduce algunas de las notaciones y la terminología que se conservan en uso en la actualidad; por ejemplo, los términos función primitiva, funciones derivadas y funciones analíticas así como las notaciones $f'x$, $f''x$, $f'''x$, etc. para las funciones derivadas.

TEORÍA DE LAS FUNCIONES ANALÍTICAS,
CONTENIENDO

Los Principios del Cálculo diferencial, desprovistos de toda consideración a los infinitamente pequeños, a los evanescentes, a los límites y a las fluxiones, y reducidos al análisis algebraico de las cantidades finitas.[16]

Al explicar el contenido, desde el título mismo, describe su intención central [Lagrange 1813, 1]. En su introducción, inicia describiendo lo que entenderá por función (muy a la manera de Euler) y reseña, a grandes rasgos, los enfoques que otros habían tenido ante el asunto de la fundamentación. Establece, como se verá en la transcripción más adelante, lo que entenderá por función primitiva y funciones derivadas, así como la visión que se tendrá del cálculo a la luz de esas nociones [Lagrange 1813, 2].

15. Hace referencia al rigor en la geometría griega de la antigüedad clásica.
16.

THÉORIE DES
FONCTIONS ANALYTIQUES,
CONTENANT

Les Principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.

> Cuando a la variable de una función se le atribuye un incremento cualquiera, al adjuntar a esta variable una cantidad indeterminada, se puede, por medio de las reglas ordinarias del álgebra, si la función es algebraica, desarrollarla según las potencias de esta indeterminada. El primer término del desarrollo será la función propuesta que se llamará *función primitiva*; los términos siguientes estarán formados por las diferentes funciones de la misma variable, multiplicadas por las potencias sucesivas de la indeterminada. Estas nuevas funciones dependerán únicamente de la función primitiva de la cual se obtienen, y podrán ser llamadas *funciones derivadas*. En general, sea la que fuere la función primitiva, algebraica o no, siempre puede ser desarrollada o dejar de ser desarrollada de la misma manera, y dar de este modo nacimiento a las funciones derivadas.[17]

Finaliza diciendo cuál será el objeto de la obra:

> El objeto de esta obra es dar la teoría de las funciones, consideradas como primitivas y derivadas, de resolver por esta teoría, los principales problemas del análisis, de la geometría y de la mecánica, que se hace depender del cálculo diferencial, y dar por ese medio, a la solución de estos problemas, todo el rigor de las demostraciones de los antiguos.[18]

En su primer capítulo, explica la forma en que se obtiene el desarrollo en series de potencias de una función. Tomando a la función fx, e incrementando x en $x + i$, donde i es una cantidad cualquiera indeterminada, la función devendrá en $f(x + i)$ y por la teoría de series se tendría

$$f(x + i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + etc.$$

---

17 Lorsqu'à la variable d'une fonction on attribue un accroissement quelconque, en ajoutant à cette variable une quantité indéterminée, on peut par les règles ordinaires de l'algèbre, si la fonction est algébrique, la développer suivant les puissances de cette indéterminée. Le premier terme du développement sera la fonction proposée qu'on appellera *fonction primitive*, les termes suivans seront formés de différentes fonctions de la même variable, multipliées par les puissances successives de l'indéterminée. Ces nouvelles fonctions dépendront uniquement de la fonction primitive dont elles dérivent, et pourrons s'appeler *fonctions dérivées*. En général, quelle que soit la fonction primitive, algébrique ou non, elle peut toujours être développée ou censée développée de la même manière, et donner ainsi naissance à des fonctions dérivées.

18. L'objet de cet Ouvrage est de donner la théorie des fonctions, considérées comme primitives et dérivées, de résoudre par cette théorie, les principaux problèmes d'analyse, de géométrie et de mécanique, qu'on fait dépendre du calcul différentiel; et de donner par là, à la solution de ces problèmes, toute la rigueur des démonstrations des Anciens

en la que $f(x)$ es la función primitiva y p, q, r, etc., las funciones derivadas de la primitiva. A continuación da un argumento con el que excluye la presencia de términos de la forma $ui^{m/n}$ en la serie, en base a que darían n distintos valores para el sumando del que forman parte, que al combinarlo con aquellos valores que tendrá $f(x)$ llevaría a una contradicción.

En el siguiente parágrafo del mismo capítulo, observa que $f(x + i)$ tendrá por valor a $f(x)$ para el valor particular $i = 0$, de ahí que $f(x + i)$ deba ser de la forma:

$$f(x + i) = f(x) + iP$$

siendo P una función de x y de i, tal que no devendrá infinita cuando $i = 0$. Análogamente, se tiene para P

$$P = p + iQ$$

donde iQ deviene nula cuando $i = 0$ y Q es función de x e i, del mismo modo se continúa sucesivamente el proceso. Esto es:

$$\begin{aligned} f(x + i) &= f(x) + iP \\ &= f(x) + ip + i^2Q \\ &= f(x) + ip + i^2q + i^3R \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Del desarrollo anterior, comenta que en cada caso, se proporciona el valor exacto del residuo (Pi, Qi^2, Ri^3, etc.) y sólo el número de sumandos que se quieran. Este comentario y el párrafo siguiente indican completamente su concepción en cuanto al uso que se espera tener de la serie y, por ende, del papel que en ella desempeña el residuo. Esta observación consideramos que arroja una información distinta sobre la evolución de las concepciones asociadas a la serie de Taylor.

En el parágrafo 6 del mismo capítulo, señala lo que considera la principal ventaja de su método [Lagrange 1813, 14].

> 6. Pero la principal ventaja del método que acabamos de exponer, consiste en que se hace ver cómo las funciones p, q, r, etc. resultan de la función principal fx, y sobre todo en que prueba que los restos iP, iQ, iR, etc. son las cantidades que deberían volverse nulas cuando $i = 0$, de donde se

> obtiene esta consecuencia importante: que en la serie $fx + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots$ que nace del desarrollo de $f(x + i)$, siempre se puede tomar bastante pequeña para que un término cualquiera sea mayor que la suma de todos los términos que le siguen; y que ello tenga lugar de este modo para todos los valores más pequeños de i.[19]

Creemos conveniente enfatizar algunas de sus observaciones anteriores. Nótese el objetivo de la incorporación del residuo en la serie, pues al colocarlo en el desarrollo puede limitar el número de términos de la serie según se requiera y, simultáneamente, tener la garantía de que para valores pequeños de i, cualquier sumando es más grande que la suma de todos los términos que le siguen. Sin lugar a dudas, esto hace de la serie un importante instrumento de uso en una gran diversidad de problemas que, muy particularmente, las ciencias físicas planteaban. En este sentido, el papel que juega el residuo de Lagrange en su presentación de la fundamentación, es lo que hoy conocemos con la frase *orden de igualdad* que permite, como ya decíamos, detenerse en el sumando que el problema requiera. Eventualmente, por ejemplo, en un problema de cinemática en el que se requiere conocer la posición de un cuerpo en un tiempo dado, sólo se necesita la función posición en el instante inicial y la velocidad y aceleración, por lo que bastará detenerse en la segunda derivada.

En los siguientes capítulos, muestra de una manera algebraica la relación que guardan p, q, r, etc. con la función $f(x)$, adquiriendo entonces la forma en derivadas

$$f'(x),\ f''(x)\frac{1}{2!},\ f'''(x)\frac{1}{3!},\ \text{etc.}$$

Finaliza su libro con una gama de aplicaciones en las que efectivamente se observa a la *serie* truncada en algún sumando.

Presentamos enseguida el enfoque que hace Cauchy de la serie de Taylor y de su convergencia. Aunque, como sabemos, un aspecto característico del análisis de Cauchy consiste en incluir a las series infinitas en el cálculo por vez primera en la historia. En este enfoque, el análisis de convergencia de Cauchy precedió al estudio de las series

19 § 6. Mais le principal avantage de la méthode que nous avons exposée, consiste en ce qu'elle fait voir comment les fonctions p, q, r, etc. résultent de la fonction principale fx, et surtout en ce qu'elle prouve que les restes iP, iQ, iR, etc. sont des quantités qui doivent devenir nulles lorsque $i = 0$, d'où l'on tire cette conséquence importante, que dans la série $fx + pi + qi^2 + ri^3 +$ etc. qui naît du développement de $f(x + i)$, on peut toujours prendre i assez petit pour qu'un terme quelconque soit plus grand que la somme de tous les termes qui le suivent, et que cela doit avoir lieu aussi pour toutes les valeurs plus petites de i.

infinitas su análisis de convergencia. De tal suerte que las series de Taylor serían entonces un *ejemplo* del estudio de series. Es decir, el estudio de las series numéricas infinitas es el cuerpo del que se desprenderán entre otras, las series de potencias.

Como sabemos, Cauchy rechazó la propuesta lagrangiana de fundamentación del cálculo diferencial. Para lo cual, muestra la existencia de funciones para las que su serie de Taylor, aunque convergente, no tiene por límite a la función propuesta [Cauchy 1829, 394].

LECCIONES SOBRE EL CÁLCULO DIFERENCIAL.

Se podría creer que la serie de Maclaurin siempre tiene a $f(x)$ como suma, cuando es convergente, y que, en el caso en que sus diferentes términos se desvanecen uno después del otro, la función $f(x)$ se desvanece ella misma. Pero, para asegurarse de lo contrario, basta observar que la segunda condición se cumplirá, si se supone

$$f(x) = e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

y la primera, si se supone

$$f(x) = e^{-x^2} + e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

Sin embargo, la función no es idénticamente nula, y la serie deducida de la primera suposición tiene por suma, no el binomio, sino su primer término

$$e^{-x^2}$$

Las mismas observaciones son aplicables a la serie de Taylor.[20]

20.

LEÇONS SUR LE CALCUL DIFFÉRENTIEL

On pourrait croire que la série de Maclaurin a toujours $f(x)$ pour somme, quand elle est convergente, et que, dans le cas où ses différents termes s'évanouissent l'un après l'autre, la fonction $f(x)$ s'évanouit elle-même. Mais, pour s'assurer du contraire, il suffit d'observer que la seconde condition sera remplie, si l'on suppose

$$f(x) = e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

et la première, si l'on suppose

$$f(x) = e^{-x^2} + e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

Cependant la fonction n'est pas identiquement nulle, et la série déduite de la première supposition a pour somme, non pas le binôme, mais son premier terme

$$e^{-x^2}.$$

Les mêmes remarques sont applicables à la série de Taylor.

Este enfoque llevó a Cauchy a centrar la atención en el problema de la convergencia de la serie.

Apoyándose en el concepto de límite, define una serie convergente como la que para valores crecientes de n, la *n-ésima* suma parcial s_n tiene un límite s. Propone también el teorema que hoy lleva su nombre y que establece una condición necesaria y suficiente para investigar la convergencia de una serie sin necesidad de conocer su suma. Esto llevará unos años adelante al estudio de la estructura de la recta numérica real.

Sin embargo, a pesar de su enfoque inicial a la convergencia, no excluye de su estudio a las series de Taylor y encontramos en sus *Leçons sur le calcul différentiel* que si $f(x)$ es desarrollable en series de potencias, ésta será la serie de Taylor [Cauchy 1829, 394-395].

Discute también sobre el residuo de la serie de Taylor y propone su forma integral mediante una integración por partes y el uso del teorema fundamental del cálculo, reiteradamente. Se aprecia, particularmente, su preocupación por la convergencia, o dicho de otro modo, por la garantía del acoplamiento de las gráficas del polinomio de Taylor y de la función en todo el intervalo centrado en el punto de contacto. De ahí que estudia el límite

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x)$$

en la expresión

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

donde

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

y $R_n(x)$ es el residuo en alguna de sus formas.

Así, la convergencia se establece diciendo que $P_n(x) \to f(x)$ cuando $x \to \infty$, si $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$. En tanto que el enfoque de Lagrange propone otros términos. Para n fijo, con el mismo desarrollo para $f(x)$ que

$$\frac{Rn(x)}{(x-a)^n} \to 0$$

cuando $x \to a$. Ello muestra una concepción distinta y, a todas luces, una funcionalidad diferente para la serie.

Como acontecimiento histórico en el desarrollo del cálculo hasta transformarse paulatinamente en el análisis matemático del siglo XIX, el enfoque de Cauchy marcó el rumbo por el que habría de seguir el discurso educativo en dicho siglo. Sus escritos, dictados a su vez en clases en la École Polytechnique, se tornaron en el paradigma educativo posterior.

En esas circunstancias, el cálculo construido durante los dos siglos anteriores se transformó en una parte del análisis matemático que sustentaba sus resultados en el concepto primario de límite. Entre los años de mayor producción de Cauchy, uno de sus discípulos, el padre François Napoleón Marie Abbé Moigno publicó libros de texto sobre el cálculo, siguiendo los principios de Cauchy, ellos aparecieron bajo el título de *Leçons de calcul différentiel et calcul integral* en 1840-1844.

En este sentido, en el cálculo diferencial de Cauchy las series de Taylor se presentan principalmente en el contexto de un teorema, un resultado de la teoría. Mientras que en la teoría de las funciones analíticas de Lagrange, éstas son el punto de partida de todo el desarrollo ulterior.

Esta tendencia inaugurada por Cauchy se aprecia consolidada como los clásicos *Course d'analyse* de finales del siglo XIX, como por ejemplo, los de Jordan, Hermite, Goursat y Picard. En estos textos encontramos cambios interesantes en el estudio de la serie de Taylor. Si tomamos por ejemplo el curso de Jordan, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* de 1882, convencionalmente juzgado como uno de los textos que mejor caracterizan el análisis matemático de finales de siglo, encontramos cambios que inician en la misma estructura. Por ejemplo, inician con un estudio de los números (naturales, racionales e irracionales) y siguen con el tema de conjuntos y sus propiedades y las funciones sobre ellos.

En el capítulo III en el tema de series, se presenta a la serie de Taylor ¡antes de presentar a las series numéricas! y, por supuesto, antes de las series de funciones en general[21] [Jordan 1959, 249-250].

I. Fórmula de Taylor

231. Sea $f(x)$ una función real de la variable real x, que permanece continua, al igual que sus n primeras derivadas, en un intervalo AA'.

Al designar por a y $a+h$ a dos puntos de ese intervalo, poniendo

21 Estos sugieren la hipótesis señalada por Farfán (1986), que el estudio de las series numéricas infinitas es la parte formal de la teoría de series. Lo que arroja nueva luz para su didáctica actual.

(1) $$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)+\dots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+R_n$$

El residuo R_n será una nueva función de h que vamos a determinar.[22]

Como se observa, el estudio de la serie de Taylor está ya indisolublemente ligado al de convergencia de series, para ello, se establece la presencia de un residuo R_n al que habrá que estudiar detenidamente. En la sección siguiente se presenta la forma que Lagrange usa para el residuo [Jordan 1959, 251]

... θ al designar a una cantidad comprendida entre 0 y 1

$$R_n=\frac{h^n}{n!}f^{n}(a+\theta h)$$ [23]

De la expresión

$$f(a+h)-f(a)=h\left(f'(a)+\frac{h}{2!}f''(a)+\dots+\frac{h^{n-2}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)\right),$$

se sigue que si n es fija y la h es infinitamente pequeña, la diferencia $f(a+h)-f(a)$ será infinitamente pequeña mientras que si h es fija y n tiende a infinito, dependiendo de las características de la función, se tendrá la convergencia.

Haciendo $a=0$ y $h=x$, se obtiene la fórmula de Maclaurin con las dos formas discutidas para el residuo [Jordan 1959, 252]

254. Al poner en la fórmula de Taylor, $a=0$, $h=x$, obtendremos la fórmula de Maclaurin

---

22

I. Formule de Taylor

251. Soit $f(x)$ une fonction réelle de la variable réelle x, qui reste continue, ainsi que ses n premières dérivées, dans un intervalle AA'.

Désignons par a et $a+h$ deux points de cet intervalle, posons

(1) $$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)+\dots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+R_n$$

Le reste R_n sera une nouvelle fonction de h que nous allons déterminer

23 ... θ désignant une quantité comprise entre 0 et 1

$$R_n=\frac{h^n}{n!}f^{n}(a+\theta h)$$

(4) $$f(x) = f(0) + xf'(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n$$

donde R_n puede ser puesta de las formas siguientes

$$R_n = \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(tx)\, dt, \quad R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x)$$

Esta fórmula supone que la función f y sus derivadas hasta de orden n son continuas en un intervalo que contiene en su interior a los puntos 0 y x.[24]

Enseguida, extiende la serie a varias variables reales iniciando con el caso de dos variables. Se precisan los intervalos en los que se ubican las variables y, con el uso de la composición de funciones, se deduce la expresión de la serie para dos variables [Jordan 1959, 252-254].

Posteriormente, argumenta la extensión de estos resultados al caso en que la variable es compleja, para lo cual se habla de la variable z y de la curva rectificable en el interior del dominio. De ahí que actuando en analogía al caso de una variable real, obtiene la serie de Taylor respectiva.

Expresa el residuo R_n en su forma integral y señala una forma de acotar su norma, cuando el segmento de recta que une los extremos de integración quede completamente contenido en el interior del dominio [Jordan 1959, 254]. De esta forma se concluye la presentación de las series de Taylor.

De aquí en adelante (aunque no estudiaremos en detalle lo ocurrido), se sigue con la tradición educativa dictada por los clásicos *Cours d'Analyse* enriquecidos por los aportes de la escuela alemana en la década de los ochenta en el siglo XIX. Ello lleva a una especie de transferencia permanente de ciertos elementos y procedimientos del análisis matemático hacia el cálculo diferencial e integral, llegando a tener una especie de *análisis diluido*.[25]

24. 254. Posant dans la formule de Taylor, $a = 0$, $h = x$, nous obtiendrons la formule de Maclaurin

(4) $$f(x) = f(0) + xf'(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n$$

où R_n peut être mis sous les formes suivantes:

$$R_n = \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(tx)\, dt, \quad R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x)$$

Cette formule suppose que la fonction f et ses dérivées jusqu'à l'ordre n soient continues dans un intervalle comprenant à son intérieur les points 0 et x.

25. Imaz [1987] propuso este término.

Sin embargo, con estos elementos mostramos lo que a nuestro juicio han sido los momentos relevantes en el desarrollo conceptual de la serie de Taylor. Pasemos enseguida a centrar la atención en las preguntas con las que se inició este escrito.

9. Consideraciones finales

Iniciamos este escrito con algunas interrogantes que conducen, sin lugar a dudas, a muchas y muy variadas reflexiones. Una de ellas, *¿por qué enseñamos lo que enseñamos?*, plantea una cuestión profunda y recoge el sentir del enfoque que hemos pretendido dar a este escrito. Reflexionamos en torno de ella a la luz del concepto de la serie de Taylor.

Revisando los libros que han sido de uso cotidiano, en las últimas dos décadas, en bachilleratos y en los primeros cursos de la educación matemática universitaria de nuestros sistemas educativos, hemos encontrado la serie de Taylor desconectada del resto del cuerpo de los contenidos del texto, salvo quizá del tema de convergencia de series infinitas. Por lo que se centra la atención en los aspectos propios de la convergencia y, eventualmente, en la aproximación mediante polinomios con márgenes de exactitud tolerables sobre ciertos intervalos. Creemos pues, que el estudio de la serie de Taylor aparece muy tarde en el escenario, casi ya a la caída del telón, de tal suerte que pareciera ya no tener que hacer pues ya sucedieron los principales acontecimientos.

Esta presentación de la serie de Taylor se antecede entonces por algunos de los teoremas que siendo parte del análisis se han llevado a los cursos de cálculo de entre los que se encuentran los teoremas sobre continuidad en intervalos, los de los medios, los criterios de convergencia de series numéricas y ello, a su vez, descansando sobre una construcción de los números reales como estructura numérica. Esta presentación habitual sugiere a los lectores que la serie de Taylor no es elemental, y no se usan en la resolución de problemas ni en la demostración de teoremas —al menos explícitamente—.

Ante estas características adquiridas por la serie, el lector se encuentra frente al cúmulo de conocimientos parciales disconexos y concebidos deductivamente, ... uno detrás del otro. En contraparte, en textos de física y de ingeniería usados en nuestro medio, eventualmente aparecen ideas estrechamente vinculadas a las nociones precauchianas de la serie de Taylor. Así es usual encontrar argumentos como el siguiente: "... si p representa a un cierto parámetro físico en un instante dado de tiempo t, un momento después $t + dt$, este parámetro será

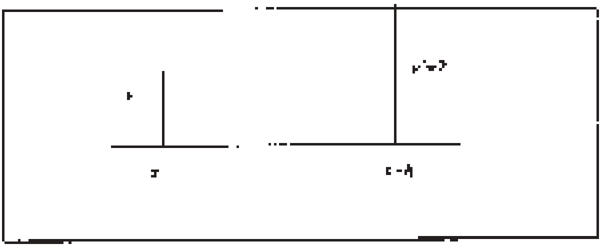
$p + dp$ ...', que requiere para su conceptualización el pensar un tanto como lo sugiere la serie en cuanto instrumento de predicción y no como objeto de convergencia como suele aparecer en los textos de matemáticas.

De ahí que, ante tal confrontación de enfoques, resulta natural la pregunta ¿por qué enseñamos lo que enseñamos?

En este sentido, la revisión que hemos hecho en este ensayo de la didáctica de antaño señala ya elementos para una didáctica del futuro. Más específicamente, observamos en Newton que la serie es un recurso de simplificación y al mismo tiempo, un método de descubrimiento aplicable al estudio de los fenómenos que fluyen continuamente con el transcurrir del tiempo. Es ahí que reflexionó en la velocidad de cambio de las magnitudes estudiadas y denominó 'mi método' a la asociación entre el manejo de las series infinitas —series de potencias— con el estudio de las velocidades de cambio, de las que a su vez, se sirven para determinar la propia cantidad que fluye con el devenir del tiempo.

Del mismo modo, encontramos en el texto de cálculo diferencial de L'Hôpital, la idea de diferencial en que aumenta o disminuye la variable y así, buscando la relación entre los aumentos o decrementos sucesivos de la variable, se aproxima a la expresión en serie que años después Taylor utilizara de nuevo.

Centrando un poco en la presentación que Taylor hiciera de su serie, vemos expresada sutilmente la noción de la serie como instrumento de predicción. Esto es, si conocemos el estado inicial de la magnitud a estudiar, es decir, si se conoce la ordenada y sus variaciones sucesivas, es posible predecir el comportamiento del estado vecino y, con la ayuda del método de los incrementos finitos.



Esta presentación parece aceptable en una primera enseñanza de la serie en nuestro días. Pues con elementos geométricos y colocando el problema en el contexto de la predicción, sería factible hacerlo sin muchos conocimientos preliminares, discutir y, sobre todo, construir a la serie.

Una vez ahí, las posibilidades de uso saltan a la vista en la física, la ingeniería, en la extensión de la teoría a varias variables, en la intuición de resultados del cálculo avanzado, la variable compleja y las ecuaciones diferenciales; al finalizar este apartado mostraremos un esbozo de tales usos.

Para efectos de construir una primera respuesta al porqué enseñamos lo que enseñamos en lo que concierne a la serie de Taylor, diremos que los principales elementos los encontramos en el tránsito de la propuesta de fundamentación de Lagrange a la de Cauchy y del impacto que ésta tuviera en la enseñanza desde entonces hasta nuestros días.

Las pretensiones de Lagrange de librar al cálculo diferencial de toda consideración de infinitamente pequeños, de cantidades evanescentes, de límites y de fluxiones, lo condujeron al análisis algebraico de cantidades finitas. Este enfoque, caracterizado por el uso fundamental de la serie de Taylor mostró una gran ventaja algorítmica y conceptual, pues con ésta se podía describir a una función sólo con un número de términos simples, en tanto que para incrementos pequeños en la variable independiente, cualquier suma parcial es mayor que la suma de todos los términos que le siguen. Esto depende del problema, pues la información relevante de una función está impresa en un pedazo finito de su representación en serie. Ello hizo de la serie el instrumento con el cual se abordarían una vasta diversidad de problemas que las ciencias físicas planteaban. Más específicamente, con la intención de analizar los fenómenos de variación que provee el estudio de la naturaleza, el bagaje teórico construido hasta entonces, efectivamente se podía describir con las funciones analíticas.

Por su parte, Cauchy, alejándose del principio en que Lagrange sustentó su programa de fundamentación, planteó otro basado en el concepto de límite. En éste, la serie de Taylor pasaba a ser un teorema: el teorema de Taylor, un resultado más de la teoría, consecuencia del concepto de límite y del teorema del valor medio, formando parte del estudio general de la convergencia de series. En este sentido, aunque en la práctica se siguiera usando con la idea de predicción que le caracterizaba, se sustituye su función en los textos típicamente conocidos como *Courses d'analyse*.

Este hecho histórico es un buen ejemplo de la especie de transposición didáctica en el que cohabitarán los nuevos resultados del análisis cauchyano con algunos de los métodos y problemas característicos de los siglos XVII y XVIII. Consiguiendo con ello lo que citamos anteriormente, hacer de los cursos de cálculo una especie de análisis diluido.

Esta situación derivó a la postre en una modificación de la estructura de los textos escolares. Pues mientras que en los textos precauchianos, las demostraciones solían usar ideas asociadas a la serie, en los textos poscauchianos, éstas se vieron sustituidas por otras que si bien se formularon con una precisión matemática más acorde con su época, el problema didáctico seguía latente. De hecho se agudizaba.

Como se puede observar, esto nos llevaría a plantear nuevas formas de presentar el discurso educativo a la luz de los indicativos que este análisis arroja, sin embargo, este hecho habrá de ocurrir con el concurso de todos los participantes en el proceso educativo. Para tal implementación es menester determinar algunos aspectos metodológicos, como por ejemplo, ¿a qué nivel y en qué grado habría de introducirse las nociones vectoriales en el cálculo avanzado?, o ¿cuándo iniciamos los temas de análisis matemático y en qué contexto? Por lo demás, la respuesta deberá ser diferente en cada especialidad, pues las necesidades son de diversa índole de quien se dedicará a la economía, a la ingeniería, a la física o a las matemáticas.

Finalizamos este escrito con algunos usos que, a manera de ejemplo, podría tener la serie en diversos contextos.

10. Algunas consecuencias de nuestro enfoque

Con el ánimo de mostrar una gama de usos de la serie de Taylor, presentaremos a continuación algunas consecuencias que, hemos considerado, ilustran la versatilidad y la potencia que la serie de Taylor puede tener en cursos de cálculo de una y varias variables.

A riesgo de ser esquemáticos y presentar una colección lineal de ejemplos, listaremos con todas las reservas del caso, algunas consecuencias de nuestro enfoque usando la serie de Taylor.

A. El teorema del binomio

Sea $f(x) = x^{m/n}$, entonces $f(1+x) = (1+x)^{m/n}$.

Por la serie de Taylor,

$$f(1+x) = f(1) + f'(1)x + \frac{f''(1)}{2!}x^2 + \frac{f'''(1)}{3!}x^3 + \ldots$$

por lo cual.

$$(1+x)^{m/n} = 1 + \frac{m}{n}x + \frac{m}{n}\,\frac{m-n}{2n}\,x^2 + \frac{m}{n}\,\frac{m-n}{2n}\,\frac{m-2n}{3n}\,x^3 + \ldots$$

B. La diferencia total

Para el caso de una variable, tenemos que el desarrollo en serie de f en x se presenta como

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \ldots$$

Así que si $h = dx$ y escribimos $f^{(n)}(x)$ como, $\frac{d^n f}{dx^n}$ tendremos

$$f(x+dx) = f(x) + \frac{df}{dx}\frac{dx}{1!} + \frac{d^2 f}{dx^2}\frac{dx^2}{2!} + \frac{d^3 f}{dx^3}\frac{dx^3}{3!} + \ldots$$

por lo que,

$$f(x+dx) = f(x) + df + d^2 f\,.\left(\frac{1}{2!}\right) + d^3 f\,.\left(\frac{1}{3!}\right) + \ldots$$

Análogamente, para una función de dos variables

$$f(x+h,\ y+k) =$$

$$f(x,y) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right] + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2\right] + \ldots$$

$$f(x+dx,\ y+dy) = f(x,y) + df + \frac{1}{2!}d^2 f + \frac{1}{3!}d^3 f + \ldots$$

De ahí que la diferencia de f (usualmente nombrado como diferencial total) sea

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

y las diferencias sucesivas

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} d^2x + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

se obtienen análogamente. En el mismo sentido se obtendrían las diferenciales de funciones de más de dos variables.

C. La regla de la cadena

Si las variables x e y de $f(x, y)$ son a su vez funciones de t, es decir $x = x(t)$ e $y = y(t)$, se tiene de la serie de Taylor que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

así que

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

D. La regla de L'Hôpital

$$Si \quad \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} g(x, y) = 0,$$

entonces por la serie de Taylor tomando hasta su aproximación lineal, se tiene

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{f(a + dx, b + dy)}{g(a + dx, b + dy)} = \frac{f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy}{g(a, b) + \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy}$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy}{\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy} = \frac{df}{dg} \Big|_{(a, b)}$$

E. Criterios para extremos

Si f es tal que $df = 0$ y $d^2f > 0$ entonces f alcanza su mínimo relativo. Análogamente, si $df = 0$ y $d^2f < 0$, f tiene un máximo relativo. Pues

$$f(x+dx,\ y+dy) - f(x,y) = df + \frac{d^2f}{2!} + \frac{d^3f}{3!} + \ . \ . \ .$$

$$= df + \frac{d^2f}{2!} + algo\ \ despreciable$$

En las partes sobre Maclaurin y Lacroix de este escrito se discute con suficiente cuidado este hecho.

F. Derivada direccional

Por la serie de Taylor, tomando la aproximación lineal, tenemos que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy =$$

$$= \vec{\nabla} f \cdot \vec{ds} \quad donde\ \vec{ds} = (dx,\ dy),\ \ y\ \ si\ \ \vec{ds} = \hat{u}ds$$

$$\vec{\nabla} f \cdot \vec{ds} = \vec{\nabla} f \cdot \hat{u}\, ds$$

y, de ahí,

$$\frac{df}{ds} = \vec{\nabla} f \cdot \hat{u}$$

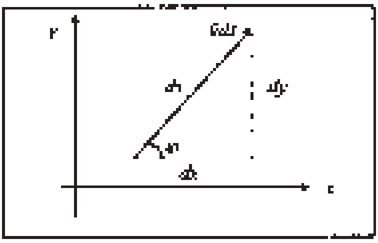
Esto es, la derivada de f en la dirección $\hat{u}$. Si aún no quisiéramos introducir el operador ∇ tendríamos

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

y así

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds}$$

pero,



$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi \quad y \quad \frac{dy}{ds} = \operatorname{sen}\varphi$$

Así,

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\varphi$$

es la derivada direccional de f en la dirección de $\hat{u} = (\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi)$ o, sin el lenguaje vectorial, en la dirección de φ.

G. Condición de C-derivabilidad (condiciones de Cauchy-Riemann)

Sea $f{:}\,C \rightarrow C$ con $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ y $z = x + iy$. Así f es derivable si y sólo si se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann y existen las diferenciales totales.

Como $\quad f = u + iv,$
y $\quad z = x + iy,$

entonces $df = du + idv$ y $dz = dx + idy$. De ahí que f es derivable si el cociente diferencial df/dz es independiente del tamaño de dz. Esto se logra si en la expresión final no aparece el término dz.

$$\frac{df}{dz} = \frac{du + idv}{dx + idy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)}{dx + idy}$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)idy}{dx + idy}$$

para que no aparezca dz se debe cancelar, lo cual se logra únicamente si ..

$$\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(dx + idy)}{dx + idy} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

¡Los coeficientes de dx e idy son iguales!, esto es, si

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} .$$

El recíproco es exactamente de regreso

H. La ecuación del plano tangente

Análogamente al caso de la recta tangente, el plano será la mejor aproximación lineal de $f(x,y)$, esto es, el plano tendrá por ecuación

$$f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial x}(y-b)$$

I. El teorema fundamental del cálculo

En cierto sentido, la serie de Taylor es la versión infinitesimalista del teorema fundamental del cálculo. En efecto, la serie de Taylor establece que

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \ldots$$

si hacemos $h = dx$, tendremos

$$\begin{aligned} f(x+dx) &= f(x) + f'(x)dx + f''(x)\frac{dx^2}{2!} + f'''(x)\frac{dx^3}{3!} + \ldots \\ &= f(x) + df + \frac{1}{2!}d^2f + \frac{1}{3!}d^3f + \ldots \end{aligned}$$

Recordando el desarrollo de L'Hôpital se tiene

$f(x + dx) - f(x) \quad df(x) + df(x + dx) \cdot$

$$df(x + 2dx) + df(x + 3dx) + \ldots$$

$$\int_x^{x+dx} df$$

$$= \int_a^{a+dx} df = f(a + dx) - f(a)$$

Del mismo modo se podrían desarrollar formas de integrar derivando sucesivamente, o bien desarrollar criterios para acotar raíces, o la deducción de los elementos diferenciales útiles en los clásicos teoremas de la divergencia y el rotacional de un campo vectorial.

Claramente, para desarrollar muchos de los detalles técnicos que se ejemplificaron anteriormente, se hace indispensable, teóricamente, pedir algunas condiciones sobre las funciones, los dominios y las justificaciones utilizadas.

Sin embargo, suele ocurrir que las condiciones pedidas sean satisfechas por el universo de objetos estudiados en ciertos niveles escolares, o bien, suelen ser condiciones teóricamente sutiles. No discutiremos esto en detalle, sólo mencionaremos que ello es, para muchos de los casos presentados, posible.

Referencias

BIRKHOFF, G. (Ed.) 1973. *A source book in classical analysis*. Cambridge, Massachusets. Harvard University Press.

CANTORAL, R. 1987. "Historia del cálculo y su enseñanza. El concepto de límite a través de los textos y de su historia". *Memorias de la Primera Reunión Centroamericana y Caribe sobre Formación de Profesores e Investigadores en Matemática Educativa*. Pp. 231-236.

______. 1988. "Historia del cálculo y su enseñanza: Del trazado de tangentes al concepto de derivada". *Memorias de la Segunda Reunión Centroamericana y Caribe sobre Formación de Profesores e Investigadores en Matemática Educativa*. Pp. 381-386.

______. 1990. Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propia del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas. México. Cinvestav-IPN. Tesis doctoral inédita.

CAUCHY, A. L. 1829. *Leçons sur le calcul différentiel*. Paris.

EULER, L. 1748. *Introductio in analysin infinitorum*. Lausanne.

FARFÁN, R. 1986. *Acerca de la representación de una función arbitraria en serie trigonométrica (ensayo histórico)*. México: Cinvestav-IPN.

GLAESER, G. 1973. "La transmission des connaissances mathématiques hier, aujourd'hui demain". *L'Enseignement des Mathématiques*. 18: 277-289.

GRATTAN-GUINNESS, I. 1970. *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann*. Cambridge, Massachusetts. MIT Press.

______. (Ed.) 1980. *From the calculus to set theory, 1630-1910, an introductory history*. Londres. Duckworth.

GRABINER, J. V. 1981. *The origins of Cauchy's rigorous calculus*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

IMAZ, C. 1987. "¿Qué es la matemática educativa?". *Memorias de la Primera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación Profesores e Investigadores en Matemática Educativa*. Pp. 267-272.

JORDAN, M. E. C. 1882. *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*. Paris.

LACROIX, S. F. 1797. *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*. 3 volúmenes. I: 1797-1800; II: 1810-1816. Paris.

LAGRANGE, J. L. 1797. *Théorie des fonctions analytiques*. Paris, Vol. I: 1797, II: 1813.

L'HÔPITAL, G. F. A. 1696. *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Paris.

MACLAURIN, C. 1742. *Treatise on fluxions*. Edimburgo. 2 volúmenes.

NEWTON, I. 1693. *Tractatus de quadratura curvarum*. Londres.

ORTON, A. 1983a. "Students' understanding of integration". *Educ. Stud. in Math.* 14: 1-18.

_____ 1983b. "Students' understanding of differentiation". *Ibid.*, 235-250.

RIEMANN, G. F. B. 1851. *Grundlagen für eine allgemeine theorie der functionen einer veränderlichen complexen grösse*. Alemania.

SCHUBRING, G. 1987. "On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author". *For the Learning of Mathematics* 7: 41-51 [Edición en español: *Mathesis* 8: 273-298].

SIERPINSKA, A. 1985. "Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite". *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 6: 5-67.

STRUIK, D. J. 1969. *A source book in mathematics, 1200-1800*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

TALL, D. y VINNER, S. 1981. "Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity". *Educ. Stud. in Math.* 12: 151-169.

TAYLOR, B. 1715. *Methodus incrementorum directa et inversa*. Londres.

TURNBULL, H. W. (Ed.) 1959. *The correspondence of Isaac Newton*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

YOUSHKEVICH, A. A. P. 1976. "The concept of function up to the middle of the 19th century". *Arch. Hist. of Exact Sciences*. 16: 37-85.

Ricardo Cantoral estudió la licenciatura en Física y Matemáticas en el IPN. Posteriormente realizó sus estudios de maestría y doctorado en ciencias con especialidad en matemática educativa en el CINVESTAV y una estancia posdoctoral en la Universidad de París (Francia). Actualmente es investigador titular y coordinador de investigación del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV. Su campo de interés se centra en los procesos de construcción del conocimiento matemático en situación escolar, particularmente en las áreas de cálculo y análisis. Ha publicado en *Mathesis, Cahier de Didactique, Psychology of Mathematics Education* y *Cuadernos de Investigación*, entre otras.