$\sqrt{\frac{s}{4p}}$. Para hallar el valor de y, consideraremos la equacion hallada antes $y = \frac{s}{px} - x = \frac{s - px^2}{px} = \frac{3px^2}{px}$, con substituir en lugar de s su valor $4px^2$, sacado de la equacion $s - 4px^2 = 0$; luego finalmente $y = 3x$. Todo esto manifiesta que el cono mayor entre todos los de una misma superficie dada, es aquel cuyo lado obliquo tiene con el semidiámetro de la base la misma razon que 3 con 1, pues de $y = 3x$ sale $y : x :: 3 : 1$. Fig.

De las evolutas y radios osculadores de las curvas.

590 Sea una curva qualquiera BDF cóncava ácia un mismo lado, envuelta con un hilo BDF, del qual el un extremo está fixo en F, y el otro tendido á lo largo de la tangente AB, y figurémonos que el extremo A se mueve, manteniéndose siempre tirante el hilo, y desenvolviendo mas y mas la curva BDF; en virtud de cuyo movimiento es constante que el extremo A del hilo trazará una linea curva AHK. La linea curva BDF se llama la *evoluta* de la curva AHK. Las porciones rectas AB, HD, KF del hilo $ABDF$, se llaman *radios de la evoluta*. 89.

591 Quando el hilo remata en el extremo B de la evoluta, cada porcion DH del hilo es igual al arco evoluto DB: pero cada radio HD es mayor que el arco correspondiente BD, si empezando la evoluta desde B, el cabo del hilo llega hasta A, de modo que AB sea una linea recta. En general, el radio de la evoluta es igual al arco evoluto, añadiendole una constante quando sea menester.

592 Cada radio GC de la evoluta, se puede considerar como la prolongacion del arco infinitamente pequeño CD, y este arco se puede conside- 90.

rar

Fig. rar como una linea recta. Luego pues cada radio de la evoluta es tangente de la evoluta; pues al pasar el hilo de AC á GC traza un arco infinitamente pequeño AG, el qual se puede considerar como un arco pequeño circular, cuyo centro esté en C; por manera que el radio GC es perpendicular á la tangente en el punto G de la curva, que traza el extremo del hilo. Luego si desde los extremos A, G de un arco infinitamente pequeño de una curva se le tiran dos perpendiculares, estas perpendiculares se encontrarán en un punto C el qual será uno de los puntos de la evoluta de la curva dada, y podremos considerar el arco AG como un arco circular trazado desde el centro C. Pero como los círculos son tanto menos curvos, quanto mayores son sus radios, es patente que la curva que el hilo traza será tanto menos curva, quanto mas se aparte del punto A donde remata el radio de la evoluta que es cero, ó el menor de todos. Por consiguiente *la curvatura máxima se hallará con determinar el radio mínimo de la evoluta.*

593 Si desde el centro D trazáramos un arco con un radio mayor que DG, este arco estaria fuera del arco GH, y si trazáramos el arco desde el mismo centro D con un radio menor que GD, este arco estaria dentro del arco GH; luego el círculo trazado desde el centro D con el radio GD es el que mas cabalmente se confunde con el arco infinitamente pequeño GH. A este círculo se le llama *círculo osculador*, y su radio se llama *radio osculador*, *radio de curvatura*, *radio de la evoluta*.

91. 594 Busquemos para la curva AMD, cuyas ordenadas PM son perpendiculares al exe AB, el valor del radio de curvatura CM correspondiente al punto M, con el fin de trazar un círculo GM de igual curvatura en el punto M que la curva propuesta.

Ti-

Tiraremos la CG, Mr paralelas, y la AE perpendicular al exe AB; prolongaremos la MP hasta F, y tiraremos la mpf paralela é infinitamente próxima á la MF: llamaremos la abscisa AP, x; PM, y; AM, u; MC, r; GE, b; AE ó PF, c; será $Mr = dx$, $mr = dy$, $Mm = du = \sqrt{(dx^2+dy^2)}$; $CF = r-b-x$, y $GF = b+x$. Fig.

Esto sentado, de la naturaleza del círculo sacamos $GF \times (2MC - GF) = (FM)^2$, esto es, $2br - bb - 2bx + 2rx - xx = cc + 2cy + yy$, de cuya equacion la diferencial es $2rdx - 2bdx - 2xdx = 2cdy + 2ydy$, ó $rdx - bdx - xdx = cdy + ydy$; y la diferencial de esta es $rddx - bddx - dx^2 - xddx = cddy + dy^2 + yddy$; de donde sacaremos $(r-b-x)ddx - ddy(c+y) = dx^2 + dy^2 = du^2$. Pero los triángulos semejantes Mrm, MFC dan $Mm : mr :: MC : CF$, esto es, $du : dy :: r : CF = \frac{rdy}{du} = r-b-x$; y $Mm : Mr :: MC : MF$, esto es, $du : dx :: r : MF = \frac{rdx}{du} = c+y$. Si substituimos estos valores de $r-b-x$, y $c+y$ en la equacion $(r-b-x)ddx - ddy(c+y) = dx^2 + dy^2 = du^2$, sacaremos $\frac{rdyddx}{du} - \frac{rdxddy}{du} = du^2$, que dá $r = \frac{du^3}{dyddx - dxddy} = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx - dxddy}$, porque $du^3 = (dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}$. 91.

Esta expresion general $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx - dxddy}$ del radio de curvatura varía segun se supone constante la dx, la dy ó la du.

1.° Quando se hace constante la dx, sale $r = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$.

2.°

2.º Quando se hace constante la dy, sale $r = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx}$.

3.º Quando se hace constante la du, sale $r = \frac{dy(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{ddx}$. Esto último necesita aclararse.

Si la du es constante, será $ddu = 0$. Diferenciemos la equacion $du^2 = dx^2 + dy^2$, saldrá $2dxddx + 2dyddy = 2duddu = 0$; luego $2dyddy = -2dxddx$, y $ddy = \frac{-dxddx}{dy}$. Substituyamos este valor en el denominador de la expresion general $\frac{du^3}{dyddx - dxddy}$, y saldrá

$$\frac{du^3}{dyddx + \frac{dx^2ddx}{dy}} = \frac{du^3dy}{dy^2ddx + dx^2ddx} = \frac{du \times du^2 \times dy}{ddx(dx^2+dy^2)} = \frac{du \,.\, dy(dx^2+dy^2)}{ddx(dx^2+dy^2)} = \frac{dudy}{ddx} = \frac{dy(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}}{ddx}.$$

595 Cuestion. *Hallar el valor del radio R de la evoluta de la parábola.*

En el supuesto de hacer constante la dx, la expresion general del radio de la evoluta es $R = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$. Si diferenciamos la equacion $yy = px$ de la parábola, sacaremos $2ydy = pdx$, y $dx = \frac{2ydy}{p}$, cuya expresion debe tenerse presente. Si diferenciamos la equacion diferencial $2ydy = pdx$ de la curva, haciendo constante la dx, sacaremos $2dy^2 + 2yddy = 0$, que dá $ddy = -\frac{dy^2}{y}$, cuya exprepresion debe tenerse presente. Luego $dx^2 + dy^2 = \frac{4y^2 dy^2}{p^2} + dy^2 = \frac{4y^2 dy^2 + p^2 dy^2}{p^2} = dy^2 \left(\frac{4y^2 + p^2}{p^2}\right)$. Si substituimos esta cantidad en lugar de su igual en la expresion general de R, saldrá $dy^{2 \times \frac{3}{2}} \left(\frac{4y^2 + p^2}{p^{2 \times \frac{3}{2}}}\right)^{\frac{3}{2}}$ $= dy^3 \frac{(4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^3}$. Esta cantidad se ha de partir ahora por $-dxddy$, cuyo producto, por los valores sacados poco ha de dx y ddy es $\frac{2dy^3}{py}$, lo que es lo propio que multiplicarla por $\frac{py}{2dy^3}$, saldrá, pues, $\frac{dy^3}{p^3}(4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}} \times \frac{py}{2ydy^3} = \frac{pdy^3}{2yp^3dy^3} \times (4y^2+p^2) = \frac{(4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$.

Ahora bien; hemos visto (273) que la subnormal de la parábola $= \frac{p}{2}$, luego su normal que llamaremos $N = \sqrt{\left(y^2 + \frac{p^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{4y^2 + p^2}{4}\right)} = \frac{\sqrt{(4y^2+p^2)}}{2}$, esto es $\frac{\sqrt{(4y^2+p^2)}}{2} = N$, y $\sqrt{(4y^2+p^2)} = 2N$; y $(4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}} = 8N^3$; luego $R = \frac{(4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2} = \frac{8N^3}{2p^2} = \frac{4N^3}{p^2} = \frac{N^3}{\frac{p^2}{4}}$. Esto quiere decir que *el radio osculador de la parábola es igual al cubo de su normal partido por el quadrado del semiparámetro.*

Como en el vértice de la parábola $y = 0$, será $N = \frac{p}{2}$; luego en el vértice de la parábola el radio osculador es igual al semiparámetro.

596 Cuestion 2. *Hallar el radio osculador de la elipse.*

La

La equacion de la curva es $a^2y^2 = b^2(2ax - xx)$, diferenciémosla dos veces haciendo constante la dx, y la expresion general del radio será $R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$; La primer diferenciacion dá $2a^2ydy = 2ab^2dx - 2b^2xdx$, y la segunda $2a^2dy^2 + 2a^2yddy = -2b^2dx^2$, por ser $ddx = 0$. Como la primer diferencial dá $dy = \frac{(ab^2 - b^2x)dx}{a^2y}$, será $dy^2 = \frac{(a^2b^4 - 2ab^4x + b^4x^2)dx^2}{a^4y^2}$, y por consiguiente . . . .

$$(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}} = \left(dx^2 + \frac{(a^2b^4 - 2ab^4x + b^4x^2)dx^2}{a^4y^2}\right)^{\frac{3}{2}} =$$

$$\left(\frac{a^4y^2dx^2 + (a^2b^4 - 2ab^4x + b^4x^2)dx^2}{a^4y^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \ldots\ldots$$

$\frac{dx^3(a^4y^2 + a^2b^4 - 2ab^4x + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^6y^3}$. La equacion de la elipse $a^2y^2 = 2ab^2x - b^2x^2$, multiplicada por a^2 dá $a^4y^2 = 2a^3b^2x - a^2b^2x^2$; la misma equacion dá tambien $y = \frac{b}{a}\sqrt{(2ax - xx)}$; si substituimos el valor de a^4y^2 en lugar del primer termino del numerador de la última equacion, y el valor de y en su denominador, sacaremos $(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = \ldots\ldots$

$$\frac{dx^3(2a^3b^2x - a^2b^2x^2 + a^2b^4 - 2ab^4x + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3b^3\sqrt{(2ax - x^2)^3}} = \ldots$$

$$\frac{b^3dx^3(2a^3x - a^2x^2 + a^2b^2 - 2ab^2x + b^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3b^3\sqrt{(2ax - x^2)^3}} = \ldots$$

$\frac{dx^3(2a^3x - a^2x^2 + a^2b^2 - 2ab^2x + b^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3\sqrt{(2ax - x^2)^3}}$, esta expre-

sion

sion levantada á la tercer potencia, esto es $(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}$ $= \frac{dx^3(2a^3b^2x - a^2b^2x^2 + a^2b^4 - 2ab^4x + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}$, esta cantidad se ha de partir por $-dxddy$.

La segunda diferencial de la equacion de la curva dá $ddy = \frac{-b^2dx^2 - a^2dy^2}{a^2y} = \frac{-b^2dx^2}{a^2y} - \frac{a^2dy^2}{a^2y}$, en el segundo término substituiremos en lugar de dy^2 su valor sacado de la equacion $dy = \frac{(ab^2 - b^2x)dx}{a^2y}$, quadrándola, con lo qual será $ddy = \frac{-b^2dx^2}{a^2y}$

$$- \frac{a^2}{a^2y} \times \frac{(a^2b^4 - 2ab^4x + b^4x^2)dx^2}{a^4y^2} = \frac{-b^2dx^2}{a^2y} -$$

$$\frac{(a^2b^4 - 2ab^4x + b^4x^2)dx^2}{a^4y^3} = \frac{(-a^2b^2y^2 - a^2b^4 + 2ab^4x - b^4x^2)dx^2}{a^4y^3},$$

reduciéndolo todo á un mismo denominador. En el primer término del numerador substituiremos en lugar de $a^2b^2y^2$ su valor $2ab^4x - b^4x^2$ que dá la equacion de la curva, y sacaremos $-a^2b^2y^2dx^2 - (a^2b^4 + 2ab^4x - b^4x^2) \times dx^2 = -(2ab^4x + b^4x^2) \times dx^2 - (a^2b^4 - 2ab^4x - b^4x^2) \times dx^2 = \frac{-a^2b^4dx^2}{a^4y^3}$, despues de borrar los términos que se destruyen. Pero por la equacion de la curva $a^4y^3 = \frac{a^4b^3}{a^3}(2ax - xx)^{\frac{3}{2}} =$

Fig. $ab^3(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}$; luego $\frac{-a^4b^4dx^2}{a^3y^3}=\frac{-a^4b^4dx^4}{ab^3(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}$

$=ddy$, y $-dxddy=\frac{+a^4b^4dx^3}{ab^3(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}=\frac{+a^3bdx^4}{(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}$.

Finalmente la expresion A partida por $\frac{a^3bdx^4}{(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}$ ó

multiplicada por $\frac{(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}{abdx^4}$ es . . . .

$\frac{dx^3(2a^3b^2x-a^2bx^2+a^2b^4-2ab^4x)^{\frac{3}{2}}}{a^3(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}\times\frac{(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}{abdx^4}=$

$\frac{(4a^2b^2x-a^2bx^2+a^4b^4-2ab^4x)^{\frac{3}{2}}}{a^4b}=R$. Si introducimos en esta expresion la normal de la elipse, conforme introducimos antes (595) la normal de la parábola, hallarémos que el radio osculador de la elipse es igual al cubo de su normal partido por el quadrado del semiparámetro.

De los Puntos de inflexion.

597 Llamamos *punto de inflexion* todo punto M v. gr. donde la concavidad de una curva se muda
94. en convexidad. Para determinar estos puntos, podemos considerar que la tangente en M es á un tiempo tangente de las dos porciones MA y MO; en cuyo supuesto podemos investigar en cada lado del punto M dos elementos Mm, Mm' en linea recta, y por lo mismo el radio de la evoluta en el punto de inflexion M será infinito, pues los radios de curvatura correspondientes á los puntos M y m' se-

serán ambos perpendiculares á la recta *mm'*, serán Fig.
paralelos, y solo se encontrarán á una distancia infinita. Pero como podemos suponer tan pequeños los expresados elementos, que ambos se desaparezcan, entonces el radio de la evoluta será cero.

Porque en el supuesto de que estén en linea recta los dos elementos de la curva inmediatos al punto de inflexion, nada determina la longitud de los dos expresados elementos inmediatos. Y como aun quando se reduxeran ambos á un punto, no por eso dexarian de estar en una misma linea recta, las dos perpendiculares caerian entonces una sobre otra, y concurririan en el punto mismo de donde salen. Esto es cabalmente lo que pasa en las curvas, cu- 92.
yo radio de la evoluta es cero en el punto de inflexion. Porque como entonces es infinita la curvatura, cada uno de los dos elementos inmediatos se confunde con la tangente infinitamente menos que en otro caso qualquiera, y por lo mismo los hemos de considerar como dos puntos que se confunden uno con otro. Pueden, pues, los dos elementos estar en linea recta, sin que por eso el radio de la evoluta sea infinito; pero esto manifiesta que en el punto de inflexion el radio de la evoluta siempre es infinito ó nulo.

598 Luego para hallar el punto de inflexion, ó los puntos de inflexion de una curva dada, acudiremos á la fórmula $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ del radio de curvatura. Pero para la inteligencia de las aplicaciones que de esta fórmula hemos de hacer aqui, prevenimos que por ser $(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(dx^2+dy^2)^3}$, hemos de considerar que están elevadas al cubo las cantidades que incluye el paréntesis; que el cubo

de dx^6 es dx^3 (48), y que la raiz quadrada de $(dx^2)^3$ ó de dx^6 es dx^3 (52). Por consiguiente si se nos ofreciese dividir por dx^3 el numerador de la fraccion $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ sin alterar su valor, será preciso dividir al mismo tiempo su denominador por dx^3 para hacer la compensacion correspondiente. Luego si dividimos el numerador de $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ por dx^3, y el denominador por dx^3, será $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ $= \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{-ddy}{dx^2}} = 0$ ó $= \infty$ en el punto de inflexion. Y como una fraccion es cero quando su numerador es cero, y es infinita quando su denominador es cero, siguese que en el punto de inflexion el denominador $\frac{-ddy}{dx^2}$ del quebrado $\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{-ddy}{dx}}$ ha de ser $=0$ ó $=\infty$.

599 La expresion $\frac{-ddy}{dx^2}=0$ ó $=\infty$ está diciendo que para hallar el punto de inflexion de una curva, se ha de diferenciar dos veces su equacion, haciendo constante la dx, con la mira de expresar con cantidades finitas el valor de $\frac{-ddy}{dx^2}$, é igualarle con cero ó con el infinito. De esta equacion, y de la equacion de la curva se inferirán los valores de x é y correspondientes al punto de inflexion, ó á los puntos de inflexion, quando la curva tenga muchos.

Cues-

600 Cuestion 1. *Hallar el punto de inflexion de la curva AFK, cuyo diámetro es AB; la abscisa AE, x; la ordenada EF, y; y la equacion* $axx - xxy = aay$. Fig.

La equacion dá $y = \frac{axx}{xx+aa}$, y $dy = \frac{2a^3xdx}{(xx+aa)^2}$; la diferencial de esta equacion, haciendo constante la dx, es $ddy = \frac{2a^3dx^2(xx+aa)^2 - 8a^3xxdx^2(xx+aa)}{(xx+aa)^4}$; 93.
si lo partimos todo por $(xx+aa)$, executamos las operaciones indicadas, y lo partimos todo por dx^2, será $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2a^3(xx+aa) - 8a^3xx}{(xx+aa)^3} = \frac{-6a^3xx + 2a^5}{(xx+aa)^3}$. Hagamos esta cantidad igual con cero, será cero su numerador, y dará $3xx = a^2$, y $x = a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Si en la equacion $y = \frac{axx}{xx+aa}$ substituyéramos en lugar de xx su valor $\frac{1}{3}aa$, saldria EF ó $y = \frac{1}{4}a$.

601 Cuestion 2. *Hallar el punto de inflexion de la curva cuya equacion es* $y - a = (x-a)^{\frac{3}{5}}$.

La primer diferencial de esta equacion es $dy = \frac{3}{5}(x-a)^{-\frac{2}{5}}dx$; la segunda diferencial, haciendo constante la dx, es $ddy = -\frac{6}{25}(x-a)^{-\frac{7}{5}}dx^2$; luego $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-6}{25\sqrt[5]{[(x-a)]^7}}$. Si hacemos este valor $= 0$, saldrá $-6 = 0$, que nada dice; si le hacemos infinito, será el denominador $25\sqrt[5]{(x-a)^7} = 0$, de donde se saca $x = a$, porque toda potencia ó raiz de cero es cero.

DEL CALCULO INTEGRAL.

602 Así como la relacion que tienen unas con otras las cantidades variables nos proporciona hallar la que hay entre sus diferencias finitas ó infini-

nitamente pequeñas, tambien por la relacion que hay entre estas diferencias llegamos á conocer la relacion de las variables cuya son, unas con otras, cuyo modo de calcular se llama *cálculo integral*. Por lo que mira al cálculo diferencial, ya hemos visto como no tiene dificultad, por ser posible y aun facil diferenciar qualquiera cantidad variable, ó funcion suya, sea la que fuere. Pero en el cálculo integral se encuentran infinitos tropiezos, ofreciéndose otros tantos casos donde por la relacion de las diferenciales no es posible determinar la de las cantidades á que pertenecen.

603 Desde luego se infiere de lo dicho hasta aquí que para integrar las diferenciales de las variables, ó hallar estas por medio de aquellas, hay que hacer con la integracion lo contrario de lo que hizo la diferenciacion: del mismo modo que quando extrahemos una raiz determinada de un número seguimos un rumbo opuesto al que nos guia quando se le eleva á la potestad del grado que se le considera. Sabemos que no hay operacion mas facil que quadrar v. gr. una cantidad sea numérica sea literal; pero son infinitas las cantidades cuya raiz quadrada no se puede sacar cabal, porque no provienen de la multiplicacion de cantidad alguna por ella misma. Lo mismo sucede con las diferenciales, entre las quales hay infinitas que no es posible integrar, porque no provienen de la diferenciacion de ninguna cantidad; tal es esta xdy v.gr. porque ni la suma ni la diferencia, ni el producto, ni la division de las dos variables x é y da despues de diferenciada la expresion diferencial xdy.

604 Los cálculos diferencial é integral componen juntos el modo de calcular llamado *cálculo infinitesimal*; siendo, segun se ve, su primer parte el cálculo diferencial, y el cálculo integral la segunda

da. Encierra este cálculo con las grandes dificultades que se ha empeñado en superar, rasgos portentosos donde resplandece la sagacidad del entendimiento humano, y la constancia de los varones eminentes á cuya aplicacion debe sus adelantamientos.

605 Por lo mismo que el cálculo integral es el inverso del cálculo diferencial, las reglas para integrar las cantidades se han de inferir de los métodos declarados para diferenciarlas. Seguirémos, pues, este camino, declarando primero como se integran los monomios, y despues manifestarémos por que métodos se integran los binomios, y algunos polinomios.

606 Pero antes de todo prevendrémos que la integracion se señala, del mismo modo que la diferenciacion, con una señal particular, que es la letra S ó $\int$ que significa *suma*, la qual se pone antes de la diferencial por integrar, v. gr. $S.dx$, $S(adx+bdy)$ señala respectivamente las integrales, ó las integraciones de las diferenciales dx y $adx+bdy$.

607 Esto supuesto, claro está que $S.dx = x$; $S.adx = ax$, $S.\frac{dx}{b} = \frac{x}{b}$, porque si diferenciamos x, ax, $\frac{x}{b}$, sacarémos respectivamente dx, adx, $\frac{dx}{b}$. De aquí se deduce para la integracion de los monomios, la siguiente

Regla fundamental. Para hallar la integral de una diferencial monomia, multiplicada ó dividida por una constante qualquiera, se toma la integral de la diferencial, sin atender á la constante, y se multiplica ó parte por la constante la integral que sale.

608 La integral de una diferencial monomia en que no hay mas que una variable x, multiplicada ó dividida por constantes qualesquiera, se saca por la siguiente

Regla general. 1.º bórrese dx en la diferencial propuesta; 2.º añádase una unidad al exponente de la variable; pártase lo que sale por el exponente despues de añadirle esta unidad; lo que se saque será la integral de la diferencial propuesta.

Luego si se me ofrece integrar la diferencial $ax^m dx$, siendo a cantidad constante, 1.º borraré dx, y quedará ax^m; 2.º añadiré una unidad al exponente m, y saldrá ax^{m+1}; 3.º partiré ax^{m+1} por $m+1$, y será $S.ax^m dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1}$.

Por la misma regla hallaremos que $S.mx^{m-1}dx = \frac{mx^{m-1+1}}{m-1+1} = x^m$. En esto no hay duda, porque qualquiera de las dos integrales que diferenciemos, sacaremos la diferencial á la qual corresponde. Si diferenciáramos $\frac{ax^{m+1}}{m+1}$ v. gr. sacaremos $\frac{(m+1)ax^{m+1-1}dx}{m+1} = ax^m$.

609 De aquí se saca una señal que no puede errar para saber si la integracion está bien hecha. Diferénciese la integral hallada; su diferencial ha de ser igual con la propuesta si la integral sacada es la verdadera.

La regla dada (607) padece una excepcion que manifestaremos á su tiempo. Ahora vamos á aplicarla para integrar algunas diferenciales.

$S.2x^3dx = \frac{2x^4}{4} = \frac{x^4}{2}$

Sea $\frac{dx}{x^n} = dy$, ó $x^{-n}dx = dy$; la integral será

x

$\frac{x^{-m+1}}{-m+1} = y$ ó $\frac{1}{(-m+1) \cdot x^{m-1}} = y$. Si $\frac{4adx}{x^4} = dy$, será $4ax^{-4}dx = dy$, cuya integral será $\frac{4ax^{-4+1}}{-4+1} = y$ ó $\frac{4ax^{-3}}{-3} = y$ ó $\frac{4a}{-3 \cdot x^3} = y$, y finalmente $\frac{-4a}{3x^3} = y$.

Sea $dx\sqrt[m]{x^n} = dy$; será $x^{\frac{n}{m}}dx = dy$, de cuya equacion la integral será $\frac{x^{\frac{n}{m}+1}}{\frac{n}{m}+1} = y$ ó $\frac{x^{\frac{n+m}{m}}}{\frac{n+m}{m}} = y$ ó $\frac{mx^{\frac{n+m}{m}}}{n+m} = y$, y finalmente $\frac{m\sqrt[m]{x^{n+m}}}{n+m} = y$.

$S.dx\sqrt{x} = S.x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2x^{\frac{1}{2}} \times x}{3} = \frac{2x\sqrt{x}}{3}$.

610 Si ocurriese integrar la equacion $dy = adx - bx^2dx\sqrt{x} + x^2dx - \frac{cdx}{x^3}$, se sacará la integral separadamente de cada término del segundo miembro, operacion facilisima despues de lo enseñado, y la integral de la equacion será $y = ax - \frac{2bx^2\sqrt{x}}{5} + \frac{x^3}{3} + \frac{c}{2x^2}$.

Como se completan las integrales.

611 Quando se diferencia alguna cantidad compleja que lleva algunos términos constantes, estos

se desaparecen al tiempo de diferenciar (519). Pueden por lo mismo ocurrir muchos casos en que despues de sacada la integral de una cantidad, haya que añadirle, para completarla, alguna cantidad constante que la diferenciacion eliminó. El valor de esta constante que llamaremos C, siempre le determina la naturaleza de la question que resuelve el calculador, ó dá á conocer que no hace falta. Para hallarla quando es preciso añadirla, se practicará la siguiente

Regla. *Para determinar la constante* C *que completa la integral, hágase igual con cero su variable* x, *y si la integral sale entonces igual cero, será señal de estar cabal; si despues de suponer* $x = o$, *quedare en la integral alguna constante, se añadirá esta constante, despues de mudarle el signo, á la integral sacada, la qual será entonces cabal.*

Vamos á probarlo. Sea v. gr. Q la integral completa quando x tiene un valor determinado, cuyo valor llamaremos a; y supongamos que siendo P la integral sacada por el cálculo, le falte para ser cabal la constante C cuyo valor no conocemos, por manera que sea $Q = P+C$. Supongamos ahora que despues de substituir en P, a en lugar de x, P se transforma en A; será $A+C$ el valor completo de la integral quando $x = a$; y como suponemos que la integral completa $= Q$, será $A+C = Q$, y $C = Q-A$.

612 Pero las mas de las veces no es dado ni puede serlo el valor completo Q de la integral; y es preciso indagar en que parte es cero su valor Q; porque quando $Q = o$, $A+C = o$, y $C = -A$; y en vez de suponer $x = a$, es mas comun y mas natural hacer $x = o$.

613 Infiérese de aquí que si la integral es cero, no quando $x = o$, sino quando x tiene algun valor

lor determinado y es v. gr. a, la constante es la misma integral que dá el cálculo, substituyendo a en lugar de x.

La integral de x^2dx v. gr. es $\frac{x^3}{3}$, la qual quando $x=a$ es $\frac{a^3}{3}$. Luego $Q=\frac{a^3}{3}+C$; y como en este caso $Q=0$, será $\frac{a^3}{3}+C=0$, y $C=-\frac{a^3}{3}$; luego la integral completa es $Q=\frac{x^3}{3}-\frac{a^3}{3}$.

Si $S.-x^n dx=-\frac{x^{n+1}}{n+1}$ es cero quando $x=a$, será $-\frac{x^{n+1}}{n+1}+C=0$, y $C=\frac{a^{n+1}}{n+1}$. Luego la integral completa, ó $Q=\frac{a^{n+1}-x^{n+1}}{n+1}$.

Finalmente, si $S.xdx(c^3+bx)^{\frac{1}{2}}=\frac{(c^3+bx^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}$ fuese cero quando $x=a$, sería $\frac{(c^3+ba^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}+C=0$; luego $C=-\frac{(c^3+ba^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}$, y $Q=\frac{(c^3+bx^2)^{\frac{3}{2}}-(c^3+ba^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}$.

614 Enseñemos como se integran las diferenciales de esta forma $dy=dx(a+x)^m$, siendo m un número qualquiera.

Hagamos $a+x=u$, y será $(a+x)^m=u^m$; la primera de estas dos equaciones despues de diferencia-

cia-

ciada es $dx = du$ (519) ; haciendo en $dy = dx(a+x)^m$ las correspondientes substituciones, saldrá $dy = u^m du$, cuya integral es $y = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C$. Restituyendo $a+x$ en lugar de u, la integral será $y = \frac{(a+x)^{m+1}}{m+1} + C$; y si quando $x = 0$ es $y = 0$, será $\frac{a^{m+1}}{m+1} + C = 0$, y $C = -\frac{a^{m+1}}{m+1}$. Por consiguiente, la integral completa será $y = \frac{(a+x)^{m+1}}{3} - \frac{a^{m+1}}{3}$.

Apliquemos la integracion de esta fórmula general á un par de exemplos.

1.º Se nos propone, para integrarla, la equacion $dy = \frac{dx}{\sqrt{(a+x)}}$. Si la comparamos con la fórmula general $dy = dx(a+x)^m$, hallarémos que $m = -\frac{1}{2}$; luego la integral $y = \frac{(a+x)^{m+1}}{m+1} + C$ será $\frac{(a+x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{(a+x)} + C$.

2.º Si hubiésemos de integrar $dy = -dx\sqrt[3]{(a-x)^2} = -dx(a-x)^{\frac{2}{3}}$, será $m = \frac{2}{3}$; luego la integral será $y = -\frac{(a-x)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} - (a-x)^{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} - (a+x)^{\frac{5}{3}} = -\frac{3}{5}(a-x)^{\frac{5}{3}} = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{(a-x)^5} = -\frac{3}{5}(a-x)\sqrt[3]{(a-x)^2} + C$.

Pa-

Padece esta regla la misma excepcion que la de antes (607), acerca de la qual dirémos en su lugar lo que corresponde.

615 Vamos á declarar ahora como se integran las diferenciales de esta forma $dy = x^p dx(a+bx^n)^m$.

Hagamos $a+bx^n = u$, y será $x^n = \frac{u-a}{b}$, $x = \left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n}\left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} du = \frac{(u-a)^{\frac{1-n}{n}}}{n\sqrt[n]{b}} du$, y $x^p = \left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{p}{n}}$. Luego $dy = x^p dx(a+bx^n)^m = \left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{p}{n}}$ $\frac{(u-a)^{\frac{1-n}{n}}}{n\sqrt[n]{b}} u^m du = \frac{(u-a)^{\frac{p+1-n}{n}}}{nb^{\frac{p+1}{n}}} u^m du$, la integral de esta diferencial se podrá hallar siempre que el exponente $\frac{p+1-n}{n}$ ó $\frac{p+1}{n} - 1$ sea un número entero afirmativo ó negativo. Porque entonces todo estará en elevar $u-a$ á una potencia finita, y multiplicar todos sus términos por $u^m du$, é integrando cada uno de ellos, su suma ó diferencia dará la integral que se buscare. Claro está que $\frac{p+1}{n} - 1$ no puede ser número entero, á no ser que $p+1$ sea múltiplo de n. De donde inferirémos que toda diferencial de esta forma $x^p dx(a+bx^n)^m$ se puede integrar algebraica ó perfectamente siempre que el exponente p de x fuera del paréntesis aumentado una unidad, esto es $p+1$, es múltiplo del exponente n que lleva x dentro del paréntesis.

Si el exponente $\frac{p+1}{n} - 1$ fuese un número entero negativo, la fórmula tendrá esta forma . . . . .

$$\frac{u^m du}{nb^{\frac{n+1}{n}}(u-a)^q}$$, haciendo $\frac{p+1}{n} - n = q$.

Quando $\frac{p+1}{n} - 1$ sea un quebrado, ó quando el exponente n despues de añadirle la unidad, no sea un múltiplo de n, la integral solo podrá sacarse por aproximacion. Entonces se convierte en serie la potencia $(a+bx^n)^m$, cuyos términos se multiplican por $x^p dx$, se integran, y sale la integral en forma de serie, menos quando m es un número entero, en cuyo caso la cantidad $(a+bx^n)^m$ consta de un número finito de términos.

Hallemos por medio de nuestra fórmula la integral de $dy = x^3 dx \sqrt{(a^2 - x^2)}$. De la comparacion de esta cantidad con $x^p dx(a+bx^n)^m$, sacamos que $p = 3$, $n = 2$, $m = \frac{1}{2}$, $a = a^2$, $b = -1$, y que $p+1 = 4$ duplo del exponente 2; luego la diferencial propuesta sufre integracion. Porque despues de substituidos en lugar de los exponentes indeterminados de la expresion

$$\frac{(u-a)^{\frac{p+1-n}{n}} u^m du}{nb^{\frac{1+n}{n}}}$$ sus valores, saldrá $\frac{(u-a^2)^1 u^{\frac{1}{2}} du}{2}$

$= \frac{u^{\frac{3}{2}} du}{4} - \frac{a^2 u^{\frac{1}{2}} du}{2}$, cuya integral es $\frac{u^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{a^2 u^{\frac{3}{2}}}{3} + C$.

Pero como $u = a + bx^2 = a^2 - x^2 = u$, será, con hacer la correspondiente substitucion, $S\,x^3 dx(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{(a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{a^2(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{2} + C$.

Si hubiésemos de aplicar la fórmula para integrar

grar esta diferencial $\frac{xdx}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}$, sería $p=1$, $n=2$, $m=-\frac{1}{2}$, $a=a^2$, $b=1$, y como $p+1=2$ y $n=2$, la cantidad propuesta sería integrable. Porque con hacer en $\frac{(u-a)^{\frac{p+1}{n}-1}u^m du}{nb^{\frac{p+1}{n}}}$ las correspondientes substituciones, saldría $\frac{(u-a)^0}{2}u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{du}{2u^{\frac{1}{2}}}$.

Pero $S.\frac{du}{2u^{\frac{1}{2}}}=u^{\frac{1}{2}}+C$, y $u=a^2+x^2$; luego $S.\frac{xdx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}=\sqrt{(a^2+x^2)}+C$.

Si se ofreciera integrar $x^2dx(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$, tendríamos $p=2$, $n=2$, $m=\frac{1}{2}$, $a=a^2$, $b=1$. Aquí $p+1=3$ no es múltiplo del exponente $n=2$; luego la diferencial no se puede integrar por la fórmula (515). Es preciso trasformar $(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$ en serie, y sale $(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}=a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}$ &c. Será, pues, $x^2dx(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}=ax^2dx+\frac{x^4dx}{2a}-\frac{x^6dx}{8a^3}+\frac{x^8dx}{16a^5}+$ &c. Integrando ahora separadamente cada término, saldrá $\frac{ax^3}{3}+\frac{x^5}{10a}-\frac{x^7}{56a^3}+\frac{x^9}{144a^5}+$ &c. $=S.x^2dx(a^2+x^2)$, próximamente.

En el caso de haber de integrar la diferencial $xdx(a^3-x^3)^2$, será $p=1$, $n=3$, $m=2$ &c. donde $p+1=2$ no es múltiplo del exponente $n=3$. La integracion no podrá hacerse por la fórmula; pero como el exponente $m=2$, número entero, se formará la potencia $(a^3-x^3)^2=a^6-2a^3x^3+x^6$, y será

x

$x dx(a^2 - x^2)^2 = a^4 x dx - 2a^2 x^3 dx + x^5 dx$, de cuya cantidad la integral es $\frac{a^4x^2}{2} - \frac{2a^2x^4}{4} + \frac{x^6}{6} = S.xdx(a^2 - x^2)^2$.

Quando la potencia $(a + bx^n)^m$ esté multiplicada por un multinomio diferencial, como si se ofreciese integrar la cantidad $(x^p dx + x^q dx)(a + bx^n)^m$, la integracion se hará por partes. Se buscará primero la integral de $x^p dx(a + bx^n)^m$, y despues la de $x^q dx(a + bx^n)^m$, la suma de las dos integrales será la integral de la diferencial propuesta.

Integracion de las diferenciales trigonométricas.

616 El que tenga presentes las diferenciales trigonométricas sacados antes de ahora (540), en el supuesto de ser $= 1$ el radio que allí hicimos $= a$, echará de ver que

$S.du \times \cos u = \text{sen } u$	$S - du \times \text{sen } u = \cos u$
$S.\frac{du}{\cos^2 u} = \text{tang } u$	$S - \frac{du}{\text{sen}^2 u} = \cot u$
$S.\frac{du \times \text{sen } u}{\cos^2 u} = \sec u$	$S - \frac{du \times \cos u}{\text{sen}^2 u} = \text{cosec } u$
$S.du \times \text{sen } u = \text{sen vers } u$	$S - mdu \times \text{sen } mu = \cos mu$.

Integracion de las cantidades logarítmicas.

617 Al aplicar la regla fundamental de integracion, dexamos prevenido (607) que sale fallida, ó de nada sirve en algunos casos. No sirve con efecto la regla para integrar las diferenciales fraccionarias cuyo numerador es la diferencial del denominador, v. gr. esta $\frac{dx}{x}$, ó las de esta forma

$x^{-1}dx$. Porque integrada esta diferencial por la regla, sale $S.\frac{dx}{x} = \frac{x^0}{0} = \infty$ que de nada sirve.

618 Para apear esta dificultad recordaremos que $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{A}$, ó que, integrando, $\frac{x}{A} = S.\frac{dy}{y}$, y porque x es el logaritmo de y tomado en la logarítmica cuya subtangente $= A$, podemos inferir por regla general que la integral de un quebrado cuyo numerador es la diferencial del denominador, es igual al logaritmo del denominador, dividido por la subtangente de la logarítmica, ó, lo que es lo mismo, por el módulo del sistema en que se toma.

Luego si fuese u el logaritmo de y en otra logarítmica cuya subtangente $= B$, tendremos $\frac{dy}{y} = \frac{x}{A} = \frac{u}{B}$; por consiguiente $Bx = Au$, y $x : u :: A : B$, cuya proporcion está diciendo que los logaritmos de un mismo número tomados en distintas logarítmicas, ó en diferentes sistemas, son como las subtangentes de las logarítmicas, ó como los modulos de los sistemas, y por lo mismo es constante la razon de unos con otros, por ser cantidades constantes las tales tangentes ó módulos.

619 Luego $S - \frac{dx}{x} = -lx = l\frac{1}{x}$, como es facil de comprobar diferenciando $L\frac{1}{x}$, porque su diferencial es $d(\frac{1}{x})$ dividido por $\frac{1}{x}$, esto es $-\frac{dx}{x^2}$ dividida por $\frac{1}{x}$, de donde sale $-\frac{dx}{x}$. $S\frac{dx}{1+x} = L(1+x)$.

620 Para integrar $\frac{dx}{x\,lx}$, haremos $lx = y$, que dará $\frac{dx}{x} = dy$, luego la propuesta será $\frac{dy}{y}$, cuya integral es ly; y poniendo en lugar de y su igual lx, será $S\frac{dx}{x\,lx} = Llx$.

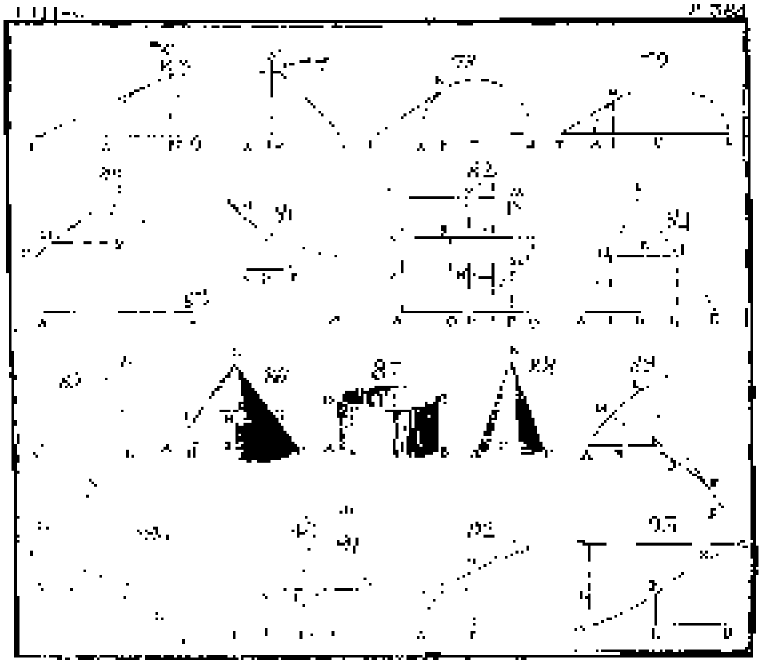
Pa-

621 Para integrar $m(lx)^{n-1}\frac{dx}{x}$, tambien haremos $lx = y$, cuyo supuesto dará $\frac{dx}{x} = dy$, $(lx)^{n-1} = y^{n-1}$; luego $m(lx)^{n-1}\frac{dx}{x} = my^{n-1}dy$; y como $Smy^{n-1}dy = y^n$, tambien $Sm(lx)^{n-1}\frac{dx}{x} = (lx)^n$, despues de substituir en lugar de y su valor lx.

622 Todo esto presupuesto, integremos $\frac{dx}{a+x}$. Para executar esta integracion, la reduciremos á la de la diferencial $\frac{dx}{1+x}$, que por lo dicho últimamente es $l(1+x)$. Esta reduccion consiste en partir por a el numerador y denominador de $\frac{dx}{a+x}$, lo que dará $\frac{\frac{dx}{a}}{1+\frac{x}{a}}$, donde $\frac{x}{a}$ está en lugar de x. Será, pues, $S\frac{\frac{dx}{a}}{1+\frac{x}{a}} = S\frac{dx}{a+x} = l\left(1+\frac{x}{a}\right) = l\left(\frac{a+x}{a}\right)$.

623 Si hubiésemos de integrar $\frac{dx}{f+gx}$, hacemos $\frac{dx}{f+gx} = \frac{\frac{dx}{g}}{\frac{f}{g}+x}$, partiendo ambos términos del primer miembro por g; pero $\frac{\frac{dx}{g}}{\frac{f}{g}+x} = \frac{dx}{g\left(\frac{f}{g}+x\right)}$, cuya integral es $\frac{1}{g}l\left(\frac{f+gx}{f}\right)$, la misma que la diferencial propuesta.

624 Busquemos ahora el valor de $S.\frac{xdx}{a^2-x^2}$. Consideraremos que si diferenciamos a^2-x^2, y partimos la diferencial $-2xdx$ por -2, saldrá xdx; luego la funcion propuesta se puede considerar como



HOJA EN BLANCO

mo multiplicada y partida por -2, con lo qual $\frac{xdx}{a^2-x^2}$ será $\frac{-2xdx}{-2(a^2-x^2)}$, de cuya diferencial la integral es $-\frac{1}{2}l\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)$.

625 La última funcion diferencial tambien se puede integrar por medio de las substituciones; con cuya mira haremos $a^2-x^2=u^2$, y será $-2xdx = 2udu$, ó $-xdx = udu$; luego $\frac{xdx}{a^2-x^2} = -\frac{udu}{u^2} = -\frac{du}{u}$, cuya integral es $-l.u = -l(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$. Esta integral no discrepa de la primera porque $\frac{1}{2}l.a = l.a^{\frac{1}{2}}$; luego $-\frac{1}{2}l\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right) = -l\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = -l\frac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{a}$. Pero como log. $1=0$, será $-l\frac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{a} = l.1 - l\frac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{a} = l\left(\frac{1}{\frac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{a}}\right)$

$= l\left(\frac{a}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$. Será por consiguiente $S\frac{x^{n-1}dx}{a^n-x^n}$

$= ln\frac{a^{\frac{n}{2}}}{(a^n-x^n)^{\frac{1}{2}}}$, y $S\frac{x^{n-1}dx}{a^n+x^n} = \frac{l(a^n+x^n)^{\frac{1}{n}}}{a^n}$, conforme se comprobará integrando la funcion propuesta con hacer $a^n+x^n=u^n$.

626 Para integrar la funcion diferencial $\frac{2xdx+bdx}{a^2+x^2+bx}$, se considerará que el numerador es la diferencial del denominador, luego se integrará por logaritmos, con cuyo fin haremos $x^2+bx=y$; de donde saldrá $a^2+x^2+bx=y+a^2$, y $2xdx+bdx=dy$; luego

go la funcion propuesta será $\frac{dy}{\frac{a^2+y}{a^2}}$; y como $S.\frac{dy}{\frac{a^2+y}{a^2}} = l\frac{a^2+y}{a^2}$; será $S.\frac{2xdx+bdx}{x^2+bx+c} = l\frac{(x^2+bx+c)}{c^2}$.

627 Si se me propone, para integrarla, esta funcion $\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}$, haré $(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}} = y - x$, será, pues, $x^2+a^2 = y^2 - 2xy + x^2$, ó $a^2 = y^2 - 2xy$, $x = \frac{y}{2} - \frac{a^2}{2y}$, y $dx = \frac{dy}{2} + \frac{a^2dy}{2y^2} = \frac{dy(y^2+a^2)}{2y^2}$. Pero hemos hecho $(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}} = y - x = \frac{y}{2} + \frac{a^2}{2y} = \frac{y^2+a^2}{2y}$. Haciendo finalmente las substitucio-nes correspondientes, será $\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2ydy(y^2+a^2)}{2y^2(y^2+a^2)} = \frac{dy}{y}$, cuya integral es ly. Pero $y = (x^2+a^2)^{\frac{1}{2}} + x$; luego $S.\frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)}} = l(x+\sqrt{(x^2+a^2)})$.

628 Tambien integraremos por medio de las substituciones la funcion $\frac{dx}{\sqrt{(2ax+x^2)}}$, haciendo $x = y - a$, con lo que será $x^2 = y^2 - 2ay + a^2$, $2ax = 2ay - 2a^2$; luego $2ax + x^2 = 2ay - 2a^2 + y^2 - 2ay - a^2 = y^2 - a^2$, y $\sqrt{(2ax+x^2)} = \sqrt{(y^2-a^2)}$; $dx = dy$. Por consiguiente $\frac{dx}{\sqrt{(2ax+xx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(y^2-a^2)}}$, cuya integral es (627) $l(y+\sqrt{(y^2-a^2)})$; por por lo que, $S.\frac{dx}{\sqrt{(2ax+xx)}} = l(x+a)+l\sqrt{(2ax+xx)}$ con substituir $x+a$ en lugar de y.

629 Para integrar la funcion $\frac{dx}{x\sqrt{(a^2+x^2)}}$, haremos $\frac{a}{x} = y$, ó $x = \frac{a}{y}$. Será, pues, $dx = \frac{-ady}{y^2}$, y por

por consiguiente $\frac{dx}{x\sqrt{(a^2+x^2)}} = \frac{-ady}{y^2\times\frac{a}{y}\sqrt{\left(a^2+\frac{a^2}{y^2}\right)}}$
$= \frac{-ady}{y^2\times\frac{a}{y}\cdot\frac{\sqrt{(a^2y^2+a^2)}}{y}} = \frac{-ady}{\frac{a^2}{y^2}\sqrt{(a^2y^2+a^2)}} = \frac{-dy}{a\sqrt{(y^2+1)}}$

cuya integral es $-\frac{1}{a}l(y+\sqrt{(y^2+1)})$, y con hacer las substituciones correspondientes, $S.\frac{dx}{x\sqrt{(a^2+x^2)}}$
$= -\frac{1}{a}l\left(\frac{a}{x}+\sqrt{\left(\frac{a^2}{x^2}+1\right)}\right) = -\frac{1}{a}l\left(\frac{a}{x}+\frac{\sqrt{(a^2+x^2)}}{x}\right) = -\frac{1}{a}l\left(a+\sqrt{(a^2+x^2)}-lx\right) = \frac{1}{a}l\left(\frac{x}{a+\sqrt{(x^2+a^2)}}\right)$.

630 Se me propone, para que la integre, la funcion $\frac{dx}{a^2-x^2}$. Reparo desde luego que por componerse su denominador a^2-x^2 del producto $(a+x)\times(a-x)$, se la podrá convertir en dos fracciones que serán $\frac{Adx}{a+x}+\frac{Bdx}{a-x}$, de lo que se sacará $\frac{(Aa-Ax+Ba+Bx)dx}{a^2-x^2} = \frac{dx}{a^2-x^2}$; como el denominador de la funcion propuesta no tiene x, serán $Bx-Ax$ del primer miembro de esta equacion $=0$; y por consiguiente $B=A$; y como el coeficiente de dx en el numerador de la propuesta es 1, será tambien $Aa+Ba = Aa+Aa = 1$, y $A=\frac{1}{2a}$.

Luego $S.\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{S.\frac{1}{2a}dx}{a+x} + \frac{S.\frac{1}{2a}dx}{a-x} = \frac{1}{2a}l\left(\frac{a+x}{a}\right)$
$-\frac{1}{2a}l\left(\frac{a-x}{a}\right) = \frac{1}{2a}l\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$.

Por el mismo camino se hallará que $S.\frac{dx}{x^2-a^2}$
$= \frac{1}{2a}l\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$.

631 En quanto á la integracion de las diferencia-

les exponenciales, seguiremos un camino opuesto al que nos guió para diferenciarlas (546). Luego la integral de una diferencial exponencial, es la misma diferencial dividida por la diferencial de su logaritmo.

Porque una vez que la diferencial de c^x es (547) $c\,dx$, se sigue que $S.c^x dx$. La misma regla nos enseña que la integral de $x^y dylx + x^{y-1}ydx$ es x^y; porque la diferencial del logaritmo de x^y es $dy \times lx + \frac{ydx}{x}$. Partiendo $x^y dylx + x^{y-1}ydx = x^y dylx + \frac{x^y ydx}{x}$ por $dylx + \frac{ydx}{x}$, sale el cociente x^y.

632 Todo lo dicho hasta aquí acerca de la integracion de las cantidades logarítmicas se reduce á las siguientes proposiciones.

1.º Las cantidades que se integran por logaritmos son todas aquellas diferenciales que son ó pueden ser una fraccion cuyo numerador es la diferencial del denominador sola, ó multiplicada ó dividida por un número constante.

2.º Aun quando el numerador no es la diferencial del denominador, multiplicada ó dividida por un número constante, se la resuelve ó es preciso resolverla en otros factores que el uno sea una fraccion cuyo numerador sea la diferencial cabal de su denominador, y el otro factor un número constante.

3.º Hay tambien muchas diferenciales que se integran por logaritmos, aunque no sea posible prepararlas como acabamos de decir. De esta clase son todas las diferenciales á las quales se puede dar la for-

forma de diferenciales logarítmicas multiplicándolas por una funcion de x, tal que el producto sea la diferencial de dicha funcion, ó la misma diferencial, multiplicada ó dividida por un número constante; si se divide despues lo que salga por la misma funcion, la diferencial será patentemente una diferencial logarítmica. Fig.

Integrales que se refieren al círculo.

633 Si llamamos a el diámetro del círculo cuyo arco es AM; AP, x; PM, y; y despues de tiradas la pm infinitamente próxima á PM, y la Mr paralela á AC, llamamos el arco $AM = u$; será $Pp = Mr = dx$; $Mm = du$, y los triángulos semejantes CPM, Mrm darán $PM : CM :: Mr : Mm$; 94.

esto es, $\sqrt{(ax-xx)} : \frac{1}{2}a :: dx : du = \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$ (549) será, pues, $S.\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax-xx)}}$ el valor del arco AM.

Por consiguiente, si se nos ofrece hallar el valor de esta integral, quando x tiene un valor determinado, resturemos de $CA = \frac{1}{2}a$ el valor conocido de $x = AP$, y restará CP. Luego en el triángulo rectángulo CPM será conocido el ángulo recto, la hypotenusa $CM = \frac{1}{2}a$, y el lado CP; luego podrémos valuar el ángulo ACM, ó sabiendo los grados del arco AM, será facil hallar su valor, ó quanto coge de largo tendido en plano, y sacarémos con facilidad el valor de la integral propuesta.

634 Supongamos ahora que b, g, p y k son cantidades conocidas, y se nos ofrece integrar esta diferencial $\frac{bdx}{\sqrt{(gkx-pxx)}}$; la reducirémos á la diferencial poco ha propuesta (633), para lo qual

partiremos desde luego el numerador y el denominador por $\sqrt{p}$, y sacaremos $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x - xx\right)}}$ ó

$\frac{k}{\sqrt{p}} \times \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x - xx\right)}}$; y si á la dx la multiplicase la mitad de $\frac{gk}{p}$, multiplicador de x en el radical, será esta diferencial parecida á la de antes. Haremos, pues, que lo sea, con cuya mira multiplicaremos y partiremos á un tiempo por $\frac{1}{2}\frac{gk}{p}$ ó

$\frac{gk}{2p}$, de cuya operacion sacaremos $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{\frac{gk}{2p}} \times$

$\frac{\frac{gk}{2p}dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x - xx\right)}}$ ó $\frac{2p}{g\sqrt{p}} \times \frac{\frac{gk}{2p}dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x - xx\right)}}$. Puesta la diferencial en esta forma, se viene á los ojos que su integral es un arco de circulo, cuyo diámetro $= \frac{gk}{p}$, y la abscisa $= x$, multiplicado por $\frac{2p}{g\sqrt{p}}$, será, pues, facil señalarla por lo dicho poco ha.

635 Si en vez de contarse las abscisas desde el punto A, se contasen desde el centro C, llamáramos b el radio CA, y x la abscisa CP, sacaríamos (549) $\frac{-bdx}{\sqrt{(bb - xx)}}$ elemento del arco AM. Esta expresion se saca de los triángulos semejantes CPM, Mrm, y teniendo presente que $PM = \sqrt{(bb - xx)}$, y que pues AM mengua al paso que $CP = x$ crece, la diferencial ha de ser negativa (518). Luego siempre que ocurra integrar una diferencial como esta $\frac{kdx}{\sqrt{(gkx - pxx)}}$, se la trans-

formará como antes en $\frac{k}{\sqrt{p}} \times \frac{dx}{\sqrt{(\frac{gh}{p} - xx)}}$, y en cuyo caso $\frac{gh}{p}$ substituye por bb, la cantidad $-b$ que ha de llevar el numerador es $-\sqrt{\frac{gh}{p}}$, se multiplicará, pues, y dividirá por $-\sqrt{\frac{gh}{p}}$, y saldrá $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \times \frac{-\sqrt{\frac{gh}{p}}\,dx}{\sqrt{(\frac{gh}{p} - xx)}}$. Luego con suponer $CA = \sqrt{\frac{gh}{p}}$, y $CP = x$, saldrá la integral $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \times AM$, ó $\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \times AM + C$, ó $-\frac{k}{\sqrt{gh}} \times AM + C$.

636 De lo probado (552) consta que $\frac{adx}{aa+xx}$ es la expresion de un arco de circulo cuyo radio $= a$, y la tangente $= x$. Este arco se valuará facilmente siempre que tenga x un valor determinado, con calcular el ángulo ACN, y el arco AM en sabiendo los grados del ángulo ACN, y conociendo el radio a.

Luego si la diferencial propuesta fuese $\frac{kdx}{g+hxx}$, partiremos por h el numerador y el denominador, y saldrá $\frac{k}{h} \times \frac{dx}{\frac{g}{h} + xx}$, multiplicando despues ambos términos por $\frac{g^{\frac{1}{2}}}{h^{\frac{1}{2}}}$, sacaremos $\frac{\frac{k}{h}}{\frac{g^{\frac{1}{2}}}{h^{\frac{1}{2}}}} \times \frac{\frac{g^{\frac{1}{2}}}{h^{\frac{1}{2}}}dx}{\frac{g}{h} + xx}$, ó $\frac{k}{g^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}} \times \frac{g^{\frac{1}{2}}h^{-\frac{1}{2}}dx}{\frac{g}{h} + xx}$, seria por lo mismo la integral el producto del arco cuya tangente fue-

fuese $= x$, y el radio $\sqrt{\frac{gk^2}{h}}$ multiplicado por $\frac{k}{gh^2}$.

637 Manifiestan estas integraciones que á no ser conocido el radio del circulo cuyo arco es el valor de la integral que se busca, sería indeterminada esta integral, porque con radios diferentes se pueden trazar muchos arcos todos ellos de un mismo número de grados. Hace, pues, el radio del circulo papel de *módulo* para executar estas integraciones; y como las integrales que por este método se sacan, se expresan no en grados del arco, sí en el mismo arco tendido en plano, enseñaremos como esto se consigue.

638 Diximos, y no tardaremos en probarlo, que el arco de círculo se ha á la circunferencia como 1 á 3,1415926535 &c. Si llamamos R el radio, tendremos esta proporcion 3,1415 &c. : 1 :: 180° : R = 57,2957795 1 &c. grados, ó 57° 17′ 44″, con muy corta diferencia; luego en todo circulo el radio es igual á un arco de 57° 17′ 44″. En virtud de esto, siempre que sea dado un ángulo, podrémos averiguar quanto coge tendido en plano el arco que le mide, con tal que sea dado el radio. Porque se viene á los ojos que el arco de 57° 17′ 44″ es á la longitud del radio, ó al número de las partes que se le dan al radio, como el número de grados de otro ángulo qualquiera es á lo que coge tendido en plano el arco que le mide. Llamemos 57° 17′ 44″ ó 57,295779 &c. $= m$; N, el número de grados de un ángulo conocido, sea el que fuere; Z, lo que coge de largo tendido en plano el arco que le mide; R, el radio con el qual se traza este arco; la proporcion hecha poco ha será $m : N :: R : Z = \frac{N \times R}{m} = N \times R \times r$, suponiendo $\frac{1}{m} = \frac{1}{57{,}295779\ \&c.} = 0{,}01745329 25\ \&c. = r$.

Apli-

Aplicaciones del cálculo integral.

639 Dexamos dicho (513) que de los dos métodos de calcular que componen el cálculo infinitesimal, es á saber el método de diferenciar y el método de integrar las cantidades, el asunto del primero es diferenciarlas, ó hallar sus diferencias infinitamente pequeñas, y el asunto del cálculo integral es integrar las diferenciales, ó sacar por medio de estas el valor de las cantidades mismas. Vienen, pues, á ser dos métodos, que el uno deshace lo que el otro hizo, habiendo entre ellos una como oposicion, ó tal correspondencia, que con el uno de los dos se prueban las operaciones del otro. Esto, que ya lo manifestamos quando declaramos las reglas de integrar las diferenciales, se acabará de hacer patente aquí donde la resolucion de las cuestiones las empezará el cálculo diferencial, y las concluirá el cálculo integral.

Aplicacion del cálculo integral á los logaritmos.

640 Cuestion 1. *Hallar el logaritmo de un número* $\frac{n+x}{n}$.

Por lo dicho (540) la diferencial del logaritmo de $\frac{n+x}{n}$ es $M \times \frac{dx}{n+x}$, cuya diferencial con reducir á serie el quebrado, es $M \times \frac{dx}{n+x} =$

$$M \times \left(\frac{dx}{n} - \frac{xdx}{n^2} + \frac{x^2dx}{n^3} - \frac{x^3dx}{n^4} + \&c.\right).$$

Integrando esta equacion saldrá $\text{Log.}\, \frac{n+x}{n} =$

$$M \times \left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3} - \frac{x^4}{4n^4} + \&c.\right).$$

Si

Si x fuese negativa, los signos de todos los términos pares tendrian signos contrarios.

Quando $n = 1$, log. $\frac{n+x}{n}$ seria log. $1 + x =$ $M \times \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c.\right)$ la misma serie que sacamos en otro lugar (435).

641 Cuestion 2. *Hallar el logaritmo de* $\frac{n+x}{n-x}$.

Sabemos que $d.\log.\left(\frac{n+x}{n-x}\right) = d.\log.(n+x) - d.\log.n-x = \frac{dx}{n+x} + \frac{dx}{n-x} = \frac{2ndx}{(n+x)\times(n-x)} = \frac{2ndx}{n^2-x^2} =$ $2\left(\frac{dx}{n} + \frac{x^2dx}{n^3} + \frac{x^4dx}{n^5} + \frac{x^6dx}{n^7}\ \&c.\right)$. Luego integrando, $\log.\left(\frac{n+x}{n-x}\right) = 2M \times \left(\frac{x}{n} + \frac{x^3}{3n^3} + \frac{x^5}{5n^5} + \frac{x^7}{7n^7}\&c.\right)$

Quando $n = 1$, esta serie es la misma que sacamos en otro lugar, esto es $2M\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \&c.\right)$.

Por esta serie se hallará el logaritmo de todo número mayor que la unidad; porque sea el que fuere el número, le haremos igual con $\frac{1+x}{1-x}$, de cuya equacion siempre se sacará para x un número menor que la unidad, con lo que la serie será muy convergente (440), cuya circunstancia importa mucho.

642 Manifestémoslo con buscar el logaritmo hiperbólico de 2: con cuya mira haremos $\frac{1+x}{1-x} = 2$, y saldrá $x = \frac{1}{3}$; y como en el sistema de los logaritmos hiperbólicos $M = 1$, será

$$\log.2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9}\ \&c.\right).$$

Los

Los términos de la serie se sumarán reduciéndolos primero á decimales en la siguiente forma

$\frac{1}{3}$ . . . . $=0,3333333$

$\frac{1}{3 \cdot 3^3}=\frac{1}{3 \cdot 27}$ . . . . $=0,0123457$

$\frac{1}{5 \cdot 3^5}=\frac{1}{5 \cdot 243}$ . . . . $=0,0008230$

$\frac{1}{7 \cdot 3^7}=\frac{1}{7 \cdot 2187}$ . . . . $=0,0000653$

$\frac{1}{9 \cdot 3^9}=\frac{1}{9 \cdot 19683}$ . . . . $=0,0000056$

Suma de la serie . . . . $=0,3465729$

Cuyo duplo $=$ log.2 . . . . $=0,6931458$

643 Los logaritmos de un mismo número x v. gr. sacados en sistemas de bases diferentes, están unos con otros en razon invariable.

Sean v. gr. a, b las bases de dos sistemas diferentes; u é y los exponentes de las potencias, las quales son iguales con x, será $a^u = x$. $b^y = x$; luego $a^u = b^y$, y $ula = ylb$; luego $la : lb :: y : u$. Pero como las bases a, b son invariables, lo son tambien sus logaritmos; luego es constante la razon entre u é y; quiero decir que permanece constantemente una misma la razon entre los logaritmos de un mismo número tomados en sistemas de bases diferentes.

El logaritmo tabular de 2 v. gr. es 0,3013300, y el logaritmo hiperbólico del mismo número es

0,

0,6931458; luego el logaritmo tabular de 2 es al logaritmo hiperbólico del mismo número, como 0,3010300 es á 0,6931458 :: 1 : 2,3025860.

Si llamamos, pues, T el logaritmo tabular de un número, y H su logaritmo hiperbólico será $1 : 2,3025850 :: T : H = 2,302585T$; luego los logaritmos tabulares se pueden convertir en hiperbólicos, multiplicando aquellos por 2,302585.

Y porque de la misma proporcion se saca $T = \frac{H}{2,302585} = 0,43425$; para convertir el logaritmo hiperbólico de un número en logaritmo tabular, se ha de multiplicar aquel por 0,43429.

644 Cuestion 1. *Dado un logaritmo, hallar su número.*

Sea $1+x$ el número, y hagamos $y = 1+x$, la diferencia de su logaritmo será $dy = \frac{dx}{1+x}$, ó $dy + xdy - dx = 0$. Hagamos $x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 +$ &c. y diferenciemos; será $dx = Ady + 2Bydy + 3Cy^2dy + 4Dy^3dy +$ &c. Si hacemos las correspondientes substituciones, saldrá

$$\left.\begin{array}{l} dy + Aydy + By^2dy + Cy^3dy \\ - Ady - 2Bydy - 3Cy^2dy - 4Dy^3dy \end{array}\right\} = 0,$$

de cuya equacion sacaremos $A = 1$, $B = \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$, $C = \frac{B}{3} = \frac{1}{2.3}$, $D = \frac{C}{4} = \frac{1}{2.3.4}$. Luego el número del logaritmo, ó $1 + x = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{2.3} + \frac{y^4}{2.3.4} + \frac{y^5}{2.3.4.5} +$ &c.

Aplicacion del cálculo integral á la quadratura de las curvas.

645 Para valuar la superficie, ó, lo que es lo propio, para sacar la quadratura de las líneas curvas, las consideramos como polígonos de una infi-

finidad de lados, y desde los extremos M, m de cada lado nos figurarnos tiradas las perpendiculares MP, mp al exe de las abscisas, mediante lo qual la superficie ó area está dividida en una infinidad de trapecios infinitamente pequeños. Consideramos despues cada trapecio $PpmM$ como la diferencial del espacio finito APM; porque $PpmM = Apm - APM = d(APM)$ (518). Solo falta hallar la expresion algebráica del trapecio $PpmM$, ó la expresion de la diferencial $d(APM)$, é integrarla despues por las reglas dadas hasta aquí. Fig. 95.

Pero es de reparar que el trapecio $PpmM$ que consideramos como la diferencial de la superficie contándola desde el origen A de las abscisas, tambien puede ser la diferencial de otro espacio qualquiera $KPML$, contándole desde un punto fixo y señalado K, porque tambien $PpmM = KpmL - KPML = d(KPML)$. Por consiguiente la integral que se saque podrá expresar el espacio APM, y el espacio $KPML$, que discrepa del primero un espacio determinado y constante KAL. Será por lo mismo indispensable añadir á la integral una constante que exprese la diferencia que va del espacio que da la integral al espacio que queremos valuar. Con los exemplos daremos á conocer como esto se consigue; porque ahora nos ceñiremos á sacar la expresion del espacio $PpmM$.

Con esta mira llamaremos AP, x; PM, y; y será $Pp = dx$, $rm = dy$. La superficie del trapecio $PpmM$ (I. 553) es $\frac{PM+pm}{2} \times Pp = \frac{y+y+dy}{2} \times dx = ydx + \frac{dxdy}{2} = ydx$ (517); luego la expresion general de la diferencial de la superficie de una curva es ydx. 95

646 Quando se quiera aplicar esta fórmula á una superficie propuesta cuya equacion sea dada, se sa-

ca-

Fig. cará de la equacion de la figura el valor de y para substituirle en la fórmula ydx, cuya substitucion transformará la fórmula en una cantidad en que no habrá mas que x y dx; su integral, dado caso que se pueda conseguir, expresará, añadiéndole la competente constante, la superficie ó area de la curva, contándola desde el punto que se quiere. No habrá mas que determinar la constante, una vez señalado el punto desde el qual se ha de contar la superficie.

Quando las ordenadas, bien que paralelas unas á otras, no forman un angulo recto con las abscisas, resulta para la quadratura una fórmula algo diferente de la que acabamos de sacar.

647 Pero respecto de las curvas cuyas ordenadas todas salen de un centro comun, se supone dividida su area en triángulos, no en trapecios, cuyo supuesto causa alguna variedad en la fórmula general de la quadratura. Para valuar v. gr. la superficie del
96. segmento CNQ, nos le figuraremos dividido en una infinidad de triángulos infinitamente pequeños, como CQq. Si desde el punto Q baxamos á Cq la perpendicular Qt, ó, lo que es lo propio, si desde el centro C, y con el radio CQ trazamos el arco Qt, la expresion del triángulo CQq será $\frac{Cq \times Qt}{2}$. Luego con llamar CQ, y; y el arco Qt, dx, será $Cq = y - dy$, y por consiguiente el triángulo CQq $= \frac{y-dy}{2} \times dx = \frac{ydx - dydx}{2} = \frac{ydx}{2}$ (517). De la equacion de la curva se sacará el valor de y expresado en x, se le substituirá en la fórmula general $\frac{ydx}{2}$, la qual, hecha esta substitucion, se integrará.

648 Cuestion 1. *Quadrar el triángulo ABC.*

97. Llamo a la altura AD del triángulo; b, su base BC; AP, x; y, la ordenada Mm paralela á la ba-

base. Si tiramos otra ordenada Nn infinitamente Fig.
próxima á la primera, el elemento, ó la diferencial de la area será $ydx = MPpm$, por ser $Pp = dx$. Pero los triángulos semejantes ABC, APM dan $AB : BC :: AP : PM$, ó $a : b :: x : y = \frac{bx}{a}$; luego $ydx = \frac{bxdx}{a}$, y $Sydx = \frac{bx^2}{2a}$. Por consiguiente si fuese $x = a$, será $\frac{bx^2}{2a} = \frac{ba^2}{2a} = \frac{ba}{2}$ la expresion de la superficie de todo el triángulo. Esto es lo mismo que dexamos demostrado en los principios de Geometría.

649 Qüestion 2. *Quadrar la parábola cuya equacion es* $y^2 = px$.

La equacion de la curva dá $y = \sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$; luego $ydx = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx$; la integral de esta cantidad es 95.
$\frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx}{\frac{3}{2}dx} + C$, ó $\frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$, esta será la expresion de la superficie de la parábola; por manera que una vez que conozcamos la abscisa x y el parámetro p, conoceremos el valor del espacio APM, ó del espacio $KPML$ contado desde un punto determinado K, como esté determinada la constante C; esto es, como la integral exprese desde qué punto se cuenta.

Supongamos desde luego que los espacios se cuentan desde el punto A, en cuyo supuesto $APM = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$. Para averiguar el valor de C, á fin de que se verifique esta equacion, consideraremos que quando $x = 0$, el espacio APM es tambien cero, y entonces la equacion es $0 = 0 + C$; luego $C = 0$; luego para que la integral exprese los espacios contados desde el punto A, es preciso que la constante C sea cero, quiero decir que entonces no hay que añadir constante alguna, y en general el espacio indeterminado $APM = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$.

Pe-

Fig. Pero si suponemos que los espacios se cuentan desde el punto K, de modo que siendo b una cantidad conocida, sea $AK = b$, en este supuesto será $KPML = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$. Estos espacios llegarán á ser cero quando $AP = x = b$; luego entonces $0 = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$; $C = -\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$, y por último $KPML = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$.

Reparése que $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \times x$; como $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = y$; se verificará $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$, ó $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \times x = \frac{2}{3}xy$; luego ya que $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$ es la expresion del espacio APM, tambien será $APM = \frac{2}{3}xy = \frac{2}{3}AP \times PM$, esto es, los dos tercios del rectángulo $APMO$, sea la que fuere AP.

Tambien $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \times b$; pero quando $x = AK = b$, la equacion $yy = px$ es $yy = pb$, y por consiguiente $y = p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$, esto es $KL = p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$; luego $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$, ó $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \times b = \frac{2}{3}KL \times AK$; luego ya que $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$ es el valor del espacio $KPML$, el mismo espacio tambien será $\frac{2}{3}AP \times PM - \frac{2}{3}AK \times KL$, esto es, $\frac{2}{3}APMO - \frac{2}{3}AKLI$.

650 Cuestion 3. *Quadrar el sector de círculo ACB.*

98. Llamo a el radio $AC = BC$; x, el arco AB considerándole como variable; por lo que BM será dx; luego el triángulo CBM será la diferencial de la área que se me pide, y su expresion será $\frac{adx}{2}$. Luego el area total será $S.\frac{adx}{2} = \frac{ax}{2} = AC \times \frac{1}{2}AB$. De aquí se sigue que la area de todo círculo es igual al producto de la mitad de su circunferencia por el radio (I. 556).

Cues-