Mathesis 11 (1995) 171-182
[illegible]

Los fundamentos de la aritmética según Peano

Francisco Zubieta R.

Se sabe que Weierstrass, Cantor y Dedekind, en la segunda mitad del siglo XIX, realizaron esfuerzos positivos para edificar una teoría de las magnitudes inconmensurables a partir del concepto de número racional. Por su parte, los números racionales (positivos y negativos) se alcanzan a partir de la clase previamente dada de los números naturales. El problema era entonces fundamentar la aritmética de los números naturales, tarea a la que dedicaron varios esfuerzos los matemáticos alemanes, siendo dignos de mención los de Grassmann y Dedekind. El éxito estaba reservado a Peano, quien en 1898 formuló definitivamente la teoría que ahora vamos a exponer.

1. Los axiomas de Peano

Se supone dada la clase N de los *números naturales*, uno de los cuales es *cero*, y entre los cuales rige una relación binaria, $^+$, la de cada número natural al *sucesor* del mismo. Si a es un número natural, entonces a^+ denota al sucesor de a, y a se llama el predecesor de a^+.

Los conceptos de 0 (cero), N (número natural) y $^+$ (el sucesor de) no se definen, pero ellos deben cumplir los cinco axiomas siguientes:

(1) $0 \in N$ (cero es un número natural).
(2) Si $a \in N$, entonces $a^+ \in N$
(3) Si $a \in N$, entonces $a^+ \neq 0$
(4) Para todo a, b, de N: si $a^+ = b^+$ entonces $a = b$
(5) Sea Q una clase:
Si $0 \in Q$ y si a (de N) $\in Q$ implica $a^+ \in Q$ entonces $N \subset Q$

(La frase '$a \in N$', que se lee 'a es un N', significa que el número a está en N o pertenece a la clase N. Por su parte, la frase '$N \subset Q$' dice que la clase N está contenida en Q, lo que significa que todo elemento de N pertenece a Q).

De los axiomas anotados se desprende claramente que N es una clase a la cual pertenece 0, axioma (1), y $^+$ es una relación entre los números naturales o elementos de N. El axioma (5) es el principio de *inducción finita*. Si 0 pertenece a Q, y también pertenece a Q el sucesor de cada número que pertenece a Q, entonces la clase N está contenida en Q. Esto último significa que Q contiene a todos los números naturales, siempre que se cumpla la hipótesis de la inducción, que dice: 0 pertenece a Q y si a pertenece a Q entonces a^+ pertenece a Q.

Recordando que una clase Q se define mediante alguna propiedad común a todos sus miembros, el axioma (5) puede enunciarse diciendo
(5) Si ϕ es una propiedad que tiene 0 y que posee el sucesor de cada número que la tiene, entonces todos los números naturales tienen ϕ.

La igualdad entre los elementos de N no está definida en los axiomas, debiendo entenderse que, si a y b son de N, $a = b$ es una identidad. La igualdad de los números tiene, pues, las propiedades formales que posee la relación de identidad entre objetos. Apoyándose en esto, se demuestra fácilmente la proposición recíproca del axioma (4), que es la siguiente:

(4') Para todo a, b, de N, si $a = b$ entonces $a^+ = b^+$

Si $a = b$, entonces a tiene toda propiedad que tiene b. En particular, a verifica la relación $x^+ = b^+$ porque b la verifica. Conclusión: $a^+ = b^+$. Queda demostrado (4').

En resumen: Sea N la clase de los números naturales. Suponer que existe una función $^+$ (sucesor), definida biunívocamente para cada elemento de N, y usar la notación a^+ para designar al sucesor de a. Admitir que existe un elemento de N, y sólo uno, que no es sucesor de ningún otro elemento de N; llamar 0 (cero) a este elemento único. Tenemos así las tres ideas primitivas que Peano eligió para fundamentar la aritmética de los números naturales, a las que asignó los cinco axiomas que hemos anotado y comentado hace un momento.

2. Adición

La suma de dos números naturales se define por las igualdades:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} a + 0 = a \\ a + b^+ = (a + b)^+ \end{cases}$$

Esta definición se hace extensiva a un número mayor de sumandos por los procedimientos habituales. Nótese que la segunda igualdad dice que: Si al número a le adicionamos el sucesor de b, obtenemos el sucesor de la suma $a + b$.

Si al sucesor de 0 se le llama 1, la anterior definición de suma conduce a la igualdad $a^+ = a + 1$, lo que significa que el sucesor de cualquier número a se obtiene agregando 1 a ese número.

En efecto, con $b = 0$, la segunda igualdad (I) da:

$$a + 0^+ = (a + 0)^+$$

Por otra parte, la primera igualdad (I), $a + 0 = a$, usando (4^+), se obtiene:

$$(a + 0)^+ = a^+$$

Se concluye que $a + 0^+ = a^+$. Y esta igualdad, con $0^+ = 1$, conduce al resultado anunciado. Es decir: $a + 1 = a^+$.

Si se pone $1 = 0^+ = 0 + 1$, $2 = 1^+ = 1 + 1$, $3 = 2^+ = 2 + 1$,..., la clase N de los números de Peano viene a ser la clase que tiene por elementos: 0, 1, 2, 3, ..

Teorema 1. *La adición está definida por la igualdades (I) para toda pareja ordenada (a, b) de elementos de N.*

Dado arbitrariamente el número a, la igualdad $a + 0 = a$ define la adición para la pareja $(a, 0)$ de elementos de N.

Suponiendo definida esta operación para la pareja (a, b), la segunda de las igualdades (I) la define para (a, b^+). Por inducción, la adición está definida así para todas las parejas ordenadas de elementos de N.

Teorema 2. *La suma $a + b$ de dos números naturales es un número natural*

Si a es un número natural, entonces $a + 0$ es un número natural, porque $a + 0 = a$. Si $a + b$ es un número natural, también lo es $(a + b)^+$, por el axioma (2). En virtud de esto y de la segunda igualdad (I), si $(a + b) \in N$, entonces $(a + b^+) \in N$. La aplicación del axioma (5) completa la demostración.

Es inmediato que, dados a y b, el número $a + b$ es único.

Teorema 3. *La adición de los números naturales es asociativa.* En otras palabras: *tres números cualesquiera a, b, c, satisfacen la relación*

$$(\alpha): \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

Demostración por inducción. El teorema es válido para $c = 0$, porque

$$(a + b) + 0 = a + (b + 0)$$

ya que por (I), ambos miembros valen $a + b$. Admitámoslo para c y probemos que vale para c^+. Puesto que se cumple (α), por hipótesis, aplicando (4'), se obtiene:

$$[(a + b) + c]^+ = [a + (b + c)]^+$$

Y, dos veces aplicando (II), resulta:

$$(a + b) + c^+ = a + (b + c)^+$$

$$(a + b) + c^+ = a + (b + c^+)$$

Por inducción, el teorema está demostrado.

Teorema 4. *La adición es conmutativa.* De otro modo: *dos números naturales arbitrarios, a y b, cumplen la condición*

(β): $\qquad a + b = b + a$

En primer lugar, se demuestra la igualdad siguiente:

(β'): $\qquad 0 + b = b + 0 = b$

Se tiene: $0 + 0 = 0 + 0$. Si $0 + b = b$, entonces $(0 + b)^+ = b^+$. O sea: si $0 + b = b + 0$, entonces $0 + b^+ = b^+ + 0$. Por inducción, (β') se cumple para todo número b.

En segundo lugar, se demuestra lo que sigue:

(β''): $\qquad 1 + b = b + 1 = b^+$

La demostración es análoga a la de (β').

Como (β), con $a = 0$, es (β'), el teorema está demostrado para $a = 0$ y b cualquiera. Suponiendo que (β) vale para a, se tiene:

$$(a + b)^+ = (b + a)^+$$

$$a + b^+ = b + a^+$$

Ahora bien, $a + b^+ = a + (1 + b) = (a + 1) + b = a^+ + b$. Se concluye que: si $a + b = b + a$, entonces $a^+ + b = b + a^+$. Por el principio de inducción, el teorema está demostrado.

Teorema 5. *Dados arbitrariamente a, b, c, (de N). Si $a + c = b + c$, entonces $a = b$.*

El teorema 5 permite simplificar una ecuación, cuando un mismo número aparece como sumando en ambos miembros. Este teorema, en vista del 4, se puede enunciar también, así: si $c + a = c + b$, entonces $a = b$.

Corolario. *Si $c + a = c$, entonces $a = 0$. Si $c = c + b$, entonces $b = 0$.*

Teorema 6. *Dados arbitrariamente a, b, c, (de N): Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.*

Teorema 7. *Si a y b son números naturales y $a \neq 0$*, entonces $a + b \neq 0$.

Corolario. *Si $a + b = 0$, entonces $a = 0$ y $b = 0$.*

La demostración de los teoremas 5, 6 y 7 no presenta dificultad y queda a cargo del lector.

3. Multiplicación

Esta operación se define por medio de las identidades:

$$(\mathrm{II}): \quad \begin{cases} a \cdot 0 = 0 \\ a \cdot b^+ = ab + a \end{cases}$$

La segunda de estas igualdades se puede escribir: $a(b + 1) = ab + a$. Y, poniendo, sucesivamente, $b = 0, 1, 2, \ldots$, se obtiene: $a \cdot 1 = a$; $a \cdot 2 = a + a$; $a \cdot 3 = a + a + a$; ...

Teorema 8. *La multiplicación está definida por las igualdades (II) para toda pareja ordenada (a, b) de elementos de N.*

Teorema 9. *El producto ab de dos números naturales es un número natural.*

Teorema 10. *La multiplicación es distributiva respecto a la adición.*

En otros términos: tres números naturales arbitrarios a, b, c, verifican las igualdades:

$$(\gamma_1): \qquad a(b + c) = ab + ac;$$

$$(\gamma_2): \qquad (a + b)\, c = ac + bc;$$

Es inmediato que (γ_1) se cumple para $c = 0$. Si ella se cumple para c, entonces vale para c^+. En efecto: $a(b + c^+) = a(b + c)^+ = a(b + c) + a = (ab + ac) + a = ab + (ac + a) = ab + ac^+$. También (γ_2) se cumple para $c = 0$, y, si vale para c, vale para c^+. Es fácil probarlo. Se concluye, por inducción, la verdad del teorema.

Teorema 11. *La multiplicación es conmutativa.* De otro modo: dos números naturales cualesquiera, a y b, cumplen la condición:

$$(\delta): \qquad ab = ba$$

En primer lugar, se demuestra que $0 \cdot b = b \cdot 0$ lo que dice que (δ) vale para $a = 0$. En segundo lugar se demuestra que $1 \cdot b = b \cdot 1 = b$. Finalmente, se demuestra que (δ) vale para a^+, en el supuesto de que vale para a. Se tiene:

$$a^+ \cdot b = (a + 1)\, b = ab + 1 \cdot b$$

Por la hipótesis (δ) y por $1 \cdot b = b$, resulta:

$$a^+ \cdot b = ba + b = b \cdot a^+$$

Por inducción, queda establecido el teorema.

Teorema 12. *La multiplicación es asociativa. Es decir: tres números naturales cualesquiera satisfacen la relación:*

$$(\varepsilon): \qquad (ab)\, c = a\, (bc)$$

Teorema 13. Sean a y b dos números naturales. Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$ (si el producto es nulo, alguno de los factores lo es).

El teorema es cierto, evidente, si $b = 0$. Además, cualquiera que sea b (de N), $ab^+ = ab + a$. De modo que $ab^+ = 0$ implica $ab = 0$, (y $a = 0$) por el corolario del teorema 7. Con la aplicación del axioma (5), termina la demostración.

Teorema 14. Si $ac = bc$, entonces $a = b$ ó $c = 0$

Corolario. Si $c \neq 0$ y $ac = c$, entonces $a = 1$.

Teorema 15. Si $a \neq 1$, entonces $ab \neq 1$.
Corolario. Si $ab = 1$, entonces $a = 1$ y $b = 1$.

Queda a cargo del lector hacer las demostraciones que han sido omitidas. Teoremas 12, 14, 15

4. Potenciación

Para esta operación, se pone la definición que sigue:

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} a^0 = 1 \\ a^{b+1} = (a^b a) \end{cases}$$

De esta definicion poniendo $b = 0$, se obtiene: $a^1 = 1 \cdot a = a$. En a^b, a se llama la *base* y b, el *exponente*. Se demuestra sin dificultad los análogos de los teoremas 1 y 2 (y de 8 y 9). Se demuestra también por inducción, que $0^b = 0$, para todo b de N, con tal que sea $b \neq 0$

Es importante el siguiente

Teorema 16. *Tres números naturales cualesquiera a, b, c verifican las relaciones*:

$$(\zeta) \qquad (ab)^c = a^c b^c;$$
$$(\eta) \qquad a^b a^c = a^{b+c};$$
$$(\theta) \qquad (a^b)^c = a^{bc}$$

Cada una de esta igualdades vale para $c = 0$, y se prueba por inducción que ellas valen para todo valor de c, no importa cuáles sean los elementos a y b de N.

5. Subclases de N

Un conjunto de clases del tipo $(c + N)$ se define por inducción, como sigue:

$$\text{(IV):} \qquad \begin{cases} 0 + N = N \\ c^+ + N = (c + N) - c \end{cases}$$

La primera de estas igualdades dice que la clase $(0 + N)$ es idéntica al conjunto N. La segunda expresa que $(c^+ + N)$ se forma suprimiento el número c de la clase $(c + N)$. En particular, como $0^+ = 1$, se forma $(1 + N)$ suprimiento 0 de la clase $(0 + N) = N$. Es decir: $(1 + N) = N - (0)$.

Teorema 17. *La clase $(c + N)$ satisface los cinco axiomas de Peano, si en ellos se pone c y $(c + N)$ en lugar de 0 y N.*

El teorema se cumple, evidentemente, para $c = 0$. Si los cinco axiomas se cumplen cuando c y $(c + N)$ se ponen en lugar de 0 y N, ellos se cumplen al pasar de c a c^+ y de $(c + N)$ a $(c^+ + N)$. (El lector puede probarlo). El teorema es cierto, por inducción.

Corolario. $a \in (b + N)$ si y sólo si $(a + N) \subset (b + N)$.

En particular, para la clase $(1 + N)$, el principio de inducción es éste:

(5_1) Sea Q una clase, si $1 \in Q$ y si a (de N) $\in Q$ implica $a^+ \in Q$, entonces $(1 + N) \subset Q$.

Quiere decir que: si el número 1 pertenece a la clase Q y también está en Q el sucesor de cada número que pertenece a Q, entonces la clase $(1 + N)$ está contenida en Q.

Apoyándose en (5_1), se demuestra que *todo número natural, excepto 0, es el sucesor de otro número natural*.

En efecto: $1 = 0^+$ y, si $a = n^+$, entonces $a^+ = (n^+)^+$.

Por (5_1), la clase $(1 + N)$ está contenida en el conjunto de los números naturales que son sucesores de otros, y, puesto que $(1 + N) = N - (0)$ y 0 no es sucesor de otro numero, $(1 + N)$ es la clase de los sucesores de los elementos de N.

De una manera general: para cada c (de N) dado, se demuestra por inducción que $(c + N)$ es la clase formada por los números de la forma $c + n$, donde n es cualquier número natural.

Teorema 18. Si a y b son de N, entonces $a \in (b + N)$ ó $b \in (a + N)$.

Es claro que, si $a = b$, entonces $a \in (b + N)$ y $b \in (a + N)$. Para establecer el teorema, en general, se empieza por demostrar

$$\text{(6)} \qquad \text{Si } a \in N - (b + N), \text{ entonces } b \in (a + N)$$

Esta se cumple para $b = 1$, porque $a \in N - (1 + N)$ significa $a = 0$, y $1 \in (0 + N)$ se tiene en cuenta que:

$$(b^+ + N) = (b + N) - (b),$$

$$N - (b^+ + N) = N - (b + N) + (b)$$

Si $a \in N - (b^+ + N)$, entonces $a \in N - (b + N)$ ó $a = b$; en ambos casos, $b \in (a + N)$ y, por eso, $b^+ \in (a + N)$ (ver teorema 17). La proposición (6) es válida para b^+, en el supuesto de serlo para b.

Si a (de N) no es un miembro de $(b + N)$, entonces $a \in N - (b + N)$ y, por (6), $b \in (a + N)$. El teorema está demostrado.

Corolario. Dados a y b (de N), una de las clases $(a + N)$, $(b + N)$, contiene a la otra.

Corolario. Si $a \neq b$ y $(b + N) \subset (a + N)$, entonces $(a + N)$ no $\subset (b + N)$.

Sea N' un subconjunto cualquiera de N, y sea m un número definido por las condiciones: 1) $m \in N'$, y 2) $N' \subset (m + N)$. Este número es el *mínimo de* N', y es fácil ver que, si existe, es único.

Una consecuencia inmediata de la anterior definición es ésta: si $N' = (b + N)$, el mínimo de N' es b.

Para las clases N', subconjuntos de N, se cumple el siguiente:

Teorema 19. Si N' *carece de mínimo, entonces* $N = N - N'$. De otro modo: *si no hay un mínimo en* N', *es porque ningún número natural pertenece a* N'.

Si ningún número m cumple las condiciones que definen al mínimo de N', entonces todo m (de N) hace verdadera la proposición: si $(m + N)$ contiene a N', entonces $m \in N - N'$. Se deduce que, si $(a + N) \supset N'$, entonces $(a^+ + N) \supset N'$, y es obvio, además, que $(0 + N) \supset N'$. Por inducción, todo número m pertenece a $N - N'$, es decir, $N \subset N - N'$. Como, por otra parte, $N \supset N - N'$, el teorema está demostrado.

Este teorema garantiza la existencia de un mínimo en cada subconjunto no-vacío de N.

6. Definición del orden natural.

El orden que tienen los números en la serie natural y las propiedades de ese orden, se desprenden fácilmente de los teoremas anteriores. Las definiciones son las que siguen:

$$a \leq b \text{ significa } (b + N) \subset (a + N)$$

$$a < b \text{ significa } a \leq b \text{ y } a \neq b$$

La relación <, definida así entre los elementos de N, tiene tres propiedades esenciales de una relación de orden: es asimétrica, transitiva y conexa. Esto es inmediato del teorema 18 y su primer corolario.

Además, es inmediato que $a < b$ equivale a $(b + N) \subset (a^+ + N)$. De otro modo: $a < b$ significa $a^+ \leq b$.

Corolario. Ningún número b (de N) cumple la condición $a < b < a^+$.

Finalmente, es inmediato el teorema que dice: Para que m sea el mínimo de N' (subconjunto de N) es necesario y suficiente que m cumpla estas dos condiciones:

α) $m \in N'$

β) $m \leq x$, para todo x de N'.

Esta propiedad pudo haberse tomado como definición del mínimo de N' y entonces el teorema 19 expresa que la clase N *está bien ordenada* mediante la relación <, definida hace poco.

7. Comentario de Alessandro Padoa

Su comentario es el siguiente:

Cero puede definirse mediante $^+$ (sucesor) y N (número natural) con sólo postular que existe un elemento de N que no es sucesor de ningún otro: a este número (único) lo llamamos 0 (cero) y los cinco axiomas de Peano se vuelven cuatro

1) Si $a \in N$ entonces $a^+ \in N$.
2) Si $a^+ = b^+$ entonces (y sólo entonces) $a = b$
3) $(Ex)\ [x \in N\ \&\ (y)\ (\text{si } y \in N \text{ entonces } y^+ \neq x)\ ]$

El axioma 3) dice que hay al menos un número natural que no es sucesor de otro. Si llamamos N^+ al conjunto de los sucesores de los elementos de N, por 1) sabemos que $N^+ \subseteq N$. Y el axioma 3) se enuncia diciendo:

3) $N - N^+ \neq \phi$
4) Si $Q \cap (N - N^+) \neq \phi\ \&.\ (x)\ (x \in Q \Rightarrow x^+ \in Q)$ entonces $N \subset Q$.

Del axioma 4) se desprende que a lo más existe un número natural que no es sucesor de otro. Porque, si hubiera dos, dejando uno de ellos fuera de la clase Q, la hipótesis del axioma 4) sería verdadera y falsa y la conclusión. A ese número (único) lo llamamos 0 (cero) y siguen siendo válidos los cinco axiomas de Peano. Por cierto, ahora es 4) el principio de inducción finita.

Por otra parte, podemos substituir la función $^{-}$ (sucesor) por el buen orden, que es el orden natural definido en N.

Los conceptos primitivos : N, $<$, donde $<$ es el orden en N.

Agregar los axiomas siguientes:

1) $N \neq \phi$ (hay números naturales).

2) Si $k \in N$ existe $n \in N$ tal que $k < n$. (Hay en N elementos posteriores a todo elemento de N).

3) Si $N' \subseteq N$ y $N' \neq \phi$, hay en N' un $m \leq$ todo elemento de N'. (Hay un mínimo en todo subconjunto no-vacío de N).

Definir 0 (cero como el mínimo de N, que existe por 1) y 3). Si $k \in N$, definir N_k como el conjunto al que pertenecen todos los n tales que $k \leq n$. Por 2) el conjunto N_k tiene más de un elemento y por 3) tiene un mínimo que es k; el conjunto $N_k - \{k\}$ tiene también un mínimo, que es por definición k^+ (el sucesor de k).

Agregar ahora el principio de inducción finita para tener en forma nueva la axiomática de Peano.

8. Comentario de Mario Pieri

Sus postulados para N, $^+$ (sucesor)

1) $N \neq \phi$ (Existe al menos un número natural).

2) Si $n \in N$ entonces $n^+ \in N$

3) Dos elementos de N, no-sucesores, son iguales.

4) Si $N' \subset N$ y $N' \neq \phi$, hay (por lo menos) en N' un número no-sucesor de otro elemento de N'.

Si sólo hay un no-sucesor en N', decimos que es el mínimo de N'. Por 1) y 4), el conjunto N tiene un elemento no-sucesor; el postulado 3) nos dice que ese elemento es único. Y esto significa que el conjunto N tiene un mínimo, al que llamamos 0 (cero) por definición.

Deducimos ahora el principio de inducción finita, que dice:

5) Si $0 \in Q$ y (n) [Si $n \in Q$ entonces $n^+ \in Q$], entonces $N \subseteq Q$.

Partiremos el conjunto N en dos partes: los elementos de N que están en Q, y los que no están en Q. Estos últimos forman el conjunto $U = N - Q$, que cumple: $U \subseteq N$, $U \cap Q = \phi$. Debe ser $U = \phi$. Porque, si fuera $U \neq \phi$, habría en U un elemento, m, no-sucesor de otro elemento de U, por 4. Debe ser $m \neq 0$ porque $0 \in Q$. Además, debe haber en N un elemento

$n \in Q$, tal que $n^+ = m$. Pero la hipótesis de 5 dice: si $n \in Q$ entonces $n^+ \in Q$. Y por eso: $m \in Q$ (contradicción).

Hemos demostrado así la proposición 5.

Referencias

PEANO, G. 1901. *Formulaire de Mathématiques*. Torino: P. Gerbore, - Carré & Naud, Paris.

NATUCCI, A. 1923. *Il concetto di numero e le sue estensioni*. Torino: Fratelli Bocca Editori.

Francisco Zubieta Russi imparte cursos de matemáticas desde 1943 en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Es socio fundador de la Sociedad Matemática, 1943. Durante varios años editor del boletín de la Sociedad y colaborador del mismo.