Mathesis 13 (1997) 143-153.

Pragmaticismo, tríadas y continuidad: aspectos globales y locales de la lógica matemática contemporánea desde perspectivas peirceanas

Fernando Zalamea

Antecedentes y estudio actual del tema.

Charles Sanders Peirce (1839-1914) ha llegado a ser considerado como el más profundo y versátil intelecto que ha producido América [Fisch 1986]. Su extensa obra (100.000 páginas manuscritas, de las cuales sólo se ha publicado hasta hoy una quinta parte) es de una enorme riqueza y originalidad (particularmente en semiótica, lógica, filosofía, matemáticas y física, aunque sus ramificaciones abarcan todos los campos del conocimiento). En el último decenio se ha presenciado una creciente recuperación del legado peirceano: publicación de más de 10 monografías y realización de más de 20 tesis de doctorado sobre aspectos de su obra, consolidación de institutos especializados y creación de listas de trabajo en Internet (ver bibliografía).

La lógica —y específicamente la lógica matemática— se constituyó para Peirce en la llave maestra de su amplísimo edificio del conocimiento. Los múltiples campos de la lógica matemática en los que Peirce trabajó podrían enumerarse así: cálculo proposicional clásico (axiomática, tablas de verdad, conectivos completos, álgebra de la lógica), lógica clásica de primer orden (cuantificadores, formas normales, álgebras relacionales), lógica de segundo orden (igualdad, finitud), cálculo trivalente, negación constructiva, lógica diagramática (gráficos existenciales alfa, beta y gama: niveles del cálculo proposicional clásico, de la lógica clásica de primer orden y de cálculos proposicionales modales), lógica topológica, problema del continuo y jerarquía de infinitos, continuo sintético y modalidades, infinitesimales no-estándar, teoría general de las representaciones.

Algunos de los aportes fundamentales de Peirce fueron reconocidos en su momento, e integrados al desarrollo de la lógica matemática a comienzos del siglo XX (tablas de verdad, cuantificadores, álgebra de relaciones). Sin embargo, son muchos más los aportes de Peirce que no se integraron directamente al cauce normal de las matemáticas (debido a diversos rencores personales contra la figura iconoclasta de Peirce y a posteriores negligencias en la edición de la obra peirceana). Independientemente de la obra de Peirce, cruciales desarrollos globales y locales en teoría de la prueba (1930), teoría de modelos (1950) y teoría de categorías (1970), han recuperado varios de los aportes peirceanos, otorgándoles una gran precisión técnica. Por otro lado, quedan aún notables realizaciones lógicas de Peirce (sus gráficos existenciales [18]) que aún no han sido asimiladas por la ciencia matemática normal.

Objetivo central.

Cinco temas peirceanos básicos han sido recogidos (independientemente) por desarrollos lógicos posteriores.
(a). El conocimiento sólo es aproximativo, parcial; posee limitantes intrínsecas.
(b). El conocimiento es simbólico, contextual, activo-reactivo ('máxima pragmaticista').
(c). Las interacciones semióticas son triádicas (objeto-signo-intérprete) e involucran la tríada fundamental topológica (interior-exterior-frontera).
(d). Una lectura plena del continuo debe ser una lectura sintética, categórica; el modelo estándar de los reales es sólo un embrión de continuidad; el continuo debe estar definido por propiedades universales.
(e). La lógica es una teoría general de las representaciones; la lógica matemática estudia sistemas universales de representación local y sus herramientas de trabajo proceden de rupturas de continuidad.

El objetivo central del Proyecto consiste en analizar y/o desarrollar cerca de diez detallados estudios de caso ('case studies') dentro de la lógica matemática contemporánea, que exhibirán —con toda precisión— concreciones técnicas de los temas (a)-(e). Los estudios de caso (para su explicitación véanse a continuación los Objetivos específicos) incorporarán:

- análisis históricos (investigación histórica original)
- contextualizaciones contemporáneas (investigación conceptual original)
- desarrollos técnicos (investigación técnica original).

El resultado final del Proyecto será una monografía en inglés (título provisional: *Aspects of Mathematical Logic from a Peircean Point of View*) —suma de los estudios de caso, algunos de los cuales serán sometidos por su cuenta a revistas especializadas—.

Objetivos específicos.

Las referencias explícitas a los textos de Peirce que se han editado (incluidos en [CP], [W], [NEM], [N] y [MF]) serían demasiado extensas para incluir aquí. Baste decir que tales referencias se encuentran en las *Notas* del curso *La lógica en Peirce* (96-II), dirigido en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia en el segundo semestre de 1996, y que se desprenden del estudio allí realizado de más de 100 textos peirceanos relacionados con la lógica. La Universidad está tratando de adquirir la edición microfilmada de los manuscritos de Peirce [MS], lo que permitiría realizar contrastaciones que le asegurarían al Proyecto un pleno rigor documental.

Los estudios de caso contemplados —en este momento— para el desarrollo del proyecto son los siguientes (después del numeral del estudio se indica cuáles de los temas (a)-(e) serán incorporados en cada análisis):

1. (b), (c), (e). *Clasificación de los cuantificadores como íconos, índices o símbolos (en el sentido peirceano).* Ícono universal de Frege [Ketner 1981], índices universal y existencial de Peirce [Ketner 1981], símbolo existencial (línea de identidad [Roberts 1973]) en Peirce, cuantificadores constructivos como símbolos (realizabilidad de Kleene [Troelstra y Dalen 1988]), cuantificadores abstractos como índices (teoría abstracta de modelos [Barwise y Feferman 1985]). Se mostrará que la jerarquización triádica de Peirce [Liszka 1996] explica el diverso trato que se le ha dado a los cuantificadores, ya sea como conectores sintácticos, operadores deductivos, operadores límite, o índices que representan colecciones de estructuras semánticas.

2. (a), (b), (e). *Aspectos del control abductivo peirceano en la lógica clásica de primer y segundo orden.* Formas normales (Skolem, Herbrand), resolución en el cálculo de predicados [Odifreddi 1989], matemáticas en reverso y subsistemas de la aritmética de segundo orden [Simpson 1985, 1988]. Se mostrará que el control en los procesos abductivos (minimización y economía en la formulación de hipótesis) corresponde —en la lógica clásica de primer orden— a la construcción de las formas normales de Herbrand, y corresponde —en subsistemas

de la aritmética de segundo orden— al programa de 'Reverse Mathematics' elaborado por Friedman y Simpson para caracterizar completamente el poder axiomático-deductivo de teoremas 'reales' de la matemática.

3. (a), (b), (e). *Poder de representación versus poder de prueba*. Lectura peirceana de los teoremas de Gödel [Odifreddi 1989], estructura de los naturales, aritmética de Peano, funciones recursivas, realidad *versus* existencia. Se mostrará que las limitaciones intrínsecas de los formalismos son consecuencias conceptuales ineludibles de la máxima pragmaticista, y que el instrumentario básico (funciones recursivas) para demostrar tales limitaciones consiste en un elaborado conglomerado de herramientas representacionales que contraponen 'realidad' y 'existencia'.

4. (a), (b), (d). *El problema del continuo desde perspectivas peirceanas*. Versión analítica (Cantor: hipótesis del continuo (HC); Gödel: consistencia de HC; Cohen: independencia de HC [Maddy 1988]), versión sintética (Peirce: continuo supermultitudinario [Eisele 1979]; Brouwer: continuo intuicionista [Troelstra y Dalen 1988], Lawvere: continuo categórico [Lawvere 1982]; Reyes: modelos en haces [Moerdijk y Reyes 1991]). Se mostrará que la proliferación (vía 'forcing') de modelos no-estándar del continuo exhibe la esencial inadecuación de la recta real como modelo universal del concepto de continuidad, y se indicará cómo las diversas aproximaciones categóricas a un continuo sintético universal capturan parte del continuo supermultitudinario y modal de Peirce.

5. (b), (c), (d). *Operadores continuos en la teoría de modelos clásica*. Estructura uniforme de los espacios de estructuras [Caicedo 1992], equivalencia elemental y continuidad uniforme, red de modelos. Aprovechando el hecho de que los espacios de estructuras de la lógica clásica de primer orden poseen topologías naturales (Caicedo), se mostrará cómo conceptos fundamentales de la lógica (*e.g.*, equivalencia elemental) pueden verse como rupturas peirceanas de continuidad (comparando con aproximaciones sucesivas, según Fraïssé).

6. (b), (c), (d). *Hacia una lógica topológica de vecindades*. Lógica de los haces de estructuras [Caicedo 1994], continuidad semántica, conjuntos variables (Lawvere) [Mac Lane y Moerdijk 1992], genericidad [Caicedo 1994] y continuidad. Se mostrará cómo el paradigma de verdad puntual debería ser reemplazado por un paradigma de continuidad veritativa (Caicedo), y cómo tal substitución corresponde a una fundamental revisión de la lógica de los conceptos y objetos extendidos en tiempo y espacio —tal como lo había repetidamente propuesto

Peirce—, revisión que conlleva la eliminación de los 'puntos' por 'vecindades' y la eliminación de 'instantes' por 'momentos'.

7. (a), (b), (e). *La máxima pragmaticista y los paradigmas de la teoría de categorías.* Flechas, acción-reacción, universal-real *versus* existencial-contextual [Lawvere 1992], funtores representables, lema de Yoneda [Mac Lane y Moerdijk 1992], prehaces y haces, teoremas de representación de Freyd [Freyd y Scedrov 1990]. Se mostrará cómo el pensamiento categórico —esencialmente sintético y relacional— recupera técnica y plenamente la máxima pragmaticista; en particular, se demostrará cómo la inmersión de Yoneda, al pasar de objeto a funtor representable, transforma lo indicial en simbólico (peirceano) a lo largo de una compleción categórica, compleción que a su vez recupera ideas paradigmáticas del continuo peirceano (vía prehaces y haces categóricos); se demostrará también cómo diversas lógicas pueden verse como invariantes en los teoremas de representación de Freyd —coincidiendo tal invarianza con el lugar de la lógica en la clasificación de las ciencias, según Peirce—.

8. (b), (c), (e). *Matematización y metateoría de los gráficos existenciales alfa y beta.* Áreas, gráficos parciales y totales, topología de la hoja de aserción, definiciones recursivas, reglas de deducción topológico-existenciales, complejidad de las deducciones. Se hará una rigurosa presentación matemática de los gráficos existenciales alfa y beta de Peirce —sistemas equivalentes, respectivamente al cálculo proposicional clásico y a la lógica clásica de predicados [Roberts 1973]— (presentación que incluye un estudio topológico de la hoja de aserción peirceana, definiciones de áreas y cortes en la hoja de aserción, definiciones recursivas de las reglas de deducción alfa y beta), y se indicará un comienzo de estudio metateórico de los sistemas así precisados (equivalencias de reglas locales con teoremas de la lógica clásica de primer orden, estudio de deducciones óptimas).

9. (b), (c), (e). *Desarrollo del cálculo PAL y algunas comparaciones con el cálculo aritmético de las álgebras relacionales de Tarski.* Cálculo PAL, cálculo topológico-existencial en los gráficos alfa y beta, ligaduras, intensionalidad *versus* extensionalidad, teoremas de representación. Se desarrollará el cálculo PAL propuesto por Burch [1991] para recuperar algebraicamente las transformaciones topológicas de los gráficos existenciales alfa y beta, se desarrollará independientemente un cálculo topológico-existencial, y se compararán algunos resultados de esos cálculos intensionales con los teoremas extensionales de representación disponibles en las álgebras relacionales de Tarski [Tarski y Givant 1987].

10. (b), (c), (e). *Gráficos existenciales intuicionistas*. Introducción y no borramiento de dobles cortaduras, restricción acorde de demás reglas no intuicionistas, lectura 'geográfica' de la hoja de aserción, existencial constructivo, modelos topológicos, álgebras de Heyting. Se eliminará la regla alfa de borramiento de dobles cortaduras, obteniendo así un cálculo intuicionista de gráficos existenciales, cuya interpretación topológica (abiertos en una topología) y algebraica (elementos en un álgebra de Heyting) [Troelstra y Dalen 1988] debería ser naturalmente acorde con los aspectos terciarios (peirceanos) de la continuidad [Murphey 1961].

El programa precisa borradores de trabajo, avanzados por el investigador en los últimos años. Los estudios de caso (1) - (7) proporcionarán nuevos análisis históricos y nuevas contextualizaciones conceptuales. Los estudios (8) - (10) proporcionarán, además, nuevos resultados.

Metodología.

El proyecto incorpora y amplía algunas enseñanzas de una importante cantidad de cursos electivos y seminarios que el investigador dictó en el Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional de Colombia en los últimos cuatro años, muchos de ellos ofrecidos por primera vez en Colombia:

cursos: *Retículos I* (92-II), *Retículos II* (93-I), *Teorías axiomáticas de conjuntos (ZF, NBG, MKM, NF, L)* (93-II), *Teoría de la recursión* (94-I), *Algebra universal* (94-II), *Intuicionismo* (95-I), *Tópicos en lógica categórica* (95-II), *La lógica en Peirce* (96-II),

seminarios: *Historia de la lógica matemática I (Boole, Peirce)* (92-I), *Historia de la lógica matemática II (Cantor)* (92-II), *Historia de la lógica matemática III (Russell)* (93-I), *Sistemas lógicos, lógicas modales, lógicas normativas* (94-I), *Trazos filosóficos de la lógica matemática: 1870-1930* (95-II), *Trazos filosóficos de la lógica matemática. 1930-1970* (96-I).

El programa del curso *La lógica en Peirce* (96-II), base técnica de este proyecto, incluyó los siguientes ítems:

1, 2. *Presentación general. Algebra de la lógica I, II*. Monumentalidad de la obra peirceana. Cálculo proposicional clásico: lenguaje formal, cálculo deductivo (teorema de la deducción, axiomatización), definiciones y pruebas reticulares, procesos de falsación, procesos de resolución, conectivos completos.

3. *Cuantificadores. Lógica de relativos.* Cálculo de relativos, cuantificadores, índices y representaciones gráficas, procesos de resolución (formas normales).

4. *Máximas pragmática y pragmaticista. Las tres categorías peirceanas.* 'Consecuencias de cuatro incapacidades'. 'Nueva lista de categorías'. Conocimiento simbólico, contextual, activo-reactivo. La tríada peirceana y la primera clasificación de los signos (ícono, índice, símbolo). Lecturas modales y topológicas de las categorías peirceanas: Uno, Dos, Tres. Matemáticas triádicas. Conjetura triádica.

5, 6. *Abducción, inducción, deducción.* Lugares dentro de las categorías peirceanas: niveles modales y sígnicos. Metodología de los procesos abductivos (rupturas, tesis, economía de la investigación, plausibilidad en la construcción de hipótesis, complejidad y control).

7. *Lógica triádica. Lógica de segundo orden.* Motivaciones modales y topológicas; emancipación de tercio excluso y principio de contradicción. Primeras tablas trivalentes. Hacia una lógica de las fronteras. Segundo orden: igualdad, principio de abstracción, construcciones conjuntistas (*singletons*, complementos, uniones vía fórmulas pragmaticistas minimales), comparaciones cardinales, definición de finitud.

8, 9. *Gráficos existenciales alfa y beta.* 'Apología del pragmaticismo'. Reglas minimales de construcción y transformación de los gráficos. Uniformidad de las reglas. Reglas en el contexto del lenguaje alfa axiomatizan cálculo proposicional clásico; las mismas reglas extendidas al contexto del lenguaje beta axiomatizan la lógica de relativos. El conocimiento relacional y contextual queda estrechamente ligado con la continuidad de la hoja de aserción y el manejo de la línea de identidad.

10. *Modalidades.* Tríada fundamental de modalidades: lecturas semiótica, lógica y topológica. Semánticas modales: estados de información, instancias de equivalencias. Gráficos existenciales gama: cortadura punteada, reverso de la hoja, libro de hojas de aserción.

11, 12. *Continuidad y sinequismo.* Continuo, general y real. 'Paso del nominalismo al realismo'. Continuidad y terceridad. Lectura topológica de tiempo y espacio: paradigma de continuidad veritativa versus verdad puntual. Matematización del infinito. Construcción del continuo peirceano como lo supermultitudinario. Continuo sintético. Gráficos existenciales y continuidad: a través del pragmaticismo y la lógica de relativos el continuo debería verse como un 'verdadero universal'. Precisiones de la conjetura triádica de Peirce: esbozo de demostración de la conjetura triádica en el contexto del álgebra de ligaduras que corresponde a las transformaciones de los gráficos existenciales (Burch).

13. *El legado lógico: Peirce y la teoría de modelos.* Ejemplos: limitaciones intrínsecas de los formalismos (Gödel) como ineludibles consecuencias de la máxima pragmaticista; modelos no-estándar del continuo (Cohen) como aproximaciones al continuo peirceano; lógica de los haces de estructuras (Caicedo) como adecuada formalización de la lógica de vecindades peirceana.

14. *El legado lógico: Peirce y la teoría matemática de categorías.* Ejemplos: paradigmas categóricos (Lawvere) como compenetraciones plenas de

la máxima pragmaticista; definiciones universales como precisión de la dicotomía peirceana real/universal *vs.* existente/contextual; lema de Yoneda como precisión del sinequismo; construcción de continuos sintéticos (Lawvere) como recuperación de aspectos del continuo peirceano; modalidades vía límites de construcciones en la frontera (Reyes) como precisión de lo modal-topológico en Peirce

A partir de enero de 1997, se espera estar concluyendo cada dos meses un estudio de caso, produciendo en cada circunstancia un texto en inglés de aproximadamente 20 páginas. La unificación de los estudios de caso (a través de una introducción general y adecuadas ligazones y envíos de un estudio a otro) se realizará en la etapa final del Proyecto, en el segundo semestre de 1998.

Justificación e importancia.

La arquitectónica peirceana del conocimiento estructura a uno de los más sólidos y originales sistemas que ha producido el pensamiento moderno. Incluir en él, de manera natural, aspectos revolucionarios de la lógica matemática contemporánea (como son: la demostrable relatividad de la verdad, la alterabilidad de los conceptos de acuerdo a sus diversas formalizaciones, las ineludibles limitantes del pensamiento complejo, la comprensión de los fenómenos a través de rupturas de continuidad, etc.), le puede proporcionar a la lógica misma una mayor solidez conceptual y un mayor espectro de influencias metodológicas.

Hasta el momento, ningún texto de un solo autor ha tratado de recuperar —dentro de la lógica matemática contemporánea— la amplia gama de intereses lógicos de Peirce. Los trabajos han sido colectivos [Houser 1997] y casi siempre marcados por énfasis históricos, no matemáticos. No se ha tratado de insertar a Peirce en la lógica actual y, menos aún, no se ha tratado de *demostrar* que muchos de los desarrollos actuales de la lógica matemática pueden entenderse más cabalmente gracias a las conceptualizaciones peirceanas.

Cronograma de actividades.

Enero 1997 - Agosto 1998: desarrollo y escritura de los estudios de caso. Septiembre 1998 - Diciembre 1998: unificación y corrección general.

Cupos para estudiantes.

Los temas de trabajo son amplios y de largo alcance. El investigador dirige ya dos trabajos de grado en Filosofía, los cuales enfatizan aspectos filosóficos (Gonzalo Baquero: *Fenomenología semiótico-estructural: teorías de la percepción en Russell, Cassirer y Peirce y su crítica a través de la teoría de categorías de la matemática contemporánea*; Lucía Velasco: *La cosmología peirceana y la física matemática contemporánea: análisis lógico y consecuencias filosóficas*).

El énfasis matemático daría lugar a otros temas de tesis en matemáticas:

• 1 cupo de Doctorado: edición exhaustiva, revisión, contextualizaciones contemporáneas y desarrollos del *Logic Notebook*, extenso cuaderno manuscrito de apuntes lógicos que Peirce llevó a lo largo de toda su vida.

• 2 cupos de Magister: *Peirce y la teoría de modelos*, *Peirce y la teoría de categorías*.

• 1 cupo de Pregrado: *Álgebras bi-Heyting y modalidades parciales peirceanas*.

Referencias

Textos de Peirce.

[CP] PEIRCE, C. S. 1931-1958. *Collected Papers*, 8 vols. (Eds. Hartshorne, Weiss y Burks). Cambridge: Harvard University Press. Edición electrónica (CD-ROM): Intelex Corporation, 1992.

[W] __________. 1982-1993. *Writings (A Chronological Edition)*, 5 vols. hasta la fecha (edición contemplada en 30 vols.). Bloomington: Indiana University Press.

[NEM] __________. 1976. *The New Elements of Mathematics*. 4 vols. (Ed. Eisele). The Hague: Mouton.

[N] __________. 1975-1987. *Contributions to the Nation*. 4 vols. (eds. Ketner y Cook). Lubbock: Texas Tech University Press.

[MF] __________. 1986. *The Published Works of Charles Sanders Peirce*. Edición en microficha. Bowling Green: Philosophy Documentation Center.

[MS] __________. 1966. *The Charles S. Peirce Papers*. Edición en microficha. Cambridge: Harvard University Library. Photographic Service.

Sitios y listas de trabajo sobre Peirce en Internet.

• gopher://gopher.ttu.edu:70/11/Pubs/ransdell (J. Ransdell coordina, en Texas Tech University, la lista de trabajo 'peirce-l'; el ponente de este Proyecto está inscrito y es participante activo).

• http://indyunix.iupui.edu/home/peirce.html (Sede electrónica de la edición definitiva de la obra de Peirce, que se desarrolla en Indiana University).

• http://www2.peirce.org/peirce (Serie de conexiones sobre Peirce en Internet).

Fernando Zalamea (1959, Bogotá) es profesor asociado en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Colombia. Ph. D. (1991) de la Universidad de Massachusetts (Recursión en Categorías). Ensayista (Libro sobre Bajtín) y crítico cultural (reseñas semanales en la prensa colombiana). Dirige desde 1992 un Seminario de Historia de la Lógica Matemática.

Bibliografía secundaria.

BARWISE, J. y FEFERMAN, S. 1985. *Model Theoretic Logics*. New York: Springer.

BURCH, R. 1991. *A Peircean Reduction Thesis. The Foundations of Topological Logic*. Lubbock: Texas Tech Press.

CAICEDO, X. 1992. "Continuous Operations on Spaces of Structures". *Apuntes Matemáticos* 16. Departamento de Matemáticas. Universidad de los Andes. Bogotá.

__________. 1994. "Lógica de los haces de estructuras". *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* 19: 2-18.

EISELE, C. 1979. *Studies in the Scientific and Mathematical Philosophy of Charles Sanders Peirce*. The Hague: Mouton.

Fisch, M. 1986. *Peirce, Semeiotic and Pragmatism*. Bloomington: Indiana University Press.

FREYD, P. y SCEDROV, A. 1990. *Categories, Allegories*. Amsterdam: North-Holland.

HOUSER, N. 1997. *et al. Studies in the Logic of Charles S. Peirce*. Bloomington: Indiana University Press (por aparecer).

KETNER, K. L. *et al.* 1981. *Proceedings of the C.S. Peirce Bicentennial International Congress*. Lubbock: Texas Tech Press.

LAWVERE, F. W. 1982. "Introduction", en: F.W. Lawvere (ed.), *Categories in Continuum Physics*, Springer, New York, 1982, Pp. 1-16.

__________. 1992. "Some Thoughts on the Future of Category Theory", en: F. W. Lawvere (ed.), *Proceedings Como Meeting on Category Theory (1991)*. New York: Springer, Pp. 1-13.

LISZKA, J. J. 1996. *A General Introduction to the Semeiotic of Charles S. Peirce*. Bloomington: Indiana University Press.

MAC LANE, S. y MOERDIJK, I. 1992. *Sheaves in Geometry and Logic*. New York: Springer.

MADDY, P. 1988. "Believing the axioms I, II". *Journal of Symbolic Logic* 53: 481-511, 736-764.

MOERDIJK, I. y REYES, G. 1991. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*. New York: Springer.

MURPHEY, M. G. 1961. *The Development of Peirce's Philosophy*. Cambridge: Harvard University Press.

ODIFREDDI, P. 1989. *Classical Recursion Theory*. Amsterdam: North-Holland.

ROBERTS, D. 1973. *The Existential Graphs of Charles S. Peirce*, The Hague: Mouton.

SIMPSON, S. 1985. "Reverse Mathematics", en: A. Nerode (ed.), *Recursion Theory*. Providence: AMS, Pp. 461-471.

__________. 1988. "Partial realizations of Hilbert's Program". *Journal of Symbolic Logic* 53: 349-363.

TARSKI, A. y GIVANT, S. 1987. *A Formalization of Set Theory without Variables*. Providence: AMS.

TROELSTRA, A. S. y VAN DALEN, D. 1988. *Constructivism in Mathematics*, 2 vols., Amsterdam: North-Holland.