Mathesis 11 (1995) 251-283.

Kurt Gödel: Ensayos inéditos

Carlos Torres Alcaraz

Kurt Gödel. *Ensayos inéditos*. Francisco Rodríguez Consuegra (editor). Prólogo de W. V. Quine. Barcelona. Biblioteca Mondadori. 1994.

1. El legado de Gödel

Justo en el momento en que el formalismo parecía cegar nuestra visión de la matemática y el programa de Hilbert dominaba la escena, Gödel enseñó que no hay ningún método que agote el contenido de esta ciencia ni, como bien decía Euclides, una senda real a su conocimiento. Mostró que ésta es también descubrimiento, tal vez revelación, y que detrás de nuestro saber hay cosas que no acabamos de comprender, entes que con nuestra limitada sensibilidad e intuición no podemos percibir plenamente. Este fue, quizá, su principal legado; en esto consiste su grande y verdadera originalidad.

Inmerso en el silencio, Gödel sostuvo una visión distinta de la matemática que, según su propio testimonio, le guió en sus investigaciones. Alentado por sus cuestionamientos y la firmeza de sus convicciones, abordó e iluminó con ideas novedosas múltiples problemas relativos al fundamento de la matemática. No obstante, estas tareas las llevó a cabo sin exponer sus motivos. ¿Por qué en sus primeros escritos no brotaron sus firmes convicciones realistas, platónicas? Aunque de ellas había admirables ejemplos en Cantor y Hermite, debió sentir esa inferioridad en que se tuvo en su tiempo a quienes osaban suponer que la matemática era trascendental, que iba más allá de nuestra limitada experiencia. Sin renunciar a sus creencias, calladamente, pudo apreciar el valor relativo del método axiomático y ahondar más que cualquier otro en el fundamento de esta disciplina y su relación con la filosofía. A cambio, nos legó un penetrante análisis del papel de la formalización en matemáticas y sus limitaciones. Quienes se sorprenden al descubrir el realismo de Gödel no se detienen a considerar que tras ello hay una legítima convicción, tan antigua como la matemática misma: la de que sus regiones vitales versan sobre ideas que tiene existencia propia. Esta creencia se fortaleció tras el estudio crítico de los fundamentos, en el que vislumbró una matemática real, incompletable e inagotable.

2. En defensa del paraíso

Más que la de cualquier otra ciencia, la naturaleza de la matemática se revela como un misterio difícil de aclarar. Su aparente objetividad, el carácter inmaterial de sus objetos, sus aplicaciones en las ciencias empíricas, la presencia del infinito en el medio de sus reflexiones o la supuesta universalidad de sus conclusiones se presentan ante la mente del hombre como enigmas que no logra elucidar. El cometido del matemático como tal parece sobrenatural, como si participase de una verdad divina que le es permitido explorar, mas no cambiar, como si ésta formase parte de un orden inmaterial en el que reside el infinito, el *paraíso cantoriano*. Quien se haya interesado en esta disciplina no ha dejado de preguntarse por su naturaleza y la de sus objetos, y aunque han sido múltiples los intentos por responder a tales interrogantes no hay una respuesta satisfactoria. Lejos de la prístina claridad de las teorías matemáticas, la filosofía de la matemática se agita en medio de controversias que parecen no tener fin.

Gödel no fue ajeno a la polémica. Por el contrario, defendió tenazmente sus creencias, tratando en todo momento de validar sus especulaciones filosóficas sobre la base de una cuidadosa interpretación de las investigaciones en torno al fundamento de las matemáticas. También valoró detenidamente los argumentos de sus adversarios. Los ensayos inéditos son un testimonio del interés de Gödel por explorar otras posibilidades, una muestra de su incesante búsqueda de la verdad. Jamás desechó ninguna opción sin antes ponderar sus implicaciones. Dotado de una inclinación natural a pensar en todos los aspectos de cada alternativa, en sus manos toda concepción que halló de interés fue examinada en extenso hasta precisar sus consecuencias más recónditas.

La capacidad de Gödel para explorar virtualmente todas las posibilidades lógicas de cualquier sistema conceptual es casi mítica. En su libro *Reflexiones sobre Kurt Gödel* Hao Wang refiere la siguiente anécdota sobre el poder reflexivo de Gödel y su manía por descubrir conexiones lógicas en situaciones donde la mayoría de nosotros ni siquiera presta un poco de atención. El relato se refiere a la entrevista a la que debió someterse en 1948 para obtener la ciudadanía estadounidense y a la que Einstein y Morgenstern acudieron como testigos.

> Aunque el examen que Gödel tenía que pasar no encerraba ninguna dificultad, Gödel se preparó seriamente para él y se estudió la constitución americana con todo detalle. Un día antes de la entrevista, Gödel le dijo a Morgenstern que había descubierto una posibilidad lógico-legal de transformar los Estados Unidos en una dictadura. Morgenstern vio que la hipotética posibilidad y su probable remedio suponían una compleja cadena de razonamientos, y que su consideración no resultaba lo más indicado para la entrevista, por lo que aconsejó a Gödel que no dijera nada de su descubrimiento.
>
> A la mañana siguiente, Morgenstern trasladó en coche a Einstein y a Gödel desde Princeton hasta Trenton. Einstein estaba informado; por el camino contó una historia tras otra para distraer a Gödel de sus explicaciones teórico-constitucionales, aparentemente con éxito. En la oficina de Trenton el oficial encargado era el juez Philip Forman, que era el que, en 1940, se había encargado del caso de Einstein y con quien éste tenía una estrecha amistad. Los saludó amablemente y les invitó a los tres a asistir al examen (normalmente privado) de Gödel.
>
> El juez empezó diciendo, "usted tenía hasta ahora la ciudadanía alemana". Gödel le interrumpió, "perdone señor, austríaca". "¡Ah ya, el maldito dictador!, pero, afortunadamente, eso no es posible en América." "Al contrario", le interrumpió Gödel, "yo sé cómo puede suceder." Entonces los tres unieron sus esfuerzos para refrenar a Gödel con objeto de poder volver a la rutina del examen [Wang 1991, 177-178]

3. Carácter de los ensayos inéditos

Los ensayos inéditos editados por Rodríguez Consuegra forman parte de la obra filosófica de Gödel sobre la matemática. Fueron hallados en su *Nachlass* u obra póstuma, aunque ya se tenía noticia de su existencia. Se trata de los ensayos "Algunos teoremas básicos sobre los fundamentos de la matemática y sus implicaciones filosóficas", de 1951, "¿Es la matemática sintaxis de lenguaje?, III", tal vez de 1953-1954, y "¿Es la matemática sintaxis del lenguaje?, VI", quizá de 1955-1956. Estos escritos sufrieron innumerables correcciones por parte de Gödel, quien finalmente terminó por no entregarlos para su publicación. El primero de ellos corresponde a la llamada conferencia Gibbs, pronunciada ante la *American Mathematical Society* el 26 de diciembre de 1951 en la Universidad de Brown, en Providence, Rhode Island.[1] Los otros dos forman parte de una serie de seis intentos por culminar un ensayo sobre Carnap que le fue solicitado por Schilpp. Más que una mera traducción de los trabajos de Gödel, lo que Rodríguez Consuegra nos ofrece es

1. La *American Mathematical Society* honra todos los años la memoria de Josiah Willard Gibbs (1839-1903) con una conferencia por invitación. A Gödel correspondió la de 1951.

una reconstrucción de los mismos. En un capítulo dedicado al carácter y origen de los manuscritos, el editor narra las dificultades que hubo de afrontar para lograr esta bien realizada versión de los manuscritos, exponiendo los criterios que empleó para su selección y reconstrucción y describiendo el estado en que los encontró en la Biblioteca Firestone de la Universidad de Princeton. Cito en extenso algunos pasajes relativos al primero de ellos:

> La conferencia Gibbs constituye sin la menor duda lo que John Dawson me describe en una carta reciente como "la pesadilla de un editor". El manuscrito original está en inglés, sin título, escrito a puño y letra de Gödel, usando siempre un lápiz y con restos evidentes de haber borrado una y otra vez y haber escrito encima de lo borrado. Además, Gödel cambió muchas veces de opinión respecto de lo que efectivamente debía leerse en Providence, así que existen numerosos fragmentos tachados. Como consecuencia [...] de la escritura a lápiz [...] tenemos que muchas partes del texto [...] han quedado sumamente borrosas y a veces casi ilegibles. A todo ello hay que añadir un extraño esfuerzo de Gödel por ahorrar papel, lo cual se pone de manifiesto en una utilización exhaustiva de cada una de las páginas, en las que casi no existe margen ni a los lados ni en los extremos superior e inferior.
>
> Para colmo, el manuscrito se compone de cuatro partes: el texto principal de la conferencia (número 040293 de catalogación, de 43 folios); las notas al pie de página (040295, 26 folios; y 040296, 5 folios), y las interpolaciones (040294, 18 folios). El problema con las interpolaciones es que no sólo hay que insertarlas, mediante un muy complicado sistema de claves gráficas, en el texto principal, sino también en el de las notas, e incluso a menudo en el de las interpolaciones mismas. Ello conduce a un sistema de referencias cruzadas de complejidad casi intolerable, donde a veces se llega a trabajar con cinco o seis niveles (interpolación a la interpolación a la interpolación de una nota dividida en varios fragmentos, pertenecientes a páginas distintas, de un párrafo de texto principal también fragmentado), todo ello muy a menudo escrito, borrado, y reescrito, y con trozos tachados, y otros también tachados pero con una nota indicando que la tachadura no vale [Rodríguez Consuegra 1994, 141-142].

La cita anterior permite advertir algunos aspectos de la personalidad de Gödel, tales como sus hábitos de trabajo, sus manías, su cautela y reserva frente a aquellas partes de su obra que consideró inacabadas, su repulsa a la crítica y la discusión y su obstinación por revelar sus ideas de manera concluyente y no controvertida. A esto habría que aunar su carácter reservado (su hermano Rudolf ignoraba el lugar preeminente que aquél ocupó hasta que se enteró de ello de manera indirecta). Otros factores importantes en su vida fueron su débil constitución y su salud precaria. Su muerte encierra una paradoja. Aparentemente víctima de un ataque de paranoia, y ante la ausencia de su esposa por motivos de salud, Gödel se rehusó a probar el alimento que le procuraban sus amigos bajo la sospecha de que estaba envenenado. Cuando su mujer volvió a casa antes de la Navidad de 1977 le convenció para que ingresara en el hospital, aunque esto no significó ningún cambio en su actitud. En su batalla por no morir envenenado, Gödel falleció de inanición el 14 de enero de 1978.

> Físicamente, Gödel fue un hombre no muy bien dotado. En las imágenes que de él se conservan se advierte un individuo dueño de un cuerpo endeble. Su gesto es adusto, sombrío. Sus gafas redondas y una nariz un poco alargada esconden una mirada ya de por sí inexpresiva, y se advierte en él una voluntad constante de compostura en el ademán externo. Sus signos físicos denotan su naturaleza de pensador más preocupado por lo que pasa en otros mundos que en su alrededor. Prefiere vestir en tonos grises, y el mismo color blanco, en él, luce tenue, austero. Pero dentro de esa sobriedad aguarda un espíritu sagaz, un soñador, alguien que se deleita con largos paseos por el transmundo platónico cuya existencia objetiva encuentra innegable. Está usted pronto a compartir sueños y reflexiones con él.

4. Antecedentes matemáticos

En esta reseña nos habremos de referir a la conferencia Gibbs. La selección obedece a las siguientes razones: (1) en ella Gödel expone con profusión de detalles su concepción objetivista de la matemática, (2) también examina en extenso las implicaciones filosóficas de sus célebres resultados matemáticos, (3) gran parte del material considerado reaparece o sirve de apoyo para la lectura de los otros dos ensayos, y (4) es el de mayor riqueza matemática entre los tres ensayos que se publican en esta edición.

Si bien Gödel inicia con una breve alusión a sus teoremas limitativos, su exposición es informal y omite ciertos detalles técnicos a los que después alude en sus argumentos, contentándose con expresar sus resultados en un lenguaje próximo a la filosofía. Algo semejante se puede decir de la relación que Rodríguez Consuegra hace de los mismos. Para llenar este vacío es que presentamos una síntesis de los teoremas de incompletud de Gödel y del contexto en que fueron formulados, a fin de proporcionar el mínimo de información técnica y teórica que precisa el lector.

Ya en 1900 Hilbert privilegia al método axiomático como método por excelencia para representar y consolidar lógicamente el contenido de nuestro conocimiento.[2] Con su utilización pretende, entre otras cosas,

2 Véase Hilbert 1900, 18 y 21-22 y Hilbert 1917, 23 y 35.

evitar los problemas que se suscitan en relación a la existencia del agregado de todos los números reales y, en general, en relación a la existencia de conjuntos infinitos. Según esto, por conjunto de números reales debemos entender un sistema de objetos cuyas relaciones se encuentran determinadas por un sistema finito y cerrado de axiomas (de los que hay distintas formulaciones). En este contexto una afirmación será válida sólo si puede deducirse de los axiomas por medio de un número finito de inferencias lógicas. Esta utilización de los sistemas axiomáticos habría de extenderse a prácticamente todos los ámbitos de la matemática en el siglo veinte.

Una característica de los sistemas axiomáticos es que la naturaleza de los objetos considerados pasa a ocupar un sitio irrelevante. Dice Cavaillès [1992, 78].

> Es solamente por un prejuicio realista que nos preocupamos por los objetos cuando lo único que importa [... es] el trabajo intelectual efectivo. [...] En efecto, ¿qué es una teoría sino 'el establecimiento de cierta armazón de conceptos' que permiten poner en orden los hechos?

Para Gödel esta exclusión de los objetos tiene el defecto de no distinguir entre *verdad* y *demostrabilidad*, y plantea el problema de precisar si esta segunda noción es un reemplazo adecuado de la primera. Por ejemplo, ¿puede un sistema axiomático para la aritmética ser completo en el sentido de que toda proposición verdadera de la teoría sea demostrable en él? Además, como los axiomas son arbitrarios, existe la posibilidad de que sean incoherentes entre sí, lo que crea la necesidad de evidenciar que el sistema es consistente, es decir, no contradictorio. Pero, ¿cómo probar la ausencia de contradicción?, ¿recurriendo al significado de los axiomas, cuando esto es precisamente lo que se trata de evitar?

En la década de los años veinte, Hilbert sugirió un camino para superar este problema: habría que convertir las demostraciones en el objeto de un estudio concreto. En efecto, para establecer que un sistema axiomático es consistente, lo propio es probar que no es posible *deducir* ninguna contradicción a partir de sus axiomas. Esto requiere en particular que los modos de inferencia admitidos en el sistema se hagan explícitos y que las demostraciones propias de la teoría se reemplacen por fórmulas y reglas susceptibles de una investigación concreta; es decir, se requiere de una formalización estricta de la teoría que incluya a sus demostraciones. Éste fue el origen de los formalismos. A éstos hubo que superponer una teoría de la demostración, una metamatemática cuya función sería establecer la consistencia de los axiomas por medio de un investigación de naturaleza combinatoria. A diferencia de la teoría formal, en la metamatemática se utiliza la inferencia intuitiva y sus enunciados son plenamente significativos.[3] A este proyecto se le dio en llamar el *programa de Hilbert*.

Como ejemplos de formalismos tenemos el de Russsell y Whitehead de *Principia Mathematica* y el de Zermelo-Fraenkel para la teoría de conjuntos.

> Estos dos sistemas son tan vastos que en ellos quedan formalizados todos los métodos de demostración de uso corriente en la matemática actual, es decir, reducidos a unos cuantos axiomas y reglas de inferencia. Uno puede conjeturar entonces que estos axiomas y reglas de inferencia son suficientes para decidir cualquier cuestión matemática que se pueda expresar en estos sistemas. Mostraremos en seguida que éste no es el caso, sino que, por el contrario, hay en los dos sistemas recién mencionados problemas relativamente simples de la teoría de los enteros que no pueden ser decididos con base en sus axiomas. Esta situación no es privativa de estos sistemas, ya que se extiende a una amplia clase de sistemas formales, entre los que se encuentran, en particular, aquellos que resultan de los dos ya mencionados por medio de la añadidura de un número finito de axiomas, siempre que ninguna proposición [aritmética] falsa ... se torne demostrable en virtud de los axiomas adicionales [Gödel 1931, 87-88]

Por 'proposiciones aritméticas' se entienden aquellas en las que sólo pueden figurar, además de las constantes lógicas $\neg$ (no), $\vee$ (o), $\wedge$ (y), $\rightarrow$ (implica), = (idéntico a), $\forall x$ (para todo) y $\exists x$ (existe), las constantes numéricas 0 (cero), 1 (uno), 2 (dos), etc., y las nociones de + (adición), y $\cdot$ (multiplicación), y en las que los prefijos $\forall x$ y $\exists x$ al igual que la constante = sólo se aplican a números naturales. En su trabajo, Gödel utiliza el sistema P que se obtiene al superponer al sistema de *Principia Mathematica* los axiomas de Peano. Uno de los hechos de limitación al método formal se condensa en la siguiente versión del teorema VI de su artículo de 1931

> Teorema VI. Para cada clase κ recursiva y ω-consistente de fórmulas hay una fórmula aritmética $\tau(y)$ (en la que y es la única variable libre) tal que ni $\forall y\,\tau(y)$ ni $\neg\forall y\,\tau(y)$ es derivable a partir de κ.[4]

3. Para una explicación más detallada de la naturaleza de los sistemas formales y de la metamatemática, véase Hilbert 1922 o Kleene 1974.
4. El concepto de 'clase recursiva' es, según la tesis de Church, el correlato matemático de la noción de *clase decidible*, es decir, de clase para la que se cuenta con un algoritmo (en sentido intuitivo) que permite *decidir*, para cualquier número k, si éste pertenece o no a la clase. De igual modo se cuenta con el concepto de predicado recursivo de n argumentos $R(x_1, \ldots, x_n)$. Sobre la ω-consistencia véase la nota número 8.

Este es el primer teorema de incompletud de Gödel. En él se afirma la existencia de proposiciones indecidibles para una vasta clase de sistemas formales. Para su demostración hubo de imaginar su famoso método de aritmetización, que asocia a cada sucesión finita s de signos un único número natural $g(s)$ (su *número de Gödel*) y a cada sucesión S de sucesiones finitas de signos (entre las que se encuentran las pruebas formales) un único número natural $G(S)$ (su *número de secuencia*). Esto le permite relacionar un predicado aritmético con cada noción utilizada en la descripción del sistema P, de modo que a nociones tales como las de 'término', 'fórmula', 'axioma', 'consecuencia inmediata' o 'prueba' corresponden predicados aritméticos recursivos. Así, por ejemplo, a la noción de 'axioma' corresponde un predicado aritmético $A(a)$ que es satisfecho única y exclusivamente por los números a asignados a los axiomas de P (*i.e.*, los números de Gödel de los axiomas).

La demostración del teorema VI se apoya en el siguiente lema, al que denominamos *teorema V* siguiendo la nomenclatura del artículo de 1931:

> Teorema V. Para cada predicado recursivo $R(x_1, \ldots, x_n)$ existe una fórmula aritmética $r(x_1, \ldots, x_n)$ (en la que $x_1, \ldots, x_n$ son las únicas variables libres) tal que para cualesquiera números $k_1, \ldots, k_n$ se tiene que

Si $R(k_1, \ldots, k_n)$, entonces $r(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n)$ es derivable en P

Si $\neg R(k_1, \ldots, k_n)$, entonces $\neg r(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n)$ es derivable en P.[5]

Con base en este lema se puede demostrar el teorema VI como sigue.

Las fórmulas con una sola variable libre x del tipo de los números naturales se pueden ordenar en una sucesión $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots \phi_n(x), \ldots$ siguiendo la distribución de sus números de Gödel. Esta enumeración permite definir un predicado aritmético $PR_\kappa \subset N^2$ como sigue:

$PR_\kappa(a, b)$ si y sólo si a es una prueba a partir de κ de la fórmula $\phi_b(\bar{b})$.[6]

Del hecho de que todas las nociones que figuran en la definición anterior ('substitución', 'cifra', 'prueba', etc.) son recursivas se sigue que el predicado $PR_\kappa(a, b)$ también es recursivo. Por consiguiente, hay una fórmula aritmética $pr(y, x)$ (en la que las únicas variables libres son x e y)

5. Las cifras $\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n$ son las expresiones que representan en el sistema a los números $k_1, \ldots, k_n$.
6. En otras palabras, a es una κ-prueba de la fórmula que resulta al sustituir en la fórmula $\phi_b(x)$ la única variable libre por la cifra (correspondiente a su índice b). Como se ve, la definición tiene como base el método diagonal de Cantor.

que lo representa en el sentido del teorema V. Considérese ahora la fórmula

$$\forall y \neg pr_\kappa(y, x)$$

Como esta última expresión sólo tiene libre a la variable x, es idéntica con alguna fórmula $\phi_p(x)$ de la lista. Sea q un número natural cualquiera. Interpretada de acuerdo con el sentido usual de sus símbolos, la fórmula $\phi_p(\bar{q})$ dice: 'Para todo y, $\neg PR_\kappa(y, q)$', o, simplemente, 'La fórmula $\phi_p(\bar{q})$ no admite derivación a partir de κ'. Considérese la fórmula $\phi_p(\bar{p})$, es decir, la fórmula

$$\forall y \neg pr_\kappa(y, \bar{p})$$

que no tiene variables libres. Desde la perspectiva de la numeración de Gödel, $\phi_p(\bar{p})$ expresa la proposición de que $\phi_p(\bar{p})$ no es derivable a partir de κ, es decir, afirma su propia indemostrabilidad.

Supongamos que la clase recursiva κ es consistente. Si $\phi_p(\bar{p})$ fuese derivable a partir de κ, habría un número a tal que $PR_\kappa(a, p)$ y, por el teorema V, la fórmula $pr_\kappa(\bar{a}, \bar{p})$ *sería derivable en* P (y por ende en κ). De aquí que la fórmula $\exists y\, pr_\kappa(y, \bar{p}) \equiv \neg\phi_p(\bar{p})$ sería igualmente deducible en κ, por lo que esta clase sería inconsistente. Por consiguiente, *Si la clase κ es consistente, la fórmula* $\phi_p(\bar{p})$ *es inderivable a partir de κ*.[7]

Supongamos ahora que la clase recursiva κ es ω-consistente y, por tanto, consistente.[8] Como la consistencia simple implica la inderivabilidad de $\phi_p(\bar{p})$, se tiene que ninguno de los números 0, 1, 2, ... es el número de secuencia de una prueba de $\phi_p(\bar{p})$, por lo que los predicados

$$\neg PR_\kappa(0, p),\ \neg PR_\kappa(1, p),\ \neg PR_\kappa(2, p),\ \ldots$$

son todos verdaderos. Por el teorema V, se infiere que cada una de las fórmulas

$$\neg pr_\kappa(\bar{0}, \bar{p}),\ \neg pr_\kappa(\bar{1}, \bar{p}),\ \neg pr_\kappa(\bar{2}, \bar{p}),\ \ldots$$

es derivable en P (y por ende en κ). Si $\neg\phi_p(\bar{p}) \equiv \exists y\, pr_\kappa(y, \bar{p})$ fuese derivable, la clase κ sería ω-inconsistente, lo que sería contrario a la hipótesis.

---

7. Cabe señalar que del hecho de que $\phi_p(\bar{p})$ no es κ-derivable se sigue que esta proposición es verdadera.
8. Un formalismo es ω-inconsistente si para algún predicado $P(x)$ se tiene $\neg P(\bar{n})$ que es demostrable para cada $n \in \mathbb{N}$ al igual que $\exists x P(x)$, de lo contrario se dice que es ω-consistente. La ω-consistencia es una condición más poderosa que la consistencia simple. Esta hipótesis fue eliminada en 1936 por Barkley Rosser. Rosser demostró que es suficiente con suponer que el sistema P es consistente para asegurar la existencia de proposiciones aritméticas indecidibles en él. La demostración es constructiva en el sentido de que se puede exhibir un enunciado aritmético ϕ (el *enunciado de Rosser*) con tales características.

Por consiguiente, si la clase κ es ω-consistente, la fórmula $\phi_p(\bar{p})$ es formalmente indecidible (ni demostrable ni refutable), mas como proposición aritmética es verdadera.[9] La fórmula aritmética $\tau(y)$ cuya existencia se asegura en el teorema VI es justamente $\neg pr_\kappa(y, \bar{p})$.

Los resultados precedentes tienen consecuencias sorprendentes en conexión con las pruebas de consistencia del sistema P y sus extensiones, enunciándose tales consecuencias en el teorema XI del artículo de 1931 como sigue:

> Teorema XI. Sea κ una clase recursiva de fórmulas. Si κ es consistente, la fórmula $consis_\kappa$ que asevera la consistencia no es derivable a partir de κ. En particular, la consistencia de P (en caso de que P sea no contradictorio) no es demostrable en P

La fórmula $consis_\kappa$ se puede construir como sigue. Sea k un número natural. Por consideraciones metamatemáticas sabemos que la clase κ es consistente si y sólo si es imposible derivar a partir de ella la fórmula $\neg(\bar{k} = \bar{k})$, instancia de substitución de la fórmula $\neg(x = x)$. Como esta última expresión sólo contiene libre a la variable x, es un elemento de la sucesión $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_h(x), \ldots$ en la que ocupa, digamos, el lugar h.

Luego la fórmula

$$consis_\kappa \equiv \forall y \neg pr_\kappa(y, \bar{h})$$

interpretada de acuerdo con el sentido usual de sus símbolos, asevera que la fórmula $(\bar{k} = \bar{k})$ no es derivable a partir de κ, lo que en su acepción metamatemática equivale a decir que la clase κ es consistente. Por tanto, la proposición

(*) Si la clase κ es consistente, entonces la fórmula $\phi_p(\bar{p})$ es inderivable a partir de κ se formaliza en el sistema mediante la fórmula

(**) $consis_\kappa \rightarrow \phi_p(\bar{p})$[10]

Aunque no es posible dar una prueba de este hecho en un espacio limitado, el caso es que esta fórmula es un teorema de P (y de todas sus extensiones, incluyendo a κ).

---

9 La indecidibilidad de $\phi_p(\bar{p})$ pone en evidencia las limitaciones de la formalización: el campo de las proposiciones demostrables no coincide ni lo puede hacer con el de las proposiciones verdaderas.

10. Recuérdese que la fórmula $\phi_p(\bar{p})$ tiene el sentido de afirmar que $\phi_p(\bar{p})$ es indemostrable, cosa que también se afirma en el consecuente de la proposición metamatemática anterior

La idea es la siguiente: el razonamiento por medio del cual se demostró (*) puede de hecho transmutarse en una derivación formal de (**), pues todas las nociones hasta ahí definidas y todas las proposiciones hasta ahí demostradas son expresables y derivables en P. De lo anterior resulta que si κ es consistente, la fórmula $consis_{\kappa}$ no es derivable a partir de κ, ya que de ella misma y de (**) se inferiría directamente la fórmula $\phi_p(\overline{p})$. Esto tiene como consecuencia el siguiente hecho: no hay ninguna prueba de consistencia de P que pueda ser formalizada en P en caso de que este sistema sea consistente. Lo anterior es generalizable a todos los sistemas conocidos para la teoría de conjuntos, tales como el de Zermelo-Fraenkel, el de Quine o el de von Neumann, y será válido también en relación a cualquier sistema S que satisfaga las siguientes condiciones:

(1) La clase de los axiomas de S y las reglas de inferencia (es decir, la relación de "consecuencia inmediata") son definibles recursivamente.

(2) Toda relación recursiva es representable (en el sentido del teorema V) en el sistema S.

En términos generales podemos decir que si algún razonamiento es capaz de establecer la consistencia de un formalismo S que sea ω-consistente y que satisfaga las condiciones (1) y (2) anteriores, dicho razonamiento deberá contener algún argumento que no posea contraparte formal dentro del sistema. En breve: ningún sistema formal que satisfaga ciertas condiciones mínimas es capaz de probar su propia consistencia.

Los resultados anteriores fueron reforzados posteriormente con las siguientes mejoras. En 1934, Gödel, probó que para todo predicado recursivo primitivo $R(x_1, \ldots, x_n)$[11] hay dos polinomios $P(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ y $Q(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, cuyos coeficientes son números naturales, y una sucesión de cuantificadores tales que

$$R(x_1, \ldots, x_n) \equiv \Delta[P(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) = Q(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)]$$

donde las x y las y varían sobre los números naturales. La ecuación $P = Q$ es una ecuación diofántica desde el momento en que el dominio de variación de sus variables y sus soluciones se restringen a números naturales. De la expresión $\Delta[P = Q]$ se dice que es un problema

11. Los predicados recursivos primitivos constituyen una clase especial de predicados recursivos a la que pertenece $PRu(a, b)$.

diofántico. Dado que el predicado $PRf(u, b)$ es recursivo primitivo, el problema metamatemático '$\forall y \neg PRf(y, p)$' es equivalente a un problema diofántico de la forma $\forall y \Delta[P = Q]$. Estos resultados se pueden mejorar al punto en que la proposición indecidible se expresa en la forma $\forall y \Pi \Sigma\ [P = 0]$, donde Π es una sucesión de cuantificadores universales, Σ una sucesión de cuantificadores existenciales, y P un polinomio de grado menor o igual a 4. Por consiguiente, la proposición indecidible $\phi_p(\bar{p})$ es equivalente a un problema diofántico del tipo $\forall y_1 \ldots \forall y_m \exists x_1 \ldots \exists x_n P(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$.

Así, los teoremas limitativos se pueden parafrasear diciendo que *ninguna teoría formalizada puede responder a todas las cuestiones diofánticas de la forma descrita*, o que *no hay ningún algoritmo capaz de decidir todas las relaciones en que aparezcan tanto la suma como la multiplicación de números naturales*. Esto trae como consecuencia que en cada sistema para la teoría de conjuntos habrá problemas aritméticos simples que la teoría es incapaz de decidir, y que la clase de problemas aritméticos que una teoría será capaz de decidir depende de la elección de los axiomas para los conjuntos de los niveles más altos.

En la conferencia Gibbs, Gödel toma como sostén de sus reflexiones básicamente los resultados descritos en esta sección. Como veremos, del hecho de que la fórmula indecidible sea aritmética extrae interesantes consecuencias filosóficas.

Hasta aquí nos hemos ocupado básicamente de los aspectos matemáticos de la obra de Gödel y del modo en que éstos se expresan en un lenguaje próximo a la filosofía. En lo que al contexto filosófico respecta, Rodríguez Consuegra dedica la primera parte del libro a una detallada presentación del mismo, pudiéndose considerar lo expuesto en este ensayo-reseña como un complemento matemático. En efecto, en tres excelentes capítulos el autor ofrece una clara exposición y un lúcido análisis de los diversos aspectos de la filosofía de Gödel y examina en extenso aquellas ideas que entran en juego en los manuscritos, entre las que podemos mencionar la distinción analítico-sintético, la noción de intuición matemática y la analogía matemática-física. Presenta además un breve contexto de ideas y autores en el que expone de manera clara y sucinta algunas ideas de Frege, Quine, Tarski, Carnap, Wittgenstein, Russell y otros. En este punto no nos deja de extrañar el poco espacio que dedica a Hilbert y Brouwer, dos pilares de la filosofía de la matemática en el siglo veinte.

Lo anterior quizá tiene su origen en la distinta percepción que filósofos y matemáticos pudieran tener de una misma situación. Consideremos, por ejemplo, la obra de Hilbert en torno a los fundamentos, la cual, desde una perspectiva matemática, reviste un enorme interés. Creo encontrar una explicación de tal atractivo en la índole de su proyecto: lo que pretende es dar un fundamento matemático a la matemática misma. Para ello recurre al método axiomático, no sólo en tanto que herramienta para conformar sus teorías, sino en tanto que única vía para dotarla de una sólida base. Dice Jean Dieudonné que fue Hilbert quien enseñó a los matemáticos a pensar axiomáticamente. Yo diría que también les ofreció una alternativa para acometer el problema del fundamento sin abandonar su disciplina.[12] En gran medida el interés por su obra deriva del hecho de que de sus investigaciones surgieron múltiples problemas que le dieron vida a nuestra ciencia, de que jamás renunció a su condición de matemático.[13]

Desde una perspectiva filosófica, lo que Hilbert pretende con su programa es aclarar la naturaleza del infinito, una *cuestión de honor para el entendimiento humano*. Con ello se arroga la tarea de devolver a las matemáticas su autonomía y pureza. Su obra es lo que podríamos llamar *filosofía matemática* que, más que una doctrina, es una tendencia, la que otorga a las matemáticas un lugar de privilegio en la comprensión de su naturaleza y estructura.

La obra de Gödel apunta precisamente en esta dirección. Él también, al igual que Hilbert, busca resolver las disputas filosóficas por medios matemáticos. De aquí la importancia de las investigaciones en torno a los fundamentos: sus resultados son un medio para paralizar los argumentos de sus adversarios, valorar las distintas concepciones que de la matemática han sido y validar en la medida de lo posible las suyas propias.

5. Filosofía de la mente

Según su propio testimonio, el trabajo de Gödel sobre el fundamento de las matemáticas estuvo motivado por la necesidad de aclarar ciertas cuestiones filosóficas. Entre los problemas que más poderosamente llamaron su atención se encontraban el de lograr una formalización completa de la matemática (¿es esto posible, o ésta es inagotable?), el de saber si la verdad se puede identificar con la demostrabilidad, y el de precisar hasta qué punto es posible justificar las más complejas

12 En efecto, en su programa Hilbert no elige otros métodos y procedimientos que los propios de la matemática: utilización del método axiomático, amplio uso del simbolismo, especificación precisa de los problemas por resolver e investigación exacta de las propiedades de los sistemas así construidos. Si bien algunos de estos elementos ya se encuentran en la obra de Bertrand Russell, lo hacen de manera poco integrada o teñidos por otros recursos un tanto ajenos a la matemática propiamente dicha. Por ejemplo, desde este punto de vista, la teoría de tipos o el axioma de reducibilidad parecen un tanto artificiales, al igual que la idea misma de reducir toda la matemática a lógica.

13 Ante el dilema de qué actitud asumir frente al problema del infinito en matemáticas, reacciona con las siguientes palabras: "Recordemos, en primer lugar, que somos matemáticos y que, en cuanto tales, nos hemos encontrado con frecuencia en situaciones igualmente difíciles. Recordemos, además, que ha sido el genial método de los elementos ideales el que en tales circunstancias nos ha salvado" [Hilbert 1925, 100]. Hilbert se remite así a la matemática misma como medio para resolver el problema de los fundamentos.

teorías matemáticas mediante pruebas elementales de su consistencia. No obstante, en la época en que Gödel abordó estas cuestiones prevalecía la idea de que sólo las pruebas de consistencia absoluta desarrolladas en el marco de la teoría de la demostración eran válidas, lo que suponía que toda consideración de carácter semántico debería evitarse (v. gr. la noción de verdad). En una carta jamás enviada a Yossef Balas, con fecha del 27 de mayo de 1970, aparece un párrafo tachado en el que Gödel explica que

> [...] a consecuencia de los prejuicios filosóficos de nuestro tiempo: 1) nadie andaba tras una prueba de consistencia relativa porque se consideraba axiomático que una prueba de consistencia tiene que ser finitaria para que tenga sentido, 2) el concepto de verdad matemática como contrapuesto al de demostrabilidad era visto con gran recelo y ampliamente desechado como carente de sentido [Wang 1991, 137]

Gödel, en vez de sujetarse a los prejuicios de la época, dividió el problema en dos e intentó demostrar la consistencia relativa del análisis clásico respecto de la aritmética (mediante la construcción de un modelo) para después probar la consistencia absoluta de esta última. Esto lo llevó a la observación de que la verdad matemática no es definible en la aritmética, mientras que la demostrabilidad sí lo es. Sin embargo, y a fin de eludir toda controversia, en su artículo de 1931 Gödel evitó de propósito la noción de verdad, substituyéndola por las nociones sintácticas de consistencia y ω-consistencia. En su forma semántica más general, el primer teorema de Gödel (teorema VI) establece lo siguiente.

> Si escogemos cualquier sistema bien definido de axiomas y reglas de inferencia en el que sólo sean derivables fórmulas verdaderas, siempre existen problemas diofánticos del tipo descrito que son indecidibles respecto de los axiomas.[14]

Por 'bien definido' se entiende que el conjunto de axiomas es recursivo, que es posible escribir todos sus elementos en un formalismo preciso y que sus reglas de inferencia son tales que dadas cualesquier premisas, o bien puedan enumerarse todas las conclusiones alcanzadas por cada una de las reglas, o bien pueda determinarse que no hay ninguna conclusión inmediata alcanzable por medio de ellas. Dada la equi-

14. Es decir, del tipo $\forall y_1 \ldots \forall y_m \exists x_1 \ldots \exists x_n P(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$ con P un polinomio con coeficientes enteros cuyas únicas variables son $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$.

valencia entre recursividad y Turing-decidibilidad, que el sistema de axiomas y reglas de inferencia sea bien definido equivale a la existencia de una máquina de Turing capaz de enumerar una tras otra todas las consecuencias de los axiomas. Por esta razón el teorema VI corresponde al hecho de que no existe un procedimiento finito de decisión sistemática de todos los problemas diofánticos del tipo especificado: si lo hubiese, tal procedimiento se podría incorporar a un sistema formal en el que todos estos problemas serían decidibles.

Un caso particular de proposición indecidible lo constituye la fórmula de la consistencia $\forall y\, \neg prov(y, \bar{k})$, que en todos los casos se puede transformar en un problema diofántico del tipo especificado.[15] De acuerdo con el segundo teorema de Gödel (el teorema XI), se trata de un problema diofántico indecidible respecto de los axiomas.

> Es este teorema el que hace particularmente evidente la incompletabilidad de la matemática, pues hace imposible que alguien pueda establecer cierto sistema bien definido de axiomas y reglas y, al mismo tiempo, pueda, de forma consistente, hacer la siguiente afirmación sobre él: percibo (con certeza matemática) que todos estos axiomas y reglas son correctos y además creo que contienen toda la matemática. Si alguien afirma lo anterior se contradice a sí mismo, pues si percibe como correctos los axiomas en consideración, también percibirá (con la misma certeza) que son consistentes, con lo que debe poseer una intuición matemática no derivable de sus axiomas [Gödel 1951, 151].

Tras lo cual Gödel se pregunta "¿Significa esto que ningún sistema bien definido de axiomas correctos puede contener toda la matemática propiamente dicha?" La respuesta a esta interrogante depende de lo que se entienda por "matemática propiamente dicha". En esto se advierten dos concepciones divergentes que Gödel denomina, respectivamente, *matemática en sentido objetivo* y *matemática en sentido subjetivo*:

La una afirma que la matemática consiste de todas las proposiciones matemáticas *verdaderas*.

La otra afirma que la matemática consiste de todas las proposiciones matemáticas "demostrables."[16]

15. Esta fórmula es del tipo descrito en virtud de que la fórmula $\neg prov(y, \bar{k})$ es recursiva primitiva.
16. Este sería el punto de vista de Hilbert cuando afirma que las *matemáticas reales*, esto es, las matemáticas consideradas en un sentido estricto, se convierten en un conjunto de fórmulas demostrables tras la formalización [*Cf.* Hilbert 1922, 59].

1) Conforme a la primera, la respuesta a la pregunta es afirmativa, tal como se sigue de los teoremas limitativos: la proposición que establecería la consistencia del sistema sería verdadera mas no derivable de los axiomas. Éste sería el punto de vista de Gödel.

2) Conforme a la segunda, la respuesta a la pregunta es negativa, es decir, la limitación señalada no implica que ningún sistema bien definido de axiomas correctos pueda contener a toda la matemática propiamente dicha. Por el contrario, muy bien puede suceder que haya una regla que genere todos los axiomas evidentes de la matemática subjetiva. No obstante, en tal caso, la proposición que establecería la consistencia del sistema, al no ser derivable de los axiomas, caería fuera del alcance de la matemática misma, por lo que nadie podría percibir con certeza matemática que los axiomas en su totalidad son correctos. En otras palabras, aun cuando tal regla existiese y nos fuese dado conocerla y utilizarla, lo único que podríamos hacer respecto de ella sería percibir como verdaderas las proposiciones generadas para cualquier número finito de ellas, mas no demostrar que ésta sólo daría lugar a proposiciones evidentes, ya que esto constituiría una prueba de consistencia para la totalidad de los axiomas, lo que, por causa del segundo teorema de Gödel, habría de apoyarse en algún tipo de intuición no derivable de la regla, es decir, en algún tipo de evidencia que escaparía a ella (por lo que ya no contendría a toda la matemática). En consecuencia, jamás podríamos saber con certeza matemática lo siguiente: (i) que la regla sólo produciría proposiciones evidentes, y (ii) que ninguna proposición evidente sería omitida por ella. Tales limitaciones aparecerían ante nuestro entendimiento como una falta de límites o inagotabilidad de la matemático.

> Podemos precisar este argumento como sigue. Sea K la clase constituida por los axiomas evidentes de la matemática subjetiva. Una prueba de que la regla sólo genera axiomas evidentes constituiría a la vez una demostración de consistencia para K. Pero una regla de tal índole no podría ser otra cosa que un procedimiento finito o algoritmo (¿en qué otra cosa podría estar pensando Gödel?) que estipulase cómo construir las fórmulas correspondientes a los elementos de K. Pero Gödel, en clara adhesión a la tesis de Church, considera que la noción matemática de función recursiva constituye la definición precisa del concepto de procedimiento finito,[17] por lo que la clase K sería recursiva. Por el

17 *Cf.* Gödel 1951, primer párrafo. Gödel se refiere explícitamente a la noción de Turing-calculabilidad, mas esta última es equivalente a aquélla.

segundo teorema de incompletud (teorema XI), la fórmula consis$_\kappa$ que asevera la consistencia de κ no sería derivable a partir de κ, por lo que la prueba de que la regla sólo produce axiomas evidentes de la matemática subjetiva no podría sustentarse sobre dichos axiomas. Pero, ¿en qué otras evidencias se podría apoyar?

Prosiguiendo sus reflexiones en torno a esta alternativa, Gödel concluye que en caso de que realmente exista tal regla finita, de ello se sigue que la mente humana es equivalente en la esfera de la matemática pura a una máquina finita (diríamos: a una máquina de Turing) incapaz de conocer completamente su propio funcionamiento (pues no podría explicar por qué en ese dominio jamás habría de contradecirse a partir de los principios admitidos). Una explicación que podemos ofrecer es la siguiente: en caso de que tal regla existiese, las posibilidades matemáticas de la mente humana se podrían englobar en un formalismo, que a fin de cuentas no sería sino un *procedimiento mecánico* para producir fórmulas o teoremas. En consecuencia, nada que la mente humana pudiese concebir escaparía a las posibilidades de cierta máquina finita a la que sería equivalente.[18] Tal incapacidad de la mente humana para comprenderse a sí misma haría particularmente notoria la incompletabilidad de la matemática:

> existirían problemas diofánticos absolutamente irresolubles [...] donde el epíteto 'absolutamente' significa que tales problemas no sólo no serían decidibles en algún sistema axiomático en particular, sino por ninguna prueba matemática que la mente humana pueda concebir [Gödel 1951, 155].[19]

Por el contrario, si, como sostienen los intuicionistas, la matemática es incompletable en el sentido de que ninguna regla finita puede abarcar la totalidad de sus axiomas evidentes, entonces la capacidad de la mente humana en el terreno de la matemática pura supera (infinitamente) la de cualquier máquina finita, pues para cualquier sistema de axiomas correctos siempre habrá (una infinidad de) proposiciones no demostrables a partir de ellos que la mente humana es capaz de reconocer como evidentes.

Así, la siguiente conclusión parece inevitable:

18. Esto es así en virtud de que el concepto matemático de procedimiento mecánico lo constituye precisamente la noción de máquina de Turing, por lo que para cada formalismo definido en el sentido usual existe una máquina de esta clase que produce los mismos teoremas.

19. Un ejemplo de tales problemas sería el que expresa la consistencia del sistema.

> o la matemática es incompletable en el sentido de que una regla finita no puede abarcar nunca sus axiomas evidentes, es decir, que la mente humana (incluso en el reino de la matemática pura) sobrepasa infinitamente la potencia de cualquier máquina finita, o bien existen problemas diofánticos absolutamente irresolubles del tipo especificado (donde no se excluye el caso de que ambos términos de la disyunción sean verdaderos, con lo que hay, estrictamente hablando, tres alternativas) [el resaltado en negritas es nuestro] [Gödel 1951, 155].

La conclusión general también parece inevitable: la matemática es inagotable, ya sea porque objetivamente lo es, ya sea porque así se presenta ante el entendimiento humano.

> La conclusión anterior debió significar un duro golpe a la fe que Hilbert profesa en el poder del entendimiento humano. Baste recordar las palabras pronunciadas por él en el Congreso Internacional de París de 1900, cuando manifiesta su convicción de que todo problema matemático se puede resolver:

> Sin importar cuán inaccesibles nos puedan parecer estos problemas ni cuán impotentes nos sintamos ante ellos, tenemos, no obstante, la firme convicción de que su solución se habrá de obtener mediante un número finito de procesos puramente lógicos [...] Esta convicción sobre la resolubilidad de todo problema matemático es un poderoso incentivo al investigador. Escuchamos dentro de nosotros el canto imperecedero: he ahí un problema, busca su solución. La podrás encontrar con el razonamiento puro, pues en matemáticas no hay *ignorabimus* [Hilbert 1917, 7].

> Tal convicción parece injustificada a la luz de las investigaciones relativas a los fundamentos. Éstas muestran que en el mejor de los casos, es decir, en el caso de que no exista una regla que genere todos los axiomas evidentes de la matemática, habría en cualquier etapa de desarrollo del método axiomático problemas aritméticos para los que no se tendría ningún indicio de cómo resolverlos ni se vislumbrase cómo precisar aquellos axiomas evidentes que permitirían decidirlos. La otra alternativa es aún más devastadora: habría problemas aritméticos *absolutamente* irresolubles, donde 'absolutamente' significa que ningún procedimiento que la mente humana pudiese concebir sería suficiente para resolverlos. Tal es la aportación de Gödel al debate sobre el mecanicismo y la filosofía de la mente.

Llegado a este punto, Gödel da por terminado el examen de los aspectos matemáticos de su obra para consagrarse a sus implicaciones filosóficas. Este cambio al incierto dominio de la filosofía se refleja no sólo en el tono más dubitativo del texto, sino en las múltiples inserciones, notas y tachaduras que éste presenta. En adelante la reconstrucción del escrito se torna irregular. Las inserciones parecen no tener fin, dándose el caso ya referido de múltiples interpolaciones anidadas en diversos niveles. A esto habría que añadir los numerosos comentarios de Gödel agrupados por el editor en un apéndice cuya extensión equivale a la del texto principal. Algunos pasajes parecieran reminiscencias de pretéritas polémicas que de súbito resonaran en su memoria y que, por ventura, lograron subsistir en el texto. ¿Cuántos argumentos fueron convertidos en polvo por la goma de borrar? ¿Cuántas ideas fueron condenadas al olvido por la manía de Gödel de economizar papel? ¿Cuántos pensamientos nos fueron negados sólo por el hecho de no haber tenido un carácter palmario? En adelante, el escrito asemeja una urdimbre de hipotéticos debates con interlocutores no siempre reconocibles. Una tarea digna de encomio sería vivificarlos en la más pura tradición helénica, en el diálogo, en ese modo inventado por los griegos de meditar hablando.

6. ¿Es la matemática una libre creación del espíritu humano?

El *leitmotiv* de la conferencia Gibbs es mostrar cómo los modernos desarrollos en el fundamento de las matemáticas apuntan hacia una postura realista o platónica. A tal fin Gödel se lanza contra la concepción opuesta, es decir, contra la tesis de que los hechos y objetos matemáticos no poseen ningún tipo de existencia objetiva.[20] En una primera instancia aborda la cuestión criticando la idea más bien imprecisa de que la matemática es una 'libre creación' del espíritu humano, y sólo más adelante se ocupa de formulaciones más precisas. Dado el carácter disyuntivo de la conclusión alcanzada en la sección anterior, en un principio las consecuencias también las establece de manera disyuntiva.[21] Lo que sigue es un compendio de los puntos más relevantes junto con algunos comentarios.

1. De la primera alternativa se sigue que el funcionamiento de la mente humana no puede reducirse al del cerebro, pues éste es a todas luces una máquina finita con un número finito de partes (las neuronas y sus conexiones) mientras que la mente, en este caso, es superior a cualquier

20. Salvo por el intuicionismo, esta tendencia engloba las principales posturas filosóficas del siglo veinte.
21. Las alternativas son: (1) la matemática es inexhaustible en el sentido de que una regla finita no puede abarcar nunca sus axiomas evidentes, y (2) existen problemas diofánticos absolutamente irresolubles.

mecanismo de tal índole. Este resultado se opone a la filosofía materialista, que niega que la mente sea independiente del cerebro, y conduce en cierto sentido a un punto de vista vitalista, según el cual los fenómenos mentales no pueden ser enteramente explicados mediante causas mecánicas, ni la mente humana ser imitada artificialmente por una máquina con un número finito de partes.[22]

1'. Se podría objetar que la mayor efectividad de la mente humana no significa que exista una entidad inmaterial fuera del cerebro que se valga de él como de un instrumento. Por el contrario, se puede argüir que esto simplemente revela que el comportamiento de la materia viva está gobernado por leyes mucho más complejas de lo que habíamos esperado, que el cerebro es un sistema en el que el comportamiento del todo no se deduce del de las partes aisladas. No obstante, quienquiera que sostenga esta objeción estará dejando de lado con igual razón al materialismo, pues adscribe a la materia todas las propiedades de la mente, cuando la esencia de materialismo es explicar tales atributos sobre la sola base de las leyes que gobiernan la interacción entre las partes.

2. La segunda alternativa indica que la tesis de que la matemática es nuestra propia creación es errónea, ya que el creador conoce necesariamente todas las propiedades de sus criaturas cuyos únicos atributos son los que les ha otorgado. En todo caso, esta alternativa parece implicar que los objetos y los hechos matemáticos existen independientemente de nuestros actos mentales y decisiones, lo que supone alguna forma de realismo o platonismo respecto de ellos.

2'. Se podría objetar el punto anterior arguyendo que no existen cosas tales como 'proposiciones verdaderas aunque indecidibles', pues el significado de una proposición sobre todos los enteros no puede consistir sino en la existencia de una prueba general de ella (dada la imposibilidad de verificarla para todos los enteros uno por uno).

> Wittgenstein, por ejemplo, cuestiona: ¿Qué puede significar que una proposición sea verdadera en *Principia Mathematica* pero que no pueda ser demostrada ahí? ¿A qué se le llama entonces 'proposición verdadera en *Principia Mathematica*'? Las únicas proposiciones que podemos aseve-

22. En esto Gödel se opone a Turing en cuanto al 'juego de la imitación'. Véase al respecto Anderson 1964.

> rar en dicho sistema son las "leyes fundamentales" (los axiomas) y aquellas que figuran al final de sus pruebas. No hay otro camino [véase Wittgenstein 1978, 116–123]. Se puede entonces decir que en el caso de una proposición indecidible, ni ella ni su negación son verdaderas, por lo que no expresan una propiedad objetivamente existente de los enteros, aunque desconocida.

Al margen de otros cuestionamientos, Gödel aduce que es perfectamente posible conjeturar la verdad de una proposición y al mismo tiempo presumir que no existe una prueba general de ella. Tal podría ser el caso, por ejemplo, de la conjetura de Goldbach, que a la fecha (agosto de 1995) ha sido comprobada en todos los casos particulares investigados, sin que se tenga una demostración de ella. La experiencia nos indica en este caso que la proposición tiene una gran probabilidad de ser verdadera.

Lo anterior no es sino un ejemplo de lo que Gödel avizora como una posibilidad real en matemáticas: la de valerse de *métodos inductivos* tal como lo hace la física. Si los matemáticos sienten horror ante tal circunstancia, ello se debe al prejuicio de que los objetos matemáticos no tienen una existencia real.

> Si la matemática describe un mundo justamente tan objetivo como el de física, no hay razón para que los métodos inductivos no se apliquen en la matemática tal como se hace en la física. El hecho es que en la matemática tenemos la misma actitud que en tiempos pasados se tenía hacia todas las ciencias, esto es, tratamos de derivarlo todo de las definiciones (es decir, de la esencia de las cosas, por usar términos ontológicos) mediante pruebas convincentes. Quizá este método sea tan erróneo en matemática como lo fue en física, si reclama el monopolio [...] Este argumento global muestra, de paso, que las implicaciones filosóficas de los hechos matemáticos explicados no están enteramente del lado de la filosofía racionalista o idealista, sino que en un aspecto favorecen la concepción empirista [Gödel 1951, 158].

En el caso de la segunda alternativa, la verdad de una proposición absolutamente indecidible sólo se podría aproximar con estos métodos, lo que iría en contra de la tesis de que el único camino para determinar el conocimiento en matemáticas es la razón (racionalismo, idealismo).

Gödel llega incluso a decir que las conclusiones expuestas en (1) y (2) son válidas en general y no dependen de qué alternativa se elija, en especial en lo tocante al platonismo. De nuevo insiste en que éstas reciben el apoyo de los modernos desarrollos en el fundamento de las matemáticas. Sus argumentos son esencialmente los siguientes:

Primero. Si la matemática fuese nuestra libre creación, es cierto que todavía podría darse la ignorancia respecto a los objetos creados, pero sólo por falta de una clara conciencia de lo realmente creado (o a causa de la dificultad práctica de cálculos demasiado complicados). Por tanto, tendría que desaparecer tan pronto como alcanzásemos una perfecta claridad. Sin embargo, los desarrollos modernos en fundamentación de la matemática han logrado un insuperable grado de exactitud sin que ello haya servido de ayuda en la solución de los problemas matemáticos.

> Hilbert también pensó en la "perfecta claridad", y creyó alcanzarla a través del perfeccionamiento del método axiomático. En su opinión, los sistemas formales, con su estructura bien definida y aparente simpleza, serían el instrumento ideal. La "claridad" se alcanzaría plenamente tras resolver el *problema de la decisión*, es decir, el problema de idear para cada sistema formal *SF* un procedimiento que, aplicado a cualquier fórmula α de *SF*, decidiría en un número finito de pasos si α es o no uno de sus teoremas. Entre 1936 y 1937 Church y Turing demostraron (con base en la tesis de Church) que el problema no tiene solución incluso en los casos más simples del cálculo restringido de predicados y la aritmética elemental. Pese a todo, a lo dicho por Gödel se pueden oponer los siguientes argumentos: (i) Que no tengamos un conocimiento total y absoluto de los objetos creados tan sólo indica que la creación no se realiza en un día, no que ésta no tenga lugar. Nada en la ciencia moderna invalida el hecho de que las matemáticas son una libre creación del espíritu humano. No es que en esto seamos lo más cercano a los dioses, es que en esto somos dioses (el paraíso de Cantor es obra nuestra, no de Dios). (ii) Si bien el problema de la decisión no se puede resolver con métodos recursivos, ello no significa que en un futuro no se habrán de *inventar* nuevos procedimientos que permitan resolver de manera efectiva toda cuestión que se plantee al seno de las teorías formalizadas. Como es de suponerse, con estos procedimientos se podría extender la familia de axiomas más allá de las clases recursivas. (iii) Los argumentos de Gödel dependen de la aceptación de la tesis de Church, cuya validez no es reconocida por todos. Estas objeciones no representan necesariamente nuestra propia opinión: se trata, más bien, de fijar el alcance de lo dicho por Gödel.

Segundo. La actividad del matemático muestra muy poco de la libertad que un creador debería disfrutar. Incluso si, por ejemplo, los axiomas sobre los enteros fueran de libre invención, todavía debería admitirse que el matemático, una vez imaginadas las primeras propiedades de sus objetos, ha llegado al final de su poder creativo, y no está en situación de crear a su voluntad también la validez de sus teoremas. Si algo como la creación existe a fin de cuentas en la matemática, entonces lo que hace cada teorema es precisamente restringir la libertad de creación; pero aquello que la restringe debe evidentemente existir con independencia de la creación.

Se puede objetar que algo semejante sucede en otros ámbitos de la creación, sin que por ello se considere realmente existente aquello que se ha concebido. Por ejemplo, lo que da vida a las novelas de Conan Doyle es la coherencia lógica de sus narraciones, por lo que no está en posición de crear a su voluntad situaciones que no concuerden con lo ya estipulado. Sucede entonces que cada pasaje de sus novelas restringe su libertad de creación, y que él tampoco está en condición de resolver más allá de ciertos límites las situaciones creadas. No obstante, nadie en su sano juicio dirá que ello prueba que sus personajes existen con independencia de su creación.[23] De igual modo, el poco margen de acción que resta al matemático una vez imaginadas las primeras propiedades de sus objetos tiene que ver con su sujeción a la lógica, y la posibilidad de crear a voluntad la validez de sus teoremas se podría lograr en cierta medida cambiando los principios y las reglas deductivos (aunque este *juego* no tenga mayor interés en la matemática usual).

Tercero. Si los objetos matemáticos son creación nuestra, entonces los enteros y los conjuntos de enteros tendrán evidentemente que ser dos creaciones distintas, la primera de las cuales no necesita de la segunda. Sin embargo, a fin de probar ciertas proposiciones sobre los enteros se necesita el concepto de conjunto. Así que, con objeto de hallar las propiedades que *nosotros* hemos dado a ciertos objetos producto de la imaginación pura, debemos primero crear ciertos objetos adicionales, lo cual constituye desde luego una situación muy extraña.

En realidad no sabemos a ciencia cierta si la necesidad del concepto de conjunto es tal, o si se trata de una noción prescindible, en el sentido de que todo lo que se demuestre con su ayuda en relación a los números enteros se puede demostrar sin él. Pese a todo, la opinión de Gödel cuenta con el apoyo de lo acontecido en la teoría de los números, en la que se tienen demostraciones analíticas de ciertos teoremas para los que no se conoce otro camino.[24] Esto, evidentemente, haría pensar a los seguidores de Hilbert que las llamadas "nociones ideales" (con-

23 Escogimos este ejemplo por una razón: en Londres, en el 221 de la calle Baker, se puede visitar la casa en que *vivieron* Sherlock Holmes y el Dr. Watson, convertida en museo. Tal es la fuerza de nuestra imaginación. No obstante, ello no cambia el hecho de que en realidad tales personas jamás existieron (como podría ser el caso de los objetos matemáticos, en contra de lo que Gödel sostiene).

24 En la teoría analítica de los números se estudian las propiedades de los números enteros con los métodos del análisis matemático y, por consiguiente, con base en las nociones de límite, continuidad, convergencia asintótica, número complejo, etc., propias de esta disciplina. Por ejemplo, un célebre teorema de esta teoría es el siguiente: *Existe un número k tal que cada número impar n > k es la suma de tres números primos*. En la actualidad se ignora si habrá una demostración elemental de este hecho, es decir, una demostración que no vaya más allá de los postulados de Peano de primer orden.

juntos infinitos, números reales, etc.) no son meros auxiliares en el desarrollo de la teoría, sino elementos indispensables en su construcción.

También los teoremas limitativos apoyan la idea de que existe una relación aritmética intrínseca entre las propiedades de los números naturales y las capas más elevadas de la jerarquía conjuntista. Así, por ejemplo, si a la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (*ZF*) añadimos el axioma de elección, serán ciertas proposiciones aritméticas las que resulten indecidibles en dicha teoría, distintas de las que lo harían si se asumiese la negación de dicho axioma. De tal forma podemos ver que la clase de problemas aritméticos que podamos resolver depende de los axiomas que escojamos para los conjuntos de los niveles superiores, no limitándose el alcance de la teoría aritmética a la elección de los axiomas elementales, todos ellos relativos a los números naturales y nada más. Lo anterior favorece indudablemente al realismo conceptual de Gödel: si los objetos matemáticos fuesen una libre creación del espíritu humano, ¿por qué las propiedades de los objetos pertenecientes a cierta esfera habrían de depender de hipótesis relativas a otro orden de objetos en principio ajenos a aquellos? Otro ejemplo es el siguiente. En la teoría de Zermelo-Fraenkel se puede probar por medio de la inducción transfinita hasta ε_0 que la aritmética elemental, es decir, la aritmética de Peano de primer orden, es consistente.[25] Se tiene con ello una demostración en *ZF* de que cierto problema aritmético (a saber, el expresado por el enunciado de Rosser relativo a *AP*) es indecidible en *AP*.[26] Como la inderivabilidad de implica su verdad, el problema que representa se habrá resuelto con la ayuda de ciertas hipótesis relativas a otro orden de objetos. Resulta entonces que la teoría de conjuntos, que no está presupuesta en la construcción de la aritmética elemental, sí tiene un efecto en ésta.

Lo anterior sería en resumen la crítica de Gödel a la vaga idea de que la matemática es nuestra libre creación.

7. Crítica al nominalismo y al positivismo lógico

Hacia el final de la conferencia Gibbs, Gödel aborda la que considera la más radical formulación que se ha dado hasta ahora de la tesis anterior. Me refiero a la del positivismo lógico, según la cual las proposiciones matemáticas son verdaderas sólo en virtud de ciertas reglas

25. La consistencia de *AP* fue demostrada por primera vez en 1936 por Gerhard Gentzen [1969, 132-201] recurriendo a un principio de inducción extendido al segmento de la segunda clase de ordinales transfinitos determinado por el ordinal ε_0. Se trata del primer número ordinal ε que es una solución de la ecuación $\omega^x = x$, que también se caracteriza por ser el primer ordinal transfinito inaccesible por medio de las operaciones de suma, producto y exponenciación con ordinales menores que él.
26. El enunciado de Rosser expresa, desde la perspectiva de la numeración de Gödel, que si hay una prueba de él, entonces hay una prueba (con ciertas características) de su negación. Al no ser derivable el enunciado, lo que él asevera es cierto, véase la nota 3.

arbitrarias sobre el uso de símbolos. Esta tesis fue desarrollada por algunos miembros del *Círculo de Viena* hacia 1930.[27]

Trataré de resumir en unas cuantas líneas el punto de vista del positivismo lógico en lo que a la matemática respecta. Sus tesis centrales son dos: (1) que la matemática es parte de la lógica, y (2) que sus proposiciones son verdaderas *sólo* por convención, es decir, como consecuencia de convenciones lingüísticas introducidas por nosotros. Examinémoslas por separado.

¿Por qué una proposición como, por ejemplo, '5 + 7 = 12' es tenida por cierta? Obviamente, no por que nuestras experiencias pasadas nos indiquen que así es, sino por que, eso dicen, hemos *convenido* que los símbolos '5 + 7' y '12' denotan el mismo número. Su sinonimia resulta del hecho de que hemos *definido* (tácita o explícitamente) los símbolos '5', '7', '12', '+' e '=' de tal modo que la identidad anterior es válida a causa de los significados adscritos a ellos. Por ejemplo, en este caso se diría que la identidad '5 + 7 = 12' simplemente establece que cualquier conjunto que consista de 5 + 7 objetos consistirá de 12 objetos. Esto presupone que las proposiciones aritméticas están referidas en última instancia a nociones como las de clase, unión de clases, etc. de tal forma que su verdad deriva de los conceptos fundamentales de la lógica. También presupone que los conceptos de clase, unión de clases, etc. pertenecen a la lógica. Tal punto de vista es extensible a toda la matemática. Por ello sostienen que sus proposiciones son analíticas y vacías (si de ir en contra de Kant se trata): nada dicen acerca de la realidad y ningún conocimiento empírico se puede derivar de ellas.

> Una proposición es analítica cuando su validez no depende de los hechos, es decir, cuando es verdadera por los mismos términos que la componen. Acorde a esta definición, las proposiciones analíticas no implican nada en relación al mundo de la experiencia. Gödel, al igual que Carnap, sostiene que las proposiciones de la matemática son analíticas, pero por distintas razones. Para Carnap, su analiticidad está ligada a su supuesta vacuidad: son válidas en virtud de las *definiciones* de los términos que las componen, no de lo que éstos signifiquen. Por el contrario, para Gödel son analíticas 'en virtud del significado de los conceptos que aparecen en ellas', remitiéndose de este modo a algo objetivo que no depende necesariamente de nuestras definiciones. Otro es el caso de las proposiciones sintéticas, cuya validez se determina por los hechos empíricos. Ninguno de los

27. El Círculo de Viena constituyó tanto un grupo organizado como un centro de reunión con el que Gödel mantuvo algunos contactos entre 1926 y 1930. Se sabe que este acercamiento consistió en asistencias a sus seminarios y discusiones con algunos de sus integrantes. Quizá por esta razón en diversos sitios se le señala equivocadamente como uno de sus miembros, como sucede en [Ayer 1965, 9].

dos diría que la matemática comprende proposiciones de este tipo, pues no trata con nada que caiga en el ámbito de la experiencia.

El análisis de las convenciones lingüísticas ha menester de un lenguaje simbólico que permita expresar debidamente la estructura de las proposiciones, la manera en que éstas se combinan mediante partículas lógicas y cómo se deducen formalmente las unas de las otras. Carnap en particular propone un lenguaje específico (el 'lenguaje II' de su *Logical Syntax of Language*) en el que todas las proposiciones tanto de la matemática clásica como de la física clásica se pueden formular. En cuanto a la parte deductiva, ésta se organiza mediante axiomas y reglas de transformación sintácticas, es decir, introduciendo un sistema formal a la manera de Hilbert.[28] Carnap llega incluso a delinear una sintaxis general que abarcaría todas las formas de lenguaje posibles y, por lo tanto, todos los sistemas lógicos posibles. Es así que el positivismo lógico confluye con la dirección formalista de Hilbert y llega a sostener, al igual que éste, que el trabajo de las matemáticas consiste en elaborar deducciones, según reglas determinadas, sobre la base de proposiciones tomadas convencionalmente como axiomas.

En cuanto a la idea de que la matemática (pura) es una rama de la lógica, el positivismo lógico considera que esto lo demuestran Russell y Whitehead en *Principia Mathematica* con su aparente reducción de aquélla a ésta, es decir, mediante el procedimiento de (1) definir todos los conceptos de la matemática en términos de los conceptos de la lógica, y (2) deducir todos los teoremas de la matemática por medio de los principios de la lógica.[29] He aquí cómo se expresa Hans Reichenbach al respecto:

> La construcción de la lógica simbólica hizo posible la investigación desde un nuevo ángulo de las relaciones entre lógica y matemáticas. ¿Por qué hay dos ciencias abstractas para tratar los productos del pensamiento? La pregunta fue acogida por Bertrand Russell y Alfred N. Whitehead, quienes llegaron al resultado de que las matemáticas y la lógica son, en última instancia, idénticas; que las matemáticas no son más que una rama de la lógica desarrollada con referencia especial en el sentido de las aplicaciones cuantitativas [*Ibid.*, 230].

28 En este contexto, Carnap define las proposiciones analíticas como aquellas que se pueden derivar de la clase nula de proposiciones (es decir, que son válidas en virtud de su estructura).

29 No se puede decir sin más que lo hecho por Russell y Whitehead fue una reducción de la matemática a la lógica. Faltaría saber si los principios de la lógica efectivamente comprenden los axiomas de infinitud y de elección indispensables en tal procedimiento.

Para añadir más adelante:

> Con su prueba de que las bases de la aritmética pueden derivarse de la lógica pura, Russell ha demostrado que la necesidad matemática es de naturaleza analítica. En las matemáticas no hay síntesis a priori.
>
> Pero si la lógica es analítica, es vacía; esto es, no expresa propiedades de objetos físicos. [...] La lógica formula reglas del lenguaje, por esa razón es analítica y vacía. ... La necesidad lógica y la vaciedad van juntas y ambas constituyen la naturaleza analítica, o tautológica, de la lógica. Todos los juicios puramente lógicos son tautologías, [...], no dicen nada y por lo tanto nos informan tanto o tan poco como la tautología 'mañana lloverá o no lloverá' [*Ibid.*, 1973, 230-232].
>
> La idea de que las proposiciones matemáticas sólo representan tautologías no es más que una variante de la tesis considerada. Desde este punto de vista, el que no toda proposición matemática manifieste su naturaleza tautológica es por el hecho de ser una especie de abreviatura. Esto presupone que la tautología se hace aparente al sustituir sucesivamente los términos definidos que en ella figuran por sus definiciones, tal como sucede, por ejemplo, con la proposición 'todo semental es macho' al reemplazar el término 'semental' por su definición: animal macho destinado a la reproducción. La objeción de Gödel es simple: si toda proposición matemática se puede reducir a una tautología explícita obrando de esta manera, se tiene a la mano un procedimiento de decisión para la verdad o falsedad de las proposiciones matemáticas. No obstante, las investigaciones en torno a los fundamentos indican que esto último es imposible.[30]

Dice Gödel que para que sea sostenible la tesis de que las proposiciones matemáticas sólo son verdaderas en virtud de ciertas reglas arbitrarias sobre el uso de símbolos, se debería demostrar al menos lo siguiente:

i) que toda proposición matemática demostrable se puede deducir de las solas reglas semánticas, y

ii) que las negaciones de las proposiciones matemáticas demostrables no se pueden derivar de ese modo [*Cf.* Gödel 1995, 161].

Gödel cita dos casos concretos en los que (i) se ha demostrado: el de Ramsey, en el que se presupone la teoría de conjuntos transfinitos al

30. Si, como todo parece indicar, esto es lo que Wittgenstein quería decir en el *Tractatus*, se trata de un desacierto [*cf.* Wittgenstein 1979, 169-185].

reducir todo teorema a una tautología explícita de la forma $\alpha \leftrightarrow \alpha$, y el de Carnap, que a tal fin se ve obligado a considerar conjuntos infinitos de proposiciones, conjuntos de conjuntos, etc. Es claro que en ambos casos la concepción nominalista sólo ha producido una refutación de ella misma: no ha satisfecho el requisito de sólo recurrir a las reglas sintácticas, sino que, por el contrario, se ha valido de la matemática misma para reducir los teoremas a meras tautologías. Gödel ve en todo esto una petición de principios, pues a fin de demostrar que los axiomas matemáticos son derivables a partir de las convenciones sintácticas, primero debemos interpretar dichos axiomas como referidos a los símbolos, conjuntos de símbolos, etc., que figuran en la construcción sintáctica de la teoría. En otras palabras: para probar el carácter tautológico de los teoremas, se debe suponer primero la *verdad* de los axiomas, cuando la idea original era la opuesta, hacer comprensible la verdad de los axiomas matemáticos mostrando que son tautologías. Además, en lugar de que las convenciones sintácticas definan el significado de los conceptos matemáticos, debemos primero entender estos últimos a fin de comprender dichas convenciones o la prueba de que de ellas se siguen los axiomas matemáticos, pero no sus negaciones. Faltaría saber si esto es inevitable, es decir, si tal circunstancia es independiente del lenguaje simbólico que se elija, aunque Gödel no se detiene ante ello al momento de extraer conclusiones.

> Aquí también las investigaciones en torno al fundamento de las matemáticas parecen apuntar en esta dirección. En efecto, una demostración del carácter tautológico de los axiomas sería también una prueba de consistencia imposible de lograr recurriendo únicamente a los medios disponibles en el sistema. Por ejemplo, en el caso específico de la teoría de los números ha sido necesario utilizar conceptos como los de 'conjunto', 'función aritmética', 'funcional lineal', etc. que no están directamente referidos a objetos sensibles y de los que los signos son si acaso una instancia particular. Esta necesidad de recurrir a construcciones del pensamiento y no sólo a objetos sensibles resulta del hecho de que la aritmética elemental contiene toda demostración que sólo haga alusión a símbolos y agrupaciones de símbolos (fórmulas, pruebas, etc.), pues el método de primelización de Gödel permite convertir los objetos sintácticos en números, y toda demostración relativa a objetos sintácticos en una demostración relativa a enteros. En consecuencia, toda prueba de consistencia de la teoría de números, o de cualquier teoría que la contenga, habrá de recurrir a conceptos abstractos no referidos a símbolos. Hay en esto una inversión: el recurso a conceptos abstractos permite probar la consistencia de ciertos sistemas formales, cuando la tarea del nominalismo debería ser justificar el uso de aquéllos mediante consideraciones sintácticas.[41]

41 No sólo Carnap se encuentra en esta situación: Hilbert también le hace compañía

La conclusión a la que llega Gödel es lapidaria:

> no existe justificación racional de nuestras creencias precríticas sobre la aplicabilidad y la consistencia de la matemática clásica (ni siquiera en su nivel más bajo, la teoría de números) sobre la base de una interpretación sintáctica [Gödel 1951: 163].

La teoría de números se encuentra en el punto de partida por una razón muy simple: su axioma básico, el de inducción completa, es esencial para las consideraciones sintácticas.[32]

8. Salvaguarda del realismo

No sin cierta ironía podemos decir que con su crítica al nominalismo, Gödel eleva nuestro nivel de incomprensión de lo que la matemática es, pues lo único que hace es mostrar que la matemática *no es* sintaxis, respondiendo de este modo con una negativa a la pretensiones de Hilbert y algunos destacados miembros del Círculo de Viena.[33] En este sentido, las reflexiones contenidas en la parte final de la conferencia Gibbs son un intento por llenar este vacío, por aclarar lo que a su juicio la matemática *es*. Por extraño que parezca, esto resulta más fácil cuando se le contrasta con el nominalismo.

Podemos atribuir la popularidad del nominalismo a su capacidad para hacernos creer que la matemática no describe realidad alguna, que la verdad de sus enunciados es enteramente explicable mediante reglas sintácticas y que sus proposiciones son vacías de contenido. Esto se ve reforzado por el hecho de que ciertos fragmentos de la matemática pueden sin duda reducirse a reglas sintácticas. Lo que es erróneo es suponer por ello que los hechos y objetos matemáticos no poseen ningún tipo de existencia objetiva.

> Gödel recurre en este punto a un símil. Supongamos dos situaciones observables *A* e *B* tales que lo sucedido en *A* no implique nada en *B*. En tal caso se podría construir un lenguaje L_B para expresar los hechos observados en *B* y exponer sus proposiciones como vacías de contenido. Se podría ade-

32 Se recurre a este axioma incluso en el caso de pruebas sintácticas de carácter muy general, como, por ejemplo, la del *teorema de la deducción*: Si de $T \cup \{\alpha\}$ se deduce β, entonces de T se deduce $\alpha \rightarrow \beta$.

33 "Las consecuencias filosóficas de mis resultados, lo mismo que los principios heurísticos que llevan a ellos, son cualquier cosa menos positivistas o empiristas" habría dicho Gödel a Hao Wang.

mas, precisar reglas semánticas para determinar las circunstancias bajo las cuales es verdadera una proposición de L_1, definiendo de este modo su significado. La pregunta es ¿tendríamos derecho a decir en tal caso que no existen cosas tales como los hechos referidos en L_1 pues no podemos saber nada de ellas realizando observaciones en S? ¿Podríamos decir que la verdad de las proposiciones de L_1 es sólo una consecuencia de sus convenciones sintácticas? Obviamente que no. Según Gödel algo semejante sucede en relación a la matemática. Sus hechos nada implican en el ámbito de la experiencia, mas no por ello son inexistentes ni sus proposiciones se pueden decir vacías de contenido. Lo único que significa todo lo anterior es que los objetos de la matemática están más allá de los límites de la experiencia, pero no más allá de nuestro lenguaje.

Es ahora que Gödel manifiesta su punto vista. Sus tesis más importantes son las siguientes.

1. Las esferas de lo matemático y de la experiencia no se tocan entre sí. Los objetos matemáticos son trascendentes (están más allá de toda experiencia).

2. Las proposiciones matemáticas son verdaderas en virtud del significado de los términos que figuran en ellas, con independencia del mundo de las cosas.

3. El significado de los términos que figuran en las proposiciones matemáticas no es algo hecho por nosotros, ni consiste meramente en convenciones sintácticas.

4. Los conceptos matemáticos forman una realidad objetiva por sí mismos, la cual no podemos cambiar, sino sólo percibir o describir.

5. Las proposiciones matemáticas, aunque no digan nada acerca de la realidad espacio-temporal, pueden sin embargo poseer un contenido objetivo sólido, en la medida en que digan algo acerca de las relaciones entre los conceptos.

6. Hay entre los objetos matemáticos relaciones que no son tautológicas. Prueba de ello es el hecho de que para los términos primitivos se asumen axiomas que no son tautologías y que se siguen del significado de los términos primitivos considerados.

7. Los axiomas de la teoría de conjuntos son analíticos mas no tautológicos. Estos axiomas son válidos en virtud del significado del tér-

mino 'conjunto' y no pueden reducirse a nada más simple, ya no digamos a tautologías. Algo semejante se puede decir de los axiomas para la teoría de números.

Por 'analítico' Gödel entiende en este contexto 'verdadero en virtud de la naturaleza de los conceptos concurrentes' y por 'tautológico', 'vacío de contenido'. Tal definición del término 'analítico' es más tajante que la ofrecida por nosotros, pues con ella Gödel pretende mantenerse a distancia de la formulada por el positivismo: 'verdadero en virtud de nuestras definiciones'. Este concepto de analítico hace perfectamente posible que una proposición sea analítica e indecidible a la vez, "pues nuestro conocimiento del mundo de los conceptos puede ser tan limitado e incompleto como el que tenemos del mundo de las cosas" [Gödel 1951, 166]. En relación a las paradojas de la teoría de conjuntos dice que éstas no refutan al platonismo: tan sólo indican que nuestra percepción del mundo de los conceptos es a veces un tanto incierta. "Nuestras percepciones visuales contradicen a veces nuestras percepciones táctiles, por ejemplo en el caso de una vara inmersa en agua, pero nadie en su sano juicio concluirá de ello que el mundo externo no existe" [Gödel 1951, 167]. Pero ¿qué son estos objetos y estos conceptos de los que habla Gödel? En su artículo sobre la lógica matemática de Bertrand Russell, nos aclara este punto: "... pueden concebirse las clases y los conceptos como objetos reales, a saber, las clases como 'pluralidades de cosas' o como estructuras que consistan de una pluralidad de cosas, y los conceptos como las propiedades y las relaciones de las cosas que existen independientemente de nuestras definiciones y construcciones" [Gödel 1944, 310]. Tales objetos los percibimos, en ocasiones de manera inexacta, por medio de una intuición matemática que, como señala Rodríguez Consuegra, "nos da el significado y el contenido de los conceptos y a la vez nos muestra su existencia como habitantes del 'tercer reino'" [Rodríguez Consuegra, 76].

Quizá la de Gödel es la más lúcida exposición que se ha hecho en los tiempos modernos sobre el platonismo en matemáticas. Tras un breve paréntesis sobre el psicologismo y el realismo aristotélico, concluye con las siguientes palabras [Gödel 1951, 169]:

> Tengo la impresión de que tras suficiente clarificación de los conceptos en cuestión será posible conducir estas discusiones con rigor matemático, y de que el resultado será entonces que (bajo ciertas hipótesis que difícilmente pueden negarse —en particular la hipótesis de que existe absolutamente algo como el conocimiento matemático—) la concepción platónica es la única sostenible. Con ello me refiero a la concepción de que la matemática describe una realidad no sensible, que existe independientemente tanto

de sus actos como de las disposiciones de la mente humana, y que es sólo percibida por ella, aunque probablemente de forma incompleta.

Referencias

ABBAGNANO, Nicola. 1963. *Diccionario de filosofía*. México: Fondo de Cultura Económica.

ANDERSON, A. R. (Editor). 1964. *Minds and Machines*. Englewood Cliff, Nueva Jersey: Prentice Hall, Inc.

AYER, Alfred J. 1971. *Lenguaje, verdad y lógica*. Barcelona: Ediciones Martínez Roca.

________. (Editor) 1965. *El Positivismo Lógico*. México: Fondo de Cultura Económica.

CARNAP, Rudolf. 1936. "Testability and Meaning". *Philosophy of Science* 3: 419-471.

________. 1937. *The Logical Syntax of Language*. Nueva York: Harcourt Brace.

________. 1961. *Filosofía y sintaxis lógica*. México: UNAM, Centro de Estudios Filosóficos, Cuaderno 12.

CAVAILLÈS Jean. 1992. *Método Axiomático y Formalismo* (Colección Mathema). México: UNAM.

GENTZEN, Gerhard. 1969. *The Collected Papers of Gerhard Gentzen* (editado por M. E. Szabo). Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

GÖDEL, Kurt. 1931. "On Formally undecidable propositions of *Principia Mathematica* and related systems I", en van Heijenoort 1970, pp. 82-108.

________. 1944. "La lógica matemática de Russell", en Gödel 1981.

________. 1947. "¿Qué es el problema del continuo de Cantor?", en Gödel 1981.

________. 1951. "Algunos teoremas básicos sobre los fundamentos de la matemática y sus implicaciones filosóficas", en Rodríguez Consuegra 1994.

________. 1953-54. "¿Es la matemática sintaxis del lenguaje?, III", en Rodríguez Consuegra 1994.

________. 1955-56. "¿Es la matemática sintaxis del lenguaje?, VI", en Rodríguez Consuegra 1994.

VAN HEIJENOORT, Jean (editor). 1970. *Frege and Gödel: two fundamental texts in Mathematical Logic*. Boston: Harvard University Press.

HILBERT David. 1993. *Fundamentos de las Matemáticas*. México: Colección Mathema, UNAM.

________. 1976. "Mathematical Problems", en *Mathematical Developments Arising From Hilbert Problems*. *American Mathematical Society*. Vol. 28 parte 1.

________. 1900. "Acerca del concepto de número", en Hilbert 1993, 17-22.

________. 1917. "El pensamiento axiomático", en Hilbert 1993, 23-35.

________. 1922. "La nueva fundamentación de las matemáticas". En Hilbert 1993, 37-62.

________. 1926. "Acerca del infinito", en Hilbert 1993, 83-121.

KLEENE, Stephen C. 1974. *Introducción a la Metamatemática*. Madrid: Editorial Tecnos.

REICHENBACH, Hans. 1973. *La filosofía Científica*. México: Fondo de Cultura Económica.

RODRÍGUEZ-C, F. 1994. *Kurt Gödel. Ensayos inéditos*. Barcelona: Biblioteca Mondadori.

Rosser, J. Barkley. 1936. "Extension of some theorems of Gödel and Church". *Journal of Symbolic Logic* 1: 87-91.

WANG, Hao. 1991. *Reflexiones sobre Kurt Gödel*. Madrid: Alianza Universidad.

WITTGENSTEIN, Ludwig. 1978. *Remarks on the Foundations of Mathematics*. Cambridge, Massachusetts.

________. 1979. *Tractatus Logico-Philosophicus*. Madrid: Alianza Editorial.

Carlos Torres, es Maestro en Ciencias por la Universidad Nacional Autónoma de México. Actualmente ocupa el puesto de profesor de tiempo completo en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM, donde imparte las asignaturas de lógica y teoría de conjuntos.