Mathesis **III 5$_1$** (2010) 65 - 74.
Impreso en México. Derechos reservados © 2010 por UNAM (ISSN 0185-6200)

Sobre la naturaleza del razonamiento matemático: Pierre Duhem crítico de Henri Poincaré.

Mario H. Otero[1]

RESUMEN

Este ensayo discute una crítica de Duhem [1912] a un bien conocido artículo de Poincaré titulado: “Sobre la naturaleza del razonamiento matemático”, de 1894, en el que cuestiona las demostraciones por recurrencia. Al enfocarse sobre el argumento de Duhem en “La naturaleza del razonamiento matemático”, a favor de un silogismo como la base del avance y rigor en matemáticas, el autor concluye que Duhem trabajaba desde un marco teórico viejo que lo llevó a una argumentación obsoleta, lo que parece sorprendente en vista del lugar icónico de Duhem como antecesor del postpositivismo.

Palabras clave: Duhem, Poincaré, postpositivismo, filosofía de las matemáticas.
MSC 2000: 01A55, 01A72

ABSTRACT

This paper discusses a criticism of Duhem [1912] of Poincaré well-known article “Sur la nature du raisonnement mathématique” of 1894 in which he questions the value of proof by recurrence. By focusing on Duhem’s arguments in “La nature du raisonnement mathématique” in favor of syllogism as the grounds of advancement and rigor in mathematics, the author concludes that Duhem was working from an outdated theoretical

1. Universidad de la República, Montevideo, Uruguay.
mhotero@adinet.com.uy

framework that led him to obsolete argumentation, which seems surprising in view of Duhem's iconic place as a forefather of post-positivism.

Key words: Duhem, Poincaré, postpositivism, philosophy of mathematics.
MSC 2000: 01A55, 01A72

Actualmente, un grupo importante de filósofos de la ciencia postpositivista, reconocen —con algunas variantes— a Pierre Duhem como su precursor en varios temas correlacionados entre sí, especialmente el holismo. Es curioso ver que desde Quine sea Duhem, y únicamente a él, al que se le reconozca esa condición de precursor. Y ello no solamente se reduce al holismo sino que se extiende a otros temas de cuño idealista, cuando no espiritualista.

Hemos tratado de mostrar en un conjunto de trabajos cómo, más allá de la oposición entre pospositivismo y neopositivismo —que muchas veces no es tal, lo cual ha ido apareciendo muy lentamente—, se ignoran los elementos que el pospositivismo de todos modos 'reproduce', cuando no recoge concientemente, de la filosofía francesa de las ciencias de fines del siglo XIX y comienzos del XX. Por ejemplo, hemos considerado, en "Apuntes sobre la llamada bancarrota de la ciencia" [Otero 2011], por lo menos uno de los aspectos de esa reproducción. Contrapuesto a ese olvido, aparece Duhem como ícono del pospositivismo. Se trata de una —que debiera ser— notoria excepción.

En la presente nota nos limitaremos, en cambio, al tema de las matemáticas en la obra de Duhem y, más aún, en un artículo suyo de 1912 sobre el razonamiento matemático, Hay aportes sobre el mismo tema que aparecen en su *Théorie physique, son objet, sa structure*, de 1906 y en *La science allemande* de 1915, de los cuales no nos ocuparemos aquí. Lo hacemos así porque de ese modo nos parece pertinente para la consideración y presunta actualidad del resto de su obra.[1]

Resulta por otra parte curioso que dicho artículo [1912], aparentemente en la forma de una respuesta inmediata, se centre en un ataque a Poincaré en 1912, año del deceso de éste, cuando el texto criticado aparece publicado ya en la *Revue de Métaphysique et de Morale* en 1894, es decir, ¡dieciocho años antes!, y reproducido en *La science et l'hypothèse* de 1902, de amplísima difusión.

Lechalas, en 1894, el mismo año del artículo original de Poincaré,[2] ya lo había enfocado críticamente. Ahí marcaba un presunto nominalismo en la obra de ese autor y atendía —sobre la base de los argumentos expuestos por Eugéne Ballue, justamente en un artículo que recibiera respuesta en el ya citado de Poincaré— al origen de las multiplicidades. Ballue decía "[…] la propiedad fundamental de las pluralidades, sea cual sea la manera en que se cuentan los objetos siempre que ningún objeto sea olvidado ni contado dos veces, es que es siempre el mismo número" [texto citado por Lechalas].

La argumentación de Lechalas se produce a propósito de ciertas tesis de Mill. Con todo no vamos tampoco a considerar detenidamente a Lechalas; nuestro objetivo aquí era

1. Para un estudio más completo se debería tener en cuenta —cosa que no se va a hacer aquí— tanto los argumentos expuestos en Crowe [1990] y Brenner [2003].
2. Al comienzo del artículo, Lechalas [1894] reconoce nutridamente la personalidad científica de Poincaré: "La *Revue de métaphysique et de morale* de juillet de 1894 contient une étude de M. Poincaré sur la nature du raisonnement mathématique, bien digne à tous égards de fixer l'attention et de provoquer la discussion. En général quand on est en présence d'un travail à la fois technique et philosophique dû à un savant qui joint à une compétence exceptionnelle de rares qualités de penseur, on doit, pour en faire une critique féconde, accepter franchement le point de vue suivant lequel il a établi son développement scientifique, en préciser s'il est besoin, les caractères et aborder alors l'examen des conséquences philosophiques que l'on peut en tirer. Tel est l'esprit dans lequel sont écrites les réflexions suivantes". No son meras amabilidades.

sólo mostrar cuan tardía es la respuesta de Duhem [1912] a Poincaré [1894]. Éste comienza así, al plantear su tema central:

> La posibilidad misma de la ciencia matemática parece ser una contradicción insoluble. Y esta ciencia no es deductiva más que en apariencia, ¿de dónde procede este perfecto rigor que nadie sueña en ponerlo en duda? Si, por el contrario todas las proposiciones que enuncia pueden extraerse unas de las otras por las reglas de la lógica formal, ¿cómo la matemática no se reduce a una inmensa tautología? El silogismo no puede enseñarnos nada nuevo y si todo debiera salir del principio de identidad, todo podría también reducirse a él. ¿Se admitirá pues los enunciados de todos los teoremas que llenan gruesos volúmenes no sean maneras extrañas de decir que *A* es *A*?

En la demostración por recurrencia

> Se establece primero un teorema para $n = 1$; se muestra luego que si es verdadero para $n - 1$, es también verdadero para n, y se concluye que es verdadero para todos los números enteros […]. El carácter esencial del razonamiento por recurrencia es que contiene, condensados por así decir en una fórmula única, una infinidad de silogismos en cascada […]. No se puede pues sustraerse a esta conclusión, que la regla del razonamiento por recurrencia es irreductible al principio de contradicción, y a la experiencia.

De la caracterización de la recurrencia como juicio sintético *a priori*, más allá de los nudos que esto comporta, se extrae el carácter axiomático de la demostración por recurrencia. Los matemáticos pueden, pues, proceder "inductivamente, de lo particular a lo general". Pero la construcción de combinaciones cada vez más generales es sólo la condición necesaria del progreso de las matemáticas. "Una construcción no llega a ser pues interesante sólo cuando se la puede colocar al lado de otras construcciones análogas, formando las especies de un mismo género". Finalmente, la recurrencia es necesaria además porque sólo existe ciencia de lo general. En *Le valeur de la science* escribió Poincaré:

> Si el desarrollo industrial me hace feliz, no es sólo porque da un argumento fácil a los defensores de la ciencia; es por encima de todo porque da al científico fe en si mismo, y también porque ofrece un campo inmenso de experiencia, donde se ve enfrentado por fuerzas demasiado colosales para esquivarlas. Sin este peso, ¿quién sabría

que no ha dejado la tierra, seducido por el espejismo de alguna novedad escolástica, o que no se desesperaría creyendo que no ha hecho nada más que soñar? [Bachelard 2005, 176]

Pierre Boutroux en un artículo de 1907 "La theórie physique de M. Duhem et les mathématiques" había considerado ya el tema antes del artículo de Duhem de 1912. La sucesión Poincaré [1894 y 1902], Lechalas [1894], Boutroux [1907], Duhem [1912], muestra también lo trasnochado de este último.

El artículo de Duhem trata de seguir la argumentación de Poincaré, intentando refutarla. Propone explicaciones alternativas, primeramente de la generalidad del razonamiento por recurrencia, y luego, brevemente, de la fecundidad de las matemáticas.

Desde el punto de vista lógico Duhem defiende fervientemente al silogismo y especialmente el carácter finito de las cadenas de silogismos, y ello en un período en que se había superado largamente al silogismo como paradigma lógico [Otero 2001]. El rigor y la fecundidad de las matemáticas sigue consistiendo para Duhem en el qué le darían sea un silogismo sean cadenas de silogismos.

Sus primeros argumentos pretenden ser históricos. Duhem nos dice que Francesco Maurolico hacia mediados del siglo XVI —publicacido en 1575— ha utilizado la recurrencia señalándola como un procedimiento nuevo de demostración. Duhem afirma que de todos modos los geómetras clásicos habían logrado, aún sin ese procedimiento, rigor y fecundidad y que, por tanto, estos no podrían deberse a la presencia de la recursión.

Mediante una reducción al absurdo, Duhem intenta demostrar que el razonamiento por recurrencia implica solamente un número finito de pasos silogísticos. Y luego intenta una demostración directa. Mientras que Poincaré sostiene la irreducibilidad de dicho razonamiento al principio de contradicción, Duhem piensa, como vimos, lo contrario.

Frente a la afirmación de que es necesario un postulado no derivable de un número finito de silogismos y que sería el siguiente: "Dado un número entero cualquiera, la operación que consiste en recorrer mediante el pensamiento, en orden de magnitud creciente, la sucesión de números enteros de 1 a *n* (o contar mentalmente de 1 a *n)* es una operación posible", Duhem piensa que se trata de un simple truismo. Se pregunta asimismo de donde surge la generalidad y responde que deriva de la noción general de número entero.

Duhem basa su explicación de la fecundidad de las matemáticas en que los silogismos tendrían como premisa mayor los axiomas, o alternativamente los teoremas previamente demostrados, y como demás premisas las definiciones que, éstas sí, podrían participar en gran número no-trivial en las demostraciones. Afirma que esos tan conocidos silogismos —o cadenas de ellos— fundan la creatividad, la novedad, en dicha ciencia. Sobre la recurrencia en Poincaré, Duhem nos dice:

> El empleo de este modo de razonamiento caracteriza la demostración matemática y la distingue de la simple deducción silogística y al mismo tiempo explica que la demostración matemática goce de una fecundidad creadora que la simple deducción silogística no podría poseer.

En las matemáticas no sería la forma lo que distingue al razonamiento matemático sino la naturaleza de las nociones —y proposiciones, agrega Duhem— a las que se aplica el razonamiento.

De todos los planteamientos de Duhem surge que, en un momento en que la lógica había dado grandes pasos y logrado resultados significativos, él se encontraba notoriamente atrasado y mostraba su desprecio, por lo menos en este caso, por el carácter histórico de la lógica y de las matemáticas. Y si bien Poincaré —aún con sus posiciones conocidas no muy favorables a la lógica matemática— podría también de algún modo considerarse ajeno a algunos de esos resultados, su posición fue totalmente diferente a la precaria de Duhem, su crítico acerbo y equivocado.

Por otra parte, su crítica reiterada, en *La Théorie physique,* a las doctrinas de los físicos ingleses lo es también de los matemáticos de esa nacionalidad. Estos habían superado la concepción aritmetizante del álgebra, desarrollando un álgebra abstracta que significó un notorio progreso que —con Boole— se extendió a la lógica.

De modo tal que se puede concluir que Duhem trabajaba desde un marco teórico distinto y atrasado. Y eso lo llevó a argumentaciones, sin duda, obsoletas.

Referencias

BACHELARD, G. 2005. "Essay sur la connaissance approchée" contenido en: Gary Gutting (editor). 2005. *Continental philosophy of science*. Malden MA: Blackwell.

BERROD, P. 1912. "La philosophie de l'intuition". *Revue Philosophique* **74**: 283-289.

BOUTROUX, Pierre. 1903. "L'intelligibilité intrinsèque des mathématiques". *Revue de Métaphysique et de Morale* **11**: 573-592.

——————. 1907. "La théorie physique de M. Duhem et les mathématiques". *Revue de Métaphysique et de Morale* **15**: 363-376.

BRENNER, Anastasios. 2003. *Les origines françaises de la philosophie des sciences*. Paris: Presses Universitaires de France.

——————. 1996. "La nature des hypothèses physiques selon Poincaré, à la lumière de la controverse avec Duhem"; contenido en: Jean-Louis Greffe *et al.* (editores). *Henri Poincaré: science et philosophie.* Berlin-Paris: Akademie – Blanchard. Pp. 389-395

BRUNSCHVICG, Léon. 1912. *Les étapes de la philosophie mathématique.* Paris: Blanchard (reimpresión 1981).

COFFA, J, Alberto. *From geometry to tolerance.* Comunicación personal.

———. 1986. "From geometry to tolerance; sources of conventionalism in 19th century geometry"; contenido en: Colodny, R. G. (editor). *From quarks to quasars; philosophical problems of modern physics*. Pittsburgh: University of Pittsburgh Press. Pp. 3-70.

CROWE, Michael J. 1975. "Ten 'laws' concerning patterns of change in the history of mathematics". *Historia Mathematica* **2:** 469-470.

———. 1988. "Ten misconceptions about mathematics and its history"; contenido en: William Aspray y Philip Kitcher (editors). *History and philosophy of modern mathematics*. Minneapolis: University of Minnesota. Pp. 260-277.

———. 1990. "Duhem and history and philosophy of mathematics". *Synthèse* **83**: 431-447.

DHOMBRES, Jean-Guy & Jean-Paul Pier (editores). 1987. *La philosophie des sciences de Henri Poincaré. Cahiers D'Histoire & de Philosophie des Sciences.* Vol. XXIII. Paris: Belin.

DRAGO, Antonino. 1996. "Poincaré versus Peano and Hilbert about the mathematical principle of induction"; contenido en: Jean-Louis Greffe *et al. Henri Poincaré: science et philosophie.* Berlin-Paris: Akademie – Blanchard. Pp. 513-527.

DUHEM, Pierre. 1906. *La théorie physique; son objet, sa structure*. Paris: Chevalier et Rivière. (2da. Ed. 1914).

———. 1908. "La valeur de la théorie physique". *Revue des Sciences pures et Appliquées* **19**: 7-19.

———. 1912. "La nature du raisonnement mathématique". *Revue de Philosophie* **12**: 531-543.

———. 1915. *La science allemande*. Paris: Hermann

———. 1954. *The aim and structure of physical theory*. Princeton NJ: Princeton University. Traducción de Philip P. Wiener.

GREFFE, Jean-Louis, Gerhard Heinzmann & Kuno Lorenz (editores). 1996. *Henri Poincaré: science et philosophie*. Berlin-Paris: Akademie – Blanchard.

GUEROUT, Serge. 1992. *Science et politique sous le Troisième Reich*. Paris: Ellipses.

GUTTING, Gary (editor). 2005. *Continental philosophy of science*. Malden MA: Blackwell.

HEINZMANN, Gerhard (editor). 1986. *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*. Paris : Blanchard.

LECHALAS, Georges. 1894. "Notes sur la nature du raisonnement mathématique". *Revue de Métaphysique et de Morale* **2**: 709-718.

MACLEOD, Roy. 1982. "The 'Bankrupty of science' debate: the creed of science an its critics (1885-1900)". *Science, Technology & Human Values* **7** #**41**: 2-15.

MARTIN, Russell. 1991. *Pierre Duhem; philosophy and history in the work of a believing physicist*. Chicago: Open Court Publishing Co.

MILHAUD, Gaston. 1903. "La science et l'hypothèse par M. H. Poincaré". *Revue de Métaphysique et de Morale* **11**: 773-781.

———. 1924. *Essay sur les conditions et les limites de la certitude logique*. 4a. Edición. [1a. edición, 1894]. Paris: Alcan

———. 1900. *Les philosophes geomètres de la Grèce; Platon et ses prédécesseurs*. New York: Arno. [reimpresión 1976].

OTERO, Mario H. 1997. "Deux types de conventionalisme et la croissance du savoir scientifique: la polémique Poincaré versus LeRoy". *Philosophia Scientiae* **2_4:** 139-149.

———. 2001. "Sobre la lógica en el siglo XIX y su reconstrucción historiográfica", contenido en: J. L.

Villacañas, (editor). *La filosofía del siglo XIX*. Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía. Consejo Superior de Investigaciones Científicas- Madrid: Trotta.

———. 2005. "De Edouard Leroy a Thomas S. Kuhn; el mítico cambio radical entre positivismo y pospositivismo". *Galileo* **II 32**: .

———. 2011. Apuntes sobre la bancarrota de la ciencia hacia fines del siglo XIX. *Llull* (en prensa).

PANZA, Marco & Pont, Jean-Claude (editores). 1995. *Les savants et l'épistémologie vers la fin du XIXe. siècle*. Paris: Blanchard.

PAUL, Harry W. 1968. "The debate over the bankruptcy of science in 1895". *French Historical Studies* **5**: 299-327.

POINCARE, Henri. 1894. "Sur la nature du raisonnement mathématique". *Revue de Métaphysique et de Morale* **2**: 371-384.

———. 1945. *La ciencia y la hipótesis*. Buenos Aires: Espasa-Calpe. [Paris. Primera edición 1902. Capítulo 1 reproduce el texto de 1894].

———. 1946. *Ciencia y método*. Buenos Aires: Espasa-Calpe.

———. 1946. *Últimos pensamientos*. Buenos Aires: Espasa-Calpe.

———. 1964. *Filosofía de la ciencia*. México: UNAM. [Capítulo 11 reproduce el texto de 1894].

SCHMID, Anne-Françoise. 1978. *Une philosophie de savant; Henri Poincaré & la logique mathématique*. Paris: Maspero.

STUMP, David .1996. "Poincaré's curious role in the formalization of mathematics"; contenido en Jean-Louis Greffe *et al. Henri Poincaré: science et philosophie.* Berlin-Paris: Akademie – Blanchard. Pp. 481-492.