[illegible] 11 (1992) [illegible]
[illegible] ISSN [illegible]

Metalógica [Metalogik]

Rudolf Carnap

Nota introductoria[1]

Para la presente edición he actualizado el escrito del *Wiener Kreis Archiv* que se encuentra en el Rijksarchief en Haarlem (Holanda) en las carpetas WK. 14 / WK. 15 / WK. 16. Me mantengo fiel al original, excepto en la adecuación al vigente sistema ortográfico de la puntuación, el uso de mayúsculas y la constitución de las palabras. Además, soluciono las abreviaturas, indicando la parte abreviada con subrayado. Lo que se encuentra en el texto subrayado lo presento en la traducción en cursiva (excepto los nombres de los contertulios en los diálogos) y utilizo los siguientes signos:

// para indicar el final de la página;

[ ] para introducir texto que no se halla en el original (ha de tenerse cuidado ya que el cuantificador universal también viene a ser presentado entre paréntesis).

Las notas al pie de página del trabajo y su traducción son del traductor. Su función es aclarar y reconstruir las referencias indirectas que se presentan en el escrito. Usaré dos tipos de entradas. Por un lado, mencionaré aquellos trabajos que Carnap conocía, o al menos citó en su libro *Logische Syntax der Sprache* [Carnap 1934], mediante el nombre del autor, año y páginas en las que se encuentra el tema abordado, haciendo referencia a la bibliografía que maneja la introducción. Por otro lado, cuando Carnap hace referencia a un problema que ha sido abordado posteriormente, indicaré el trabajo completo.

Agradezco al *Wiener Kreis Archiv* las facilidades dadas para la realización de la presente edición. Esta edición se debe a la generosa ayuda de la *Fundación Monteleón* 1992, que me posibilitó poder acceder a los Archivos del Círculo de Viena y consultar algunos trabajos en el Archivo de Graz (Austria). Quiero dejar constancia de la discreta ayuda del Prof. Dr. R. Haller (Universidad de Graz) y la ayuda inestimable de María Cencillo que supervisó todo el texto conmigo. Agradezco al Prof. Dr. Anne Kox el permiso para su publicación.

1. Edición, traducción y notas de Jesús Padilla Gálvez.

Protocolo del Círculo del 11 de junio de 1931. [1]

Primera conferencia de Carnap sobre metalógica.[1]

Por metalógica entiendo la teoría de las formas que aparecen en un lenguaje, es decir la exposición de la sintaxis del lenguaje. Con ello, no se puede hacer referencia alguna —de acuerdo con la formulación [del Círculo] de Varsovia—[2] al significado de los símbolos.[3] El interés que conduce a dicho planteamiento es de dos tipos diferentes: 1º ¿Qué cambios del lenguaje russelliano[4] son adecuados? 2º ¿[cuál es la] forma de la metalógica? ¿Hay enunciados sobre enunciados?, ¿qué sentido tienen?, ¿son enunciados empíricos o tautológicos?, ¿resulta una jerarquía de lenguajes? Nuestros objetos son los símbolos enunciativos de un lenguajes específico.[5]

Símbolos. P(a)[6] Predicado, que se dice sobre objetos.

Q(a,b)[7] Relación;

&, →, ≡, −, ∨, [x], [∃x].[8]

---

1. Carnap hace una pequeña excursión histórica sobre estas conferencias en su 'Autobiografía intelectual'. El fin de la metalógica viene a ser expuesto como la construcción de una teoría general de las formas lingüísticas. No es del todo correcto lo que él mismo afirma, cuando dice que el término 'sintaxis' fue empleado posteriormente para sustituir al concepto de 'metalógica' ya que la primera definición hace alusión a aquél. [Véase Carnap 1963, 53 s.]
2. Véase la nota biográfica sobre los autores que se citan en el texto con el título 'Círculo de Varsovia'.
3. En su 'Autobiografía intelectual' dirá posteriormente que "[d]e Frege aprendí la exigencia de formular las reglas de inferencia lógica sin referencia alguna al significado" [Carnap 1963, 13 s.]
4. Cuando Carnap habla de lenguaje russelliano se refiere a la propuesta esbozada en Whitehead y Russell 1910-13.
5. El modo como Carnap introduce los símbolos lógicos se ha convertido en una forma estándar. Lo que la sintaxis del lenguaje formalizado ha de satisfacer se puede resumir en cuatro puntos: (i) enumerar los símbolos primitivos; (ii) definir la noción de expresión bien formada es decir, enunciar las reglas de formación, (iii) especificar los axiomas, y, (iv) formular las reglas de inferencia. Este método será expuesto sistemáticamente en Carnap 1934.
6. Carnap comienza presentando el lenguaje de la lógica de predicados mediante su forma más primitiva, a saber, la aplicación de una letra predicativa (P) a un sujeto (a).
7. Este segundo predicado consta de dos lugares. Se denomina un predicado relacional, ya que, por lo general, Q(a,b) viene a expresar relaciones del tipo: 'tres es mayor que uno'.
8. Los símbolos son: la conjunción & (y), la implicación → (si ... entonces), la identidad ≡ (idéntico), la negación − (no), la disyunción ∨ (o), el cuantificador universal [x] (Para todo x ...), el cuantificador existencial [∃x] (Hay un x tal que...).

Zirkelprotokoll vom 11. Juni 1931.[1] [1]

Carnaps 1. Referat über Metalogik.

Unter Metalogik verstehe ich die Theorie der Formen, die in einer Sprache auftreten, also die Darstellung der Syntax der Sprache. Dabei darf - nach der Formulierung der Warschauer - auf die Bedeutung der Zeichen nicht Bezug genommen werden. Das Interesse, das zu diesen Überlegungen[2] geführt hat, ist von [zwei]erlei[3] Art: 1.) Welche Änderungen[4] der Russell'schen Sprache sind zweckmassig? 2.) Form der Metalogik: gibt es Sätze über Sätze, welchen Sinn haben sie, sind es empirische Sätze oder Tautologien, ergibt sich eine Hierarchie der Sprachen? Unsere Objekte sind die Satzzeichen einer bestimmten Sprache.

Zeichen P(a) Prädikat, das von Dingen ausgesagt wird
Q(a,b) Beziehung,
&, →, ≡, ~, v, [x], [∃].

1 A. d. Ü.: Der Zirkelprotokoll befindet sich im Wiener Kreis Archiv unter WK 14
2 A. d. Ü.: Im Originaltext steht: "Ueberlegungen".
3 A. d. Ü.: Im Originaltext steht: "2erlei".
4 A. d. Ü.: Im Originaltext steht: "Aenderungen"

Unsere Syntax soll folgende Forderungen erfüllen[1]. 1.) Die ''All''- und ''Es gibt''-Sätze sind nur dann verifizierbar, wenn sie für einen endlichen Bereich angegeben werden, die Syntax soll zur Angabe dieses Bereiches zwingen. 2.) Individuelle und spezifische Allgemeinheit sollen getrennt werden. Die individuelle ist empirisch, die spezifische betrifft Ansetzungen, die genereller Natur sind und nicht auf empirischer Durchlaufung beruhen. Die individuelle Allgemeinheit soll durch Operatoren, die spezifische durch freie Variabeln ausgedrückt werden. // 3.) Qualitative und Lagebeziehungen sollen [2]
syntaktisch getrennt werden.

''Beschreibung'' (Darstellung eines empirischen Befundes) erfolgt durch Belegung eines Stellengebietes mit Qualitäten (oder Zustandsgrö[ß]en). Der Einfachheit halber betrachten wir ein diskretes Stellenschema. Aus dem Namen einer Stelle kann man sehen, in welcher Beziehung sie zu anderen steht. (Beispiel: Hausnummern: Namen f[ü]r[2] Gegenstände derart, da[ß] sich aus ihrer Anordnung schon die Stelle im Schema ergibt.)

Beschränkung auf ein eindimensionales gerichtetes Schema:

$$\longrightarrow$$

. . . .

x x1 x11 x111

Wir führen Zeichen ein, die wir Ziffern nennen: ''0'', wobei ''x0'' gleichbedeutend mit ''x''. (Wenn 0 vor oder hinter einem Stellennamen steht, soll er dasselbe bedeuten, [wie] wenn man sie wegl[ä][ß]t.) und ''1''. Zahlzeichen sind aus 0 und 1 zusammengesetzt: so ergibt sich die Aufstellung einer Reihe von Zahlzeichen: 0, 1, 11, 111, 1111, ------

Die Angabe des Bereiches eines Alloperators erfolgt nun durch die Angabe der oberen Grenze des Bereiches: [n][11](P(xn)) ein solcher Allsatz bedeutet die Konjunktion der Sätze:
P(x) & P(x1) & P(x11) & P(x111).

Wenn als Bereichsabgrenzung bestimmte Zahlzeichen stehen, dann ist die Umschreibung in eine Konjunktion immer möglich. Aber wenn als Bereichsangabe eine Variable steht:

1 A. d. Ü.: Im Originaltext steht: ''Forderungen erfüllen''
2 A. d. Ü.: Im Originaltext steht aufgrund eines Fehlers im Schriftsatz ''für''

Nuestra sintaxis ha de satisfacer los siguientes requisitos: 1º los enunciados 'universales' y 'existenciales' son sólo verificables, si vienen a ser presentados para un ámbito finito: la sintaxis ha de constreñirse a hacer aserciones acerca de ese ámbito. 2º La generalidad individual y específica han de ser diferenciadas. La individual es empírica, las específica concierne a las asignaciones, que son de carácter general y no se basan en el recorrido empírico. La generalización individual ha de ser expresada mediante operadores, la específica mediante variables libres. // 3º Han de ser diferenciadas sintácticamente [2] las relaciones cualitativas de las localizativas.

[Las] 'Descripciones'[1] (exposición de una comprobación empírica) se llevan a cabo mediante la presentación del emplazamiento con cualidades (o magnitudes de estado). Para simplificar, analizamos el esquema discreto de los emplazamientos. [A partir] del nombre de un emplazamiento podemos observar en qué relación se encuentran con respecto a otros. (Por ejemplo: Número de casa, nombre para objetos, de modo tal, que resulte el emplazamiento que aparece en el esquema de su orden).

Limitación a un esquema orientado monodimensional:

$$\longrightarrow$$

. . . .

x x1 x11 x111

Introducimos símbolos que nombramos cifras: '0', en la que 'x0' está significando lo mismo que 'x', (Si 0 se encuentra antes o después del nombre del emplazamiento, éste [el nombre] significa lo mismo que si se omite el 0.) y '1'. Los símbolos de los números están compuestos por 0 y 1, por lo tanto, resulta la disposición de una fila de símbolos numerales: 0, 1, 11, 111, 1111, ------

La presentación del ámbito de un operador universal resulta, pues, mediante la presentación del límite superior del ámbito: [n]111 (P(xn)) un enunciado universal tal significa la conjunción de los enunciados:[2] P(x) & P(x1) & P(x11) & P(x111).

Si se encuentran determinados símbolos numéricos como límite del dominio, entonces la perífrasis en una conjunción es siempre posible. Sin embargo, si se encuentra como indicación del dominio una variable

---

1. La noción de 'descripción' —analizada a fondo por Russell— responde a aquello que Husserl denomina la facultad tematizante de las matemáticas. Según éste, toda propiedad de un objeto puede devenir a su vez un objeto y poseer propiedades. La diferenciación anterior, con respecto a la generalización, se hace eco de sus investigaciones fenomenológicas [véase Husserl 1921].
2. La idea de que la cuantificación universal sea una conjunción de enunciados es una interpretación constructivista.

[como puede ser el caso]: "[n]m (P(xn))", entonces resulta una conjunción con un número indeterminado // (pero finitos) de elementos: [3]
P(x) & ---------&----&----&----& P(xm).

Por lo tanto, es esencial la introducción del operador universal en nuestro lenguaje.

Del mismo modo, es posible la disolución de un enunciado existencial en una disyunción,[1] si resulta la indicación del dominio mediante símbolos numéricos; si resulta mediante una variable, entonces da por resultado una disyunción con un número indeterminado de elementos.

[∃'] 111 (P(xn))

P(x) v P(x1) v P(x11) v P(x111).

[∃'] m (K(xn))

P(x) v ---v ---v ---v ---- v P(xm).

Nuestros símbolos numéricos aparecen: 1° como nombres de emplazamientos, 2° como expresiones relativas de emplazamiento.

. . . .

0 $\underbrace{111}_{\downarrow}$ x $\underbrace{x1}_{\downarrow}$

Nombre de emplazamiento expresión relativa de emplazamiento

La metalógica ha de contestar en primera línea a las cuestiones [siguientes]:

1° ¿Qué símbolos[2] aparecen?

2° ¿Qué fila de símbolos son fórmulas?

Consideramos los símbolos como objetos, que son agrupados como géneros y especies.[3] Dos símbolos "x" en una fórmula no son el mismo símbolo, sino que pertenecen al mismo género, para lo que introducimos el símbolo $\mathfrak{x}$.

Como variable de objeto utilizamos letras latinas minúsculas // [4]
$\underbrace{x,\ u,\ n,\ ---}$

$\mathfrak{x}$ Nombres metalógicos de la especie[.]

$\overbrace{\mathfrak{x}',\ \mathfrak{x}'',\ ---}$ -Nombres metalógicos de los géneros de esa especie.

Además, está la especie de las cualidades:

---

1 Análogamente, la idea de la descomposición del cuantificador existencial en una disyunción es de carácter constructivista.
2. Los 'símbolos' pueden ser entendidos también como caracteres
3 La teoría del 'género' y la 'especie' volverá a ser aplicada en Carnap 1934.

"[n]m(P(xn))", so ergibt sich eine Konjunktion mit unbestimmt // [3]
vielen (aber endlich vielen) Gliedern.

P(x) & ————&——&——&——& P(xm).

Also ist doch die Einführung des Alloperators in unsere Sprache wesentlich.

Ebenso ist die Auflösung eines Existenzsatzes in eine Disjunktion möglich, wenn die Bereichsangabe durch Zahlzeichen erfolgt; erfolgt sie durch eine Variable, ergibt sich eine Disjunktion mit unbestimmt vielen Gliedern

[∃ⁿ] 111 (P(xn))

P(x) v P(x1) v P(x11) v P(x111).

[∃ⁿ] m (K(xn))

P(x) v —— v —— v —— v —— v P(xm).

Unsere Zahlzeichen treten auf 1.) als Stellennamen, 2.) als relative[1] Stellenbezeichnungen.

$$0 \qquad \underbrace{111}_{\downarrow\ \text{Stellenname}} \qquad x \quad \underbrace{x1}_{\downarrow\ \text{relative Stellenbezeichnung}}$$

Die Metalogik hat in erster Linie zu antworten auf die Fragen:

1.) welche Zeichen kommen vor?

2.) welche Zeichenreihen sind Formeln?

Wir betrachten die Zeichen als Dinge, die zu Arten und Gattungen zusammengefa[ß]t werden. Zwei Zeichen "x" in einer Formel sind nicht dasselbe Zeichen, sondern gehören zur selben Art, für die wir das Zeichen $\mathfrak{X}$ einführen.

Als Dingvariable nehmen wir kleine lateinische Buch-//staben: [4]

$\underbrace{x, u, n, \ldots}_{\mathfrak{X}}$ metalogische Namen der Gattung[.]

$\overbrace{\mathfrak{X}, \mathfrak{X}', \ldots}$ metalogische Namen der Arten dieser Gattung.

Ferner gibt es die Gattung der Qualitäten;

1. A. d. Ü.: Im Originaltext steht irrtümlich "alsrelative".

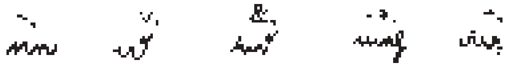
P, Q, R, - - - nehmen wir als Bezeichnung der "Qualitäten"

Gattung: [illegible] (Eigenschaften, Beziehungen)

Arten: [illegible], [illegible], - - -

In ähnlicher Weise gibt es eine Gattung der arithmetischen Prädikate ([illegible]) und eine Gattung der arithmetischen Funktionen ([illegible]), die ebenfalls in Arten zerfallen.

Den Einzelzeichen: ~, v, &, →, ≡,



(,), [,], ,, ∃, 0, ',

entsprechen Arten, die nicht zu Gattungen gehören.

Metalogische Beschreibung einer Formel:

R(x,y) v Q(0)

Dies nennen wir eine "Artbeschreibung"; lassen wir bei den Gattungsnamen die Indizes fort, soda[ß] hier nicht mehr die Arten, sondern nur noch die Gattungen angegeben sind, so nennen wir die Beschreibung eine "Gattungsbeschreibung":

Wozu die Einführung dieser Zeichen?

In einem metalogischen Satz über eine Formel dürfen wir nicht diese Formel selbst hinschreiben, sondern nur ihre metalogische Beschreibung. Z. Beispiel eines metalogischen Satzes: "Eine Formel von der Form [5] [illegible] ist eine elementare Disjunktionsformel". Ist dieser Satz nun analytisch, empirisch, oder synthetisch apriori?

Hilberts Ansicht: synthetisch a priori auf Grund reiner Anschauung; diese Ansicht ist vielleicht dadurch entstanden, da[ß] die Formel und ihre Beschreibung nicht deutlich auseinandergehalten worden sind. Der

$\underbrace{P, \quad Q, \quad R,}$ - - - los utilizamos como expresión de las "cualidades" (propiedades, relaciones.)

Especie: $\mathfrak{pr}$

Géneros: $\overbrace{\mathfrak{pr}^{1}, \mathfrak{pr}^{2}, \ldots}$

De modo semejante hay una especie de los predicados aritméticos ($\mathfrak{arpr}$) y una especie de las funciones aritméticas ($\mathfrak{fu}$), que se descomponen asimismo en géneros.

A los símbolos individuales: $\sim$, $\vee$, $\&$, $\rightarrow$, $\equiv$,
$\mathfrak{nicht}$ $\mathfrak{oder}$ $\mathfrak{und}$ $\mathfrak{wenn}$ $\mathfrak{\ddot{a}q}$

(,), [,], ,, x, 0, |
$\mathfrak{Kl}$ $\mathfrak{Kl}'$ $\mathfrak{eKl}$ $\mathfrak{eKl}'$ $\mathfrak{Ko}$ $\mathfrak{v}$ $\mathfrak{Nu}$ $\mathfrak{s}$

les corresponden géneros que no pertenecen a especies.

Descripción metalógica de una fórmula:

$P(x, y) \vee Q(0)$

$$\mathfrak{pr}^{1} - \mathfrak{Kl} - \mathfrak{v} - \mathfrak{Ko} - \mathfrak{v}' - \mathfrak{Kl}' - \mathfrak{oder} - \mathfrak{pr}^{2} - \mathfrak{Kl} - \mathfrak{Nu} - \mathfrak{Kl}'$$

Esta [descripción] la denominamos una 'descripción del género'"; dejamos de lado para los nombres de la especie los índices, de modo que aquí no se dan más los géneros sino sólo las especies, entonces denominamos la descripción una 'descripción de la especie' [del siguiente modo]:

$$\mathfrak{pr}(\mathfrak{v}, \mathfrak{v}')\, \mathfrak{oder}\, \mathfrak{pr}(\mathfrak{Nu})$$

¿Para qué la introducción de esos símbolos?

En un enunciado metalógico sobre las fórmulas no podemos escribir esas mismas fórmulas, sino su descripción metalógica. // [5]

Ejemplo de un enunciado metalógico: 'Una fórmula de la forma $\mathfrak{pr}(\mathfrak{v}, \mathfrak{v}')\, \mathfrak{oder}\, \mathfrak{pr}(\mathfrak{Nu})$ es una fórmula elemental de la disyunción'. ¿Dicho enunciado es por tanto, analítico, empírico, o sintético a priori?

En opinión de Hilbert,[1] [es]: sintético a priori, debido a la intuición pura; dicho punto de vista se ha formado, tal vez, en tanto que no se ha distinguido claramente la fórmula y su descripción.[2] Dicho enun-

1 No he podido encontrar el lugar exacto en el cual Hilbert postula que dichos enunciados son sintéticos *a priori*.

2 Me parece que la refutación no es del todo concluyente pero sí recurrente.

ciado metalógico es analítico;[1] esto es, el que una fórmula, que tenga tal y tal descripción, sea una disyunción elemental, resulta de la definición metalógica de concepto "disyunción elemental", en cambio, el enunciado: ["] la fórmula[2] que se encuentra aquí en la pizarra es una disyunción elemental ["] es un enunciado empírico.

En un enunciado metalógico no ha de haber, pues, ninguna fórmula lógica (como parte enunciativa). En lugar de la fórmula ha de estar una descripción metalógica [de la fórmula]. El uso de una fórmula en el texto metalógico es equívoco (sin estremadas medidas de precaución); no sabemos cómo podemos variar[3] dicha fórmula.

El problema de la *identidad*:[4]

Según Russell:[5] $(x = y) =_{Df} (F(x) \rightarrow F(y))$

Wittgenstein[6] rechaza dicha definición: $x = y$ no es ninguna forma enunciativa[ ]

$a = b$ no es un enunciado.

Es posible que 2 objetos tengan en común todas las propiedades y sean, no obstante, 2 objetos. Para entender el enunciado "$a = b$", debemos conocer ya el significado de los nombres y, si los conocemos, entonces sabemos si refieren el mismo objeto,[7] si, por tanto, "$a = b$" es verdadero o falso. // [6]

1. Según Wang [1991, 95], Gödel rechazó esta primera parte de la metalógica. En una larga carta del 11 de septiembre de 1932 señala errores en la definición de 'analítico'. Se puede evitar dichas dificultades recurriendo a un lenguaje que contenga ya los conceptos de conjunto y relación. Se desarrolla entre ambos una intensa relación en la que Carnap propone una corrección (el 25 y 27 de septiembre de 1932), y a la que Gödel responde el 28 de noviembre de 1932 afirmando que la relevancia de una definición como él le ha propuesto reside en la demostración de que las proposiciones indecidibles en un sistema jerárquico puede decidirse en un nivel superior.
2. La fórmula en la que aparece la disyunción presumiblemente estaría escrita en la pizarra.
3. Uso el concepto 'variar' ya que Carnap hace uso del latinismo 'variieren' que es más abstracto que su sinónimo alemán 'ändern'.
4. El término "identidad" está subrayado en alemán por lo que lo presento en cursiva ya que hemos optado por subrayar las partes del texto que faltan.
5. Estamos ante una formulación extraña de la ley de indiscernibilidad de los idénticos ya que ésta viene a ser formalizada mediante: $(x=y) \rightarrow (F(x) \rightarrow F(y))$. En el lugar de la implicación aparece una identidad definitoria. Whitehead y Russell usan en *Principia Mathematica* la siguiente definición: $x = y . = : \varphi x . \rightarrow . \varphi y$. Véase Russell 1932, 37.
6. Véase Wittgenstein 1921, 4.241 ss.
7. Es interesante indicar cómo Carnap, cuando habla de identidad, la aplica a la forma enunciativa o a un enunciado, sin embargo cuando entran en juego dos objetos y la relación entre ellos, habla de 'mismidad', algo que está en total acuerdo con las propuestas leibnizianas [véase Padilla Gálvez 1988, 685-692].

genannte metalogische Satz ist analytisch, da[ß] nämlich eine Formel, die diese und diese Beschreibung hat, eine elementare Disjunktion ist, ergibt sich aus der metalogischen Definition des Begriffes "elementare Disjunktion"; dagegen ist der Satz, da[ß] die hier auf der Tafel stehende Formel eine elementare Disjunktion [sei], ein empirischer Satz.

In einem metalogischen Satz soll also keine logische Formel (als Satzteil) stehen. Statt der Formel mu[ß] eine metalogische Beschreibung stehen. Die Verwendung einer Formel im metalogischen Text ist (ohne besonders vorsichtige Ma[ß]regeln) vieldeutig; wir wissen nicht, wie wir diese Formel variieren dürfen.

Problem der *Identität.*

Nach Russel: $(x = y) = (F(x) \rightarrow F(y))$
Wittgenstein lehnt diese Definition ab: $x = y$ ist keine Satzform[,]
$a = b$ ist kein Satz.

Es ist möglich, da[ß] 2 Dinge alle Eigenschaften gemeinsam haben und doch 2 Dinge sind. Um den Satz "a = b" zu verstehen, müssen wir die Bedeutung der Namen schon kennen, und wenn wir sie kennen, wissen wir ob sie dasselbe Ding bezeichnen, ob also "a = b" wahr oder falsch ist. // [6]

Lewis kritisiert fälschlich an den Principia, da[ß] nur ein Zeichen für Implikation, nicht auch für strict implication (*Folgebeziehung*) vorkommt. Die Folgebeziehung ist ein metalogischer Begriff. Die Verwechslung zwischen Implikation und Folgebeziehung ist sehr häufig. Wenn die Folge gilt, dann auch immer die Implikation, aber nicht umgekehrt.

Definition einiger metalogischer Begriffe:

$\mathfrak{Zi} =_{Df} \mathfrak{Nu}$ oder $\mathfrak{E}$ (ein Ding ist eine *Ziffer*, wenn es eine Null oder eine Eins ist.)

$\mathfrak{ziR} =_{Df} \mathfrak{Zi}$ oder $\mathfrak{ziR}\text{-}\mathfrak{Zi}$ (eine Reihe hei[ß]t eine Ziffernreihe, wenn sie entweder aus einer einzelnen Ziffer besteht oder aus einer Ziffernreihe und einer Ziffer.)

$\mathfrak{z}\mathfrak{El} =_{Df} \mathfrak{Zi}$ oder $\mathfrak{V}$ (ein Ding ist ein *Zahlelement*, wenn es eine Ziffer oder eine Variable ist.)

$\mathfrak{z}\mathfrak{A} =_{Df} \mathfrak{z}\mathfrak{El}$ oder $\mathfrak{z}\mathfrak{A}\text{-}\mathfrak{z}\mathfrak{El}$ (eine Reihe hei[ß]t ein[2] *Zahlausdruck*, wenn sie aus einem Zahlelement besteht oder aus einem Zahlausdruck und einem Zahlelement.[ )]

1. A. d. H.: Im Originaltext schreibt R. Carnap das Substantiv wie folgt: "ding".
2. A. d. H.: Im Original steht "heisstein".

Lewis[1] critica injustamente a los *Principia* [*Mathematica*], que sólo aparece un símbolo para la implicación,[2] sin embargo no para la implicación estricta.[3] La implicación estricta es un concepto metalógico.[4] La confusión entre implicación e implicación estricta ocurre a menudo. Si vale la implicación [estricta], entonces también vale siempre la implicación, pero no a la inversa.

Definición de algunos conceptos metalógicos:

$\mathfrak{Zi} =_{Df} \mathfrak{Nu} \lor \mathfrak{E}$ (un objeto es una *cifra*,[5] si es un cero o un uno)[6]

$\mathfrak{ZiR} =_{Df} \mathfrak{Zi} \lor \mathfrak{ZiR} - \mathfrak{Zi}$ (una fila se denomina una fila de cifras, si consta, o bien de una única cifra, o bien de una fila de cifras y una cifra.)

$\mathfrak{ZE} =_{Df} \mathfrak{Zi} \lor \mathfrak{V}$ (un objeto es un *elemento numérico*, si es una cifra o una variable.)

$\mathfrak{ZA} =_{Df} \mathfrak{ZE} \lor \mathfrak{ZA} - \mathfrak{ZE}$ (una fila se denomina una *expresión numérica*, si consta de un elemento numérico o de una expresión numérica y un elemento numérico.[ ])

1. Carnap se refiere a Lewis 1918.
2. La interpretación del implicador que se presenta en *Principia Mathematica* se puede resumir así: una implicación es verdadera si, y sólo si, no se da el caso de que su antecedente sea verdadero y su consiguiente falso. Sin embargo, esta interpretación conlleva la aceptación de varias tesis contraintuitivas y que seguidamente exponemos. Así pues, (a) una proposición verdadera es implicada materialmente por cualquier proposición $[p \rightarrow (q \rightarrow p)]$, (b) una proposición falsa implica materialmente a cualquier proposición $[\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)]$, (c) puesto que, para todo p, o bien ha de *ser* verdadero el antecedente de (a), o el de (b), se deduce también que, dadas dos proposiciones cualesquiera, o bien la primera implica materialmente a la segunda, o la segunda a la primera, de lo que resulta la *paradoja de la implicación material* y que puede ser expuesta por: $[(p \rightarrow q) \lor (q \rightarrow p)]$.
3. La implicación estricta resulta de una nueva interpretación de la expresión "p implica q" y que viene a ser simbolizada por la conectiva diádica "$\rightarrow$3". Una implicación estricta es verdadera, sólo cuando no puede darse el caso de que su antecedente sea verdadero y su consecuente falso. De este modo se introduce el operador modal de "posibilidad".
4. Carnap se muestra partidario de identificar implicación estricta con entrañamiento. Entrañamiento en este caso sería la inversa de la relación de deducibilidad. Así pues, dada esta vinculación se darían relaciones de entrañamiento entre proposiciones en virtud al status de las proposiciones.
5. En alemán, Carnap usa el término [illegible] 'Ziffer', que es más ambiguo, y por tanto puede ser traducido mediante el concepto 'cifra', pero también significa 'signo'. También podría ser traducido por 'número', aunque para este concepto usa el término alemán 'Zahl'.
6. El procedimiento que aquí se desarrolla tiene un paralelo en la propuesta de Gödel. Este último ha sido descrito recientemente por Thiel 1992, 138-181. Sobre todo, consúltese la página 160.

Supongamos que queremos expresar que en algún dominio vale una determinada relación P para todas las variables propias (es decir que no son idénticas)

Si el correspondiente dominio no está específicamente dado, por ejemplo [p]n[q]n(R(xp,xq)), entonces no podemos expresar con los símbolos lingüísticos que hemos mencionado hasta ahora, que // el [7] enunciado universal ha de limitarse a pares propios. Para expresar esto, han de ser introducidos nuevos símbolos. Russell[1] escribe esto así: $(p \neq q) \rightarrow R(xp,xq)$

La definición russelliana no se puede exponer en nuestro lenguaje, ya que usa un cálculo funcional [de orden] superior; nosotros, sin embargo, no tenemos variables predicativas, menos aún operadores universales como tales.

¿Qué posibilidades existen, pues, si no toleramos la identidad como una relación propia?

[Según] Wittgenstein:[2] si en una fórmula aparecen 2 variables diferentes, entonces ha de ser entendida siempre de tal modo que en la sustitución se tomen 2 constantes diferentes. Dicha asignación es, sin embargo, inadecuada, ya que entonces tendríamos que introducir otros símbolos y reglas más complicadas; ya que la sustitución no ha de realizarse para todas las variables al mismo tiempo; por esta razón, podrían ser olvidadas, entretanto, las limitaciones de la sustitución, si no fuesen expresadas de manera explícita mediante los símbolos que se escriben en las fórmulas.

Yo intenté con anterioridad el siguiente camino que se ha de mostrado no ser adecuado: expresamos las restricciones a pares auténticos mediante índices superiores:

[p] n [q] n $^{[p]}$ (R(xp,xq))

[q] n $^{[q]}$ (R(xp,xq))

Las reglas para el uso de dichos índices son, sin embargo, muy complicadas. Lo más sencillo es, pues, la conservación del simbolismo tradicional, escribimos pues:

$\sim (p = q) \rightarrow R(xp,xq)$[3]

o $(p = q) \vee R(xp,xq)$

con ello tomamos "=" como símbolo básico sin definir // (como [8] Behmann).[4] Lo interpretamos sólo de otro modo: una fórmula de la forma

1. Véase Russell 1932, 45 ss.
2. Véase Wittgenstein 1921, 4.243
3. En el texto original aparece un paréntesis que estaba de más tachado.
4. Carnap se refiere a Behmann 1927.

Angenommen, wir wollen ausdrücken, da[ß] in irgend einem Bereich eine bestimmte Relation P für alle echten (d. h. nicht identischen) Variabeln gilt.

Ist der betreffende Bereich nicht bestimmt angegeben, z. B. [p]n[q]n(R(xp,xq)), so können wir mit den bisher genannten Sprachzeichen nicht zum Ausdruck bringen, da[ß] // der allgemeine Satz auf echte [7] Paare beschränkt sein soll. Um das auszudrücken, müssen neue Zeichen eingeführt werden. Russell schreibt dies so: $(p \neq q) \rightarrow R(xp, xq)$[ ] Die Russellsche Definition können wir in uns[e]rer[1] Sprache nicht aufstellen, da sie den höheren Funktionenkalkül ben[u]tzt,[2] wir aber keine prädikativen Variabeln, geschweige denn Alloperatoren mit solchen haben.

Welche Möglichkeiten bestehen nun, wenn wir die Identität nicht als eigentliche Relation zulassen?

Wittgenstein: Wenn in einer Formel 2 verschiedene Variabeln[3] vorkommen, soll das immer so verstanden werden, da[ß] bei Einsetzung[4] 2 verschiedene Konstanten zu nehmen sind. Diese Festsetzung ist aber unzweckmä[ß]ig, da man dann noch and[e]re[5] Zeichen und komplizierte Regeln einführen mü[ß]te; denn die Einsetzung mu[ß] nicht für alle Variabeln gleichzeitig erfolgen; daher könnte inzwischen die Einsetzungsbeschränkung vergessen werden, wenn sie nicht ausdrücklich durch in die Formeln geschriebene Zeichen zum Ausdruck gebracht ist.

Ich habe früher folgenden Weg versucht, der sich aber auch nicht als zweckmä[ß]ig erwiesen hat: wir drücken die Beschränkung auf echte Paare durch obere Indizes aus

[p]n[q], n ^25 (R(xp, xq))

[q] n ^14 (R(xp, xq))

Die Regeln für die Behandlung dieser Indizes sind aber sehr kompliziert. Am einfachsten ist doch die Beibehaltung der traditionellen Symbolik: wir schreiben also

$- (p = q) \rightarrow R(xp, xq))$

oder $(p = q) \vee R(xp, xq)$

Dabei nehmen wir "=" als undefiniertes Grundzeichen // (wie [8] Behmann). Wir interpretieren nur anders: eine Formel von der Form

---

1 A. d. Ü.: Im Originaltext steht: "unsrer"

2 A. d. Ü.: Im Originaltext steht: "benutzt"

3 A. d. Ü.: Änderung des Originaltextes, in dem "Variable" im Singular steht.

4 A. d. Ü.: Das Substantiv steht im Originaltext kleingeschrieben: "einsetzung"

5 A. d. Ü.: Im Originaltext steht: "andre"

"p = q" gilt uns nicht als Darstellung eines Sachverhaltes, sondern der Hilfsformel, die als unselbständiger Bestandteil eines Satzes oder auch als Glied eines Beweises auftritt.

Wir unterscheiden also zwischen eigentlichen und uneigentlichen Formeln. die uneigentlichen werden formal meist wie eigentliche Formeln behandelt; in manchen Fällen ist die Unterscheidung aber doch nötig.

Wenn wir in die genannte Formel gleiche Konstanten einsetzen, obwohl sie nur für ungleiche gelten soll, ergibt sich eine Tautologie: $(1 = 1) \vee R(x1, x1)$.

Bei Einsetzungen von verschiedenen Konstanten ergibt sich z. B. $(1 = 11) \vee R(x1, x11)$
oder $\sim(1 = 11) \supset R(x1, x11)$. Hieraus kann mit Hilfe der Formel "$\sim(1 = 11)$" nach der Implikationsregel bewiesen werden: $R(x1, x11)$. So können wir aus dem obigen generellen Satz gerade diejenigen singulären Sätze ableiten, die dem angenommenen empirischen Bestand entsprechen.

Hahn: Die Bezeichnung von Individuen durch Ordinalzahlen ist sehr einfach. Bei anderen Stellenschemata wird sie aber viel komplizierter. // [9]

Carnap: Der mathematische Teil ist hier möglichst einfach gewählt, weil es mir hier hauptsächlich um die gehaltvollen Sätze der Sprache geht. Die Einführung eines mehrdimensionalen Stellenschemas wäre sehr einfach, dagegen würde die Ben[u]tzung[1] eines Kontinuums die ganzen Schwierigkeiten der reellen Zahlen hereinbringen. // [ENDE]

---

1 A. d. C.: Im Originaltext steht "Benützung".

"$p = q$" no vale como expresión de un estado de cosas,[1] sino como de una fórmula auxiliar, que aparece como componente independiente de un enunciado o, también, como parte de una prueba.

Diferenciamos, pues, entre fórmulas propias e impropias, las impropias vienen a ser tratadas formalmente en la mayoría de los casos como fórmulas propias; en algunos casos es preciso, sin embargo, la diferenciación.

Si establecemos en las susodichas fórmulas, las mismas constantes, a pesar de que sólo valgan para diferentes, entonces resulta una tautología:[2]

$(1=1) \vee R(x1,x1)$.

En la sustitución de diferentes constantes, resulta <u>por ejemplo</u>[:]

$(1=11) \vee R(x1,x11)$

o $\sim(1=11) \rightarrow R(x1,x11)$. De esto resulta que podemos demostrar con ayuda de la fórmula "$\sim(1=11)$", según la regla de implicación: $R(x1,x11)$. Así podemos derivar del enunciado universal superior, precisamente, aquellos enunciados singulares que corresponden a la consistencia empírica que se ha supuesto

---

<u>Hahn</u>: La denominación de individuos mediante números ordinales es muy sencilla. En otros esquemas de emplazamiento son, sin embargo, mucho más complicados. // [9]

<u>Carnap</u>: El apartado matemático ha sido elegido aquí de modo sencillo, porque aquí me interesaban principalmente los enunciados con contenido del lenguaje. La introducción de un esquema de emplazamiento polidimensional sería muy sencillo; por el contrario supondría el uso de un continuo, agregar todas las dificultades de los números reales. // [FINAL]

---

1. La noción de 'estado de cosas' (*Sachverhalt*) es tratada en Padilla Gálvez 1991, 415-423.
2. Carnap presenta una definición estricta de 'tautología'.

Protocolo del Círculo del 18. 6. 1931. [1]

Segunda conferencia de Carnap sobre metalógica.

Continuación de las *definiciones de los conceptos metalógicos*: A la especie de los *predicados aritméticos*[1] pertenecen, además, del concepto fundamental de la identidad I(p,q) por ejemplo:[2]

Gr(m,n) = [∃^k]m(−I(k,0)&I(m,kn)).

Tlb(m,n) = [∃^k]m(I(m,prod(k,n))).

Prim(m) = [∃^k]m(I(k,0) ∨ I(k,1) ∨ I(k,m) ∨ −Tlb(m,k)).

Las *funciones aritméticas* se definen, en parte, recursivamente,[3] de modo que los símbolos introducidos de ese modo no tienen el valor de abreviaciones, sino que son esenciales, es decir, no son eliminables.[4]

sum(m,n) = mn.

1) prod(m,0) = 0[.][5]

2) prod(m,n1) = sum(prod(m,n),m).

También Skolem[6] ha introducido los diferentes predicados aritméticos y las funciones mediante definiciones recursivas.

En nuestros enunciados predicativos se encuentran, hasta ahora, en el emplazamiento de los argumentos, siempre "expresiones numéricas", cuando usamos también funciones, hablamos de "expresiones aritméticas". Esto supone definiciones más complicadas. Por esa razón, quiero renunciar, por amor a la simplificación en nuestra exposición actual, a las funciones aritméticas y definir como si apareciesen sólo expresiones numéricas.

1. Gödel llamó 'aritmético' a un predicado, cuando podía ser expresado explícitamente en términos de números naturales, constantes y variables, de las funciones (+) y (·), de la igualdad (=), de las operaciones →, &, ∨, − del cálculo proposicional, y de los cuantificadores [x], [∃ x], combinados según las reglas sintácticas usuales. Esta caracterización permite observar mejor las diferencias y las coincidencias entre ambos propuestas.
2. Carnap usa I por 'identidad', Gr por 'mayor', Tlb por el predicado de la 'propiedad divisible', prod por 'producto' y Prim por "número primo". Véase Carnap 1934, 52 [D 9-D 10, D 11]. Este último viene a ser definido por Gödel del siguiente modo. Prim ↔ ∃ z (z ≤ x & z ≠ 1 & z ≠ x & x/z) & x > 1, x es un número primo [Gödel 1931, 182].
3. La recursión que está en juego será denominada posteriormente por Kleene una recursión de curso-de-valores y reducida a una recursión primitiva (véase Kleene 1971, §46).
4. Carnap usa el latinismo 'eliminierbar' por lo que optamos por dicha traducción.
5. Véase Carnap 1934, 52 (D. 12.1).
6. Skolem propuso reemplazar todas las operaciones efectuadas en las matemáticas por operaciones aritméticas, es decir, aquellas de la aritmética recursiva donde se traducen las operaciones lógicas. Véase Skolem 1962, 217-232. Carnap también había manejado el trabajo de Skolem 1920, 1-36.

Zirkelprotokoll, 18. 6. 1931.[1] [1]

Carnap, 2. Vortrag über Metalogik.

Fortsetzung der *Definitionen metalogischer Begriffe.* Zur Gattung der *arithmetischen Prädikate* gehören ausser dem Grundbegriff der Identität I(p,q) z.B.:

$Gr(m,n) = [\exists^k]m(\sim I(k,0) \& I(m,kn))$.

$Tlb(m,n) = [\exists^k]m(I(m,prod(k,n)))$.

$Prim(m) = [\exists^k]m(I(k,0) \vee I(k,1) \vee I(k,m) \vee \sim Tlb(m,k))$.

Die *arithmetischen Funktionen* werden zum Teil rekursiv definiert, so daß[2] die auf diese Art eingeführten Zeichen nicht den Wert von Schreibabkürzungen haben, sondern wesentlich, d. h. nicht eliminierbar sind.

$sum(m,n) = mn$

1) $prod(m,0) = 0$

2) $prod(m,n') = sum(prod(m,n),m)$.

Auch Skolem hat die verschiedenen arithmetischen Prädikate und Funktionen durch rekursive Definitionen eingeführt.

In unseren Prädikatsätzen stehen an Argumentstellen bisher immer "Zahlausdrücke", wenn wir auch[3] Funktionen verwenden, sprechen wir von "arithmetischen Ausdrücken". Das bedingt kompliziertere Definitionen. Daher will ich bei meiner jetzigen Darstellung der Einfachheit halber auf die arithmetischen Funktionen verzichten und definieren, als kämen nur Zahlausdrücke vor.

1. A. d. C.: Der Zirkelprotokoll befindet sich im Wiener Kreis Archiv unter W.K.14.
2. A. d. C.: Im Original steht "sodass".
3. A. d. C.: Das Wort "auch" ist handschriftlich in einem ausreichenden Zwischenraum zwischen "wir" und "Funktionen" eingefügt.

Elementare Argumentenreihe: *GeArg R* = *Zei* oder *GeArg R* - *kom* - *Zei* dabei ist wichtig, dass das im Definiens wieder auftretende Zeichen des Definiendums sich hier auf ein kleineres Stück bezieht als im Definiendum. // [2]

Prädikat: *Pr* = *Vf* oder *Vaz*

Elementare Formel: *El Form* = *Pr* (*GeArg R*)

Alloperator: *All Vz* = [*Z* | *Zei* in dem keine Variable vorkommt, die gleicher Art ist wie die Variable in der Operatorklammer.

Existenzoperator: *E Vz* = [*Es Z* *Z*] *Zei* in dem---------------

Operator: *Vz* = *All Vz* oder *E Vz*

Formel: *Form* = *El Form* oder *nic* (*Form*)

oder	(*Form*)	*und*	(*Form*)
"	(")	*sonst*	(")
"	(")	*mif*	(")
"	(")	*äqu*	(")
"	*Vz* (*Form*)		

Mit Hilfe des Begriffes "Formel" können wir "gebundene" und "freie Variable" definieren, indem wir zunächst "*Operand*" definieren. Hat eine Formel folgende Gestalt: *Vz* (*A*), wobei *A* eine Formel ist, so ist *A* der Operand. *Eine Variable*, die an irgend einer Stelle einer Reihe steht, heisst innerhalb dieser Reihe "*gebunden*", wenn sie entweder in einem Operator steht, oder in einem Operand und gleichartig ist mit der Variabeln, die im Operator dieses Operanden steht. Eine *Variable* heisst "*frei*" innerhalb einer Reihe, wenn sie innerhalb dieser Reihe nicht gebunden ist.

Ableitungen: die Methode nach der entschieden wird, ob eine Formel anerkannt wird, ob sie also eine beweisbare Formel ist, muss -wenn

Filas elementales de argumentos: $\mathfrak{elArgR} = \mathfrak{z}\mathfrak{A}$ o $\mathfrak{elArgR}$. $\mathfrak{Dar}$ - $\mathfrak{z}\mathfrak{A}$ en éstas, es importante que aquel símbolo del definiendum que aparece de nuevo en la definición se refiera aquí a una parte [2]
más pequeña que en el definiendum.[1]

Predicado: $\mathfrak{P} = \mathfrak{V}$ o $\mathfrak{Uf}$

Fórmula elemental. $\mathfrak{elFor} = \mathfrak{P}\ (\mathfrak{elArgR})$

Operador universal: $\mathfrak{Al}\ \mathfrak{Ov} = [\ \mathfrak{V}\ ]\ \mathfrak{z}\mathfrak{A}$ en el que no aparece ninguna variable que sea de la misma especie que la variable que se encuentra en los paréntesis de los operadores

Operador existencial: $\mathfrak{E}\mathfrak{Ov} = [\ \mathfrak{VV}\ \ \mathfrak{V}\ ]\ \mathfrak{z}\mathfrak{A}$ en el------------

Operador. $\mathfrak{Ov} = \mathfrak{Al}\ \mathfrak{Ov}$, " $\mathfrak{E}\mathfrak{Ov}$

Fórmula: $\mathfrak{for} = \mathfrak{elFor}$ o $\mathfrak{neg}\ (\mathfrak{for})$
o ($\mathfrak{for}$) $\mathfrak{od}$ ($\mathfrak{for}$)
" (") $\mathfrak{und}$ (")
" (") $\mathfrak{imp}$ (")
" (") $\mathfrak{äqu}$ (")
" $\mathfrak{Ov}$ ($\mathfrak{for}$)

Con la ayuda del concepto "*fórmula*" podemos definir "[variable] ligada" y "variable libre", en tanto que definimos primeramente "*operando*". Tiene una fórmula la siguiente estructura: $\mathfrak{Ov}(\mathfrak{Al})$, en la que $\mathfrak{Al}$ es una fórmula, entonces $\mathfrak{Al}$ es el operando. Una variable que se encuentra en cualquier emplazamiento de una fila se denomina en el marco de esa fila "ligada" si, o bien se encuentra en un operador, o bien en un operando, y es del mismo tipo de las variables que se encuentran en el operador de dicho operando. Una *Variable* se denomina "libre" en el marco de una fila, si, en el marco de dicha fila, no está ligada.

Derivación: el método según el cual se decide[2] si una fórmula se acepta; si por lo tanto, es una fórmula demostrable,[3] tiene que ejecutarse

1 Carnap pone especial cuidado en introducir adecuadamente las nociones metalógicas. Las fórmulas son sentencias, en tanto elementos de un cálculo. En base a dicha diferenciación distinguirá posteriormente las sentencias de un sistema semántico de aquellas que son observadas desde un punto de vista puramente formal. Véase Carnap 1939, 9.

2. La transformación de las matemáticas en sistemas formales no tiene sentido sino en tanto que ella permite un tratamiento concreto metamatemático de esos sistemas. Este proyecto se lleva a cabo gracias al procedimiento de la decisión. El procedimiento de la decisión sólo es aplicable a los sistemas saturados. Es aquí donde interviene el resultado de Gödel, del que Carnap se está haciendo eco.

3 La expresión alemana 'beweisen' es altamente compleja. Puede ser traducida, al menos, de dos modos diferentes: por un lado, puede ser trasladada por el término 'demostración', de carácter semántico; por otro lado, se puede traducir por 'prueba', de la

—si no nos queremos restringir a ámbitos triviales (<u>por ejemplo</u> [al] cálculo de enunciados) en los que tenemos un procedimiento de decisión— de modo que presentemos fórmulas de introducción[1] y las reglas de transformación.[2] Todo lo que sea derivable mediante transformaciones finitas de las filas iniciales ha de ser denominado verdadero. Dichas fórmulas que suponemos en el punto de partida las denominamos "*fórmulas básicas*", no "axiomas", ya que aquéllas son algo completamente diferente a los axiomas de un // sistema axiomático, [3]
en el que ya se presupone un lógica. En el sistema bosquejado aquí son necesarias 15 fórmulas básicas.

1.) Las 4 fórmulas básicas del cálculo de enunciados. No queremos usar, sin embargo, ninguna variable enunciativa, por esta razón no podemos expresar la [fórmula] hilbertiana[3] $(X \vee X) \rightarrow X$ de dicha forma; sino que tenemos que decir: todas las fórmulas que tienen tal y tal construcción las denominamos fórmulas básica del 1[er] tipo. Definimos por tanto:

$\mathfrak{Grfor}$ 1 = $(((\mathfrak{A})\ \mathfrak{oder}\ (\mathfrak{A}))\ \mathfrak{impl}\ \mathfrak{A})$, a cuyo efecto $\mathfrak{A}$ es una fórmula.

Ejemplo de una fórmula básica del 1[er] tipo:

$(P(x1) \vee P(x1)) \rightarrow (P(x1))$

$\mathfrak{Grfor}$ 2 = $((\mathfrak{A})\ \mathfrak{impl}\ ((\mathfrak{A})\ \mathfrak{oder}\ (\mathfrak{B})))$, a cuyo efecto $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son fórmulas.

$\mathfrak{Grfor}$ 3 = $((\mathfrak{A})\ \mathfrak{oder}\ (\mathfrak{B}))\ \mathfrak{impl}\ ((\mathfrak{B})\ \mathfrak{oder}\ (\mathfrak{A}))$, a cuyo efecto $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son fórmulas.

$\mathfrak{Grfor}$ 4 = $(((\mathfrak{A})\ \mathfrak{impl}\ (\mathfrak{B}))\ \mathfrak{impl}\ (((\mathfrak{C})\ \mathfrak{oder}\ (\mathfrak{A}))\ \mathfrak{impl}\ ((\mathfrak{C})\ \mathfrak{oder}\ (\mathfrak{B}))))$, a cuyo efecto $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ son fórmulas.

Los dos axiomas del cálculo funcional de Hilbert pueden derivarse en nuestra propuesta, por lo que no necesitamos, pues, formularlos como fórmulas básicas. Introducimos, más bien, operadores universales y existenciales mediante definiciones en el lenguaje, mediante fórmulas de equivalencia:

1) $([x]\ 0\ (F(x))) = (F(0))$

2) $([x]\ n1\ (F(x))) = (([x]n(F(x)))\&F(n1))$

$([\exists x]\ n\ (F(x))) = (\sim([x]n(\sim(F(x)))))$

---

que se puede derivar el término 'probabilidad'. De esta última ha resultado una dirección específica en las matemáticas. Véase Padilla Gálvez 1992, 415–482.

1 Es extraño que Carnap use aquí la expresión 'Ausgangsformel' que traducimos literalmente mediante la expresión 'fórmula de introducción'. También se podría traducir por la expresión que posteriormente acuña en Carnap 1939, 5.

2 Las reglas de transformación son estrictamente formales.

3 Véase Hilbert y Ackermann 1928.

wir uns nicht auf triviale Gebiete beschränken (z. B. Aussagenkalkül), wo wir ein Entscheidungsverfahren haben- so vorgenommen werden, dass wir Ausgangsformeln und Umformungsregeln angeben; alles was durch endlich viele Umformungen aus den Ausgangsreihen ableitbar ist, soll wahr genannt werden. Diese Formeln, die wir an den Ausgang setzen, wollen wir "*Grundformeln*" nennen, nicht "Axiome", da sie etwas ganz anderes sind als die Axiome eines // Axiomensystems, bei [3] denen ja schon eine Logik vorausgesetzt ist. Bei dem hier skizzierten System sind 15 Grundformeln nötig.

1.) Die 4 Grundformeln des Aussagenkalküls. Wir wollen hier aber keine Aussagevariabeln verwenden, daher können wir das Hilbert'sche $(X \vee X) \rightarrow X$ in dieser Form nicht ausdrücken, sondern müssen sagen: alle Formeln, die die und die Gestalt haben, nennen wir Grundformeln 1. Art. Wir definieren also:

Gr.form 1 = (((𝔄) oder (𝔄)) impl 𝔄), wobei 𝔄 eine Formel ist.

Beispiel einer Grundformel 1. Art:

(P(x1) ∨ P(x1)) → (P(x1))

Gr.form 2 = ((𝔄) impl ((𝔄) oder (𝔅))), wobei 𝔄 und 𝔅 Formeln sind.

Gr.form 3 = (((𝔄) oder (𝔅)) impl ((𝔅) oder (𝔄))), wobei 𝔄 und 𝔅 Formeln sind.

Gr.form 4 = (((𝔄) impl (𝔅)) impl (((ℭ) oder (𝔄)) impl ((ℭ) oder (𝔅)))) wobei 𝔄 𝔅 und ℭ Formeln sind.

Die 2 Axiome des Funktionenkalküls von Hilbert sind bei uns ableitbar, die brauchen wir also nicht als Grundformeln aufzustellen. Wir führen vielmehr All- und Existenzoperator durch Definitionen in die Sprache ein, durch Aequivalenzformeln:

1) ([x] 0 (F(x))) = (F(0))
2) ([x] n1 (F(x))) = (([x]n(F(x)))&F(n1))
([Ex] n (F(x))) = (~ ([x]n (~ (F(x)))))

Formeln von dieser Form nennen wir Grundformeln 8.9. bzw.[1] 10. Art. Um sie zu definieren, brauchen wir den Begriff der Substitution.

Substitution

Wir sagen eine Formel $\mathfrak{A}$ geht durch Substitution von a für x in die Formel $\mathfrak{B}$ über, wenn an allen Stellen, wo x in $\mathfrak{A}$ frei vorkommt, der Ausdruck a eingesetzt wird. // [4]

Als erste Schlussregel werden wir später die Substitutionsregel aufstellen: jede Formel darf dadurch umgeformt werden, dass für irgendeine Variablenart ein beliebiger arithmetischer Ausdruck substituiert wird.

Grundformel 8 = (([$\mathfrak{x}$] Min ($\mathfrak{A}$)) aeq ($\mathfrak{A}$)), wobei $\mathfrak{A}$ eine beliebige Formel ist

Analog die Grundformeln 9, 10.

Die Grundformeln 5, 6, 7 sind die Definitionen von " aeq ", " Aut ", " Neg ". Prinzipiell könnten 5, 6, 7 weggelassen werden, wenn man gewisse Komplikationen der Schreibung nicht scheut. Aber sie können nicht nachträglich als Definitionen aufgestellt werden, da unsere Regeln zur Aufstellung von Definitionen nur Definitionen für Prädikate und arithmetische Funktionen zulassen.

Auf Grund unserer Definitionsformeln 8, 9, 10 für All- und Existenzoperator, können wir mit Hilfe des Schlussprinzips der vollständigen Induktion diejenigen Formeln ableiten, die Hilbert als Axiome des Funktionenkalküls nimmt.

Die weiteren Grundformeln sind arithmetischer Art. Hilbert stellt die folgenden beiden Axiome der Identität auf:

1) $x = x$

2) $(x = y) \rightarrow (F(x) \rightarrow F(y))$

Wir haben unter unseren[2] Schlußregeln eine Regel der Identität, die wir etwas anders als üblich formulieren. Es zeigt sich, dass wir dann nur die 1. der Hilbert'schen Formeln als Grundformel aufzustellen brauchen. Man formuliert gewöhnlich: wenn wir eine Formel von der Art $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ haben und $\mathfrak{a}$ kommt in $\mathfrak{A}$ vor, dann darf in $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{b}$ für $\mathfrak{a}$ gesetzt werden. Unsere Schlussregel erlaubt dagegen diese Umformung nur in Formeln von ganz bestimmter Gestalt. Sie lautet: wenn eine Formel gegeben ist // von der Gestalt $(\mathfrak{a} = \mathfrak{b}) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{a})$, [5] so dürfen wir diese Formel umformen in

$$(\mathfrak{a} = \mathfrak{b}) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{b})$$

1 A. d. U.: Im Original steht: "bezw.".
2 A. d. U.: Im Original steht: "unsern".

Fórmulas de esa forma las denominamos fórmulas básicas del tipo 8ª, 9ª, o bien, del 10ª. Para definirlas, necesitamos el concepto de sustitución.

Sustitución:[1]

Decimos: una fórmula $\mathfrak{A}$ se convierte, mediante la sustitución de a para x en la fórmula $\mathfrak{B}$, si en todos los emplazamientos en los que x aparezca libre en $\mathfrak{A}$, puede ser sustituida por la expresión a. // [4]

Como primera regla de derivación, dispondremos, posteriormente, de la regla de sustitución: cada fórmula se puede transformar en tanto que, para cualquier tipo de variable, se pueda sustituir una expresión aritmética arbitraria.

Vgl. für 8 = (([$\mathfrak{E}$] $\mathfrak{Ma}$ ($\mathfrak{A}$)) $\mathfrak{impl}$ ($\mathfrak{A}$)), a cuyo efecto $\mathfrak{A}$ es una fórmula arbitraria.

Análogamente [para] las fórmulas básicas 9ª y 10ª.

Las fórmulas básicas 5ª, 6ª, 7ª son las definiciones de "$\mathfrak{impl}$", "$\mathfrak{And}$", "$\mathfrak{aeq}$". En un principio podríamos prescindir de 5ª, 6ª, 7ª, si no se tiene reparo ante complicaciones en la grafía. Pero no se pueden disponer posteriormente como definiciones, ya que nuestras reglas en el establecimiento de definiciones sólo permiten definiciones para predicados y funciones aritméticas.

Debido a nuestras fórmulas de las definiciones 8ª, 9ª, 10ª para operadores universales y existenciales, podemos derivar, con ayuda del principio de derivación de la inducción completa, aquellas fórmulas que Hilbert asume como axiomas del cálculo funcional.

Las siguientes fórmulas básicas son de tipo aritmético. Hilbert propone los dos siguientes axiomas de la identidad:

1) $x = x$

2) $(x = y) \rightarrow (F(x) \rightarrow F(y))$

Nosotros tenemos, bajo nuestras reglas de derivación, una regla de la identidad, que formulamos de manera diferente a la habitual. Se muestra que sólo tenemos que disponer como fórmula básica la primera de las fórmulas hilbertianas. Se formula frecuentemente: si tenemos una fórmula del tipo[:] $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ y $\mathfrak{a}$ se encuentra en $\mathfrak{A}$, entonces se puede sustituir en $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{b}$ por $\mathfrak{a}$. Nuestra regla de derivación permite, por el contrario, dicha sustitución sólo en fórmulas con una construcción específica. Esta se expresa como sigue: si una fórmula está dada // [5] con la construcción $(\mathfrak{a} = \mathfrak{b}) \rightarrow \mathfrak{H}(\mathfrak{a})$, entonces podemos transformar dicha fórmula en $(\mathfrak{a} = \mathfrak{b}) \rightarrow \mathfrak{H}(\mathfrak{b})$

1. La regla de sustitución permite que los signos que son denominados variables se puedan reemplazar por signos o fórmulas de una categoría determinada. Así pues se

Gr form 11 = (x = x)

Gr form 12 = ~(0 = m1) En lugar de m puede estar cualquier variable. Dicha fórmula básica corresponde al axioma de Peano,[1] según el cual 0 no es el sucesor de un número.

Gr form 13 = ((m1 = n1) → (m = n)) Nuestro espacio no está de tal manera construido que no se bifurca[2] hacia adelante. El que la bifurcación no se desarrolle hacia atrás, viene a ser expresado ya mediante el modo de escribir "m1".

Gr form 14 = (01 = 1) Ésta es, en cierto modo, la definición de la cifra 1 como símbolo numérico independiente.

Gr form 15 no quiero presentar aquí detalladamente.[3] Dicha fórmula básica es necesaria en la introducción de un determinado operador. Lo escribimos [del siguiente modo]:

[Kx] n (F(x)): esto ha de significar: el número más pequeño x hasta n, que posee la propiedad F(o 0 en el caso de que no haya dicho número). Esto es una descripción.[4] La totalidad no es una fórmula sino una expresión aritmética. Esto no es un modo de escribir abreviadamente, lo que expresamos con la ayuda de dicho operador no podemos escribirlo con otros símbolos.

<u>Hahn</u>: ¿No necesita fórmulas básicas para las propiedades de la adición, por ejemplo la propiedad asociativa, etc.?

<u>Carnap</u>: En el modo de escribir mnp para (m + n) + p es superflua una ley asociativa. Las restantes leyes, así como las leyes correspondientes a las funciones sum(m,n) (inclusive la ley asociativa) pueden ser probadas aquí con ayuda del principio de inducción completa.[5] // [6]

Las cuatro reglas de inferencia:

1) [La] regla de la substitución, ya [ha sido] nombrada.

2) [La] regla de la implicación, como es [tratada] usualmente:

$$\frac{\mathfrak{A} \qquad \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$$

---

les está escribiendo, en lugar de axiomas de esquemas, simples esquemas con vacíos que se pueden llenar de manera análoga.

1. Consideremos sólo los cinco de los nueve axiomas de la teoría de los números naturales propuestos por G. Peano que dicen lo siguiente: (1.°) 1 es un número; (2.°) el siguiente de cualquier número es un número; (3.°) dos números no tienen el mismo siguiente; (4.°) 1 no es el siguiente de ningún número, y, (5.°) toda propiedad que pertenezca a 1 y al siguiente de todo número que la posea, pertenece a todo número.
2. La expresión 'aufgabeln' la traducimos mediante la expresión 'bifurcación'. Estamos ante un giro idiomático muy sutil. 'Gabel' es 'tenedor' y la bifurcación ha de entenderse como la descomposición del asa en los pinchos del tenedor.
3. Carnap no expone dicha fórmula de manera sistemática.
4. Una descripción definida, ya que su referente es un número específico.
5. El principio de inducción completa será tratado seguidamente.

Gr. form. 11 = (x = x)
Gr. form. 12 = ~ (0 = m1) An Stelle von m darf eine beliebige Variable stehen. Diese Grundformel entspricht dem Peano'schen Axiom, dass 0 nicht Nachfolger einer Zahl ist.
Gr. form. 13 = ((m1 = n1) → (m = n)) Unser Raum ist nicht so beschaffen, da[β] er sich nicht nach vorne zugabelt. Da[β] Gabelung nach hinten nicht vorkommt, ist schon durch die Schreibweise "m1" zum Ausdruck gebracht.
Gr. form. 14 = (01 = 1) Dies ist gewissermassen die Definition der Ziffer 1 als selbständigen Zahlzeichens.
Gr. form. 15 will ich hier nicht ausführlich angeben. Diese Grundformel ist nötig bei Einführung eines bestimmten Operators. Wir schreiben ihn:
[Kx] n (F(x)): dies soll bedeuten: die kleinste Zahl x bis n, die die Eigenschaft F hat (oder 0 falls es keine solche Zahl gibt). Das ist eine Kennzeichnung. Das Ganze ist nicht eine Formel, sondern ein arithmetischer Ausdruck. Das ist nicht eine abgekürzte Schreibweise; was wir mit Hilfe dieses Operators ausdrücken, können wir mit andern Zeichen nicht schreiben.
<u>Hahn</u>. Brauchen Sie nicht Grundformeln für die Eigenschaften der Addition, z. B. assoziatives Gesetz usw.?
<u>Carnap</u>: Bei der Schreibweise mnp für (m + n) + p ist ein assoziatives Gesetz überflüssig. Die übrigen Gesetze sowie auch die entsprechenden Gesetze für die Funktionen sum(m,n) (einschliesslich des assoziativen Gesetzes) können hier mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion bewiesen werden. // [6]

Die vier[2] Schlußregeln:
1) Substitutionsregel, schon genannt.
2) Implikationsregel, wie gewöhnlich:

$$\frac{\mathfrak{A} \qquad \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$$

1 A. d. Ü.: im Originaltext steht "zugabelt" gelesen als "zu gabelt".
2 A. d. Ü.: Im Original steht "4".

3) Gleichungsregel (Identitätsregel), schon genannt.
4) Prinzip der vollständigen Induktion. Wenn wir 2 Formeln mit freien Variabeln haben:

F(0)
F(n) → F(n1), so soll erlaubt sein,
die Formel F(n) selbständig aufzustellen

Das Prinzip der vollständigen Induktion sieht hier formal so aus, wie es sonst ausgesprochen wird; aber die vielfach erhobenen Bedenken dürften hier nicht mehr zutreffen. Von einer "Gesamtheit der Zahlen" ist hier keine Rede.

Dadurch, da[β] in den allgemeinen arithmetischen Formeln freie Variabeln[1] vorkommen, ist ausgedrückt, da[β] es sich hier um eine spezifische Allgemeinheit handelt. Eine Formel von der Form F (n), z. B. m+n = n+m ist eine Quasiformel wie unsere arithmetischen Formeln überhaupt, die uns nur erlaubt, bestimmte Formeln herzuleiten. Z. B. ist aus F(n), F(111) ableitbar. Diese abgeleitete Formel dient dazu, eigentliche Sätze aus anderen[2] abzuleiten. Z. B. kann aus F(111) → P(x,y) mit Hilfe von F(111) der Satz P(x,y) abgeleitet werden.

Ich möchte noch etwas über die *allgemeinen arithmetischen Sätze* sagen: m+n = n+m hat in unserer Schreibung im Gegensatz zur Russell'schen Schreibung keinen Alloperator bei sich. Das hat folgende Konsequenzen der formalen Behandlung dieser Formel: wir können diesen Ausdruck nicht negieren (da[β] etwas *S* nicht für jedes Paar gilt, kann [7] gar nicht zum Ausdruck gebracht werden); das entspricht der Auffassung der Intuitionisten, da[β] arithmetische All-Sätze nicht negiert werden können. Das Nichtzutreffen kann nur zum Ausdruck gebracht werden entweder durch ein Gegenbeispiel oder durch Angabe eines bestimmten Bereichs, in dem es ein Gegenbeispiel gibt. Das schreiben wir:

[3'] ----[3']---(~ (UR y(x,y))

1. A. d. Ü.: Im Original steht "Variable" im Singular.
2. A. d. Ü.: Im Original steht "andern".

3) [La] regla de la igualdad (regla de la identidad), como [ha sido] mencionada.
4) [El] principio de la inducción completa. Si tenemos 2 fórmulas con variables libres [entonces vale].

F(0)

$\underline{F(n) \rightarrow F(n1)}$, entonces ha de estar permitido construir la fórmula $\overline{F(n)}$ independientemente.

El principio de la inducción completa aparece aquí formalmente de tal modo, como de costumbre viene a ser expresada; pero las múltiples dudas no parecen ser más acertadas. No nos referimos aquí a una "totalidad de los números".

En tanto que en las fórmulas aritméticas generales aparecen variables libres, se viene a expresar que se trata aquí de una generalidad específica. Una fórmula con la forma F (n), por ejemplo m+n = n+m es una quasifórmula como nuestras fórmulas aritméticas en general, que sólo nos permite derivar determinadas fórmulas. Por ejemplo, se puede de F(n) derivar F(111). Esa fórmula derivada sirve para derivar enunciados propios de otros. Por ejemplo se puede derivar de F(111) → P(x,y), con la ayuda de F(111) el enunciado P(x,y).

Quiero decir algo más sobre los *enunciados aritméticos generales*: m+n = n+m no porta consigo ningún operador universal en nuestra grafía, en contra de la grafía russelliana.[1] Esto tiene las siguientes consecuencias en el tratamiento formal de esas fórmulas: no podemos negar dicha expresión (por ejemplo // que algo no valga para todo par, no [7] podría ser expresado de ningún modo): esto corresponde al punto de vista de los intuicionistas:[2] el que enunciados generales aritméticos no pueden ser negados. La no aplicabilidad sólo puede ser expresada, o bien mediante un contraejemplo,[3] o bien mediante la indicación de un ámbito determinado, en el que hay un contraejemplo. Esto lo escribimos [así]:

[3'] ----[3'] ---(- UL y(x,y))

1 Véase Whitehead y Russell 1910-13.
2 Carnap conoce a fondo los trabajos de Brouwer y Heyting, así como la relevancia del intuicionismo para los estudios metalógicos como viene a ser propuesto por Gödel
3. Carnap se adelanta, pues mediante la caracterización de los contraejemplos, a la propuesta constructivista y su lógica dialógica. Véase Lorenzen 1969, así como Lorenzen y Lorenz 1978.

Ahora bien, nosotros no estamos de acuerdo con Brouwer en el rechazo del tercio excluso.[1] Nosotros no podemos decir, indudablemente, mediante la anteposición del signo de la negación, que el enunciado general aritmético es erróneo, ya que ~ P(x,y) no expresa la negación de P(x,y), sino que no existe ningún par de P. A pesar de ello, vale la fórmula: P(x,y) ∨ ~(P(x,y)). Ella corresponde al tercio excluso.

Otras reglas de deducción, que aparecen en otras lógicas, por ejemplo las reglas de desplazamiento para los operadores de Hilbert, pueden ser derivables en nuestra propuesta con la ayuda del principio de inducción completa. Esto resulta de que, en nuestro caso, los operadores universales siempre se aplican a los números y de la introducción recursiva del operador universal.

Una nota más sobre la formulación de las *reglas de inferencia*. Se acostumbra a decir "una regla de inferencia es algo que determina la acción práctica, consecuentemente no es una expresión teorética, sino una regla autoritativa". ¿Qué significa esto? Una regla de inferencia no significa seguramente ninguna ley,[2] sino una aprobación.[3] Pero el concepto de aprobación, de la permisión // no debería ser usado aquí[8] tampoco. Se trata, por tanto, de que nosotros expliquemos teóricamente en la metalógica que, cuando dos fórmulas de la forma $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ sean fórmulas básicas o están en una relación específica a dichas fórmulas básicas, tienen un determinado carácter, [y] entonces [invariablemente], también $\mathfrak{B}$ tiene ese carácter. Ese carácter lo denominamos mediante la expresión metalógica "demostrable". Formulamos las reglas de inferencia de tal modo, que construyan una definición metalógica del concepto "consecuencia inmediata".[4] Después definimos "demostración": una fila de fila de símbolos que está lista, se denomina

1 Es extraño comprobar que la postura carnapiana sea, a la vez, tan tajante y tan poco matizada, cuando el propio Hilbert había reconocido un cierto parentesco entre la matemática y el intuicionismo. Además, el propio Gödel llevaba a cabo investigaciones en dicha dirección. Ha de tenerse en cuenta que el intuicionismo de Brouwer rechazaba la utilización *irreflexiva* del *tertium non datur* e identificaba el tercero excluido con el principio de resolubilidad de todo problema matemático.

2 Traduzco 'Gebot' mediante 'ley', aunque ha de entenderse como 'mandamiento' o 'deber'. Carnap es consciente de esta ambigüedad del uso que hace de 'mandamiento' o 'ley' (Gesetz).

3 Traduzco 'Erlaubnis' mediante la expresión 'aprobación', si bien puede ser traducido también por el término 'licencia'. El juego de palabras entre 'mandamiento-aprobación' se propone incrementar lo innovador de su propuesta.

4. Hilbert había dado pasos en otra dirección, al definir 'demostración' y afirmar: "Ein Beweis ist eine Figur, die uns als solche anschaulich vorliegen muß; er besteht aus Schlüssen vermöge des Schlußschemas

Aber wir stimmen Brouwer in der Ablehnung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten nicht zu. Wir können allerdings nicht durch Voransetzung eines Negationszeichens sagen, da[ß] ein arithmetischer Allsatz nicht stimmt, denn ~P(x,y) sagt nicht das Negat von P(x,y) aus, sondern da[ß] es überhaupt keine P-Paare gibt. Trotzdem gilt[1] aber die Formel: P(x,y) v ~ (P(x,y)). Sie entspricht dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten.

Andere Schlußregeln, die in anderen Logiken auftreten, z. B. Hilberts [Verschieb]ungsregeln[2] für die Operatoren, sind bei uns ableitbar mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion. Das ergibt sich daraus, da[ß] bei uns die Alloperatoren immer auf Zahlen angewendet werden und aus der rekursiven Einführung des Alloperators

----

Noch eine Bemerkung zur *Formalisierung der Schlußregeln*. Man pflegt zu sagen: "eine Schlussregel ist etwas, was das praktische Handeln bestimmt, infolgedessen ist sie kein theoretischer Ausdruck, sondern eine Erlaubnisregel." Was heisst da[ß]? Eine Schlussregel bedeutet sicherlich kein Gebot, sondern eine Erlaubnis. Aber den Begriff der[3] Erlaubnis, des Dürfens, // sollte man hier auch nicht verwenden. Es handelt sich darum, da[ß] wir in der Metalogik theoretisch erklären, da[ß] wenn zwei Formeln von der Form $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ Grundformeln sind, oder zu Grundformeln in einem bestimmten Verhältnis stehen, einen bestimmten Charakter haben, dann stets auch $\mathfrak{B}$ diesen Charakter hat. Diesen Charakter bezeichnen wir mit dem metalogischen Ausdruck "beweisbar". Wir formulieren die Schlussregeln so, da[ß] sie eine metalogische Definition des Begriffes "unmittelbare Folge" bilden. Dann definieren wir "Beweis": eine Reihe von Zeichenreihen, die vorliegt, heisst ein [8]

1 A. d. Ü.: Im Originaltext steht versehentlich "[illegible]"
2 A. d. Ü.: Das in eckigen Klammern Gesetzte wurde handschriftlich über einem durchgestrichenen ersten Wortteil gesetzt
3. A. d. Ü.: Es ist ein Genitiv und im Text steht "des".

Beweis, wenn jede dieser Reihen entweder eine Grundformel ist oder unmittelbare Folge einer bzw.[1] zweier Formeln ist, die ihr in der Reihe vorangehen.

Was heisst "*beweisbar*"? Ohne Beschränkung der Länge des Beweises ist dies kein korrekter Begriff. Wir müssen sagen "$\mathfrak{A}$ ist in so und so vielen Schritten beweisbar", genauer "$\mathfrak{A}$ ist durch einen Beweis von so und so vielen Zeichen beweisbar". Ein solcher Begriff ist korrekt und muss sicherlich metalogisch definiert werden können. Aber auch die Definition dieses Begriffes hat merkwürdige Schwierigkeiten bei sich. Alle unsere bisherigen Begriffe wurden so definiert, da[β] diejenigen Gebilde, auf die Bezug genommen wurde, als Teilstück in einem zu beurteilenden Gebilde enthalten waren. (Siehe Definition [illegible].) Dagegen beim Begriff "beweisbar" ist es so: $\mathfrak{A}$ ist eine in 1000 Zeichen beweisbare Formel, wenn es andere Formeln gibt, die mit $\mathfrak{A}$ zusammen einen Beweis für $\mathfrak{A}$ bilden, der höchstens 1000 Zeichen enthält. Aber diese anderen Formeln sind nicht als Teilformeln in $\mathfrak{A}$ enthalten. Der Ausdruck "wenn es andere[2] Formeln der und der Art gibt" nimmt auf die empirische Beschaffenheit der übrigen Dinge der Welt // bezug, während doch aus der Beschaffenheit [9 von $\mathfrak{A}$ allein schon hervorgehn mu[β], ob $\mathfrak{A}$ in 1000 Zeichen beweisbar ist oder nicht. Wir müssen hier nicht sagen "wenn es die und die wirklichen Formeln gibt", sondern: "wenn die und die Formeln *möglich* sind", und das ist mit unseren[3] bisherigen Mitteln nicht ausdrückbar. Hier haben wir einen metalogischen Begriff, der zweifellos ein ordentlicher Begriff ist und doch mit der bisherigen Art zu definieren, nicht definierbar ist. Mir scheint, wir müssen hier die Methode der *Arithmetisierung der Metalogik* anwenden, wie sie von Gödel in seiner letzten Arbeit angewendet worden ist. Wir wollen zum Ausdruck bringen, da[β] gewisse Zusammenstellungen von Zeichen, die zu der vorgelegten Zeichenkombination in einer gewissen formalen Beziehung stehen, möglich sind. Das kann man durch die Arithmetisierung zum Ausdruck bringen. Wir ordnen den Arten und Gattungen Zahlen zu. Dann können wir arithmetische Definitionen für gewisse arithmetische Eigenschaften von Zahlenreihen aufstellen, die den

1. A. d. Ü.: Im Original steht "bezw".
2. A. d. Ü.: Im Original steht "andern".
3. A. d. Ü.: Im Original steht "unsern".

si cada una de esas filas, o bien es una fórmula básica, o bien una consecuencia inmediata de una o dos fórmulas que preceden a ella en la fila.

¿Qué significa "demostrable"? Sin limitación de la longitud de la demostración, este no es un concepto correcto. Tenemos que decir "$\mathfrak{A}$ es demostrable en tantos y tantos pasos", más exactamente "$\mathfrak{A}$ es demostrable mediante una prueba de tantos y tantos símbolos". Dicho concepto es correcto y ha de ser definido, por cierto, metalógicamente. Pero también la definición de dicho concepto trae consigo dificultades notables. Todos nuestros conceptos precedentes fueron definidos de tal modo, que aquellas construcciones a las que se referían estaban contenidas como parte en una construcción a examinar (Véase definición $\mathfrak{form}$). Por el contrario, el concepto "demostrable" es así: $\mathfrak{A}$ es una fórmula demostrable en 1000 símbolos, si hay otras fórmulas que conjuntamente con $\mathfrak{A}$ formen una demostración para $\mathfrak{A}$ que contenga como máximo 1000 símbolos. Pero esas otras fórmulas no están contenidas como partes de la fórmula en $\mathfrak{A}$. La expresión "si hay otras fórmulas del modo tal y tal"[1] se refiere a la constitución empírica de los restantes objetos del mundo, // mientras que de sólo la cons- [9]
trucción de $\mathfrak{A}$ ha de resultar si es o no es demostrable $\mathfrak{A}$ en 1000 símbolos. No debemos decir "si hay tales y tales fórmulas reales", sino "si son *posibles* tales y tales fórmulas" y esto no es expresable con nuestros medios precedentes. Aquí tenemos un concepto metalógico que, sin lugar a dudas, es un concepto ordenado y, sin embargo, no es definible con los medios precedentes. Me parece que tenemos que aplicar los métodos de la *aritmetización de la metalógica* como ha sido aplicado por Gödel en su último trabajo.[2] Queremos expresar que son posibles determinados agrupamientos de símbolos, que se encuentran en una determinada relación formal con la combinación simbólica presentada. Esto puede ser expresado mediante la aritmetización. Ordenamos los géneros y especies a los mismos números. Seguidamente, podemos construir las definiciones aritméticas para determinadas propiedades aritméticas de filas de números, que corresponden a las propiedades

$$\frac{\mathfrak{S} \quad \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}}{\mathfrak{T}}$$

wo jedesmal die Prämissen, d.h. die betreffenden Formeln $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ jede entweder ein Axiom ist bzw. direkt durch Einsetzung aus einem Axiom entsteht oder mit der Endformel $\mathfrak{T}$ eines Schlusses übereinstimmt, der vorher im Beweise vorkommt bzw. durch Einsetzung aus einer solchen Endformel entsteht". Véase Hilbert 1923, 151-165, 152

1. Carnap es consciente que está presentando la definición mediante una estructura descriptiva.
2. Carnap hace alusión a Gödel 1931

metalógicas de las respectivas filas de números. La diferencia entre la metalógica aritmética y la metalógica expuesta hasta ahora es el [que]: la metalógica aritmética no trata las construcciones empíricas que existen sino las posibles. Nuestra metalógica precedente es la teoría descriptiva de determinadas construcciones presentadas; es, por decirlo así, la geografía de las formas lingüísticas. [La] metalógica aritmética, por el contrario, es la geometría de las formas lingüísticas.[2]

1. Esta frase se encuentra al pie de página con una indicación de que ha de ser introducida en el texto.
2. Carnap juega aquí con una diferenciación manejada por Kant y que distingue entre 'geografía' y 'geometría'.

metalogischen Eigenschaften der entsprechenden Zeichenreihen entsprechen.

Der Unterschied zwischen der arithmetischen Metalogik und der bisher dargestellten Metalogik ist der: die aritmetische Metalogik behandelt nicht die empirisch vorliegenden, sondern die möglichen Gebilde. Unsere bisherige Matalogik ist die deskriptive Theorie bestimmter vorgelegter Gebilde,[1] ist also gleichsam die Geografie der Sprachformen, die arithmetische Metalogik dagegen ist die Geometrie der Sprachformen.

[ENDE]

1. A. d. Ü.: Dieser Satz steht als Fußnote

Z i r k e l p r o t o k o l l vom 25. Juni 1931. [1]

Carnaps 3. Referat über Metalogik.

In einem singulären metalogischen Satz wird gesagt, daß[β] sich an der und der Stelle eine Zeichenreihe von bestimmter Art befindet. Wichtiger als diese sind die metalogischen Konditionalsätze. Eine Formel ist eine eindimensionale Reihe diskreter Dinge verschiedener Arten, also ein Gebilde, wie wir es in unserer Sprache beschreiben können. Die metalogischen Begriffe der Arten entsprechen den Qualitäten in der physikalischen Sprache. "$\mathfrak{Nu}$ (x)" bedeutet "an der Stelle x steht ein Nullzeichen". Später werden wir die Stellen nicht mehr mit Qualitäten, sondern mit Zahlen belegen.

Beispiel einer Beschreibung der Formel "P(0)":

$\mathfrak{P}$ (a) & $\mathfrak{Kl}$ (aI) & $\mathfrak{Nu}$ (aII) & $\mathfrak{Kl}^r$ (aIII).

a al all alll . Fügt man bei a eine Variable ein und setzt hinzu "→ $\mathfrak{El\,Form}$ (x,III)", so erhält man einen metalogischen Konditionalsatz, der übersetzt heisst "wenn an den Stellen x bis xIII die genannten 4 Qualitäten stehen, so steht dort eine elementare Formel". Sätze dieser Art sind analytisch und folgen aus der Definition von "elementare Formel".

Die bisher betrachteten metalogischen Definitionen nehmen nur Bezug[1] auf das, was innerhalb der Formel liegt. Anders steht es z. B. mit dem Begriff "beweisbar". "Beweisbar mit 1000 Zeichen" ist [2] nur durch eine Arithmetisierung definierbar.

In der gewöhnlichen physikalischen Sprache schreiben wir den Stellen Qualitäten oder Zahlen (Werten von Zustandsgrössen) zu. Bisher hatten wir nur Buchstaben für Qualitäten eingeführt. Wie sieht nun eine Formel bei Zuschreibung von Zustandsgrößen, d. h. von Zahlen zu den Stellen, aus? Wir beschränken uns zunächst auf eine Zustandsgröße, deren Werte natürliche Zahlen sein sollen; wir nehmen also eine eindimensionale diskrete Reihe von Qualitäten, etwa die Töne auf dem Klavier. Die Zustandsgröße bezeichnen wir mit σ; "σ(x) = n" soll bedeuten "σ hat bei x den Wert n".

1. A. d. H.: Im Original steht: "bezug" kleingeschrieben.

Protocolo del Círculo del 25 de junio de 1931. [1]

Tercera Conferencia de Carnap sobre metalógica.

En un enunciado singular metalógico se dice que se encuentra en este y este emplazamiento una fila de símbolos de un género determinado. Más relevante que éste son los enunciados condicionales metalógicos. Una fórmula es una fila monodimensional de objetos discretos de diferentes géneros, es decir, una construcción como podemos describir en nuestro lenguaje. Los conceptos metalógicos de género corresponden a las cualidades en el lenguaje de la física. "$\mathfrak{Nu}$ (x)" significa "en el emplazamiento x se encuentra un símbolo cero". Más tarde cubriremos los emplazamientos, ya no con cualidades sino con números.

Ejemplo de una descripción de la fórmula "P(0)":

$\mathfrak{P}$ (a) & $\mathfrak{Kl}$ (al) & $\mathfrak{Nu}$ (all) & $\mathfrak{Kl}'$ (alll).

a al all alll . . . Se coloca a con una variable y se añade " $\rightarrow$ $\mathfrak{El\,Form}$ (x.lll)" entonces se obtiene un enunciado condicional metalógico, que traducido dice "si en el lugar x hasta xlll se encuentran las 4 cualidades mencionadas, entonces se desarrolla allí una fórmula elemental". Enunciados de ese género son analíticos[1] y resultan de una definición de "fórmula elemental"

Las definiciones metalógicas consideradas hasta ahora hacen sólo referencia a aquello que se encuentra en la fórmula. De otro modo, resulta, por ejemplo, con el concepto "demostrable". "Demostrable // con 1000 símbolos" sólo es definible mediante la aritmetización.[2] [2]

En el lenguaje de la física usual, atribuimos a los emplazamientos cualidades o números (valores de la magnitud de estado). Hasta ahora, sólo habíamos introducido letras para las cualidades. ¿Cómo queda, pues, una fórmula al atribuir magnitudes de estado, es decir, números a los emplazamientos? Nos limitamos, primeramente, a unas magnitudes de estado cuyo valor han de ser números naturales; tomamos, pues, una fila monodimensional discreta de cualidades, por ejemplo, las tonalidades del piano.[3] La magnitud de estados la expresamos mediante σ: "σ(x)=n" ha de significar que "σ tiene con x el valor n".

1. Un enunciado analítico es tautológico y, por lo tanto, es, o es como, una regla gramatical que contiene modos de operación y de cálculo.
2. Carnap reconoce la importancia que tiene la propuesta de Gödel. Véase Gödel 1931
3. Es interesante indicar el ejemplo con el piano. No he encontrado todavía el lugar exacto, pero cabe recordar que el ejemplo que aquí se trata viene a ser abordado en otra obra

σ es una función numérica empírica, no una aritmética. Ese modo de expresión es análogo al de la física.

Esto va a ser aplicado ahora a la metalógica: a los símbolos del lenguaje se les atribuyen unívocamente, y de manera arbitraria, números,[1] y precisamente a las variables los números primos, a las cualidades el cuadrado de los números primos, a los predicados aritméticos el cubo de los números primos y a las funciones la cuarta potencia. A los restantes números que quedan se atribuyen los signos de negación, del paréntesis, del operador, etcétera.[2]

Por ejemplo,[3]

¬	∨	&	→	=	(	)	,	0
6,	10,	14,	15,	18,	20,	21,	22,	26,
'	[	]	∃	k	I	σ		
28,	30,	33,	34,	35,	38,	39.[4]		

Mientras que antes hemos escrito la descripción metalógica de la fórmula "P(0)" [mediante]: 𝔓 (a) & 𝔔𝔱 (a1) & 𝔐𝔫 (a11) & 𝔄𝔩 (a111), la escribimos ahora [mediante]: $(\sigma(a)=4)$ & $(\sigma(a1)=20)$ & $(\sigma(a11)=26)$[5] & $(\sigma(a111)=21)$ y, para ello, más sencillamente, en tanto que ponemos sucesivamente los valores de las magnitudes de estado: 4, 20, 26, 21.[6] [3]

//

Para poder constatar sencillamente si una fórmula escrita determinada posee propiedades metalógicas, añadimos a ella de nuevo unívocamente una fila de números determinados, de modo que de toda fila de números se pueda conjeturar el número de emplazamiento y su orden. La fila de números puede construirse de tal modo, que los números primos se potencien por su número de emplazamiento según su cantidad, según la colocación de los números y de estos valores se forme el producto, de esta manera, por ejemplo $2^4 \cdot 3^{20} \cdot 5^{26} \cdot 7^{21}$.[7] Tal fila de

---

1. Gödel propone una asignación unívoca de los números naturales a los signos primitivos del sistema P de otro modo diferente a como viene a ser tratado por Carnap. Véase Gödel 1931, 178.
2. En el texto original aparece la aritmetización como nota que ha de ser incluida en el texto. Preferimos presentarla en el texto insertada.
3. Gödel asigna diferentes números naturales a los signos primitivos. Así presenta:

0 (cero)	s (el siguiente de)	~ (no)	∨ (o)	Π (para todo)	(	)
1	3	5	7	9	11	13

   Téngase en cuenta que Gödel introduce el cuantificador universal, mientras que Carnap introduce el cuantificador existencial. Véase Gödel 1931, 179.
4. La página termina en el original con esta nota. Nosotros vamos a dar por acabada la página en el lugar donde acaba el texto.
5. En el texto original fue suprimida una cifra ilegible y sustituida por 26.
6. En el texto original fue suprimida una cifra ilegible y sustituida por 26.
7. El tercer exponente fue tachado y sustituido por 26 en el texto original.

σ ist eine empirische, nicht eine arithmetische Zahlfunktion. Diese Ausdrucksweise ist der der Physik analog.

Dies wird jetzt auf die Metalogik angewendet: den Zeichen der Sprache werden willkürlich eineindeutige[1] Zahlen zugeordnet, und zwar den Variabeln die Primzahlen, den Qualitäten die Quadrate[2] der Primzahlen, den arithmetischen Prädikaten die Kuben der Primzahlen und den Funktionen die vierten Potenzen. Die übrig bleibenden Zahlen werden den Negations-, Klammer-, Operator- usw. Zeichen zugeordnet.[3]

z.B.	~	v	&	→	≡	(	)	,	0
	6,	10,	14,	15,	18,	20,	21,	22	26,
	I	[	]	∃	k	[	σ		
	28,	30,	33,	34,	35,	38,	39		

Während wir früher die metalogische Beschreibung der Formel "P(0)" geschrieben haben: **P** (a) & **Qu** (aI) & **Ari**³ (aII) & **Fu**¹ (aIII), schreiben wir jetzt: (σ(a)=4)&(σ(aI)=20)&(σ(aII)=26)[4]&(σ(aIII)=21) und dafür einfacher, indem wir die Werte der Zustandsgrössen hintereinandersetzen: 4, 20, 26,[5] 21. // [1]

Um leichter feststellen zu können, ob eine so geschriebene Formel bestimmte metalogische Eigenschaften besitzt, ordnen wir ihr wieder eineindeutig[6] eine bestimmte Reihenzahl zu, soda[β] aus jeder Reihenzahl die Stellenzahlen und ihre Anordnung ersehen werden kann. Die Reihenzahl wird dadurch gebildet, da[β] die Primzahlen iherer Grösse nach mit den Stellenzahlen potenziert werden und aus diesen Werten das Produkt gebildetwird, also z. B. $2^{4} \cdot 3^{20} \cdot 5^{26} \cdot 7^{21}$. Die Reihenzahl

1 A. d. H.: Vielleicht meint R. Carnap "eindeutige".
2. A. d. H.: Im Original steht "Quadrade".
3 A. d. H.: Der folgende Text mit der Arithmetisierung steht als Anmerkung im Original.
4 A. d. H.: R. Carnap hatte sich hier vertan und die Exponenten geändert.
5 A. d. H.: R. Carnap hatte sich hier vertan und die Exponenten geändert.
6 A. d. H.: Vielleicht meint R. Carnap "eindeutige".

z. B. einer elementaren Formel muß gewissen Bedingungen genügen und darum können wir umgekehrt sagen, ob eine vorgelegte Zahl Reihenzahl einer elementaren Formel ist.

Beispiel: wir nannten etwas, das eine Variable, eine "0" oder eine "1" ist, ein Zahlelement und definieren jetzt die arithmetische Eigenschaft Zahlelement "$ZEl(m) \equiv Prim(m) \vee (m = 26) \vee (m = 28)$". Eine Reihe, die aus Zahlelementen besteht, nannten wir einen Zahlausdruck. Eine Zahl ist die Reihenzahl eines Zahlausdruckes, wenn die in ihr stehenden Stellenzahlen Zahlelemente vertreten. Die n-te Stellenzahl der Reihenzahl x definieren wir folgendermassen:

$st(n,x) = [Ky]\,x\,(Tlb(x, pr(n,x)^{y}) \;\&\; \sim (Tlb(x, pr(n,x)^{y+1})))$.

(die Zahl, die an der n-ten[1] Stelle der Reihe steht, deren Reihenzahl x ist, ist "das kleinste y bis x, für das gilt: x ist teilbar durch die n-te[2] in x enthaltene Primzahl hoch y und nicht teilbar durch die n-te[3] in x enthaltene Primzahl hoch y+1.) Wir erhalten dann die rein arithmetische Definition für die Reihenzahl eines Zahlausdruckes:

$ZA(x) = \{\mathfrak{P} \mid x\,((\mathfrak{P} \neq 0) \rightarrow Z\mathfrak{El}\,(st\,(\mathfrak{P}, x)))$ (4)

Daraus bilden wir den empirischen Begriff "Zahlausdruck" (geschrieben in deutschen Lettern): "zwischen den Stellen x und k steht ein Zahlausdruck" soll bedeuten "die Reihenzahl $\sigma(x,k)$ ist Reihenzahl eines Zahlausdruckes" also:

$\mathfrak{ZA}(x,k) = ZA(\sigma(x,k))$.

Gödel kann sich mit den arithmetischen Begriffen begnügen, da er sich nur mit der Arithmetik befasst. Da wir aber die physikalischen Gebilde, d. h. Zeichenkombinationen, beschreiben wollen, müssen wir auch noch diese empirischen Begriffe aufstellen. Da wir nur physikalische Gebilde, nämlich Reihen von Sprachzeichen, beschreiben, können wir die Metalogik in unserer gewöhnlichen Spache ausdrücken und zwar so, daß dies den Ansichten Wittgensteins nicht widerspricht. Es handelt sich hier nicht um Sätze über eine Art von Sätzen, sondern um Sätze, teils singuläre, teils konditionale, über physikalische Gebilde.

1 A. d. Ü. Im Original steht "nten".
2 A. d. Ü. Im Original steht "nte".
3 A. d. Ü. Im Original steht "nte".

números, por ejemplo, de una fórmula elemental, tiene que satisfacer determinados presupuestos, y, por esto, podemos decir, a la inversa, si un número colocado es una fila de números de una fórmula elemental.

[Por] Ejemplo: nombramos algo, que es una variable, un "0" o un "1",[1] un elemento numérico y definimos ahora la propiedad aritmética de elemento numérico [por] "ZE1(m) = Prim(m) v (m=26) v (m=28)". Una fila que consta de elementos numéricos, denominamos una expresión numérica. Un número es una fila de números de una expresión numérica, si los números de emplazamientos que se encuentran en ellos representan elementos numéricos. El lugar numérico n-ádico de la fila de números x, lo definimos del siguiente modo

st(n, x)=[Ky] x (Tlb(x), pr(n, x)[y] & ~(Tlb(x, pr(n, x)[y+1]).

(El número que se encuentra en el emplazamiento n-ádico de la fila, cuyo número de la fila es x, es "el más pequeño y hasta x, para el que vale: x es divisible mediante el número primo n-ádico contenido en x elevado a y e indivisible mediante el número primo n-ádico que está contenido en x, elevado a y+1.) Obtenemos, pues, la definición aritmética para el número de la fila de una expresión numérica:

ZA(x) = ([illegible] | x (([illegible] ≠ 0)→ Z [illegible] (st ([illegible] , x). [illegible] [4]

De ello construimos el concepto empírico "expresión numérica" (expresado en caracteres castellanos): "entre los emplazamientos x y k se encuentra una expresión numérica" ha de significar "el número de la fila σ(x, k) es número de la fila de una expresión numérica", por consiguiente:

[illegible] (x, k) = ZA(σ(x, k)).

Gödel puede contentarse con los conceptos aritméticos, ya que sólo se ocupa de la aritmética.[2] Pero, ya que nosotros queremos describir las formas físicas, es decir, la combinación de los símbolos, tenemos que exponer además esos conceptos empíricos. Ya que describimos sólo formas físicas, a saber, sucesiones de símbolos lingüísticos, podemos expresar la metalógica de nuestro lenguaje natural y, precisamente de tal modo, que no contradiga los puntos de vista de Wittgenstein.[3] No se trata aquí de sentencias sobre una especie de sentencias, sino de sentencias, en parte, singulares, en parte, condicionales sobre formas físicas.

1. Para Gödel [1931, 176] los signos primitivos del sistema P constan de constantes como 0 (cero), variables de tipo 1 (para individuos, es decir, para números naturales incluyendo el 0).
2. Se refiere a Gödel 1931.
3. Se refiere al trabajo Wittgenstein 1921, 5.54.

En el enunciado pretendidamente intensional russelliano[1] "A cree que p" ha de estar en lugar de "p" la descripción metalógica del enunciado p, y de este modo desaparece, pues, toda apariencia de intensionalidad.[2] // [5]

Neumann: ¿El caso de "opinar", "creer" es otro que el de "decir"?[3]
Carnap: No, también el enunciado "A cree [que] p" afirma que en A se lleva a cabo un determinado desenvolvimiento de procedimientos.
Hahn: El que entre "A cree [que] p" y "A dice [que] p" no se encuentra ninguna diferencia básica, se ve claro, si expresamos "A cree [que] p" por "A cree que un determinado enunciado (describible metamatemáticamente) corresponde a la realidad".— ¿No es el análisis que Ud. ha presentado para "A cree [que] p" el mismo que el de la segunda edición de los Principia?[4]
Carnap: Esencialmente, sí.
Neumann: ¿No presupone ese análisis el behaviorismo?[5]
Kaufmann: Creo que en el enunciado "A cree [que] p" se encuentra una equivocación.[6] El mismo símbolo es usado múltiplemente. Con el behaviorismo no tiene nada que ver.
Carnap: Quiero hacer una observación sobre el papel que juega el concepto numérico en mi sistema. Primeramente, se tienen en él los números ordinales. De ello se pueden definir, mediante el modo recursivo, aquellos números que aparecen en un concepto. Con Frege estoy de acuerdo en tanto que a un nombre sólo le puede corresponder un concepto,[7] sin embargo, en mi propuesta hay sólo una serie de conceptos

1. Véase la introducción a la segunda edición de *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell. Así como la introducción al *Tractatus logico philosophicus* escrita por Russell. Además se puede leer la introducción a este trabajo.
2. En la primera versión del protocolo [WK.9] aparece en lugar de 'intensionalidad', el término 'intencionalidad' (*Intentionalität*) que posteriormente sería corregido en esta segunda versión [WK.9, p. 77]. En Carnap 1934, §67, se le dedica una nota extensa y se hace alusión a los trabajos de Russell 1925[1], 73, 1932, 105 y 1923, 182 s. y Behmann 1927.
3. Hay diferencias específicas entre la discusión que se recoge en la primera versión de los protocolos y la segunda. Aquí traducimos sólo la segunda versión, pero ha de tenerse presente que faltan algunas intervenciones de Gödel, que no vienen a ser recogidas en los protocolos de esta segunda versión.
4. Hahn se refiere a la segunda edición de *Principia Mathematica* de 1925-1927 que había sido traducida al alemán en Russell 1932.
5. En su sentido específico, ha de entenderse por behaviorismo la tendencia a fundamentar el estudio de las estructuras lingüísticas en la observación de la conducta.
6. En alemán, Kaufmann usa el término 'Aequivokation', por lo que hemos optado por dejar la traducción ambigua de 'equivocación'.
7. Carnap hace alusión a los trabajos de Frege 1884, 67 ss.

In dem Russelschen vermeintlich intensionalen Satz "A glaubt p" muss statt "p" die metalogische Beschreibung des Satzes p stehen und dadurch verschwindet dann jeder Schein von Intensionalität. // [5]

Neumann: Verhält es sich bei "meinen", "glauben" nicht anders als bei "sagen"?
Carnap: Nein, auch der Satz "A glaubt p" besagt, da[ß] bei A ein gewisser Ablauf von Vorgängen stattfindet.
Hahn: Da[ß] zwischen "A glaubt p" und "A sagt p" kein prinzipieller Unterschied vorliegt, wird deutlich, wenn man "A glaubt p" so ausdrückt: "A glaubt, da[ß] ein gewisser (metamatematisch zu beschreibender) Satz zutrifft".- Ist die Analyse, die Sie für "A glaubt p" gegeben haben, nicht dieselbe wie in der zweiten Auflage der Principia?
Carnap: Im wesentlichen ja.
Neumann: Setzt diese Analyse nicht den Behaviorismus voraus?
Kaufmann: Ich glaube, im Satz "A glaubt p" liegt eine Aequivokation vor. Es wird dasselbe Zeichen für Verschiedenes verwendet. Mit Behaviorismus hat das nichts zu tun.
Carnap: Ich möchte noch eine Bemerkung über die Rolle des Anzahlbegriffes in meinem System machen. Zunächst hat man darin die Ordinalzahlen. Daraus lässt sich auf rekursivem Weg die in einem Begriff vorkommende Anzahl definieren. Mit Frege besteht insofern Übereinstimmung, als eine Anzahl nur einem Begriff zukommen kann, doch gibt es bei mir nur Anzahlen von Begriffen.

die auf endliche Bereiche beschränkt sind. Man kann nicht fragen, wie viel blaue Dinge es gibt, sondern nur, wie viel blaue Dinge es in diesem Zimmer gibt.
Hahn: Kann man nicht ausdrücken: "Es gibt genau eine gerade Primzahl"? // [6]
Carnap: Ja, und zwar auf folgende Weise: "2 ist eine gerade Primzahl und jede gerade Primzahl ist mit 2 identisch".
Hahn: Gerade das meine ich, wenn ich sage: "Es gibt genau eine gerade Primzahl". Man könnte also die Zahl 1 auf diese (Russellsche) Weise definieren. Es besteht demnach zwischen uns nur ein terminologischer Unterschied.
Carnap: Man könnte wohl so definieren, aber das ergäbe eine unzweckmässige Syntax, weil bei empirischen Begriffen die Anzahlen nur für endliche Bereiche einen Sinn haben.
Feigl: Wie steht es mit der Hierarchie der Sprachen? Fällt die in Ihrem System weg?
Carnap: Ja. — Ich möchte noch einen Überblick über die verschiedenen Arten von Sätzen in unserer Sprache geben.

"Abstrakt" soll ein Satz heissen, wenn er freie Variable enthält,
"Konkret", wenn er keine enthält.
"Deskriptiv", wenn er empirische Begriffe enthält.
"Arithmetisch", wenn er keine enthält.

Ausserdem ist zu unterscheiden zwischen entscheidbaren und unentscheidbaren Sätzen, und bei den entscheidbaren zwischen solchen, die im Kalkül und solchen, die durch metamathematische Betrachtungen entscheidbar sind. Definitionen sind Axiome[,] die beliebig hinzugefügt werden dürfen, weil ihre Form die Widerspruchsfreiheit sichert.// [7]

que están limitados a ámbitos finitos. No se puede preguntar cuántos objetos azules hay, sino sólo cuántos objetos azules hay en esta habitación.

Hahn: ¿No se puede expresar "Hay sólo un número primo par"? // [6]

Carnap: Sí, y por cierto, del siguiente modo: "2 es un número primo par y cada número primo par es idéntico a 2".

Hahn: Precisamente, eso opino yo cuando digo: "Hay sólo un número primo par". Se puede, pues, definir el número 1 de ese modo (russelliano)[1] Se establece, por consiguiente, entre nosotros sólo una diferencia terminológica.

Carnap: Se podría definir probablemente así, pero esto daría una sintaxis inadecuada, porque, en los conceptos empíricos, los números sólo tienen un sentido para ámbitos limitados.

Feigl: ¿Qué ocurre con la jerarquía de los lenguajes? ¿Queda suprimida en su sistema?

Carnap: Sí.[2] — Quiero presentar un resumen de los diferentes géneros de enunciados en nuestro lenguaje.

"Abstracto" se denomina un enunciado, cuando contiene variables libres.[3]

"Concreto", si no tiene ninguna.[4]

"Descriptivo", si contiene conceptos empíricos,[5]

"Aritmético", si no contiene ninguno.[6]

Además, ha de diferenciarse entre enunciados decidibles e indecidibles, y, en los decidibles, entre aquellos que son decidibles en el cálculo y aquellos que son mediante consideraciones metamatemáticas. Definiciones son axiomas que pueden ser añadidas arbitrariamente, porque su forma asegura la consistencia. // [7]

1. Hahn está recogiendo las ideas de Russell que vienen a ser tratadas en Russell, *Einführung in die mathematische Philosophie*. Munich, 1932. Cito según la edición de. Wiesbaden: Emil Vollmer Verlag, 1963, páginas 41 y 113
2. El problema de una metalógica sin jerarquías de lenguajes es un tema que se ha vuelto a suscitar recientemente. Véase Padilla Gálvez, "Niveles de lenguaje, autorreferencia y las paradojas", *Contextos* IX/17-18, 121-148
3. Un enunciado abstracto sería formalizado mediante Px, o bien mediante Rxy, que contiene variables libres.
4. Un enunciado concreto asumiría la estructura Pa
5. Un enunciado empírico vendría expresado mediante el enunciado: "los números vienen expresados mediante símbolos"
6. Un enunciado aritmético sería pues "Hay sólo un número primo par"

Resulta el siguiente esquema:

	Decidibles en el cálculo	Decidibles fuera del cálculo	Indecidibles con nuevos símbolos	Indecidibles sin nuevos símbolos
descriptivos abstractos	Rojo(a) v ~Rojo(a) Tautologías o contradicciones Generales.	Contestables según el método de Gödel.	Definiciones de conceptos fisicalistas	Leyes naturales.
concretos	R(17) v ~ R(17) Tautologías o contradicciones concretas.	0	Definiciones de nombres geográficos.	Enunciados con contenido.
aritméticos abstractos	m + n = n + m	El teorema de Gödel[1]	Definiciones de conceptos matemáticos	? (Teorema de Fermat)[2]
concretos	1 + 1 = 2	0	Definición de 2 = 1 + 1	0

Hahn: ¿De qué tipo son los enunciados metalógicos? ¿Son tautologías?
Carnap: Son, en parte empíricos, en parte, tautológicos. Empírico es, por ejemplo, el enunciado: "En este lugar hay una fórmula elemental". Tautológico es el enunciado: "Si en cualquier emplazamiento hay un signo-0 entre paréntesis después de un signo predicativo, entonces hay en ese emplazamiento una fórmula elemental".
Neumann: ¿Qué es lo que se afirma propiamente cuando se dice que la metalógica es expresable en el lenguaje original? Tan pronto el lenguaje es bastante amplio, es todo, consecuentemente también la descripción fisicalista de las fórmulas expresables en él. // [8]

1 El teorema de Gödel afirma que existen enunciados verdaderos que no pueden ser decidibles.
2 El teorema de Fermat afirma que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene solución para enteros positivos x, y, z, n, siendo n > 2.

Es ergibt sich folgende Tabelle:

	Entscheidbar im Kalkül	Entscheidbar ausserh[alb] d[es] K[alküls]	Unentscheidbar mit neuen Zeichen	Unentscheidbar ohne neue Z[eichen]
Deskriptiv abstrakt	Rn(n) v ~Rn(n) Generelle Tautolog[ien] bzw. Kontradiktionen[.]	konstruierbar nach Gödels Methode.	Definitionen physikalischer Begriffe	Naturgesetze.
konkret	R(17) v ~R(17) Konkrete Tautologien[bzw. Kontradiktionen[.]	0	Definitionen geographischer Namen[.]	Gehaltvolle Sätze[.]
arithmetisch abstrakt	m + n = n + m	Gödelscher Satz[.]	Definitionen mathematischer Begriffe[.]	? (Fermatscher Satz)
konkret	1 1 2	0	Definition von 2 2 1 1	0

Hahn: Welcher Art sind die metalogischen Sätze? Sind es Tautologien?
Carnap: Sie sind teils empirisch, teils tautologisch. Empirisch ist z. B. der Satz: "An dieser Stelle steht eine elementare Formel". Tautologisch ist der Satz: "Wenn an irgend einer Stelle ein eingeklammertes 0-Zeichen nach einem Prädikatenzeichen steht, dann steht an dieser Stelle eine elementare Formel"
Neumann: Was ist eigentlich damit gesagt, da[ß] die Metalogik in der ursprünglichen Sprache ausdrückbar ist? Sobald die Sprache genügend umfassend ist, ist alles, folglich auch die physikalische Beschreibung der Formeln in ihr ausdrückbar. //

[8]

Carnap: Ja, aber es zeigt sich, da[β] mit Hilfe dieser physikalischen Beschreibung der Formeln alle Fragen der Syntax, die wir hier im Zirkel[1] besprechen, behandelt werden können. Auch die Behauptung, da[β] gewisse Sätze, etwa die Heideggerschen, sinnlos sind, lässt sich exakt durch einen metalogischen Satz aussprechen.

Neumann: Es ergibt sich die Konsequenz, da[β] nur eine Sprache existiert?

Carnap: Ja, es gibt wohl Sätze von sehr verschiedener Art (wie die obige Tabelle zeigt), aber alle, auch die metalogischen, sind in einer Sprache.

Hahn: Braucht man überhaupt den Terminus "Metalogik", d. h. sind die metalogischen Sätze principiell von den andern verschieden?

Carnap: Nein, nur aus Zweckmässigkeitsgründen fasst man eine gewisse Klasse von Sätzen unter dem Namen "metalogische Sätze" zusammen.

Neurath: Es handelt sich hier also um eine konkrete Selektion von Sätzen?

Carnap: Ja.

Neurath: Ist die Metalogik der Metalogik wieder in der ursprünglichen Sprache ausdrückbar?

Carnap: Ja, man kann es so einrichten, da[β] das der Fall ist.

————————// [END]

1 A. d. Ü. Mit "Zirkel" ist hier die im mathematischen Institut gehaltenen Vortragsreihen gemeint.

Carnap: Sí, pero se demuestra que, con la ayuda de esa descripción fisicalista de las fórmulas, pueden ser tratadas todas las cuestiones de la sintaxis que discutiremos en el Círculo. También la aseveración de que determinados enunciados, por ejemplo, los heideggerianos, no tienen sentido, puede ser expresada de manera exacta mediante un enunciado metalógico.

Neumann: ¿Resulta la consecuencia de que sólo exista un lenguaje?

Carnap: Sí, hay, por cierto, enunciados de muchos géneros (como demuestra la tabla de arriba), pero todos, también los metalógicos, se encuentran en un lenguaje.

Hahn: Se necesita, en resumidas cuentas, el término "metalógica", es decir ¿son, en principio, los enunciados metalógicos, diferentes de los otros?

Carnap: No, sólo por razones de conveniencia, se resume una determinada clase de enunciados bajo el nombre "enunciados metalógicos".

Neurath: ¿Se trata aquí, por lo tanto, de una selección de enunciados concretos?

Carnap: Sí

Neurath: ¿Es expresable de nuevo la metalógica de la metalógica en el lenguaje originario?

Carnap: Sí, se puede disponer de tal modo que esto sea el caso.

————— // [FINAL]

Rudolf Carnap (18.5.1891 al 14.9.1970). Estudió física, matemáticas, filosofía y psicología en Jena, Freiburgo. Tesis doctoral sobre *Der Raum* [1921] en Jena. Llevó a cabo su "Habilitation" en Viena sobre lógica y filosofía de la ciencia. Profesor asociado en Viena de 1926 a 1931. A partir de 1930 es profesor extraordinario en la misma Universidad. Publica *Der logische Aufbau der Welt* [1928], *Scheinprobleme in der Philosophie* [1928] y *Abriss der Logistik* [1929]. De 1931 a 1936 es profesor de filosofía de la naturaleza en la Universidad alemana de Praga. Trabaja sobre lógica y publica: *Überwindung der Metaphysik durch logische Analyse der Sprache* [1931] y *Logische Syntax der Sprache* [1934]. Emigración a los E.E.U.U. y profesor de filosofía en la Universidad de Chicago desde 1936 a 1952. Entre estos años alterna como profesor invitado en Harvard [1940/41] y publica *Testability and Meaning* [1936/37], *Foundations of Logic and Mathematics* [1939] y trabajos sobre semántica de los que hay que destacar: *Introduction to Semantics* [1942] y *Meaning and Necessity* [1947]. Entre los años 1952 y 1954 trabaja en el Instituto de Estudios Avanzados en Princeton y analiza algunos aspectos de la teoría de la probabilidad, publicando. *Logical Foundations of Probability* [1950]. Desde 1954 a 1961 es sucesor de H. Reichenbach en la Universidad de California, Los Ángeles. Centra su atención sobre problemas de filosofía de la ciencia. Entre los trabajos publicados hay que reseñar *The Methodological Character of Theoretical Concepts* [1956] y *Philosophical Foundations of Physics* [1966]. Ha sido autor de más de doscientos trabajos y su influencia en lógica, teoría de las probabilidades, semántica, lógica modal, etcétera, en nuestro siglo es enorme.

Índice de símbolos

P(a)	**Predicado**	I, 1
Q(a, b)	**Relación**	I, 1
&	Conjunción	I, 1
→	Implicación	I, 1
=	Identidad	I, 1
~	Negación	I, 1
v	Disyunción	I, 1
[x]	Cuantificador unIersal	I, 1
[∃x]	Cuantificador existencial	I, 1
=	Identidad según Russell	I, 5
F(x), F(y)	Predicados	I, 5
	Implicación estricta (Lewis)	I, 6
lq|n [14] (R, (xp, xq)	"l,q" son índices superiores	I, 7
	Nombre metalógico de la especie	I, 3 s.
	Especie	I, 4
	Géneros	I, 4
	Predicados aritméticos	I, 4
	Funciones aritméticas	I, 4

A los símbolos individuales les corresponden los géneros que no pertenecen a especie (véase I, 4).

	(~)	Negación	I, 4
	(v)	Disyunción	I, 4
	(&)	Conjunción	I, 4
	(→)	Implicación	I, 4
	(=)	Idendidad	I, 4
	(( )	Apertura del paréntesis	I, 4
	( ))	Cierre del paréntesis	I, 4
	([ )	Apertura del corchete	I, 4

$\mathfrak{gkl}$	( ])	Cierre del corchete	I, 4
$\mathfrak{Ko}$	(,)	Coma	I, 4
$\mathfrak{Ex}$	(∃)	Cuantificador existencial	I, 4
$\mathfrak{Nu}$	(0)	Cero	I, 4
$\mathfrak{E}$	(1)	Uno	I, 4
$\mathfrak{Z}$	(Definición de) cifra		I, 6
$\mathfrak{ZR}$	Fila de cifras		I, 6
$\mathfrak{Z\,E}$	Elemento numérico		I, 6
$\mathfrak{Z\,A}$	Expresión numérica		I, 6
$\mathfrak{P}$	Predicado		I, 6
$\mathfrak{A}$	Operando		I, 6
$\mathfrak{S}$	Fórmula		II, 3
$\mathfrak{T}$	Fórmula		II, 3
$\mathfrak{m}$	Formula		II, 4
$\mathfrak{b}$	Fórmula		II, 4
I(p,q)	Identidad		II, 1
Gr(m,n)	Grosor		II, 1
Tlb(m,n)	Propiedad divisible		II, 1
Prim(m)	Número primo		II, 1
prod(k,n)	Producto		II, 1
sum(m,n)	Suma		II, 1
$\mathfrak{Ge\ for}$	Formula		II, 2 ss.
$\mathfrak{kl\ For}$ (x,111)	Enunciado condicional metalógico		III, 1
(m + n)	Suma		I, 6
$\alpha(x) = n$	Magnitud de estados		III, 2
$\dfrac{\mathfrak{A} \qquad \mathfrak{A} \to \mathfrak{S}}{\mathfrak{S}}$	Regla de la implicación		II, 6
$\dfrac{F(0) \qquad F(n) \to F(n1)}{F(n)}$	Principio de la inducción completa		II, 6

Fuentes

PROTOKOLL 1931. *Über Widerspruchsfreiheit und Entscheidbarkeit in Axiomensystemen.* Wechselrede 7 (Referat Herrn Gödels). Protokoll am 15.1.1931. En: *Wiener Kreis Archiv.* Haarlem (Holanda), WK 3, TD/D, pp. 1-3.

ZIRKELPROTOKOLL 1931. *Metalogik.* Zirkelprotokoll vom 11. Juni 1931, pp. 1-9, v. 18. 6. 1931, pp. 1-9, v. 25. Juni 1931, pp. 1-6. En: *Wiener Kreis Archiv.* Haarlem (Holanda), WK 14-15-16.

Referencias

ACKERMANN, W. 1924. "Begründung des tertium non datur mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit". *Mathematische Annalen* 93: 1-36.

BEHMANN, H. 1927. *Mathematik und Logik.* Leipzig - Berlin.

BERNAYS, P. 1923. "Erwiderung auf die Note von Herrn Aloys Müller: «Über Zahlen als Zeichen»". *Mathematische Annalen* 90: 159-163.

BRAITHWAITE, R. B. 1980. "Introduction". En Gödel 1980, i-xxxii.

CARNAP, R. 1931. "Protocoln".

________. 1930-1933. *Tagebücher.*

________. 1934. *Logische Syntax der Sprache.* Viena: Julius Springer.

________. 1939. "Foundations of Logic and Mathematics". En: *International Encyclopedia of Unified Science.* Chicago: The University of Chicago Press.

________. 1963. "Intellectual Autobiography". [Contenido en Schilpp 1963, 1-84]

________. 1992. *Autobiografía intelectual.* Barcelona: Paidós.

CIRERA Duocastella, R. 1990. *Carnap i el Cercle de Viena. Empirisme i sintaxi lògica.* Barcelona: Anthropos.

COFFA, A. 1987. "Carnap, Tarski and the Search for Truth". *Noûs* 21, 547-572.

________. 1991. *The Semantic Tradition from Kant to Carnap: To the Vienna Station.* [Ed. Linda Wessels] Cambridge: Cambridge Univ. Press.

COHEN, Robert S. y WARTOFSKY, Max W. (Eds.) 1965. *A Bibliography of Ph. F. Selected Writings on the Philosophy of Science.* Contenido en Boston Studies in the Philosophy of Science, II. In Honor of Ph. F.

CHURCH, A. 1936. "A note on the Entscheidungsproblem". *The Journal of Symbolic Logic* 1: 40-41.

________. 1956. *Introduction to Mathematical Logic.* Vol. I. Princeton, N.Y.

DAWSON, J. W. 1985. "Completing the Gödel-Zermelo Correspondence". *Historia Mathematica* 12: 66-70.

DEDEKIND, R. 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen.* Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn.

DRUDIS, R. 1990. "Bibliografía sobre L. W." *Aporia* 9.

FEYERABEND, Paul K. y MAXWELL, G. (Eds.) 1966. *Mind, Matter, and Method. Essays in the Philosophy of Science in Honor of Herbert Feigl.*

FREGE, G. 1884. *Die Grundlagen der Arithmetik.* Hildesheim: Olms.

GIVANT, S. y MCKENZIE, R. N. (Eds.) 1986. *Alfred Tarski. Collected Papers.* 4 vols. Basilea: Birkhäuser.

GÖDEL, K. 1930a. "Einige metamathematische Resultate über Entscheidungsdefinitheit und Widerspruchsfreiheit". *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse* 67: 214-215. [Trad. cast.: Gödel 1981, 42-43]

________. 1930b. "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls". *Monatshefte für Mathematik und Physik* 37: 349-360. [Trad. cast.: Gödel 1981, 20-34]

GÖDEL, K. 1931a. "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I". *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38: 173-198. [Trad. cast.: Gödel 1980: 11-50 y Gödel 1981: 55-89].

________. 1931b. "Nachtrag zur Diskussion zur Grundlegung der Mathematik". *Erkenntnis* 2: 149-151. [El texto ha quedado casi inédito.]

________. 1980. *Sobre proposiciones formalmente indecidibles de los Principia Mathematica y sistemas afines*. Valencia: Cuadernos Teorema.

________. 1981. *Obras completas*. Madrid: Alianza. [Intr. y trad. de J. Mosterín.]

________. 1986 ss. *Kurt Gödel. Collected Works*. Vol. I-II. Oxford: Oxford University Press.

GRATTAN-GUINNESS, I. 1979. "In Memoriam Kurt Gödel: His 1931 Correspondence with Zermelo on his Incompletability Theorem". *Historia Mathematica* 6: 294-304.

HALLER, Rudolf. 1992. "Alfred Tarski: Drei Briefe an Otto Neurath". *Grazer Philosophische Studien* 43: 1-32.

________. 1993. *Neopositivismus*. Darmstadt: Wiss. Buchgesellschaft.

HEIJENOORT, J. van. 1967. *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931*. Cambridge Mass.: Harvard Univ. Press.

HENTSCHEL, K. 1990. *Die Korrespondenz Petzoldt-Reichenbach. Zur Entwicklung der "wissenschaftlichen Philosophie" in Berlin*. Berlin: Sigma.

HERMES, H. 1971. *Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit*. Berlin: Springer. [Trad. cast.: *Introducción a la teoría de la computabilidad*. Madrid: Tecnos. 1984].

HEYTING, A. 1930. "Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik". *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-Mathematische Klasse II*: 42-56.

________. 1930a. "Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik". *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-Mathematische Klasse II*: 57-71 y 158-169.

HILBERT, D. 1900. "Mathematische Probleme. Vortrag gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris". *Archiv der Mathematik und Physik* 3. Serie, 1. 1901: 44-63 y 213-237.

HILBERT, D. 1904. "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik". *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*. Leipzig: Teubner. Pp. 174-185.

________. 1923. "Die logische Grundlagen der Mathematik". *Mathematische Annalen* 88: 151-165.

________. 1925. "Über das Unendliche". *Mathematische Annalen* 95: 161-190.

________. 1927. "Die Grundlagen der Mathematik". *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 6: 65-85.

________. 1928. "Probleme der Grundlegung der Mathematik". *Atti del Congresso internazionale dei matematici. Bologna 3-10 settembre 1928*. Bologna, 1929. Vol. I. pp. 135-141.

HILBERT, D. y ACKERMANN, W. 1928. *Grundzüge der theoretischen Logik*. Berlin: Springer.

HUSSERL, E. 1921. *Logische Untersuchungen*. (3 vols.) Halle: Niemeyer.

KLEENE, ST. C. 1971. *Introduction to Metamathematics*. Amsterdam, New-York: North-Holland. [Trad. cast.: *Introducción a la metamatemática*. Madrid: Tecnos. 1974.]

LEWIS, C. I. 1918. *A Survey of Symbolic Logic*. Berkeley: University of California.

LORENZEN, P. 1969. *Einführung in die operative Logik und Mathematik*. Berlin: Springer Verlag.

________. 1980. *Metamathematik*. Hildesheim: Biblio. Institut.

LORENZEN, P. y LORENZ, K. 1978. *Dialogische Logik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

ŁUKASIEWICZ, J. y TARSKI, A. 1930. "Untersuchungen über den Aussagenkalkül". *Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego*, Wydział III 23: 30-50.

LUSIN, N. N. 1927. "Sur les ensembles analytiques". *Fundamenta mathematicae* 10. 1-95.

__________. 1930. *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*. Paris. Gauthier-Villars.

NAGEL, E. y NEWMAN, J. R. 1969. "La demostración de Gödel". En: Sigma. *El mundo de las matemáticas*. Ed. J. R. Newman). Vol. 5. Barcelona: Grijalbo. Pp. 57-84.

__________. 1970. *El teorema de Gödel*. Madrid: Tecnos.

NEUMANN, J. v. 1927. "Zur Hilbertschen Beweistheorie". *Mathematische Zeitschrift* 26: 1-46.

__________. 1928. "Die Axiomatisierung der Mengenlehre". *Mathematische Zeitschrift* 27: 669-752.

NEURATH, O. 1935. *Le développement du Cercle de Vienne et l'avenir de l'empiricisme logique*.

NEURATH, O.; CARNAP, R. y HAHN, H. 1929. *Wissenschaftliche Weltauffassung. Der Wiener Kreis*. Veröffentlichungen des Vereines Ernst Mach. Viena: Artur Wolf Verlag.

PADILLA GÁLVEZ, J. 1988. "Identität und Selbigkeit. Ontologische Interpretation der Leibnizschen Individuen". *V. Internationaler Leibniz-Kongreß. Leibniz Tradition und Aktualität*. Pp. 685-692.

__________. 1990. "¿Pueden aplicarse los argumentos informales contra el punto de vista formal?". En: *Structures in Mathematical Theories*. Ed. A. Díez. San Sebastián. UPV, pp. 461-467.

__________. 1991a. "La verdad y descripción de estado". En: *Actas del encuentro de Lógica y filosofía de la Ciencia. Rudolf Carnap y Hans Reichenbach in Memoriam*. Madrid: Univ. Complutense. Pp. 415-422.

__________. 1991b. "Niveles de lenguaje, autorreferencia y las paradojas". *Contextos* 9, 17-18 y 121-148.

__________. 1992a. "El Círculo de Viena reconsiderado". *LLULL* 15: 487-491.

PADILLA GÁLVEZ, J. 1992b. "Autorreferencia, lógica de la probabilidad y modalidad matemática". *Actas del VIII Congreso de Lenguajes Naturales y Lenguajes Formales*. Barcelona: PPU. Pp. 475-482.

__________. 1993. "Los presupuestos metalógicos de la Logische Syntax der Sprache de Rudolf Carnap". *I Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia*. Madrid. Pp. 467-471.

__________. 1994. "Los inicios de la metalógica en los años treinta". *LLULL* 17. [En prensa]

__________. (En prensa). "Metalógica descriptiva versus metalógica aritmética".

PEANO, J. 1889. *Arithmetices principia, nova methodo exposita*. Turín: Fratres Bocca.

PECKHAUS, V. 1990. *Hilbertprogramm und Kritische Philosophie*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. [Véase: *Mathesis* 1991, 547 ss.]

RUSSELL, B. 1923. *Einführung in die mathematische Philosophie*. München.

__________. 1925[1]. *Principia Mathematica*. (2a. ed.).

__________. 1965. *Einführung in die mathematische Philosophie*. Wiesbaden: Emil Vollmer Verlag.

RUSSELL, B. y WHITEHEAD, A. N. 1932. *Einführung in die mathematische Logik*. München - Berlin.

SCHILPP, P. A. (Ed.). 1963. *The Philosophy of Rudolf Carnap*. La Salle, Ill.: Open Court. (*The Library of Living Philosophers*. Vol. IX)

SCHILPP, P. A. (Ed.). 1971. *The Philosophy of Bertrand Russell*. La Salle, Ill.: Open Court. (*The Library of Living Philosophers*. Vol. V)

SKOLEM, Th. 1920. "Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theorem über dichte Mengen". En: *Skr. Vidensk. Kristiana. Math.-nat. Kl.* Nr 4, 1-36.

SKOLEM, Th. 1923. "Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich". *Videnskapsselskapets skrifter. I Matematisk-naturvidenskabelig klasse*, 6.

SPECK, J. (Ed.) 1992. *Grundprobleme der großen Philosophen*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

STEGMÜLLER, W. 1973. *Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit. Die metamathematischen Resultate von Gödel, Church, Kleene, Rosser und ihre Erkenntnistheoretische Bedeutung*. Berlin: Springer.

TARSKI, A. 1930. "Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik". *C. R. Soc. Sciences Varsovie* 23, Cl. III.

__________ 1935. "Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen". *Studia Philosophica* 1, 261-405.

THIEL, CH. 1992. "Kurt Gödel: Die Grenzen der Kalküle". [Contenido en Speck 1992, 138-181].

TORRETTI, R. 1992. "La tradición semántica". *Revista Latinoamericana de Filosofía* 18, 323-340.

WANG, Hao 1987. *Reflections on Kurt Gödel*. Cambridge MA: MIT Press.

__________ 1991. *Reflexiones sobre Kurt Gödel*. Madrid: Alianza.

WHITEHEAD, A. N. y RUSSELL, B. 1910-13. *Principia Mathematica*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

WITTGENSTEIN, L. 1921. Tractatus logico-philosophicus. *Annalen der Naturphilosophie* 14, 185-262. (Reimpr. en *Schriften von Ludwig Wittgenstein*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp, 1960 ss.).

WOLENSKI, J. 1989. *Logic and Philosophy in the Lvov-Warsaw School*. Dordrecht: Reidel.

ZERMELO, E. 1987. "A Letter to Reinhold Baer". En *Gödel Remembered* [Ed. P. Weingartner y L. Schmetterer]. Napoli: Bibliopolis. Pp. 43-48.