Algunas cuestiones sobre el papel de la lógica de segundo orden en el quehacer matemático

Antonio Cuba

Resumen

Un gran número de conceptos, nociones y teoría —cruciales para codificar las ramas más fundamentales de las matemáticas— no pueden formularse en una lógica de primer orden. Esto significa que los matemáticos no pueden evitar el uso de la lógica de segundo orden, o de orden superior, en su trabajo. Pero al hacerlo, tienen que aceptar la introducción de varias limitaciones en sus prácticas. Así, la lógica de segundo orden no es completa, en ella no se verifican los teoremas de Löwenheim-Skolem, etc., en cambio, se pueden encontrar muchas estructuras importantes con caracterizaciones categóricas de segundo orden. Este artículo se centra en algunas de las cuestiones que surgen tras todas estas consideraciones.

Abstract

A great number of concepts, notions and theories —crucial in order to codify the most fundamental branches of mathematics— cannot be formulated in a first-order logic. This means that mathematicians cannot avoid the use of second or higher-order logic in their work. But, so doing, they have to accept that several limitations are to be introduced in their practices. So, second-order logic is not complete, the Löwenheim-Skolem theorems fail in it, etc., in exchange, one can find, for instance, many important structures with second-order categorical characterizations. This paper focuses some questions arised under these considerations.

1. El planteamiento de la cuestión

El asunto que trato de plantear en este trabajo atañe directamente al quehacer diario del matemático, a su práctica habitual. Para ponerlo de manifiesto voy a comenzar mostrando una breve, y espero que significativa, selección de conceptos y definiciones que es frecuente encontrar en textos de matemáticas, y que se introducen sin mayor especificación. Hay que advertir que, en todos los ejemplos que propongo, los problemas no surgen al establecer los conceptos o definiciones involucrados, sino al tratar de simbolizarlos adecuadamente.

(a) En los manuales de matemáticas suelen aparecer expresiones que indican que un determinado conjunto o dominio es finito. En el ámbito del álgebra, por ejemplo, se habla de grupos de tipo finito [Godement 1971, 275; también Dubreil-Dubreil Jacotin 1971, 98 y 373.] y, aunque no se indica expresamente, resulta obvio que finito se está contraponiendo —como su negación— a infinito.

(b) En su celebérrimo artículo de 1931 [Gödel 1981, 74], Gödel introduce el conjunto de inferencias a partir de *K* —Flg(*K*)— como el mínimo conjunto de fórmulas que contiene todas las fórmulas de *K*, así como todos los axiomas, y es cerrado respecto a la relación de 'inferencia inmediata'. En un sentido análogo se caracteriza el concepto de grupo generado por un determinado subconjunto *M* de elementos de un grupo dado *G*: se llama así a la intersección de todos los subgrupos de *G* que contienen a *M*, o lo que es lo mismo, al menor subgrupo de *M* que contiene a *M* [Dubreil-Dubreil Jacotin, 1971, 84]. Esto mismo se encuentra ampliado al caso de módulos o de espacios vectoriales: una variedad lineal engendrada por unos vectores dados es el menor espacio vectorial que los contiene, o dicho de otra manera, la intersección de todos los espacios vectoriales que contienen al conjunto de vectores dado. En todos estos casos se está hablando de la clausura mínima respecto de una determinada relación.

(c) Una de las objeciones que se plantearon a la axiomatización de la teoría de conjuntos por Zermelo fue que no excluía la posibilidad de que aparecieran conjuntos extraordinarios, caracterizados por contener un ciclo, es decir una cadena descendente infinita de conjuntos ligados entre sí por la relación de pertenencia. La superación aceptada de esta dificultad fue la propuesta por Von Neumann, y consistía en añadir al sistema de Zermelo un nuevo axioma, llamado de fundamentación o de regularidad, que postula que todo conjunto no vacío contiene un elemento disjunto con él. De esta manera, queda asegurado que todos los conjuntos se construyen a partir de elementos base (*Urelement*, conjunto vacío u otro), exclusivamente mediante la aplicación de las operaciones explícitamente previstas en los axiomas. Esto puede generalizarse sin problemas a cualquier relación.

(d) Desde que a finales del XIX Borel reconociera como importante poder seleccionar un número finito de conjuntos recubridores de un conjunto dado, el concepto de compacidad juega un importante papel en Topología. En la actualidad se suele caracterizar un conjunto compacto en un espacio métrico cualquiera, como aquél que verifica que de todo recubrimiento por abiertos de la topología, puede extraerse un subrecubrimiento finito [Doneddu 1968, 16].

(e) Desde Frege, e incluso ya desde Hume, la equipotencia ha servido para caracterizar de modo definitivo los números naturales. En general se establece que dos conjuntos son equipotentes cuando puede establecerse una correspondencia biyectiva entre ambos.

Todos estos enunciados, que como ya he indicado se introducen sin especificación alguna en los manuales de las diferentes ramas de la matemática, tienen dos cosas en común. En primer lugar, los matemáticos los entienden perfectamente y saben bien de qué hablan o tratan en cada caso; por otra parte, son conceptos y definiciones muy básicos y generales. En segundo lugar, y lo que es más importante para el objetivo que perseguimos, ninguno de los conceptos que introducen pueden simbolizarse en un lenguaje de primer orden; es precisa la cuantificación sobre clases o propiedades, y por tanto, es preciso utilizar un lenguaje de segundo orden. Vamos a irlo mostrando caso por caso.

(a') La caracterización del infinito exige un lenguaje de segundo orden. En efecto, decir que la extensión correspondiente a un cierto predicado X, es infinita —INF(X)— supone admitir la existencia de una cierta función f que verifique: 1) que es inyectiva; 2) que la imagen mediante f de todo individuo que verifique X, también verifica X; y 3) que hay cierto z que verifica X que no es imagen mediante f de ninguno de los elementos que verifican X. En símbolos, se dirá que INF(X), cuando:

$$\exists f[\forall x \forall y(fx = fy \rightarrow x = y) \wedge \forall x(Xx \rightarrow Xfx) \wedge \exists z\,(Xz \wedge \forall x(Xx \rightarrow fx \neq z))]$$

Por otra parte, negar que un conjunto es infinito supone afirmar que es finito, o sea, que $FIN(X) =_{df} \neg INF(X)$. Aplicando en la fórmula anterior las reglas de equivalencia cuantificacional y de negación del implicador, se puede afirmar que X es finito, o sea, $FIN(X)$, cuando:

$$\forall f[\forall x \forall y(fx=fy \rightarrow x=y) \wedge \forall x(Xx \rightarrow Xfx) \rightarrow \forall z(Xz \rightarrow \exists x(Xx \rightarrow fx=z))]$$

(b') Para indicar que un determinado elemento x pertenece a la clausura mínima de Y respecto a la relación R, se puede poner:

$$\forall X\{\forall y\ (Yy \rightarrow Xy) \wedge \forall y \forall z(Xy \wedge Ryz \rightarrow Xz) \rightarrow Xx\}$$

(c') La relación R se dice que está bien fundada cuando:

$$\forall X\{\exists x Xx \rightarrow \exists x[Xx \wedge \forall y\ (Xy \rightarrow \neg Ryx)]\}$$

que puede traducirse a lenguaje conjuntista como:

$$\forall X[X \neq \emptyset \rightarrow \exists Y\ [Y \in X \wedge Y \cap X = \emptyset]]$$

(d') Dado un espacio métrico E cualquiera, sea T una topología cualquiera sobre él; si A es un subconjunto cualquiera de E, llamaremos recubrimiento de orden k de A, a:

$$Rec_k(A) =_{df} \{O_i\ /\ i \in L \wedge car(L) = k \wedge A \subset \cup_i O_i\}$$

En estas condiciones se dice que un conjunto A es compacto si de todo subrecubrimiento puede extraerse un subrecubrimiento finito; es decir:

$$COMP(A) =_{df} \forall R\{R = Rec_k(A) \rightarrow \exists t\ (FIN(t) \wedge Rec_t(A) \subset Rec_k(A))\}$$

(e') Las extensiones de dos conceptos A y B tienen la misma cardinalidad cuando:

$$\exists f \exists g \forall x \forall z(Ax \rightarrow Bfx \wedge Bz \rightarrow Agz \wedge (z = fx \leftrightarrow x = gz))$$

Así pues, en su práctica diaria, los matemáticos utilizan con gran frecuencia lenguajes de segundo orden, e incluso de orden superior. Creo que, ante este hecho incuestionable, hay dos actitudes diferentes. En primer lugar, hay matemáticos que emplean tales lenguajes convencidos de que así lo hacen, e incluso lo advierten; por ejemplo, creo que todo matemático que utilice el principio de inducción es consciente de que el nivel de predicación es diferente al de otros enunciados de la misma axiomática de Peano. Otra cosa bien distinta es el hecho de que sean, al mismo tiempo, conscientes de las limitaciones que conlleva el uso de tales lenguajes. Creo, en segundo lugar, que otras veces las definiciones son tan complejas, que esconden —en cierta medida— los elementos de la cuantificación, y el matemático no es consciente de que hace uso de tales lenguajes.

De un modo u otro, no creo que la actitud del filósofo (o del que filosofa sobre estos temas) deba ser excesivamente dogmática y restrictiva, pienso (con Maddy y Hilbert, por ejemplo) que una de las razones del rechazo al intuicionismo por parte de los matemáticos, es el hecho de limitar las herramientas con las que el matemático trabaja habitualmente. Por el contrario, quizá valiera la pena admitir un cierto principio de tolerancia y exigir —si acaso— que se especifique en la exposición formal del asunto, el cálculo lógico básico subyacente.[1] Así parecen entenderlo algunos matemáticos, aunque como siempre sin especificación. De todos modos, en la mayor parte de los textos y escritos de matemáticas se observa la ausencia de un cálculo lógico básico. En resumen, los matemáticos utilizan los principios según les interesa.

En este aspecto del lenguaje que se utiliza en matemáticas, como en tantos otros que huelan remotamente a filosofía, el matemático se muestra, cuando menos, despreocupado, y es evidente que no es muy consciente de la problemática que a otros niveles trae consigo. Pero, si bien desde el punto de vista del matemático la cuestión ni siquiera se plantea, a nivel filosófico y lógico la cuestión es muy otra y la problemática que surge es distinta. Es éste, precisamente, el dominio en el que trato de incardinar el presente trabajo.

El asunto, en mi opinión, está en convencer a los matemáticos de que todas estas reflexiones, aunque filosóficas, les interesan. Trato de conectar (quizá también de justificar) desde un punto de vista filosófico, la utilización que hacen los matemáticos de lenguajes de orden superior (en concreto, de segundo orden) en su práctica diaria. Por consiguiente, estoy tratando con algo que de hecho, y de manera efectiva, concierne al quehacer del matemático.

1 Esta es una práctica que, en matemáticas, raras veces se lleva a cabo, tal y como han constatado autores de la talla de Carnap y Fraenkel. Ni aun en el caso del método favorito de los matemáticos para introducir sus sistemas —el axiomático— suele hallarse una explicitación del proceso deductivo que se va a utilizar (Nepomuceno 1995, 208 ss.). Para una distinción entre un sistema matemático y la axiomatización de un sistema, véase Corcoran 1980, 188 ss.

Por otra parte, quiero poner de manifiesto que no trato de expresar nada novedoso respecto a la lógica de segundo orden. Lo que busco es poner de manifiesto —apoyándome en varios de los autores que entiendo más relevantes— algunas reflexiones acerca de las ventajas e inconvenientes, de la posibilidad e imposibilidad de que los lenguajes de segundo orden puedan ser utilizados en matemáticas por los matemáticos.

2. Ventajas y desventajas

En este punto sólo quiero extractar algunas de las características diferenciales entre la lógica de primer orden y la lógica de segundo orden.[2] Como es bien conocido, los lenguajes de segundo orden se caracterizan porque permiten la cuantificación sobre variables funcionales o predicativas, y no sólo sobre variables que designan objetos, como ocurre con los lenguajes de primer orden. En lo que sigue voy a contraponer las lógicas y lenguajes de ambas clases en lo concerniente a los *desiderata* habituales de cualquier sistema formal. Es decir, me voy a detener de manera especial en consideraciones metateóricas, que son las que más interesan al propósito que persigo. No estoy, pues, interesado aquí por la teoría subyacente a los lenguajes de uno y otro tipo, sino en su metateoría. Por lo demás, todo ello tiene un mero carácter recordatorio por lo conocido. La conclusión a la que se llega de manera invariable tras estas reflexiones es que ninguna de las dos lógicas soluciona todos los problemas, y que lo que se presenta como ventaja en una constituye un inconveniente en la otra.

Quizá sea conveniente un poco de historia. Como indica Mosterín [1979, v y *ss.*], la lógica de segundo orden, aunque menos conocida que la de primer orden, no por eso es menos antigua. Su origen histórico tiene, una vez más, como protagonista a Frege, y todos los autores coinciden al situarlo en 1879, año de la publicación de su *Begriffsschrift*. Como es conocido [Nepomuceno 1990, 16 *ss.*], el planteamiento fregeano surge al considerar fijo el argumento de una determinada función, y permitir como variable el signo funcional; esto posibilitará a Frege considerar las funciones como totalidad y aplicar por consiguiente los cuantificadores apropiados. Así, pues, al menos simbólicamente, se está suponiendo la generalidad del signo funcional. Frege estaba en el camino correcto para haber establecido una jerarquía

2 Para profundizar sobre estas diferencias, que los autores califican de 'dramáticas', véase Boolos y Jeffrey 1974, 197ss. También Shapiro 1991, principalmente los capítulos 3 y 4.

funcional, pero el llevar hasta sus últimas consecuencias la dicotomía entre objeto y función, no se lo permitió.[3] En cualquier caso, lo que sí admite con claridad Frege es que hay conceptos bajo los cuales no caen objetos propiamente dichos, sino conceptos, y éstos serán los conceptos de segundo nivel. El paso siguiente lo va a dar Russell, quien coincide con Frege en admitir variables de objeto y función, pero el inglés va más allá y distinguirá: cada función posee su propio campo de significación, a saber, el conjunto de los argumentos que la hacen verdadera o falsa. Es más, los valores que no pertenezcan a ese campo hacen la proposición asignificativa: más bien la convierten en una pseudoproposición.[4] Éstas y otras observaciones condujeron a Russell a establecer una jerarquía funcional, plasmada en la teoría de tipos, pero hay que advertir que dicha teoría se encuentra a la base de la doctrina de Frege. No obstante, será en el libro de Hilbert y Ackermann de 1928, *Elementos de lógica teórica*, donde tenga lugar la aparición oficial de la lógica de segundo orden, e incluso la nomenclatura que se utiliza en la actualidad.

En lo que resta de este parágrafo quisiera contraponer con brevedad ambas lógicas, deteniéndome en los *desiderata* ya clásicos para todo sistema formal. Comenzaré con la cuestión de la decidibilidad. Como es conocido, la lógica de primer orden permite la formalización de gran parte de la matemática, aunque a costa de grandes rodeos por la teoría de conjuntos [Mosterín, 1979 v-vi]. La lógica de segundo orden, en cambio, permite una formalización mucho más potente, y además evita el paso por la teoría de conjuntos. Dicho de otro modo, la lógica de segundo orden tiene mayor potencia expresiva que la de primer orden. Pero también es conocido que la potencia expresiva de un sistema y su decidibilidad están en razón inversa: a mayor capacidad para abarcar más teorías, mayores son las limitaciones que presenta para encontrar un algoritmo adecuado capaz de determinar si un enunciado es o no consecuencia de otros.

Esto es lo que ocurre en el caso que nos ocupa: la lógica de segundo orden tiene mayor potencia expresiva que la de primer orden, pero en cambio arrastra el inconveniente de ser mucho más difícil de manejar desde el punto de vista algorítmico. Y todo esto tiene su traducción

3 Según Carnap [1937, 138], Frege se equivocó al no extender la clasificación que había establecido para los predicados a las clases correspondientes. En lugar de eso, consideró las clases como objetos individuales, con independencia del nivel y del tipo de predicado que las define.

4 Éste es el segundo error que, a juicio de Carnap, cometió Frege, a saber, que en su sistema todas las expresiones habían de poseer un valor veritativo [*ibid.*].

en una mayor o menor capacidad para ser decidible. Así, es conocido que la lógica de enunciados, e incluso la lógica de predicados monádicos (las más débiles y de menor potencia expresiva) son decidibles. Pero la lógica de primer orden en su totalidad (que posee una mayor potencia expresiva que las anteriores) ya no es decidible, aun cuando el conjunto de todas sus fórmulas válidas sea recursivamente enumerable. En cambio, la lógica de segundo orden no es decidible en absoluto.

Desde el punto de vista de la semántica, es usual clasificar los modelos de los lenguajes de segundo orden en dos tipos. En primer lugar, están los modelos estándar, o sea, aquéllos en los que la cuantificación sobre variables o conjuntos no está restringida, y por tanto pueden intervenir todos los subconjuntos posibles; dicho de otro modo, el dominio de las variables predicativas susceptibles de cuantificación es el conjunto potencia en su totalidad. En segundo lugar, tenemos los modelos no-estándar, en los que no se da esta característica, y sólo se consideran algunos subconjuntos, no todos.[5]

Se presenta como una ventaja respecto a la lógica de segundo orden el hecho de que la lógica de primer orden verifique teoremas tan prolíficos y de tan gran aplicabilidad como los de compacidad y de Lowenheim-Skolem en sus diferentes versiones.[6] Como es conocido, el teorema de compacidad dice que si G es un conjunto de fórmulas, tal que todo subconjunto finito tiene un modelo (es satisfacible), entonces todo el conjunto posee un modelo (es satisfacible).[7]

Por otra parte, el teorema de Lowenheim-Skolem se presenta habitualmente en dos versiones. Una de ellas (descendente) asegura que todo modelo de un conjunto de fórmulas de primer orden posee al menos un submodelo cuya cardinalidad es al menos la de N, o sea, que es enumerable. La otra (ascendente) dice que si un conjunto de fórmulas de primer orden es tal que para todo número natural n tiene un modelo cuyo dominio sea mayor o igual que n, entonces para cualquier cardinal k infinito, existe un modelo cuyo cardinal es mayor o igual que k.

5 Shapiro incluye todavía un tercer modelo, la denominada semántica de primer orden, que, a su juicio, es la misma que la de Henkin [Shapiro 1991, 73 ss., especialmente p.76].

6 El hecho de que la lógica de primer orden posea estas fructíferas características es lo que le lleva a sugerir a Tharp que *ceteris paribus*, dicha lógica es preferible. Sin embargo, los criterios para justificar semejante elección distan mucho de estar clarificados [Tharp 1975, 17 ss.].

7 La aplicación de este teorema fue lo que permitió a Robinson rescatar de algún modo los infinitésimos y crear el análisis no estándar. También permite dar modelos no-standard de otras partes de la matemática como de la aritmética de Peano [Robinson 1966, 49 ss.].

Así pues, según estos dos últimos teoremas, resulta que ninguna teoría de primer orden con un modelo infinito es categórica. Es más, cualquier conjunto de fórmulas que tenga un modelo infinito, posee un modelo para cualquier cardinalidad infinita. Por consiguiente, los lenguajes de primer orden no son adecuados para caracterizar estructuras infinitas, puesto que si M es una estructura de dominio infinito, y si G es un conjunto de enunciados de primer orden satisfechos por M, entonces, por los teoremas de Löwenheim-Skolem citados, para todo cardinal infinito k hay una estructura de cardinal k, que es un modelo de G.

Contemplados estos resultados desde la perspectiva que aquí nos interesa, esto significa que, como quiera que las estructuras básicas de las matemáticas sólo conciernen a dominios infinitos (el análisis es una sinfonía del infinito, como dijera Hilbert), no pueden ser expresadas en lenguajes de primer orden. Así pues, visto desde nuestra óptica, esta característica de los lenguajes de primer orden que se presenta como ventajosa, es, según Shapiro, más bien un defecto, que no poseen los lenguajes de segundo orden con semántica estándar. La mayor parte de las estructuras básicas de la matemática son categóricas si se expresan en un lenguaje de segundo orden. Es lo que ocurre, por ejemplo, con la aritmética de Peano, el análisis real y la teoría de conjuntos [Shapiro 1991, 80 *ss*.]

Como se verá a lo largo de este trabajo, es en el asunto de la completud donde parece estar el *quid* de la cuestión. Gödel [1930] estableció que la lógica de primer orden es completa. En cambio, la lógica de segundo orden es incompleta e incompletable, como también demostró el propio Gödel en 1931. En principio —como ponen de manifiesto algunos autores— es este desiderátum el que se persigue al teorizar. Para otros, en cambio, habrá que superar este prejuicio y acostumbrarse a convivir con sistemas incompletos. En cualquier caso, esto parece ser lo que se va buscando en una teoría: el que sea capaz de decidir sobre el carácter de teorema de todas las fórmulas bien formadas del sistema. Como esta cuestión va a reaparecer en lo que sigue no me detengo más aquí.

3. Quine, el origen de la discusión

El debate actual sobre la conveniencia de utilizar o no lenguajes de segundo orden (así como su status) afecta, al menos indirectamente, al quehacer del matemático, y tiene su origen remoto en Frege y Russell, tal y como hemos indicado. Su origen próximo se encuentra en Quine.

Una vez más, son las opiniones de este filósofo las que están condicionando gran parte del desarrollo actual en filosofía de las matemáticas, compartiendo así protagonismo con Benacerraf. En este apartado, vamos a extractar las principales ideas de Quine al respecto; más tarde comentaremos la posición de algunos de sus críticos, en especial, la de Boolos.

Creo que en esta cuestión —al igual que en otras— la actitud de Quine es consecuente con el resto de sus planteamientos. Se trata en este caso de llevar hasta sus últimas consecuencias su ya célebre de que 'ser es ser el valor de una variable'. Como quiera que, a su juicio, las letras predicativas no tienen semejante rango (de variables), su uso tras los cuantificadores constituye más bien un abuso de lenguaje que Quine no puede admitir. Pero todo este planteamiento merece un análisis más pormenorizado.

La filtración perniciosa de la lógica de segundo orden en la matemática se produce, según Quine, a través de la inocente teoría de conjuntos. No en balde es frecuente encontrar en los textos de matemáticas una apoyatura nada despreciable en dichas teorías. Con objeto de clarificar su posición respecto a los conjuntos y a la lógica de segundo orden, conviene comenzar indicando la relación asimétrica que, según Quine, guardan con respecto a la lógica, la teoría de la identidad y la teoría de conjuntos. La conclusión a la que llegará es que, mientras la primera de esas teorías pertenece a la lógica, es decir, que no es sino un capítulo más de la lógica, semejante situación no se da en el caso de la segunda, y habrá que encardinarla en el terreno de lo matemático. Una de las razones que Quine halla para justificar su primera aserción es que la teoría de la identidad es, en primer lugar, al igual que la lógica pura, una teoría completa, como demostrara Gödel en 1930 [Quine 1970, 112 *ss.*].[8]

Nada de esto ocurre, a juicio de Quine, con la teoría de conjuntos. Taxativamente indica que no pertenece a la lógica; lo que ocurre es que la teoría de conjuntos aparece disfrazada, aparece enjaezada con un ropaje de lógica de orden superior. Este disfraz origina uno de los

8 Otra razón que Quine encuentra aún más concluyente es la posibilidad de que la identidad sea definida en función del aparato lógico de variables y letras predicativas del sistema en cuestión. Cuando el número de éstas es finito, el plan de la definición, observa Quine, es sencillamente el agotamiento de todas las combinaciones posibles; en ocasiones, observa, también es posible establecer esta definición incluso cuando el lenguaje en cuestión cuente con un número infinito de predicados [1963, 13]. De esta manera, las leyes de la identidad son meras abreviaturas de verdades lógicas y por consiguiente fácilmente reducibles [Quine 1970, 114-115].

más célebres aforismos de Quine: sólo en apariencia la teoría de conjuntos parece lógica, la lógica de segundo orden no es sino matemática disfrazada, por eso —dice Quine— la teoría de conjuntos aparece revestida 'con piel de cordero' [*set theory in sheep's clothing*]. Esta estricta distinción entre lógica y teoría de conjuntos es una idea que Quine continúa manteniendo en sus escritos más recientes. Aparte de que la lógica —al contrario que la teoría de conjuntos— no tiene ni objetos ni predicados propios, lo que, a juicio de Quine, acentúa más la diferencia es el hecho de que la lógica, entendida como él lo hace (o sea, como lógica de primer orden) admite procedimientos de prueba completos [Quine 1998, 64].

Pero antes que nada hay que señalar algunas observaciones que Quine hace acerca de los conjuntos y la problemática subsiguiente a su introducción. De entrada, observa, hay varias teorías de conjuntos, diferenciadas no sólo por su formulación, sino también por su contenido, o lo que es lo mismo, por el establecimiento de los conjuntos cuya existencia se afirma. Es más, como quiera que no hay una formulación canónica de los conjuntos, ninguna teoría de conjuntos prevalece sobre las demás, y todas las teorías que se presenten han de ser permanentemente comparadas entre sí.[9] El status que se otorgue al esquema de abstracción, $\{x:Fx\}$, es fundamental, puesto que según se sea de generoso con él, podrán aparecer en la teoría mayor o menor cantidad de conjuntos. Por ejemplo, en ocasiones convendrá una limitación de la posibilidad de sustitución de la letra predicativa F, tal como ocurre en el caso de la formulación de una teoría que pretenda evitar los paradojas. En cualquier caso, piensa Quine que las apariciones de este esquema resultan fácilmente eliminables mediante paráfrasis,[10] con lo cual no pueden considerarse como parte esencial de la teoría de conjuntos en cuestión, quedándose convertidas en meras abreviaturas.

Los logicistas clásicos no tuvieron duda por el contrario, según Quine, de que la teoría de conjuntos quedaba incluida en el campo de la lógica pura. Como es conocido, Frege llegó a pensar incluso que había demostrado que las verdades de la matemática son analíticas, y que la matemática se reduce en definitiva a la lógica; lo que ocurre,

9 Entre las diferentes alternativas de definición, Quine prefiere la que considera a la teoría de conjuntos integrada por un lenguaje normado, al que se añade el símbolo de pertenencia. La otra alternativa supone entender el símbolo de pertenencia como predicado en lugar de partícula [Quine 1970, 84].

10 Esto, según el propio Quine, no siempre puede llevarse a cabo con éxito. Así, es posible eliminar el esquema de abstracción en la fórmula '$y\in\{x:Fx\}$'. En cambio, la simulación de conjuntos no permite la eliminación para el caso de la expresión '$\{x:Fx\}\in$' [Quine 1970, 124].

según Quine, es que la lógica capaz de llevar a cabo semejante reducción contiene ya a la teoría de conjuntos.[11] Quine entiende que existen razones históricas que justifican el que algunos lógicos resultaran engañados por el disfraz con que se presenta la teoría de conjuntos. A su juicio, el que en algún momento concreto se haya asimilado la teoría de conjuntos a la lógica, proviene de la consideración del símbolo de pertenencia como un predicado sin más; o como puntualiza el propio Quine, de "la sobrestimación de parentesco entre '∈' y los predicados" [Quine 1970, 118]. El problema surge cuando entre ambos se desliza subrepticiamente la noción intermedia de atributo, tan indeseable para Quine como la de proposición.

En definitiva, según Quine, a partir de la expresión Fx —inocente en su apariencia— F es ascendida a la categoría de nombre. Es decir, que sin explicación alguna, se pasa de *algo que se encuentra en el lugar de un predicado* (subraya el propio Quine), al estatuto de nombre, a algo que nombra a un predicado aún sin precisar. Esto, que en última instancia no es sino la confusión entre uso y mención, provoca que la expresión Fx acabe siendo traducida como 'x tiene F'. Éste, según Quine, fue el proceso mental que siguió, por ejemplo, Frege. De manera consciente, consideró a F como nombre propio, en vez de mero esquema, o sea, en vez de algo que se encuentra en el lugar de un predicado por precisar. Pero, a juicio de Quine, no todos los lógicos fueron atributoadictos al mismo nivel que Frege. Los hubo confundidos (Russell entre ellos) que, en lugar de considerar a F como mero esquema lo ascendieron de atributo a nombre. De esta manera, ante la cuantificación sobre variables predicativas los atributoadictos pueden hablar de cuantificación sobre atributos, sin más; los confundidos, por su parte, pueden decir que esas entidades, los valores de F, son predicados, sin constatar la diferencia entre simulación esquemática de predicados y discurso cuantificacional sobre predicados [Quine 1970, 118].

Este error tiene un doble origen, según Quine. En primer lugar, resulta de una inadecuada interpretación de los cuantificadores; y, en segundo lugar, surge cuando se eleva a las variables predicativas por encima del estatuto de mero esquema [Quine 1970, 119-120]. Comenzando por el segundo, hay que decir que expresiones como $(\forall F)$ o como $(\exists F)$, en las que aparecen variables predicativas tras los cuantificadores, no afirman que todos o algunos predicados —como entidades— sean de tal o cual modo, sino más bien que todas o algunas

11 Hay acuerdo general en este punto. Pese a las diferencias, no puede decirse que Frege y Russell distinguieran entre lógica de primer orden y lógica de orden superior, en ambos casos se trata de lógica, sin más calificativos [Nepomuceno 1990, 56].

según Quine, es que la lógica capaz de llevar a cabo semejante reducción contiene ya a la teoría de conjuntos.[11] Quine entiende que existen razones históricas que justifican el que algunos lógicos resultaran engañados por el disfraz con que se presenta la teoría de conjuntos. A su juicio, el que en algún momento concreto se haya asimilado la teoría de conjuntos a la lógica, proviene de la consideración del símbolo de pertenencia como un predicado sin más, o como puntualiza el propio Quine, de "la sobrestimación de parentesco entre '∈' y los predicados" [Quine 1970, 118]. El problema surge cuando entre ambos se desliza subrepticiamente la noción intermedia de atributo, tan indeseable para Quine como la de proposición.

En definitiva, según Quine, a partir de la expresión Fx —inocente en su apariencia— F es ascendida a la categoría de nombre. Es decir, que sin explicación alguna, se pasa de *algo que se encuentra en el lugar de un predicado* (subraya el propio Quine), al estatuto de nombre, a algo que nombra a un predicado aún sin precisar. Esto, que en última instancia no es sino la confusión entre uso y mención, provoca que la expresión Fx acabe siendo traducida como "x tiene F". Éste, según Quine, fue el proceso mental que siguió, por ejemplo, Frege. De manera consecuente, consideró a F como nombre propio, en vez de mero esquema, o sea, en vez de algo que se encuentra en el lugar de un predicado por precisar. Pero, a juicio de Quine, no todos los lógicos fueron atributoadictos al mismo nivel que Frege. Los hubo confundidos (Russell entre ellos) que, en lugar de considerar a F como mero esquema lo ascendieron de atributo a nombre. De esta manera, ante la cuantificación sobre variables predicativas los atributoadictos pueden hablar de cuantificación sobre atributos, sin más; los confundidos, por su parte, pueden decir que esas entidades, los valores de F, son predicados, sin constatar la diferencia entre simulación esquemática de predicados y discurso cuantificacional sobre predicados [Quine 1970, 118].

Este error tiene un doble origen, según Quine. En primer lugar resulta de una inadecuada interpretación de los cuantificadores; y, en segundo lugar, surge cuando se eleva a las variables predicativas por encima del estatuto de mero esquema [Quine 1970, 119-120]. Comenzando por el segundo, hay que decir que expresiones como $(\forall F)$ o como $(\exists F)$, en las que aparecen variables predicativas tras los cuantificadores, no afirman que todos o algunos predicados —como entidades— sean de tal o cual modo, sino más bien que todas o algunas

11 Hay acuerdo general en este punto. Pese a las diferencias, no puede decirse que Frege y Russell distinguieran entre lógica de primer orden y lógica de orden superior; en ambos casos se trata de lógica, sin más calificativos [Nepomuceno 1990, 56].

entidades de cierta especie, que son nombradas por los predicados en cuestión, son de tal o cual modo. Dicho de otra manera, en la expresión *Fx*, *F* sólo está indicando un lugar para un predicado, pero en modo alguno puede considerarse a partir de aquí que haga referencia a predicados. Es decir, no puede entenderse que *F* sea una variable de atributo y que se pueda decir sin impunidad que *Fx* es traducible por '*x* tiene un *F*'. Pero en la base de esta confusión se encuentra asimismo una interpretación incorrecta de la propia cuantificación. Para Quine esta confusión nace al establecer un paralelismo entre la cuantificación que afecta a individuos con la que afecta a variables predicativas. Cuando se dice que '$(\exists x)$(x es primo)', por ejemplo, no se está diciendo que sean nombres propios los que son primos, sino más bien que lo que son primos son *cosas* que podrían ser nombradas *por* nombres propios colocados en las posiciones de x. En cambio, cuando la cuantificación afecta supuestamente a variables predicativas se les está confiriendo un estado que Quine no puede admitir, a saber, el de posiciones de nombre propio; de esta manera, dice, los predicados acaban considerándose nombres propios de entidades.

El propio Quine encuentra una salida a esta situación. Cabría argumentar, indica, que en última instancia los valores de esas variables cuantificadas son conjuntos. En eso se mostraría de acuerdo: intensionalmente hablando (si se admitieran las intensiones, lo que Quine no hace) los predicados no son sino atributos, mientras que desde un punto de vista extensional son conjuntos. Pero, en cualquier caso —y aquí está la cuestión— no son nombres ni de atributos ni de conjuntos, y por consiguiente no pueden ser nombres propios susceptibles de ser asumidos por una variable. En resumen, para Quine, las variables afectadas por los cuantificadores en modo alguno pueden ser predicados, puesto que sólo le corresponden las posiciones de nombre propio [Quine 1970, 120].

Como ya he indicado, desde un punto de vista histórico, la primera aparición del término 'segundo orden' tiene lugar en 1928, en el clásico texto de Hilbert y Ackermann. En cierto sentido, como apunta Quine, tanto ellos como sus seguidores no hicieron más que continuar el camino iniciado por Russell, incrementando la 'analogía' y vinculando aún más estrechamente la lógica y la teoría de conjuntos.

Por otra parte, y desde un punto de vista ingenuo, ha de reconocerse que no hay una sustancial ampliación ni novedad en hacerlo así; bastaría con admitir la cuantificación sobre variables predicativas. Se trataría, en definitiva, sólo de extender el ámbito de lo cuantificable. Es decir, esta, en principio, inocua simetría favorece la extensión de los lenguajes sin posterior cuestionamiento, aún más, con este proceder parecen incluso obviarse las cuestiones ontológicas relativas a los conjuntos admisibles, incluidos los más peligrosos, o sea, los que provocan las paradojas.

Pero, como es obvio, Quine no lo entiende así, y muestra un caso en el que esta dudosa extensión resulta peligrosa. En concreto, como se sabe, el axioma de abstracción

$$(\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow Fx)$$

resulta esencial para la teoría de conjuntos, puesto que es, en última instancia, el que determina y selecciona qué conjuntos van a admitirse o no en una teoría de conjuntos. Dicho axioma presupone el conjunto $\{x : Fx\}$ determinado por una oración abierta en el papel de Fx. Esta oración habrá de ser restringida si se quiere evitar las paradojas: por ejemplo, si se permite que '$Fx \leftrightarrow_{df} x \notin x$' aparece la paradoja de Russell. En cambio, en un lenguaje no conjuntista, la 'presuposición' de la clase y queda obviada, podría decirse enmascarada, por la introducción de una variable predicativa [Quine 1970, 84]. Así, en la lógica de segundo orden este esquema no obliga a restricciones de ningún tipo porque se transformaría en '$(\exists G)(\forall x)(Gx \leftrightarrow Fx)$'.

4. La crítica de Boolos

Boolos es uno de los primeros y más citados críticos de estos planteamientos de Quine. No obstante, coincide con él en la necesidad de aclarar dos confusiones con las que, por otra parte, y en su opinión, es fácil estar de acuerdo: la primera de ellas es la de suponer que expresiones como $(\exists F)$ y $(\forall F)$ dicen que algunos o todos los predicados sean de tal y cual manera; la segunda es que la cuantificación sobre atributos posee ventajas ontológicas relevantes sobre la cuantificación sobre conjuntos. Pero Boolos va más allá que Quine, y admite que los enunciados de segundo orden pueden hacerse inteligibles sin necesidad de comprometernos con la dudosa existencia de las clases. Para conseguirlo, bastará con efectuar una traducción de dichos enunciados al lenguaje ordinario, utilizando para ello cuantificadores plurales. A su juicio, el uso de estos cuantificadores no sólo no compromete con clases, sino que tampoco lo hace con nada a lo que no nos hubiéramos ya comprometido con el uso de los cuantificadores sobre individuos. Por consiguiente, concluirá con rotundidad, el uso de la lógica de segundo orden no compromete con clases y Quine está equivocado: no puede decirse que la lógica de segundo orden sea teoría de conjuntos con piel de cordero.

Aunque su propuesta tiene ciertos aspectos positivos,[12] yo quisiera detenerme aquí sólo en tres puntos que considero fundamentales en su crítica a Quine. En primer lugar, en la revisión que hace del proceso de 'nominalización' rechazado por Quine; en segundo lugar, en la imposibilidad de traducción al lenguaje conjuntista, tal como propone Quine. Por último, quisiera referirme a la necesidad de utilizar lenguajes de segundo orden no sólo en el ámbito de la matemática, sino también en el lenguaje ordinario.

Un primer asunto que merece la crítica de Boolos no es tanto el rechazo por parte de Quine a la nominalización de los predicados, como la subsiguiente imposibilidad de que éstos puedan aparecer tras los símbolos de cuantificación [Boolos 1975, 511]. Lo que, a su juicio, parece estar suponiendo Quine es que las variables individuales gozan de un cierto privilegio por el mero hecho de ser las que habitualmente se dan en posiciones en las que puede aparecer un nombre. Boolos no admite la actitud restrictiva de Quine de que eso mismo deba ocurrir con cualquier otro tipo de variable, es decir, que para que un símbolo pueda aparecer tras un signo de cuantificación deba ser un nombre de algo, lo que no ocurre en el caso de los predicados. Según Boolos, el error de Quine consiste en extrapolar este hecho, y suponer que en la misma circunstancia se encuentra cualquier otro tipo de variable. Es posible —piensa Boolos— que poner F en la posición de un predicado pueda ser considerar a F perteneciente a un cierto dominio, pero esto no obliga a tratar las posiciones de predicado como posiciones de nombres, ni tampoco a tratar a los predicados como nombres de entidades de cualquier tipo. La expresión $(\exists F)$ no ha de entenderse en el sentido de que algunas entidades del tipo que nombran los predicados son tal y cual; más bien, se debe tomar como diciendo que algunas de las entidades tenidas por predicados contienen tal y cual. Por consiguiente, concluye Boolos, algunas variables elegidas para la cuantificación pueden muy bien aparecer en posiciones de predicado, y no en posiciones de nombres. Y considerar que Fx es verdadera si y sólo si lo que nombra x está en la extensión de F, en modo alguno nos compromete con la suposición de que F nombre a algo en absoluto [Boolos 1975, 511].

Otro aspecto que, como he indicado, Boolos rechaza de Quine es la alternativa que éste ofrece a presentar la relación de pertenencia de conjuntos como una relación entre predicado y variable. Es decir, que en vez de cuantificar sobre variables predicativas como F, pudiera cuan-

12 Por ejemplo, Boolos ofrece una interesante aproximación a la noción de validez en la lógica de segundo orden [Boolos 1975, 513 ss.].

tificarse sobre conjuntos [Quine 1970, 120]. En este punto, señala Boolos (1975, 512), la oposición ha de ser mayor, si cabe, puesto que escribir las fórmulas de segundo orden al estilo que Quine propone (utilizando conjuntos en vez de letras predicativas) conduciría a notables pérdidas a las que resulta problemático renunciar. En efecto, algunas fórmulas que resultan válidas expresadas en un lenguaje de segundo orden no lo son cuando se escriben en términos conjuntistas. Es lo que ocurre con la expresión '$(\exists F)(\forall x)(Fx)$', que es válida, mientras que su trasunto en lenguaje conjuntista: '$(\exists \alpha)(\forall x)(x \in \alpha)$', no lo es. Algo parecido ocurre con respecto a la implicación: una expresión como '$x = y$' está implicada por '$\forall Y(Yx \rightarrow Yy)$', pero en cambio no lo está por '$\forall \alpha(x \in \alpha \rightarrow y \in \alpha)$'.

Por último, y respecto al tercer punto que quiero considerar, ha de advertirse que Boolos rechaza el planteamiento quineano, no sólo desde el punto de vista de las matemáticas, sino también desde el de la propia lógica, entendida como instrumento de simbolización del lenguaje ordinario. Boolos constata que hay una gran variedad de construcciones cuantificacionales y referenciales del lenguaje natural que no pueden representarse en la notación lógica estándar (de primer orden). Pero también se da el recíproco, es decir, algunos enunciados que parece natural representarlos en lenguaje de segundo orden resultan 'sorprendentemente' equivalentes a fórmulas de un lenguaje de primer orden. A lo largo de sus trabajos,[13] Boolos proporciona varios ejemplos de uno y otro tipo; yo quisiera detenerme en uno de cada clase.

Respecto al primer tipo de enunciados (los que no pueden ser capturados por un lenguaje de primer orden), tomaré uno de los ejemplos más conocidos y citados: el enunciado de Geach-Kaplan.[14]
Su expresión habitual es:

"Some critics admire only one another",

que podríamos traducir por:

(A) "Algunos críticos sólo se admiran mutuamente"

Se supone que esto significa tres cosas: 1) que hay un conjunto no vacío de críticos; 2) que ninguno de ellos se admira a sí mismo, y 3) que cada uno de ellos admira a otro de la colección. Dicho de otra manera, que si un individuo de esa clase admira a alguien, ese alguien no es él mismo, y además, también pertenece a la clase. Suponiendo que las variables recorren el conjunto de los críticos, la frase (A) se puede expresar

13. En lo que resta del parágrafo seguiré los planteamientos de sus artículos de 1984 y 1975. Ver Referencias.
14. Este enunciado aparece citado por Quine en sus trabajos *Los métodos de la lógica* y "Las raíces de la referencia".

mediante un enunciado de segundo orden, que, traducido simbólicamente, puede expresarse:

(A') $\exists X[\exists x\, Xx \wedge \forall x\forall y[Xx \wedge Axy \rightarrow x \neq y \wedge Xy]]$

Según la prueba del propio Kaplan el enunciado (A') no tiene un equivalente en lógica de primer orden.[13]

Para poner un ejemplo del segundo tipo no tenemos que cambiar de fórmula. Un error del editor transformó la fórmula de Geach-Kaplan lo suficiente como para que pudiera expresarse en un lenguaje de primer orden [Boolos 1984, 439]. La formulación original se transformó, por el diablo de la imprenta, en:

"Some critics admire only one another and no one else",

que podríamos traducir por:

(B) "Algunos críticos sólo se admiran mutuamente, y no admiran a nadie más",

lo cual significa que hay una colección de críticos, cada uno de los cuales admira a todos y *sólo* a los otros miembros de la colección. Según esto, para dar una adecuada traducción de (B), la fórmula (A') tiene que ser modificada, quedando:

(B') $\exists X\{\exists x\exists y(Xx \wedge Xy \wedge x \neq y) \wedge \forall x[Xx \rightarrow \forall y(Axy \rightarrow (Xy \wedge x \neq y))]\}$

es decir, hay al menos dos elementos que caen bajo X, y que cualquier x de la clase no admira a nadie que no esté en la clase X. Quine indicó en la primera impresión americana de la 3ª edición de *Los métodos de la lógica* que era una fórmula imposible de ser representada en un lenguaje de primer orden. Y aunque parece que (B') es susceptible del mismo tipo de tratamiento que antes, Kaplan observó que esa fórmula es equivalente a la siguiente fórmula de primer orden.

(B'') $\exists z\{\exists y\, Azy \wedge \forall x((z = x \vee Azx) \rightarrow \forall y(Axy \rightarrow (z = y \vee Azy) \wedge y \neq x))\}$

que admite una paráfrasis algo más complicada: hay un z que, en primer lugar, admira a alguien (o sea, la clase de los admirados por ese z es no

13. La demostración se lleva a cabo tomando un modelo en el conjunto de los números naturales, y considerando como predicado binario Axy la expresión "$x = 0 \vee x = y+1$". Así, la fórmula resultante es

$$\exists X[\exists x\, Xx \wedge \forall x\forall y[Xx \wedge x = 0 \vee x = y+1 \rightarrow x \neq y \wedge Xy]]$$

que resulta verdadera en todos los modelos no estándar de la aritmética, pero que es falsa en todos los modelos standard [Boolos 1984, 433] vacía); y además, si x es un individuo idéntico a z o al que z admire, entonces cualquier y a quien ese x admire es distinto de x (ninguno se admira a sí mismo), y además, (ese y) o es z, o es admirado por z.

Estos ejemplos, y otros más que Boolos presenta en su trabajo, le llevan a admitir que la cuestión de si el cálculo de predicados de primer orden con identidad representa adecuadamente la cuantificación, la generalización y la referencia cruzada en el lenguaje natural, 'está lejos de quedar definitivamente establecida' [Boolos 1984, 438].

En resumen, para Boolos, el compromiso ontológico ya lo ejercen suficientemente bien nuestros cuantificadores de primer orden; no es preciso (abusando de la semejanza) tomar cuantificadores de segundo orden como cuantificadores de primer orden disfrazados, y cuyo rango esté formado por colecciones, en vez de por individuos.[16] Y concluye. No es como si hubiera dos tipos de cosas en el mundo, los individuos y las colecciones de ellos, que constituyan respectivamente el dominio de las variables de primer y segundo orden de nuestra teoría, y/o que denoten nuestras formas singulares y plurales, "lo que hay más bien son dos modos diferentes (al menos) de referirnos a las mismas cosas" [Boolos 1984, 449].

5. Las distinciones de Hintikka

Quisiera volver de nuevo, y más directamente, a las cuestiones relacionadas con las matemáticas, deteniéndome para ello en Hintikka, que intenta plantear el problema fundacional desde una nueva perspectiva, que él mismo califica de revolucionaria. En última instancia, va a conectar el uso de lenguajes de orden superior con el problema de la fundamentación, como veremos más adelante que también hace Shapiro.

Según Hintikka, (1997, 157 *ss.*) el esquema que habitualmente se ofrece de los fundamentos de la matemática se sustenta en una doble articulación, que recuerda la estructura de un edificio. Hay, en primer lugar, una planta baja [*ground floor*], representada por la lógica de primer orden, que, si bien es semánticamente completa, no es lo suficientemente fuerte como para capturar ciertas conceptualizaciones de la matemática. El piso superior [*next floor*] de esta edificación lo

16 Resnik reconoce que, si la posición de Boolos fuera correcta, contribuiría —entre otras cosas— a mostrar a los estructuralistas cómo utilizar las caracterizaciones de segundo orden de la jerarquización conjuntista sin temor a caer en planteamientos circulares. Pero, pese a lo atractivo que pueda parecer el punto de vista de Boolos, Resnik mantiene ciertas reservas [Resnik 1988, 76 ss.]

constituye la teoría de conjuntos y/o la lógica de orden superior. Sobre este nivel, y como hemos tenido ocasión de indicar anteriormente, podemos expresar una gran parte de los conceptos matemáticos básicos, a costa —ya se ha dicho— de la completud. Desde este punto de vista, la teoría axiomática de conjuntos continúa siendo el mejor marco general del que se dispone para la teorización matemática.

Es en este segundo nivel en el que se localizan los principales problemas fundacionales. En este sentido, parece que Hintikka centra todas las dificultades de la fundamentación de las matemáticas en la formulación de teorías matemáticas completas, lo que no deja de ser una restricción excesiva. En efecto, no habría serias dificultades si la tarea de estudiar las consecuencias lógicas de determinada teoría matemática pudiera llevarse a cabo por medio de una lógica simple que permitiera una automatización semánticamente completa, esto es, una enumeración recursiva de todas las fórmulas válidas. Pero, aun cuando desde este punto de vista la lógica no resulte problemática, su alcance, según Hintikka, está severamente restringido, tanto por algunas limitaciones importantes —el teorema de incompletud de Gödel, por ejemplo—, como por la imposibilidad de expresar algunos conceptos en una lógica de primer orden.

A juicio de Hintikka, este cuadro, que es el generalmente aceptado tiene, no obstante, una cosa en contra: es erróneo. Y encuentra varias razones para justificar semejante aseveración, dos de las cuales quisiera destacar en este apartado. En primer lugar, se basa en una idea innecesariamente restrictiva de cómo es nuestra lógica básica. En segundo lugar, descansa en un cuadro ambiguo, y consecuentemente equivocado, de lo que significa la completud.

Respecto al primer punto, hay que advertir que las limitaciones restrictivas surgen, a juicio de Hintikka, debido a que no se clarifican adecuadamente los distintos usos de la lógica en la práctica matemática. En cualquier caso, esa articulación resulta obligada, según Hintikka, puesto que la lógica de primer orden —como ya pusiera de manifiesto Frege en su intento de explicación logicista—[17] no permite dar un marco satisfactorio en el que situar la matemática. Y ello por doble motivo [Hintikka 1997, 155 ss.]. La lógica de primer orden se muestra insuficiente para esta tarea, puesto que muchos conceptos básicos de las matemáticas no pueden expresarse en ella; hemos tenido ocasión de ver con anterioridad algunos ejemplos. Pero, además, tampoco es auto-

17 Por ejemplo, bajo el concepto "Equinumérico con el concepto *F*" no caen objetos sino conceptos. Es, por tanto, un predicado de *segundo* orden.

suficiente: ni la teoría de modelos de un lenguaje de primer orden, ni la de un sistema axiomático de primer orden pueden formularse en términos de primer orden.

Hay que observar que la aproximación de Hintikka difiere un tanto del planteamiento habitual de presentar la matemática, puesto que, a su juicio, el núcleo del pensamiento matemático no es la teoría de conjuntos, es decir, que podemos en principio, prescindir de todo lo conjuntista.[18] Como alternativa, piensa Hintikka que el pensamiento matemático puede (quizá debería) pensarse como combinatorio, tratando con estructuras de objetos particulares, en concreto con configuraciones posibles o imposibles.

Aunque sea brevemente, quisiera esbozar la propuesta lógica de Hintikka.[19] En definitiva la teoría de la cuantificación es esencialmente el estudio de la interacción de diferentes cuantificadores, su dependencia y su independencia. Una de las instancias más simples de un modelo no expresable en la lógica ordinaria de primer orden la constituyen las denominadas fórmulas cuantificacionales de Henkin, que se expresan mediante un cuantificador ramificado de dos dimensiones. Dichas fórmulas pueden expresarse en un lenguaje de segundo orden, pero se pueden parafrasear adecuadamente para ser escritas en un lenguaje lineal de primer orden, utilizando para ello un símbolo de independencia cuantificacional. Esto es lo que Hintikka llama lógica de primer orden de amistosa independencia [*independence friendly first-order logic, IF*], cuyo uso tiene sus ventajas pero tampoco está exento de inconvenientes.

Pero, aun cuando la matemática ordinaria pueda enmarcarse en el ámbito de la lógica *IF* extendida, o en el de algún segmento de la lógica de segundo orden, cabe preguntarse qué sentido tiene adentrarse en las complejidades de la lógica de segundo orden en su totalidad. Para justificar esa complicación, innecesaria en apariencia, Hintikka apela a los diversos usos que tiene la lógica en sus aplicaciones, y de manera especial, en sus aplicaciones en las matemáticas, y distingue dos [1997, 167 ss.]. En primer lugar, un uso descriptivo, consistente en la especificación del tipo de estructura que el matemático (o el científico) quiere estudiar. Una de las pretensiones en este caso es la formulación de un sistema axiomático descriptivamente completo. Esta función descriptiva de la lógica podría llamarse su función teorética, y es la que justifica, por ejemplo, el uso de cuantificadores y otras

18 Semejante propuesta se ha alejado [illegible] es criticada de algunos expertos actuales como el de Maddy, por ejemplo.

19 Un desarrollo más sistemático y completo se encuentra en su libro de 1996, citado en las referencias.

constantes lógicas en los axiomas de una teoría matemática o científica. En segundo lugar, un uso deductivo, mediante el cual los conceptos lógicos son utilizados para estudiar las relaciones inferenciales válidas entre enunciados. Esta función podría llamarse computacional o explicativa de la lógica en teorías axiomáticas.

Hecha esta distinción, se observa que las tareas descriptivas en matemáticas pueden llevarse a cabo satisfactoriamente por medio de la lógica de primer orden. Este cometido se sitúa de manera destacada en el nivel de la teorización, sea ésta matemática, científica o filosófica. Pero de aquí no se deduce que la tarea deductiva pueda también ser desempeñada por esta lógica. Van a ser, pues, los aspectos inferenciales, deductivos y computacionales del quehacer del matemático los que nos fuercen a considerar lógicas de orden superior. Lo que estos aspectos computacionales permiten es la extracción de consecuencias en una teoría que ya ha sido bien formulada, y cuya estructura ha sido previamente capturada por la teoría. Por consiguiente, advierte Hintikka, el uso de las lógicas de orden superior pertenece a la tecnología de la lógica, más que a su teoría.

Pero hay, como hemos indicado, una segunda razón por la que Hintikka considera inadecuado el esquema habitual de la fundamentación de la matemática, a saber, una defectuosa comprensión de lo que es la completud. Es un hecho que, con independencia de que se recurra o no como base a la teoría de conjuntos, las axiomatizaciones de las teorías matemáticas no triviales de primer orden son inevitablemente incompletas.

Así pues, cualquier intento de extender significativamente la lógica de primer orden (ya sea la propuesta *IF* de Hintikka, o cualquier otra) conserva el principal inconveniente que presenta la lógica de segundo orden: la incompletud. Es imposible dar una lista de axiomas a partir de los cuales puedan derivarse mediante reglas puramente formales todas las fórmulas válidas. Pero lejos de ser un defecto, indica Hintikka, esta característica puede convertirse en un enérgico recordatorio del hecho de que la noción de completud tradicionalmente utilizada en la fundamentación de la matemática es un revoltijo, aunque quizá no un revoltijo irremediable.

Como Hintikka pone de manifiesto [1996, 91 *ss.*; 1997, 157 *ss.*], hay tres nociones distintas, o mejor tres sentidos diferentes de completud e incompletud, que se aplican a otros tantos tipos de teorías. Hay, en primer lugar, una completud descriptiva, que se aplica a los sistemas axiomáticos no lógicos. Significa que los modelos del sistema incluyen todos (y sólo) los modelos que se pretenden. Ésta es una noción teorético-modélica en el sentido de que sólo las nociones de verdad y validez están implicadas en ella. Es precisamente en este sentido en el que Euclides y Hilbert trataron de axiomatizar la geometría. En segundo lugar está la completud semántica, mediante la cual se afirma que una determinada axiomatización efectúa una enumeración recursiva de todas las fórmulas válidas; es decir, que todos los enunciados válidos del lenguaje subyacente se pueden obtener como teoremas a partir de los axiomas mediante las reglas de inferencia establecidas. Y por último hay una completud deductiva, que es una propiedad de un sistema axiomático no lógico, junto con una axiomatización de la lógica subyacente; dice que para cualquier enunciado *p* del lenguaje en cuestión, se puede probar a partir de los axiomas del sistema, o bien *p*, o bien $\neg p$.[20]

Las diferencias entre estas tres nociones pueden ilustrarse si se aplican, por ejemplo, al teorema de incompletud de Gödel. Está claro que el teorema establece la incompletud de la aritmética de primer orden, pero cabe preguntarse, según Hintikka, en qué sentido. A su juicio, lo que Gödel ha mostrado es la incompletud deductiva de la aritmética, pero ésta no es la única posibilidad para la incompletud, y se refiere más a la manipulabilidad computacional de las pruebas, que a su poder para capturar las estructuras adecuadas. Esta última capacidad aparece más bien en la completud e incompletud descriptiva, no en la deductiva. Así surge la pregunta del millón: ¿implica el resultado de Gödel la incompletud descriptiva de la aritmética? Un análisis más atento prueba que sólo lo hace si la lógica subyacente es semánticamente completa. Por supuesto, la lógica que subyacía, la lógica ordinaria de primer orden, es completa, como había ya probado el propio Gödel. Pero no hay nada en el resultado de Gödel que excluya la posibilidad de que, usando alguna otra clase de lógica, pudiéramos formular una axiomatización descriptivamente completa de la aritmética elemental.

Así pues, entre restringir la potencia expresiva del sistema para conseguir la completud, y arriesgarse a que algunas fórmulas no puedan ser demostradas en nuestros sistemas axiomáticos, Hintikka parece decantarse por lo segundo.

20 Todavía puede incluirse, a juicio de Hintikka, un cuarto sentido del término con relación a los sistemas axiomáticos no lógicos. Es lo que denomina completud hilbertiana, que viene a ser una suposición maximalista. Dice que un sistema es completo en este sentido si no pueden añadirse nuevos objetos geométricos (en el caso de la geometría, naturalmente) sin que se violen los restantes axiomas del sistema [Hintikka 1996, 92]

6. La posición de Shapiro

Shapiro es en la actualidad uno de los más destacados defensores del uso de los lenguajes de segundo orden en la práctica matemática. Y aunque su exposición ofrece una considerable dosis de técnica, siguiendo la línea directriz de este trabajo, quisiera detenerme en algunas consideraciones puramente filosóficas de su propuesta. En particular, desearía comentar el sesgo semántico de su justificación para introducir los lenguajes de segundo orden, así como su crítica a Quine. Todo ello sin olvidar una distinción —no exenta de críticas— que Shapiro establece entre fundamentos y fundacionismo.

Ha de advertirse que Shapiro se adhiere a una posición que es mantenida en la actualidad por algunos autores (Echeverría, Tymoczko, Kitcher, etc.) y que reconoce como anticuados —si no fracasados— los programas fundacionales. Y aunque quizá cabrían matizaciones a esta afirmación, puede admitirse una renuncia generalizada al fundacionismo en el sentido del término que ya se conceptúa como clásico, a saber, el de la concepción heredada iniciada por Frege que asocia filosofía de la matemática con la búsqueda de fundamentos. Así, según Shapiro, esta situación no obliga de manera categórica a renunciar a la búsqueda de unos fundamentos de la matemática, si bien esta empresa habría que llevarla a cabo en un sentido distinto al que acabamos de tildar como clásico. En última instancia, su propuesta pretende ofrecer una perspectiva de la práctica matemática que no se desarrolle desde un punto inconmovible, sino que proporcione al matemático una visión *informal* de lo que constituye el objeto de la práctica matemática, todo ello en el seno de un marco referencial que permita la relación entre teorías. En resumen, para Shapiro, los términos 'fundamentos' y 'fundacionismo' no son equivalentes, y pueden hacerse compatibles a través del estudio de la lógica de segundo orden.

Desde el punto de vista que aquí nos interesa, un fundacionista a la antigua usanza, como quiera que no busca más que un punto arquimédico consistente, sólo aceptaría una lógica de primer orden, puesto que cumple los *desiderata* exigibles para una fundamentación 'definitiva'. Este hecho, según Shapiro, "descalifica para muchos la lógica de segundo orden para los estudios fundacionales" [1991, vii]. Pero, pese a su reconocida incompletud, insiste Shapiro, la lógica de segundo orden proporciona un modelo más adecuado para explicar satisfactoriamente el hecho de la práctica matemática. La conclusión a la que llegará es que (de acuerdo con Bernays, Hilbert y Zermelo, y en desacuerdo con Gödel y Skolem) ningún lenguaje de primer orden es suficiente para axiomatizar ramas tales como la aritmética, el análisis o el conjunto de los números complejos.

En última instancia, este proceso axiomatizador no es sino una codificación de los aspectos prácticos concernientes a dichas ramas. Semejante codificación de la práctica en ámbitos específicos de la matemática se ha hecho necesaria, entre otras razones, por la exigencia de frenar el ímpetu intuitivo de los matemáticos, como se ha puesto de manifiesto en tantas ocasiones. Shapiro va a distinguir en este proceso dos aspectos bien diferenciados. En primer lugar, la introducción del sistema axiomático puede entenderse como propedéutica, puesto que hay que organizar y presentar de una manera sistemática tanto las verdades de la rama en cuestión, como sus inferencias válidas. Es decir, que se trata de presentar el campo axiomatizado como un sistema deductivo. Por supuesto, que el desiderátum de este planteamiento es que todas las fórmulas válidas del sistema puedan obtenerse mediante esos mecanismos, o sea, la completud. En segundo lugar, desde el punto de vista de la semántica, el proceso axiomatizador pretende asimismo la descripción de una estructura particular, o sea, una presunta interpretación de la rama en cuestión. Y aunque el asunto de la completud no está totalmente ausente en este apartado, el desiderátum en esta ocasión no es tanto agotar deductivamente todas las fórmulas del sistema, como asegurar que todos sus modelos sean isomorfos, o como suele decirse habitualmente, que los modelos sean iguales salvo isomorfismos. La traducción técnica de esta condición es que dicha axiomatización sea categórica [Shapiro 1985, 716 ss.]

Esta tarea, que sí desempeña adecuadamente la lógica de segundo orden, es la que sustenta la posición de Shapiro. En concreto, su planteamiento atañe a la semántica de la matemática, y no a las consideraciones deductivas: "mi tesis es que es necesaria la *referencia* a predicados o a subconjuntos de dominios dados para capturar la semántica de la práctica matemática, pero tengo poco que decir en lo concerniente a los axiomas o suposiciones acerca de tales conjuntos, necesarios para codificar las técnicas de prueba normales" [Shapiro 1985, 716]. Así pues, la defensa que Shapiro ofrece de la lógica de segundo orden se circunscribe al ámbito de esta nueva visión, que no le obliga a renunciar a la búsqueda de fundamentos desde una perspectiva diferente a la de las escuelas fundacionales clásicas. Su esfuerzo se centra en un intento de contestar a las diferentes objeciones que se plantean a la lógica de segundo orden, y al mismo tiempo señalar las ventajas que presenta dicha lógica en el marco de los estudios fundacionales.

El segundo punto que quiero reseñar en este apartado es la matización que Shapiro efectúa a los planteamientos de Quine [1991, 16 *ss.*]. Ya hemos advertido que, desde un primer momento, la crítica quineana al uso de los lenguajes de segundo orden se centró en el hecho de que, tanto los atributos como las funciones proposicionales, son intensionales. En su lugar, propuso utilizar las clases que —además de ser extensionales— son estructuralmente similares a las propiedades. Shapiro admite esta distinción y reconoce que, si bien propiedades y clases son diferentes, se pueden superar estas diferencias y usar indiscriminadamente ambos términos. Incluso deja en suspenso el problema de definir la identidad entre variables predicativas. Pero, a diferencia de Quine, no entiende Shapiro que estas razones obliguen a renunciar a la cuantificación sobre propiedades o conjuntos.

A su modo de ver, son dos los prejuicios que obligaron a Quine a no aceptar semejante cuantificación. El primero de ellos se refleja en el más famoso de sus lemas: "ser es ser el valor de una variable". Según Shapiro [1991, 16], el término 'variable ligada' se asocia invariablemente a la lógica de primer orden, es decir, que la ontología que sustenta cualquier teoría está irremediablemente unida a términos de primer orden. Para Shapiro, en cambio, es posible una interpretación que permita extender el rango de las variables cuantificables a órdenes superiores. Naturalmente, la pecha que hay que pagar por ello supone una ampliación de la ontología, puesto que habrá que admitir la existencia de propiedades o clases.

La segunda razón que justifica la actitud de Quine se expresa, a juicio de Shapiro, en otro de sus lemas: 'ninguna entidad sin identidad', dicho de otro modo, que cualquiera que sea la ontología admitida, se ha de poder establecer con claridad si dos elementos (de cualquier tipo) son, o no son, iguales. Ésta fue una de las razones que condujeron a Quine a preferir las clases en lugar de las propiedades: entre las primeras se puede establecer sin ambigüedad la relación de identidad, lo que no ocurre con las segundas. La estrategia que utiliza Shapiro para eludir este prejuicio puede herir la sensibilidad del lector, como él mismo parece sugerir [Shapiro 1991, 17 *ss.*]. Su propuesta pasa por definir la relación 'extensionalmente equivalente' en el dominio de las propiedades. Dos propiedades P y Q lo son si, y sólo si $\forall x(Px \leftrightarrow Qx)$. Puede mostrarse fácilmente que esta relación es de equivalencia, y como quiera que la mayor parte de la matemática estándar es extensional, dicha relación es asimismo una congruencia entre propiedades en la mayoría de los contextos. Así

$$\varphi(P) \wedge \forall x(Px \leftrightarrow Qx) \rightarrow \varphi(Q).$$

Si nos restringimos a esos contextos, asegura Shapiro, no hay impedimento alguno en tomar esas propiedades como extensionales y combinarlas sistemáticamente con clases. De hecho, podría definirse $X = Y$ a la Leibniz, es decir, como $\forall x(Xx \leftrightarrow Yx)$.

Por último, quisiera indicar algunas observaciones que Shapiro presenta a lo que podríamos denominar 'holismo diferencial' de Quine [Shapiro 1991, principalmente vi y *ss.*, 17 *ss.* y 97 *ss.*]. Como ya hemos indicado, Quine se opone al uso de los lenguajes de segundo orden debido a que, según él, al invocar las clases se cruza la frontera entre lógica y matemáticas. Esto, para Shapiro, es un prejuicio de Quine respecto al concepto de conjunto, que se presenta como tambaleante [*staggering*], frente a la solidez con que se presenta la lógica (de primer orden, por supuesto). Según Shapiro, las afirmaciones de Quine parecen poner de manifiesto que, al cuantificar sobre variables predicativas se está cruzando una línea entre lógica y matemáticas. La teoría de conjuntos está sustentada por una ontología; la lógica, en cambio, no. En efecto, recientemente ha afirmado Quine que la lógica no tiene objetos propios, y por tanto, sus variables no pertenecen a un dominio prefijado, o lo que es lo mismo, admiten todos los valores sin discriminación. Todo ello le lleva a acentuar la diferencia entre la lógica y el resto de las matemáticas, incluyendo la teoría de conjuntos [Quine 1998, 65].

Shapiro va a rechazar este planteamiento aduciendo que —con independencia de éstas u otras razones— los lenguajes de primer orden (y por ende, la lógica a ellos asociada) resultan insuficientes para codificar muchos de los conceptos, nociones y teorías de las matemáticas contemporáneas. Su principal premisa es que los lenguajes de segundo orden pueden expresar una gran cantidad de matemáticas. Como ha mostrado en su libro de 1991, muchas tesis sustanciales de la matemática tienen su contrapartida en un lenguaje de segundo orden. No en balde gran parte de los ejemplos que hemos considerado *supra*, vienen recogidos en este texto. Por ello, insiste, la lógica de segundo orden con la semántica standard es, en algún sentido, indispensable para comprender las matemáticas.

Pero, lo más curioso, observa Shapiro, es que, a lo largo de toda su obra, Quine ha insistido en que la matemática resulta indispensable para la ciencia (opinión a la que también se adhiere Putnam). Aún más, su holismo le condujo a borrar la línea divisoria entre matemáticas y ciencia empírica que imprimieron los empiristas lógicos, y que aún pervive en su pensamiento: "Me inclino a suavizar un tanto el contraste enfático que de normal se establece entre la matemática y la ciencia natural" [Quine 1998, 65].

Así pues, Quine mantiene, según Shapiro, lo que sugerimos denominar un holismo diferencial: mete en el mismo saco a las matemáticas y a la ciencia empírica, pero se empeña en distanciar a la matemática de la lógica. Shapiro encuentra un sinsentido en esta actitud de Quine: ¿por qué —se pregunta— si no hay línea separatoria entre matemáticas y ciencia empírica debe haberla entre lógica y matemáticas? "Por qué debería ser la lógica, especialmente la lógica *de las matemáticas* diferente?" [1991 17, subrayado del propio Shapiro]. La pretensión de Shapiro es extender ese holismo de Quine también a la lógica. Una de las tesis de su texto de 1991 es, precisamente, que no puede trazarse entre lógica y matemáticas el límite que Quine le impone.

7. A modo de conclusión

En el asunto que hemos tratado acerca de la conveniencia, necesidad, etc., de utilizar los lenguajes de segundo orden (y la lógica a ellos asociada) en la práctica matemática, nos hemos encontrado, una vez más, con una problemática abierta. Se ha observado, no obstante, que abundan los prejuicios acerca del uso en matemáticas de tales lenguajes. Quizá el más significativo de todos ellos, y lo que parece inutilizarlos para este propósito, sea el hecho de ser incompletos. El abanderado de esta posición es Quine, y hemos tenido ocasión de indicar las reacciones de algunos de los filósofos, a nuestro juicio, más relevantes. Así, hemos observado cómo Hintikka distingue varios tipos de incompletud; por su parte, Shapiro apela a la categoricidad como alternativa para justificar el uso indiscutible de tales lenguajes; Boolos se muestra un tanto escéptico y parece indicarnos que aún queda mucho por hacer. Como es obvio, no son todos los que están, naturalmente, y la nómina podría continuar. Quizá la salida consista en aprender a convivir con la ausencia de completud de las teorías matemáticas, y no verter lágrimas por ello, como aconsejaba Putnam para el caso de la prueba de consistencia.

De todos modos, el interés que nos ha movido a plantear (en ningún caso resolver) algunas cuestiones relativas a este aspecto, es que entendemos que concierne directamente a la práctica diaria del matemático. Pero —a pesar de que no creemos que ésa sea su intención, y si lo fuera no la compartiríamos— parece que los filósofos de la matemática se empeñan en reconducir por determinados caminos a los matemáticos, caminos que éstos, en su libertad expansiva, ignoran las más de las veces. En resumidas cuentas, no se espera que estas aproximaciones den el fruto apetecido, pero al menos se intenta. Como dice Shapiro [1991, 96]: "La mayoría de los matemáticos se manejan bien sin lenguajes formales y sin metateoría y, en el espíritu antifundacionista, no hay una 'mejor manera' de presentar y estudiar las matemáticas, pero la lógica de segundo orden ayuda"[21]

Antonio Caba es doctor en Filosofía y licenciado en Matemáticas. En la actualidad es profesor asociado en el área de lógica y filosofía de la ciencia de la Universidad de Málaga, España. Su tema de investigación y sus publicaciones se centran en la filosofía y metodología de las matemáticas.

Referencias

BOOLOS, G. & JEFFREY, R. 1974. *Computability and logic*. Cambridge: Cambridge University Press. Cambridge, 1989.

BOOLOS, G. 1975. "On second-order logic". *Journal of Philosophy* 72: 509-527.

______. 1984. "To be is to be the value of a variable (or to be some values of some variables)". *Journal of Philosophy* 81: 430-449.

CARNAP, R. 1937. *The logical syntax of language*. London: Routledge & Kegan Paul, 1971.

CORCORAN, J. 1980. "Categoricity". *History and philosophy of logic* 1: 187-207.

DONEDDU, A. 1968. *Mathématiques supérieures et spéciales*. Paris: Dunod.

DUBREIL, P. & DUBREIL-JACOTIN, M. L. 1971. *Lecciones de álgebra moderna*. Barcelona: Reverté.

GÖDEL, K. 1981. *Obras completas*. Madrid: Alianza Editorial. Trad. de Jesús Mosterín.

GODEMENT, R. 1967. *Álgebra*. Madrid: Tecnos, 1971.

HILBERT, D. y ACKERMANN, W. *Elementos de lógica teórica*. Madrid: Tecnos. Trad. Víctor Sánchez de Zavala, 1975.

HINTIKKA, J. 1996. *The principles of mathematics revisited*. Cambridge: Cambridge University Press.

______. 1997. "A revolution in the foundations of mathematics?". *Synthese* 111: 155-170.

MOSTERÍN, J. 1979. *Un cálculo deductivo para la lógica de segundo orden*. Cuadernos Teorema.

NEPOMUCENO FERNÁNDEZ, A. 1990. *Lógica de segundo orden: problemas metateóricos*. Tesis doctoral no publicada. Sevilla.

______. 1995. "Lógica y práctica matemática". *Mathesis* 11: 201-216.

QUINE, W. V. 1963. *Set theory and its logic*. Mass.: Cambridge: Harvard University Press, 1969.

______. 1970. *Filosofía de la lógica*. Madrid: Alianza Editorial. Trad. Manuel Sacristán, 1981.

______. 1998. *Del estímulo a la ciencia*. Barcelona: Ariel. Trad. J. Pagès.

ROBINSON, A. 1966. *Non-standard analysis*. Amsterdam: North Holland.

RESNIK, M. D. 1988. "Second-order logic still wild". *Journal of philosophy* 85: 75-87.

SHAPIRO, S. 1985. "Second order languages and mathematical practice". *The Journal of Symbolic logic* 50: 714-742.

______. 1991. *Foundations without foundationalism*. Oxford: Clarendon Press.

THARP, L. 1975. "Which logic is the right logic?". *Synthese* 31: 1-31.

---

21. Agradezco a los profesores Pascual Martínez-Freire y Javier De Lorenzo la lectura del borrador del presente trabajo, así como sus comentarios y sugerencias. Doy las gracias también al profesor Nepomuceno Fernández por facilitarme información y material bibliográfico para su realización.