PRINCIPIOS DE MATEMATICA DE LA REAL ACADEMIA DE SAN FERNANDO

POR DON BENITO BAILS.

SEGUNDA EDICION, AÑADIDA.

TOMO II.

MADRID.

EN LA IMPRENTA DE LA VIUDA DE IBARRA.

MDCCLXXXIX.

DEL CALCULO DIFERENCIAL.

518. El asunto del cálculo diferencial es hallar las diferencias infinitamente pequeñas de las cantidades variables, el último decremento ó el límite de las diferencias finitas.

Se supone por lo mismo en esta investigacion que la variable x v. gr. llega á ser, segun crece ó mengua, $x \pm dx$, y el fin es señalar la expresion del incremento ó decremento infinitamente pequeño dx. Con esta mira, si $y = x$, se substituye en esta equacion $x+dx$ en lugar de x, quando x crece (supondremos que la variable crece) y la equacion será entonces $y' = x+dx$; se restará la primera de la segunda, y será $y'-y = x+dx-x$, ó $dy = dx$: queda, pues, averiguada la equacion entre los límites por medio de la equacion entre la variable x y su funcion y.

Al

519 Al diferenciar las cantidades suelen ocurrir varios casos que vamos á especificar, y de cada uno sacarémos una regla general que rija en todos los que se le parezcan.

I. Propongámonos diferenciar la equacion $y = x+a$. En lugar de x pondrémos (518) $x+dx$, y será $y' = x+dx+a$; luego $y'-y = dy = x+dx+a-x-a = dx$; luego $d(x+a) = dx$. Si la variable menguare, en $y = x$ substituiriamos $x-dx$ en lugar de x, y saldria $d(x+a) = -dx$. En cada uno de estos dos casos sale la misma diferencial, desapareciéndose la constante a en la diferenciacion; y asi debe ser, pues las cantidades constantes, por lo mismo que ni crecen ni menguan, no tienen diferencial, ó su diferencial es 0.

520 Luego es regla general que la diferencial de una variable mezclada con constantes por adicion ó sustraccion es la misma que si estuviera sola.

521 II. Sea $y = x^2$; pongamos $x+dx$ en lugar de x, de lo que saldrá $y' = x^2+2xdx+dx^2$; luego $y'-y = dy = x^2+2xdx+dx^2-x^2 = 2xdx+dx^2$. Luego $d(x^2) = 2xdx+dx^2$. Pero $2xdx : dx^2 :: 2x : dx$: luego el término dx^2 es infinitamente menor que $2xdx$, luego debe ó puede desecharse (517); luego finalmente $d(x^2) = 2xdx$.

Sea $y = x^n$, y pongamos $x+dx$ en lugar de x; será $y' = (x+dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}dx^2$ &c.; luego $y'-y = dy = nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}dx^2$. Pero como dx^2 es infinitamente pequeño de segunda orden, es no nada en comparacion de dx, infinitamente pequeño de primera (517); por consiguiente el segundo miembro de la última equacion queda reducido á su primer término solo, y $dy = nx^{n-1}dx$.

Diferenciemos ahora una potencia de x con exponente negativo, de modo que sea $y = x^{-n}$. Si en lugar de x substituimos $x + dx$, será $y' = (x+dx)^{-n} = x^{-n} - nx^{-n-1}dx + \frac{n(-n-1)x^{-n-2}}{1.2}dx^2$ &c. de donde sale $y' - y = dy = -nx^{-n-1}dx$, por desvanecerse el término siguiente donde está dx^2 (517), y con mas razon todos los que se le siguen. Sácase de los dos últimos casos la siguiente

522 *Regla general.* La diferencial de toda potencia de una cantidad variable se saca multiplicando dicha potencia reducida á un grado una unidad menor por el exponente que lleva y por su diferencial dx.

Por esta regla será $d(x^4) = 4x^3dx$, y $d(x^{-4})$ será $-4x^{-5}dx$.

523 Quando la potencia de la variable cuya diferencial se busca, está multiplicada por un factor constante, subsiste este factor en la diferencial.

Busquemos la diferencial de ax^n, por manera que sea $y = ax^n$, y $y' = a \times (x+dx)^n = ax^n + nax^{n-1}dx + \frac{n.n-1}{1.2}ax^{n-2}dx^2$ &c. será $y' - y = dy = nax^{n-1}dx$ (517). Luego $d(ax + bx^2) = adx + 2bxdx$. La diferencial de $a + 3x^2 - 4cx^3 = 6xdx - 12cx^2dx$.

524 La misma regla sirve para diferenciar los radicales ó las potencias imperfectas; no obstante, la demostraré separadamente.

Propóngome hallar la diferencial de $\sqrt[n]{x^m}$; será

y

$y = \sqrt[n]{x^m}$, $y^n = x^m$, de cuya equacion la diferencial es $ny^{n-1}dy = mx^{m-1}dx$ (522) y $dy = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}dx}{y^{n-1}}$. Como $y^n = x^m$, $y = x^{\frac{m}{n}}$, y $y^{n-1} = \frac{y^n}{y}$; si en el denominador de $\frac{x^{m-1}dx}{y^{n-1}}$ substituimos en lugar de y^{n-1} sus valores, será $dy = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}dx}{\frac{x^m}{x^{\frac{m}{n}}}}$, ó $\frac{m}{n}\frac{x^{m-1+\frac{m}{n}}dx}{x^m} = \frac{m}{n}x^{m-m-1+\frac{m}{n}}dx$, y finalmente $dy = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx$.

Si se me pide la diferencial de $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, será $m = 1$, $n = 2$, y la diferencial será $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}dx = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

La diferencial de $\sqrt[3]{x}$ ó $d(x^{\frac{1}{3}})$ se hallará luego considerando que aquí $m = 1$, $n = 3$; luego $d(x^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}}dx}{3} = \frac{\sqrt[3]{(x^{-2})}dx}{3} = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

525 Por la misma regla se diferencian las potencias de los polynomios, porque mediante las transformaciones se reduce facilmente un polynomio á monomio, conforme vamos á manifestarlo.

Para sacar la diferencial de $y = (a+x)^n$, hago

$a + x = u$, cuya diferencial es $dx = du$ (520); será, pues, $y = u^n$, de cuya equacion la diferencial es $dy = nu^{n-1}du = n(a+x)^{n-1}dx$.

Si he de buscar la diferencial de la equacion $y = (a+bx+cx^2)^n$, haré $a+bx+cx^2 = u$, cuya diferencial es $bdx-2cxdx = du$. Hago ahora $y = u^n$, y será $dy = nu^{n-1}du = n(a+bx+cx^2)^{n-1} \times (bdx+2cxdx)$. De estos casos se deduce la

526 *Regla general.* La diferencial de la potencia de un polynomio es igual al producto del exponente de la potencia multiplicado por otra potencia del polynomio de grado una unidad menor, y por la diferencial del mismo polynomio.

527 Veamos ahora como se halla la diferencial del producto de muchas variables, para lo qual buscaremos la diferencial de ux.

Será $y = ux$ la equacion por diferenciar, con substituir $x+dx$ en lugar de x, y $u+du$ en lugar de u. Tendremos $y' = (x+dx) \times (u+du) = ux+udx+xdu+dudx$; luego $y'-y = dy = udx+xdu+dxdu$. Pero $dxdu$ producto de dos infinitamente pequeños de primer grado es cantidad infinitamente pequeña del segundo, y por consiguiente despreciable en comparacion de los otros dos términos del segundo miembro de la equacion (517); luego $dy = udx+xdu$. Esta conclusion dá la

528 *Regla general.* La diferencial del producto ux de dos variables, se compone del producto de la una variable por la diferencial de la otra, y del producto de esta por la diferencial de la primera.

529 Si hubiésemos de diferenciar la equacion $y = tuz$, haremos $tu = x$; luego $y = xz$, cuya diferencial es (528) $dy = zdx+xdz$. Pero la diferencial de la equacion $x = tu$ es $dx = udt+tdu$. Si substituimos en la primer diferencial $udt + tdu$ en lu-

lugar de dx, y en lugar de x el producto tu, sacaremos por último $dy = tudz + ztdu + tudz = d(tuz)$. Luego

La diferencial de todo producto de muchas variables consta de tantos términos quantas son las variables del producto.

La misma regla dará la diferencial del producto de muchos factores polynomios, v. gr. la de esta equacion $y = (a+x)^2 \times (b^2+x^2)$, la qual por la regla será $dy = (b^2+x^2) \times d(a+x)^2 + (a+x)^2 \times d(b^2+x^2)$; pero $d(a+x)^2 = 2(a+x)dx$ y $d(b^2+x^2) = 2xdx$; luego $dy = 2 \times (b^2+x^2)(a+x)dx + 2(a+x)^2 xdx$.

530 Por el mismo camino se halla la diferencial de la equacion quando el uno de sus miembros es un quebrado en cuyo numerador y denominador hay cantidades variables.

Sea $y = \frac{z}{t}$ ó $y = zt^{-1}$, será $dy = t^{-1}dz - zt^{-2}dt = \frac{dz}{t} - \frac{zdt}{t^2} = \frac{tdz - zdt}{t^2}$, reduciéndolo todo á un mismo denominador. Es, pues, por

Regla general la diferencial de un quebrado cuyos dos términos son cantidades variables es igual al producto del denominador multiplicado por la diferencial del numerador, menos el numerador multiplicado por la diferencial del denominador, partida la diferencia por el quadrado del denominador.

Sea por diferenciar la equacion $y = \frac{(a+x)^2}{b+x} = (a+x)^2 \times (b+x)^{-1}$. Será, pues, $dy = \frac{(b+x)^{-1} \times d(a+x)^2 - (a+x)^2 \times d(b+x)^{-1}}{(b+x)^{-2}} = \frac{2(a+x)dx \,.\, (b+x)^{-1} - dx(a+x)^2 (b+x)^{-2}}{(b+x)^{-2}} = \frac{2(a+x).(b+x).dx - (a+x)^2 dx}{(b+x)^2}$ con multiplicar arriba y abaxo por $(b+x)^2$.

Varios exemplos de diferenciacion.

531 1.° $d(x^3 - ax^2 + axy - y^3) = 3x^2dx - 2axdx + axdy + aydx - 3y^2dy$.

2.° La diferencial de la equacion $y^2 - a^2 = x\sqrt{(aa - xx)}$, es $2ydy = dx\sqrt{(aa - xx)} - \frac{x^2dx}{\sqrt{(aa - xx)}}$, ó reduciendo el último miembro á un mismo denominador $2ydy = \frac{aadx - 2x^2dx}{\sqrt{(aa - xx)}}$.

3.° La diferencial de la equacion $2y^3 + x^2y - 2cyz = z^3 - 3yz^2$ es $6y^2dy + 2yxdx + x^2dy - 2cydz - 2czdy = 3z^2dz - 3z^2dy - 6yzdz$.

O si no, pártase la equacion por y, y tendremos $2y^2 + x^2 - 2cz = \frac{z^3}{y} - 3z^2$, cuya diferencial es $4ydy + 2xdx - 2cdz = \frac{3z^2dz}{y} - \frac{z^3dy}{y^2} - 6zdz$, ó $4y^3dy + 2y^2xdx - 2cy^2dz = 3yz^2dz - z^3dy - 6y^2zdz$.

4.° Sea por diferenciar la equacion $x^3 - ay^2 + \frac{by^2}{a+y} - xx\sqrt{(ay + xx)}$, su diferencial es $3x^2dx - 2aydy + \frac{2bydy}{a+y} - \frac{by^2dy}{(a+y)^2} - 2xdx\sqrt{(ay + xx)} - \frac{ax^2dy - 2x^3dx}{2\sqrt{(ay + xx)}}$, ó $3x^2dx - 2aydy + \frac{2abydy + by^2dy}{(a+y)^2} - \frac{4ayxdx + 6x^3dx + ax^2dy}{2\sqrt{(ay + xx)}}$.

5.° Para sacar la diferencial de . . . . . . $\sqrt{[ax + \sqrt{(aa - xx)}]} = u$, lo quadraremos todo, y será $ax + \sqrt{(aa - xx)} = uu$, cuya diferencial es $adx - \frac{xdx}{\sqrt{(aa - xx)}} = 2udu$, luego $du = \frac{adx}{2u} - \frac{xdx}{2u\sqrt{(aa - xx)}}$ ó $du = \frac{adx - \frac{xdx}{\sqrt{(aa - xx)}}}{2\sqrt{[ax + \sqrt{(aa - xx)}]}}$.

De las diferenciales segundas, terceras, &c.

532 Lo que va dicho de las primeras diferenciales dá quanta luz se necesita para entender que cosa son las diferenciales superiores, acerca de las quales solo nos importa conocer la relacion que tienen unas con otras. Ya que la razon entre las diferencias infinitamente pequeñas de las cantidades variables se expresa con alguna funcion, si comparamos el incremento ó decremento infinitamente pequeño de esta funcion con el primero, formarémos concepto de las segundas diferenciales, de las terceras, quartas, &c.

533 Diferenciemos la equacion $y = a + bx + cx^2 + ex^3 +$ &c. y será $dy = bd\,.\,x + cd(x^2) + ed(x^3) +$ &c. Si en lugar de x substituimos $x+dx$, los términos del segundo miembro constarán de potencias de x y de potencias de dx, del mismo grado que tiene x en cada uno, quiero decir es que en el primero estará dx, en el segundo $(dx)^2$, en el tercero $(dx)^3$ &c. Si llamamos p, q, r &c. los coeficientes de los términos donde están dx, $(dx)^2$, $(dx)^3$, será $dy = pdx + q(dx)^2 + r(dx)^3 +$ &c. cuya equacion despues de partido todo por dx, dá $\frac{dy}{dx} = p + q(dx) + r(dx)^2 +$ &c. que expresa la razon de dy con dx, y se reduce á $\frac{dy}{dx} = p$, por ser infinitamente pequeños todos los términos del segundo miembro respecto del primero.

Diferenciemos ahora la equacion $\frac{dy}{dx} = p$, en el supuesto de ser dx constante, saldrá $\frac{ddy}{dx} = dp$. Como por lo dicho poco ha p lleva x ó p es funcion de x, habrá en dp ó en la diferencial de p la diferencial de x, esto es dx, y cantidades finitas. Llámolas P, con lo que será $dp = Pdx$, y tendredremos $\frac{ddy}{dx} = Pdx$, ó $\frac{ddy}{dx^2} = P$.

Luego *la segunda diferencial se halla, del mismo modo que la primera, en el supuesto de ser* dx *constante. Con cuyo fin se diferencia la cantidad constante* p *enlazada con* dx.

534 Cálculos hay donde no se considera como constante la dx, entonces se atiende á la segunda diferencial ddx, de la variable x. Ya que $dy = p \times dx$ (533), si diferenciamos esta equacion, sacaremos $ddy = d \times p \times dx + pddx$, ó, con hacer $dp = Pdx$, como antes, será $ddy = Pdx^2 + pddx$. De aquí se infiere que

La segunda diferencial, quando no se hace constante la dx*, se halla añadiendo á la diferencial que da el supuesto de ser constante* dx*, el producto de* p *por* ddx.

535 Por el mismo camino se hallarán las diferenciales terceras y mas altas. Hemos sacado que $\frac{ddy}{dx^2} = P$; si hacemos constante la dx, diferenciamos otra vez, sacaremos la tercera diferencial $\frac{d^3y}{dx^2} = dP$; y por ser P funcion de x, no puede menos de estar dx en su diferencial. Hagamos, pues, $dP = P'dx$, y será $\frac{d^3y}{dx^2} = P'dx$, ó $\frac{d^3y}{dx^3} = P'$. Luego

Para sacar la tercera diferencial, se han de diferenciar las variables que lleva la segunda, en el supuesto de ser dx *constante.*

536 Ya que $\frac{ddy}{dx^2} = P$, y $\frac{d^3y}{dx^3} = P'$ expresan las diferenciales segundas y terceras, se acaba de aclarar que cosa es sacar la diferencial segunda, tercera, &c. de una equacion; es lo propio que buscar el límite de la razon de las segundas dife-

ferenciales, ó de las diferenciales de las diferenciales primeras, esto es el límite de la razon de las cantidades ddy y dx^2, d^3y y dx^3. Claro está que l^2 y l^3 que expresan dicha razon son cantidades finitas, son, pues, dx^2, ddy, y dx^3, d^3y diferenciales de una misma órden.

Por consiguiente, si $dy = pdx$ expresa la diferencial primera, la segunda tendrá esta forma $ddy = qdx^2$, con hacer $d \times p = qdx$; la tercera diferencial tendrá esta forma $d^3y = rdx^3$, con hacer $d \times q = rdx$. Apliquemos esta doctrina á algunos exemplos.

537 I. Qual será la *segunda* diferencial de la equacion $y = x^3$.

Su primer diferencial es $dy = 3x^2dx$; la segunda será $ddy = dx \times d \times 3x^2 = dx \times 6xdx = 6xdx^2$.

Para hallar la segunda diferencial de $y = \frac{aa}{aa+xx}$, sacarémos desde luego la primera que es $dy = \frac{-2aaxdx}{(aa+xx)^2}$, y la segunda será $ddy = - dx \times d\frac{2aax}{(aa+xx)^2} = \frac{-2aadx^2}{(aa+xx)^2} + \frac{8aaxxdx^2}{(aa+xx)^3} = \frac{(6aaxx-2a^4)dx^2}{(aa+xx)^3}$.

La tercera diferencial de la misma equacion es $d^3y = dx^2 \times d\frac{6aaxx-2a^4}{(aa+xx)^3} = dx^3\frac{12aax}{(aa+xx)^3} - \frac{(6a^2x^2-2a^4)6xdx^3}{(aa+xx)^4} = \frac{(24a^4x-24a^2x^3)dx^3}{(aa+xx)^4}$.

La diferencial de $zdy - adx = 0$ es $dzdy + zddy - addx = 0$. Tambien se saca por las substituciones, con cuya mira harémos $s = dy$, $t = dx$, ahora $ds = ddy$, y $dt = ddx$; luego la equacion $zdy - adx = zs - at = 0$, cuya diferencial es $zds + sdz - adt = 0$, la qual, con substituir los valores de s, ds, dt, se convierte en $zddy + dydz - addx = 0$, la misma que antes.

Diferenciemos la equacion $2xdxdx = ayddy$ en el

Fig. el supuesto de ser constante la dx, sacaremos $2dx^2dz+2xdxddz = ayd^3y+adyddy$.

De otro modo. Hagamos $dx = b$, $dz = t$, $ddy = u$; con esto la equacion propuesta se convertirá en esta otra $2bxt = ayu$, cuya diferencial es $2btdx+2bxdt = audy+ayda$; y con substituir en lugar de t, dt, b, u, du sus iguales dz, ddz, dx, ddy, d^3y, tendremos $2dzdx^2+2xdxddz = adyddy+ayd^3y$, tercera diferencial.

La diferencial de $\frac{a^2ddy}{dx^2}+\frac{xdy}{a}-dy=0$, en el supuesto de ser constante la dy es $\frac{a^2d^3y}{dx^2}+\frac{a^2ddyddx}{dx^3}-\frac{2a^2ddydx^2}{dx^4}+\frac{dxdy}{a}=0$. La diferencial de $2a^3yddy - x^2dz^2 - x^2dzdx = a^2dy^2 - \frac{x^2dy^2ddy}{dz^2}$, en el supuestos de ser constante la dz, es $2a^3dyddy+2a^3yd^3y - 2xdxdz^2 - 2xdx^2dz - x^2dzddx = 2a^2dyddy - \frac{2a^2dyddydx}{dz^2} - \frac{x^2dy^2d^3y}{dz^2}$.

De las diferenciales logarítmicas.

538 Si en la linea indefinita AN se toman ácia la derecha las partes AC, CE, EG, GI &c. y ácia la izquierda las partes AC', $C'E'$, $E'G'$ &c. todas iguales unas con otras, y en los puntos G', E',

72. C', A, C, E, G, I &c. se tiran á la AN las perpendiculares $G'H'$, $E'F'$, $C'D'$, AB, CD, EF, GH, IK &c. que formen una progresion geométrica, y representen los números, siendo AB la unidad; las lineas AC, AE, AG, AI &c. formarán una progresion aritmética, expresarán las distancias respectivas á que cada término CD, EF, GH &c. de la progresion geométrica estará de la unidad, ó primer termino AB, ó (I.333) serán los logaritmos de cada termino de la progresion geométrica. Y asi como AG es tripla de AC, el número GH ocupará

rá el tercer lugar despues de la unidad AB, con tal que CD ocupe el primero, LM ocupará el quin- Fig. 72.
to lugar; por ser $AL = 5AC$.

539 La curva que pasa por los extremos H', F', D', B, D, F, H &c. de las lineas que forman la progresion geométrica, y representan los números, se llama la *logarítmica*, cuyas abscisas AC, AE &c. son los logaritmos de las ordenadas correspondientes.

540 Si suponemos que la abscisa AP crece la cantidad infinitamente pequeña Pp, y que en el punto
to p se tire la ordenada pm, y la linea Mr para- 73.
lela á la abscisa AP, será mr la diferencial de PM. Por consiguiente si llamamos AP, x; PM, y, será $mr = dy$, y $Pp = Mr = dx$.

Pero como dx es la diferencial del logaritmo x de la ordenada ó número, sacaremos la diferencial del logaritmo, ó de una cantidad logarítmica, con sacar el valor de dx en la curva logarítmica.

Con esta mira supondremos que por el punto M se ha tirado á la logarítmica la tangente MT, que intercepta en la linea de las abscisas la porcion TP, llamada *subtangente*: resultarán de aquí dos triángulos semejantes TPM, Mrm, pues ambos son rectángulos el uno en P, y el otro en r, y por ser paralelas PM y pm el ángulo exterior PMT es igual al interior rmM (I. 374). Luego si llamamos A la subtangente PT, tendrémos $mr : rM :: MP : A$; luego $A \times mr = MP \times rM$, y $Mr = \frac{A \times mr}{MP}$, ó $dx = \frac{A\,dy}{y}$; luego *la diferencial de un logaritmo es igual á la diferencial de su número multiplicada por la subtangente de la logarítmica, y dividido el producto por el mismo número.*

541 De la equacion $dx = \frac{A\,dy}{y}$ se infiere que el

el valor de la diferencial logarítmica pende del valor de la subtangente A, la qual es por lo mismo el módulo de los logaritmos que se sacan por este medio. Quando $A = 1$, los logaritmos que dá este supuesto se llaman hyperbólicos (436).

542 De la misma equacion $dx = \frac{Ady}{y}$ se saca estotra $\frac{ydx}{dy} = A$, que es la equacion de la logarítmica. Quanto vamos á decir de las diferenciales logarítmicas debe entenderse en el supuesto de ser $A = 1$.

543 Luego *la diferencial del logaritmo de un número es igual á la diferencial del número dividida por el mismo número.*

Luego $dL(a+x) = \frac{dx}{a+x}$; $dL(1+x) = \frac{dx}{1+x}$; $dL(a-x) = \frac{-dx}{a-x}$; $dL(f+gx) = \frac{gdx}{f+gx}$. $dL.x^n = \frac{nx^{n-1}dx}{x^n} = nx^{-1}dx = \frac{ndx}{x}$. $dL\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = dL(a+x) - dL(a-x)$; pero $dL(a+x) = \frac{dx}{a+x}$, y $dL(a-x) = \frac{-dx}{a-x}$. Luego $dL\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = \frac{dx}{a+x} - \frac{-dx}{a-x} = \frac{adx - xdx + adx + xdx}{a^2 - x^2} = \frac{2adx}{a^2 - x^2}$. La diferencial de $L\sqrt{(a^2+x^2)} = dL(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$ será la diferencial de $(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$ partida por $(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$; pero $d(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2xdx}{2(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}$

$$= \frac{xdx}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}$$; luego la diferencial del radical

$\sqrt{(a^2+x^2)} = \frac{xdx}{\sqrt{(a^2+x^2)}} \times \frac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = \frac{xdx}{a^2+x^2}$.

544 Con igual facilidad se diferencian las cantidades que llevan logaritmos, como esta xLx, y las que se le parecen.

Pa-

Para sacar su diferencial se consideran separadamente los factores de que se supone que constan; xlx v. gr. se considera $= x \times lx$. Luego $d.xlx = dx.lx + x.d.lx$ (527): pero $d.lx = \frac{dx}{x}$; luego $d.xlx = dx.lx + \frac{xdx}{x} = dx.lx + dx$.

Para hallar la diferencial de $(lx)^n$, haremos $lx = p$, y será $\frac{dx}{x} = dp$, y $(lx)^n = p^n$; luego $d(lx)^n = d.p^n = np^{n-1}dp = n(lx)^{n-1}\frac{dx}{x}$.

Para hallar la diferencial de $L.lx$ que es el logaritmo del logaritmo de x, haremos $lx = p$, y será $L.lx = lp$; ya que $d(lx) = \frac{dx}{x} = dp$; será $d.L.lx = dlp = \frac{dp}{p} = \frac{dx}{xlx}$.

545 Con igual facilidad se hallan las diferenciales superiores de las cantidades logarítmicas, como lo manifestamos aquí.

Si $y = lx$	si $y = xlx$
$dy = \frac{dx}{x}$	$dy = dx.lx + dx$
$ddy = \frac{-dx^2}{x^2}$	$d^2y = \frac{dx^2}{x}$
$d^3y = \frac{2dx^3}{x^3}$	$d^3y = \frac{-dx^3}{x^2}$

546 Cantidades exponenciales llamamos las potencias de cantidades constantes ó variables cuyo exponente es variable; a^x, y^x v. gr. son cantidades exponenciales. Las hay de varios grados; las de primer grado son aquellas cuyos exponentes son una cantidad variable, como las que dexamos apuntadas; las de segundo grado son las que tienen por exponente otra cantidad exponencial, qual es esta a^{x^y}.

Si se me ofrece hallar la diferencial de a^x, haré

a

Fig. $a^x = z$, y será $lz = la^x$, y diferenciando sacaré $\frac{dz}{z} = dx \,.\, la$, ó $dz = zdx \,.\, la = a^x dx \,.\, la = d \,.\, a^x$. De aqui se saca que la diferencial de a^x es el producto de la misma cantidad por el log. de a, y la diferencial de su exponente.

Si he de diferenciar y^x, en cuya cantidad la raiz y el exponente son ambos variables, haré $y^x = z$, con lo que será $d \,.\, y^x = dz$. Pero $xly = lz$, de cuya equacion la diferencial es $dx \,.\, ly + \frac{xdy}{y} = \frac{dz}{z}$; luego $dz = zdx \,.\, ly + \frac{zxdy}{y} = y^x dx \,.\, ly + \frac{y^x xdy}{y} = y^x\left(dx \,.\, ly + \frac{xdy}{y}\right)$.

547 Quando en la cantidad exponencial a^x sea a la base logarítmica, que llamaremos e, será $l \,.\, e = 1$ (426); luego $d \,.\, e^x = e^x dx \,.\, le = e^x dx$. Esto quiere decir que la diferencial de esta exponencial particular es igual á la misma exponencial multiplicada por la diferencial de su exponente.

Diferenciales de los arcos de círculo, y de las líneas trigonométricas.

548 Sea el arco $AB = u$, su seno $BD = y$, su coseno $CD = x$, y el radio $CA = a$, y supongamos que el arco BA se le agrega el incremento
74. $EB = \Delta u$, su seno BD será entonces EF. Desde B tírese á EF la perpendicular BG, será $EG = \Delta y$, y será $FD = -\Delta x$, porque el coseno que era CD quando el seno era BD, es $CF = CD - DF$ así que el seno llega á ser EF. En llegando á expresar Δu, Δy, $-\Delta x$ el límite de la razon entre las cantidades cuyas son, sus expresiones serán du, dy, $-dx$, y entonces el arco EB se confunde con su tangente, y pue-

puede considerarse como una linea recta. Fig.

549 Tirese el radio CB, y será recto el ángulo EBC; si de cada ángulo recto EBC, GBD se resta el ángulo GBC, las restas, ó los ángulos EBG, CBD serán iguales, y pues los ángulos en G y D son rectos, los triángulos EGB, CBD serán semejantes; luego será $CD : CB :: EG : EB$, ó $x : a :: dy : du = \frac{a\,dy}{x} = \frac{a\,d\,\text{sen}\,u}{\cos u}$.

550 Luego 1.° $du = \frac{a\,d\,\text{sen}\,u}{\cos u}$, y 2.° $d\,\text{sen}\,u = \frac{\cos u\,du}{a}$, esto es, 1.° *la diferencial del arco es igual al producto de la diferencial de su seno multiplicada por el radio, partido el producto por su coseno.* 74.

2.° *La diferencial del seno de un arco es igual al producto de la diferencial del arco multiplicada por el coseno, partido el producto por el radio.*

551 De los triángulos semejantes CDB, EGB tambien se saca $BD : CB :: GB : EB$, ó $y : a :: -dx : du = \frac{-a\,dx}{y} = \frac{-a\,d\cos u}{\text{sen}\,u}$.

Luego 1.° $du = \frac{-a\,d\cos u}{\text{sen}\,u}$, y 2.° $d\cos u = \frac{-\text{sen}\,u\,du}{a}$, esto es, 1.° *la diferencial del arco es igual al producto de la diferencial del coseno tomada negativamente multiplicada por el radio, partido por el seno.*

2.° *La diferencial del coseno de un arco es igual al producto de la diferencial del arco tomada negativamente multiplicada por el seno, partido por el radio.*

552 Si llamamos tang. la tangente del arco $AB = u$, los triángulos semejantes CGB, CAH darán $CG : GB :: CA : AH$, ó $x : y :: a : \text{tang}\,u = \frac{ay}{x}$. 75.

Luego $\text{tang}\,u = \frac{a\,\text{sen}\,u}{\cos u}$.

Si diferenciamos esta última equacion por la re-

Fig. gia dada (550), y substituimos en lugar de $d.\text{sen}\,u$ y $d.\cos u$ sus valores poco ha sacados, saldrá $d.\text{tang}\,u = \frac{\cos^2 u\,adu + \text{sen}^2 u\,adu}{\cos^2 u}$; pero $\frac{\text{sen}^2 u}{\cos^2 u} = \text{tang}^2 u\,du$, y de $t = \frac{ay}{x}$ se saca $\frac{t^2}{a^2} = \frac{y^2}{x^2}$, será $\frac{a\,\text{sen}^2 u\,du}{\cos^2 u} = \frac{\text{tang}^2 u\,du}{a}$; luego dt ó $d\,\text{tang}\,u = adu + \frac{\text{tang}^2 u\,du}{a} =$

75. $adu + \frac{\text{tang}^2 u\,du}{a} = \frac{a^2 du + \text{tang}^2 u\,du}{a}$; luego $dt = \frac{a^2 du + \text{tang}^2 u\,du}{a}$, y $adt = a^2 du + \text{tang}^2 u\,du$; de donde por último sale $du = \frac{a\,d\,\text{tang}\,u}{a^2 + \text{tang}^2 u} = \frac{a\,d\,\text{tang}\,u}{\sec^2 u}$, porque el triángulo rectángulo CAH dá $(CH)^2 = (CA)^2 + (AH)^2$, ó $\sec^2 u = a^2 + \text{tang}^2 u$. Luego $du = \frac{a\,d\,\text{tang}\,u}{\sec^2 u}$ y $\frac{du\,\sec^2 u}{a} = d\,\text{tang}\,u$. Lo que significa

1.° *Que la diferencial del arco es igual al producto de la diferencial de su tangente multiplicada por el radio, partido por el quadrado de la secante.*

2.° *Que la diferencial de la tangente del arco es igual al producto de la diferencial del mismo arco multiplicada por el quadrado de la secante, partido por el radio.*

553 Y porque los triángulos ACH, GCD dán $HC : BC :: AC : GC$, ó $\sec u : a :: a : \cos u$, $\sec u = \frac{a^2}{\cos u}$ y $\sec^2 u = \frac{a^4}{\cos^2 u}$: luego con substituir, sale $d\,\text{tang}\,u = \frac{a^4 du}{a\cos^2 u} = \frac{a^3 du}{\cos^2 u}$, y quiere decir, que *la diferencial de la tangente es igual al producto de la diferencial del arco multiplicada por la tercer potencia del radio, partido por el quadrado del coseno.*

554 Porque los triángulos semejantes CDF, HAC dán $FD : DC :: CA : AH$, ó $\cot u : a :: a : \text{tang}\,u = \frac{a^2}{\cot u}$, será, diferenciando, $d\,\text{tang}\,u = -\frac{a^2 d\cot u}{\cot^2 u}$. Si substituimos estos valores en la equacion $du =$

ad

$\frac{a^2 d\,\text{tang}\,u}{\sec^2 u}$ hallada poco ha, será $du = \frac{-a^3 d\cot u}{\cot^2 u \times \sec^2 u}$. Los triángulos semejantes *CDF*, *CAH* dán *DF* : *CF* :: *CA* : *CH*, ó cot u : cosec u :: a : sec $u = \frac{a\,\text{cosec}\,u}{\cot u}$; y $\sec^2 u = \frac{a^2\,\text{cosec}^2 u}{\cot^2 u}$; substituyendo este valor de $\sec^2 u$ en $du = \frac{-a^3 d\cot u}{\cot^2 u \times \sec^2 u}$, saldrá $du = \frac{-a^3 d\cot u}{\cot^2 u \times \frac{a^2\,\text{cosec}^2 u}{\cot^2 u}} = \frac{-a\,d\cot u}{\text{cosec}^2 u}$, $d\cot u = \frac{-du\,\text{cosec}^2 u}{a}$. Fig.

555 Luego 1.º *La diferencial del arco es igual al producto de la diferencial de la cotangente tomada negativamente multiplicada por el radio, y partido por el quadrado de la cosecante.*

2.º *La diferencial de la cotangente del arco es igual al producto de la diferencial del arco tomada negativamente multiplicada por el quadrado de la cosecante, partido por el radio.*

556 Como los triángulos semejantes *BGC*, *CDF* dán *BG* : *CB* :: *CD* : *CF*, ó sen u : 1 :: 1 : cosec u, será cosec $u = \frac{1}{\text{sen}\,u}$, y $\text{cosec}^2 u = \frac{1}{\text{sen}^2 u}$. Substituyendo este valor, sale $d\cot u = -du\,\text{cosec}^2 u = \frac{-du}{\text{sen}^2 u}$. 75.

557 Los triángulos semejantes *HAC*, *BEC* dán *CH* : *CA* :: *CB* : *BE*, ó sec u : a :: a : cosen u, será cosen $u = \frac{a^2}{\sec u}$; luego $d\cos u = \frac{-a^2 d\sec u}{\sec^2 u}$. Si substituimos este valor en la equacion de antes (551), $du = \frac{-a\,d\cos u}{\text{sen}\,u}$, sacarémos $du = \frac{a^3 d\sec u}{\text{sen}\,u \times \sec^2 u}$, ó $du\,\text{sen}\,u = \frac{a^3 d\sec u}{\sec^2 u}$; y como por lo probado poco ha $\sec^2 u = \frac{a^4}{\text{cosen}^2 u}$, será $du\,\text{sen}\,u = a^3 d\sec u \times \frac{\text{cosen}^2 u}{a^4} = \frac{d\sec u \times \text{cosen}^2 u}{a}$, y $du\,\text{sen}\,u = \frac{d\sec u \times \text{cosen}^2 u}{a}$, que dá $d\sec u = \frac{a\,du\,\text{sen}\,u}{\text{cosen}^2 u}$.

558 Ya que seno verso $u = GA - CG = a - \cos u$, 75.

será $\cos u = a - \text{sen verso } u$, y la diferencial del primer miembro será igual á la del segundo; luego $\frac{-\text{sen } u\, du}{a} = d(-\text{sen verso } u)$, y $\frac{\text{sen } u\, du}{a} = d \text{ sen verso } u$.

Luego *la diferencial del seno verso de un arco es igual á la diferencial del arco multiplicada por el seno, partido el producto por el radio.*

Aplicaciones del cálculo diferencial.

Aplicaciones del cálculo diferencial á las series.

559 I. La primer aplicacion que en este asunto haremos del cálculo diferencial, será averiguar la forma de y quando x llega á ser $x+dx$, en el supuesto de ser y funcion de x.

Si en lugar de x se substituye $x+dx$, la y se transformará en $y+dy$. Hagamos ahora constante la dx, quedándose variable la dy, y supongamos que x se convierta otra vez en $x+dx$, de modo que $x+dx$ sea $x+dx+dx = x+2dx$, la y se convertirá en $y+dy$, y la dy en $dy+ddy$, mediante lo qual $y+dy$ será $y+dy+dy+ddy = y+2dy+ddy$. Si llega x á ser otra vez $x+dx$, de modo que $x+2dx$ sea $x+2dx+dx = x+3dx$, la y se transformará en $y+dy$, la dy en $dy+ddy$, y la ddy en $ddy+d^3y$, por manera que $y+dy+2ddy$, será $y+dy+2dy+2ddy+ddy+d^3y = y+3dy+3ddy+d^3y$. Por el mismo camino se hallarán los demas valores de y, los quales componen la tabla siguiente.

Valores de x.	Valores correspondientes de y.
x	y
$x+dx$	$y+dy$
$x+2dx$	$y+2dy+ddy$
$x+3dx$	$y+3dy+3ddy+d^3y$
$x+4dx$	$y+4dy+6ddy+4d^3y+d^4y$
$x+5dx$	$y+5dy+10ddy+10d^3y+5d^4y+d^5y$

396. Si se consideran los coeficientes de las columnas diferenciales, se echará de ver que son los números figurados, y que los coeficientes de la dy son múltiplos de la dx. Por consiguiente al formar la serie funcion de y, deberá tenerse presente que ndy corresponderá á ndx, siendo n el múltiplo que se quiera de la dx. Por lo demostrado (390 y 391) el término general de los coeficientes de la ddy habria de ser $\frac{n.(n+1)}{2}$; pero como á la columna de las ddy le falta al principio un término, en lugar de n se ha de substituir $n-1$, con lo que el término general será $\frac{n.(n-1)}{2}ddy$.

El término general de los coeficientes de d^3y habria de ser $\frac{n.(n+1)}{2}.\frac{(n+2)}{3}$; pero como á la serie de las d^3y le faltan al principio dos términos, en lugar de n se habrá de substituir $n-2$, con lo que el término general será $\frac{n.(n-1)}{2}.\frac{(n-2)}{3}d^3y$. Y si, guiándonos por la misma consideracion, buscaremos los demas términos, sacaremos que á $x+ndx$ corresponde la siguiente serie
$y + ndy + \frac{n.(n-1)}{2}ddy + \frac{n.(n-1).(n-2)}{2.3}d^3y + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{2.3.4}d^4y$ &c. Si suponemos infinito el número n, será ndx el producto del infinito por el infinitamente pequeño, y será ndx una cantidad finita que llamaremos b, esto es, $ndx = b$, $n = \frac{b}{dx}$.

$u^2 = \frac{b^2}{2\cdot 1}$ &c. cuyos valores substituidos en la serie hallada poco ha, veremos que quando x llega á ser $x+b$, su funcion y es la serie siguiente,

$$y + \frac{b\,dy}{dx} + \frac{b^2\,ddy}{2dx^2} + \frac{b^3\,d^3y}{2.3.dx^3} + \frac{b^4\,d^4y}{2.3.4.dx^4} + \&c.$$

561 Manifestemos con un exemplo la utilidad de esta expresion; para lo qual suponiendo $y = a + cx + x^2$, buscaremos el valor de y quando x llega á ser $x+2$.

La primer diferencial de la equacion propuesta es $dy = c\,dx + 2x\,dx$, y $\frac{dy}{dx} = c + 2x$. La segunda diferencial es $ddy = 2dx^2$, y $\frac{ddy}{dx^2} = 2$. No hay que buscar mas diferenciales, porque se desvanecen; luego y será $y + \frac{2dy}{dx} + \frac{4ddy}{2dx^2} = y + 2c + 4x + 4 = a + cx + x^2 + 2c + 4x + 4$, cantidad que sale con substituir $x+2$ en lugar de x.

562 Escuso prevenir que si en lugar de x se substituyere $x-b$, la funcion y pasará á ser

$$y - \frac{b\,dy}{dx} + \frac{b^2\,ddy}{2dx^2} - \frac{b^3\,d^3y}{2.3.dx^3} + \frac{b^4\,d^4y}{2.3.4.dx^4} - \&c.$$

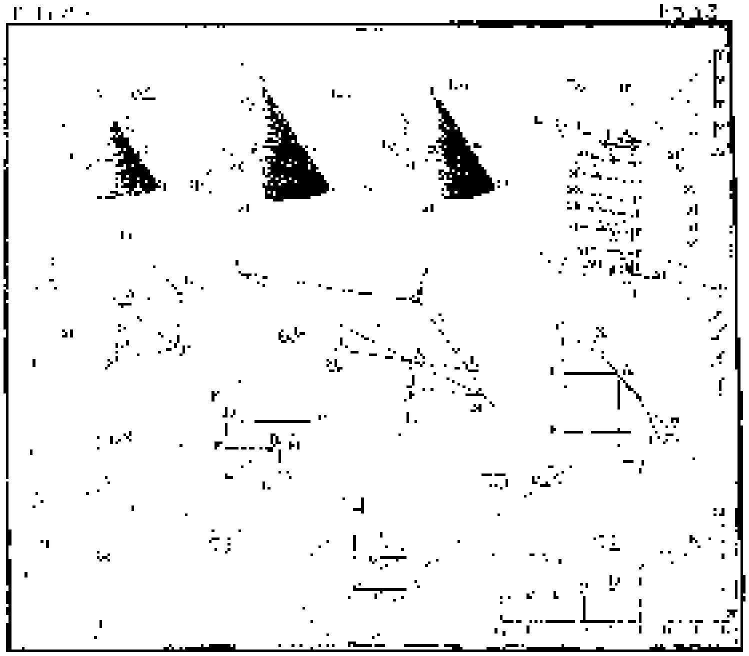
con poner $-b$ en lugar de b en la serie de antes.

Si en lugar de x se substituyese $x-x$, el valor correspondiente de y será

$$y - \frac{x\,dy}{dx} + \frac{x^2\,ddy}{2dx^2} - \frac{x^3\,d^3y}{2.3.dx^3} + \frac{x^4\,d^4y}{2.3.4.dx^4} + \&c.$$

Pero como $x-x=0$, lo mismo sale de substituir en la equacion 0 en lugar de x, que de substituir $x-x$. Luego la última serie es el valor de y para el caso de hacer en su funcion $x=0$. Y como quando $x=0$ el valor de y es tambien cero, será $y - \frac{x\,dy}{dx} + \frac{x^2\,ddy}{2dx^2} - \&c. = 0$. O si se hace $x=0$, el valor de y no será cero, sino igual á la cantidad A, y será $y - \frac{x\,dy}{dx} + \frac{x^2\,ddy}{2dx^2} - \&c. = A$.

563 II. Supongamos que dada la suma y de la serie



HOJA EN BLANCO

rie $A+Px+Qx^2+Rx^3+$ &c. queramos hallar el valor N de la misma serie, despues de multiplicados respectivamente sus términos por las constantes a, b, c &c. esto es la suma de la serie $Aa+Pbx+Qcx^2+Rex^3+$ &c.

No podemos dar una solucion general de esta cuestion, porque no la hay; pero la resolveremos en algunos casos particulares.

Supongamos que los coeficientes a, b, c, e, f &c. forman una serie de números figurados, de los quales se toman las diferencias primeras, segundas, terceras, &c. hasta las últimas que serán constantes.

$$b-a,\ c-b,\ e-c,\ f-e \qquad \text{I.}$$
$$c-2b+a,\ e-2c+b,\ f-2e+c \qquad \text{II.}$$
$$e-3c+3b-a,\ f-3e+3c-b \text{ \&c.} \qquad \text{III.}$$

Hagamos ahora $b-a=B$, $c-2b+a=C$, $e-3c+3b-a=D$, $f-4e+6c-4b+a=E$, será la suma $N=ay+\frac{Bxdy}{dx}+\frac{Cx^2ddy}{2dx^2}+\frac{Dx^3d^3y}{6dx^3}+\frac{Ex^4d^4y}{24dx^4}+$ &c. en el supuesto de ser constante la dx. Porque

$$y=A+Px+Qx^2+Rx^3+Sx^4+\text{\&c.}$$
$$dy=Pdx+2Qxdx+3Rx^2dx+4Sx^3dx$$
$$d^2y=2Qdx^2+6Rxdx^2+12Sx^2dx^2$$
$$d^3y=6Rdx^3+24Sxdx^3$$
$$d^4y=24Sdx^4$$

Será, pues,

$$ay = Aa+aPx+aQx^2+aRx^3+aSx^4$$
$$\frac{Bxdy}{dx} = BPx+2BQx^2+3BRx^3+4BSx^4$$
$$\frac{Cx^2ddy}{2dx^2} = CQx^2+3CRx^3+6CSx^4$$
$$\frac{Dx^3d^3y}{6dx^3} = DRx^3+4DSx^4$$
$$\frac{Ex^4d^4y}{24dx^4} = SEx^4$$
$$= N = Aa+PBx+QCx^2+Rex^3+Sfx^4$$

Si comparamos los términos homólogos unos con otros sacarémos $aP+BP=Pb$, ó $B=b-a$

Tambien sacaremos $a + 2B + C = c$, esto es $C = c + a - 2b$; y del mismo modo sacaremos $D = d - 3c + 3b - a$ &c. Salen, pues, para B, C, D &c. los mismos valores que se les han dado en el supuesto hecho; luego es cierto que la suma $N = ay + \frac{Bxdy}{dx} + \frac{Cx^2ddy}{2dx^2} + \frac{Dx^3d^3y}{2\cdot 3dx^3} +$ &c.

Si los números a, b, c fuesen los términos de una progresion arismética, sus diferencias segundas, terceras, &c. serian nulas; luego sería $C = 0$, $D = 0$ &c. y sería la suma $N = ay + \frac{Bxdy}{dx}$.

Si las diferencias segundas de a, b, c &c. fuesen constantes, las terceras serán nulas; entonces será la suma de la serie $N = ay + \frac{Bxdy}{dx} + \frac{Cx^2ddy}{2dx^2}$.

Sabemos que la serie $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1}{1-x}$, cuyo quebrado es por lo mismo la suma de la serie. Multipliquemos sus términos respectivamente por los de esta progresion arismética 3, 5, 7, 9, 11 &c. y busquemos la suma de la serie $3 + 5x + 7x^2 + 9x^3 + 11x^4$. Aquí $a = 3$, $b = 5$ y $b - a$, ó $B = 2$, pero $C = 0$ y $D = 0$. Como la suma de la serie propuesta $\frac{1}{1-x} = y$, será $dy = \frac{dx}{(1-x)^2}$, y $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Luego la suma que se busca será $N = ay + \frac{Bxdy}{dx} = \frac{3}{1-x} + \frac{2x}{(1-x)^2}$.

Aplicacion del cálculo diferencial á la doctrina de las líneas curvas.

564 Indagaremos primero como se ha de tirar una tangente á una curva qualquiera, dada que sea su equacion; esto nos dará á conocer el ángulo que la curva forma en el punto de contacto con su ordenada, ó con el exe de las abscisas, y por consiguiente ácia que lado es convexa ó cóncava.

Pa-

Para tirar una tangente á una linea curva AM, Fig.
se la considera como un polígono de una infinidad de lados infinitamente pequeños: la prolongacion MT de uno de sus lados Mm será su tangente, y la determinarémos respecto de cada punto M con calcu- 76.
lar el valor de la subtangente PT, ó de la porcion de la linea en la qual se cuentan las abscisas, que coge desde la ordenada PM hasta el punto T de la tangente.

Por lo que mira al valor de la subtangente, le calcularemos figurándonos tiradas por los dos extremos M, m del lado infinitamente pequeño Mm las dos ordenadas MP, mp, y por el punto M la linea Mr paralela á AP, exe de las abscisas. El triángulo infinitamente pequeño Mrm será semejante al triángulo finito TPM, y nos dará esta proporcion $rm : rM :: PM : PT$. Luego si llamamos AP, x; PM, y; Pp ó su igual Mr será dx, y rm será dy; tendrémos, pues, $dy : dx :: y : PT = \frac{ydx}{dy}$. Esta es la fórmula general para determinar la subtangente de toda curva, sea el que fuere el ángulo que las ordenadas formen con las abscisas; con tal que las ordenadas sean paralelas unas con otras.

Supongamos ahora, con el fin de aplicar la fórmula general, cifrada la naturaleza de la curva AM en una equacion que no tenga mas variables que x é y, y cantidades constantes. No habrá ni podrá haber en la tal equacion despues de diferenciada, sino términos multiplicados por dx, y términos multiplicados por dy; será, por consiguiente, facil sacar de ella despues de diferenciada el valor de $\frac{dx}{dy}$, en cuyo valor no habrá sino x, y, y constantes; substituido este valor en la fórmula $\frac{ydx}{dy}$ ó $y \times \frac{dx}{dy}$, nos dará el valor de la subtangente en x é y y constantes. Fi-

nal-

Fig. nalmente, substituyendo en lugar de y su valor expresado en x, sacado de la equacion de la misma curva, lo que saliere será la expresion de la subtangente solo en x y constantes; y para determinar el valor de la subtangente respecto de un punto M,
76. solo restará substituir en esta última expresion en lugar de x el valor de la abscisa AP, correspondiente al punto M.

565 Quando la equacion de la curva es tal, que creciendo $AP = x$, mengua y, la linea rM es $-dy$ (519), y la proporcion $rm : rM :: MP : PT$, que dá el valor general de la subtangente, es $-dy : dx$
77. $:: y : PT = -\frac{ydx}{dy}$, cuya expresion de ningun modo altera la práctica del método; solo está manifestando que la tangente en lugar de caer á la parte del origen A de las abscisas respecto de la ordenada PM, cae á la parte opuesta.

566 Si quisiésemos sacar una fórmula general para expresar la normal de una curva algebráica en el supuesto de ser sus ordenadas perpendiculares á las abscisas, la sacaríamos por medio de los triángulos semejantes mrM, QPM, los quales
76. darian $Mr : Mm :: MP : MQ$, esto es, $dx : \sqrt{(dx^2+dy^2)} :: y : MQ = \frac{y}{dx} \times \sqrt{(dx^2+dy^2)}$.

La equacion de la parábola v. gr. dá despues de diferenciada, $2ydy = pdx$, $dy = \frac{pdx}{2y}$, $dy^2 = \frac{ppdx^2}{4y^2}$; si substituimos este valor de dy^2 en $\frac{y}{dx} \times \sqrt{(dx^2+dy^2)}$, tendremos $MQ = \frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2+\frac{ppdx^2}{4y^2})} = \frac{ydx}{dx}\sqrt{(\frac{4yy+pp}{4y^2})} = \frac{y}{2y}\sqrt{(4yy+pp)} = \frac{1}{2}\sqrt{(4px+pp)}$ (264).

De los mismos triángulos sacaremos la expresion de la subnormal PQ. Porque darán $Mr : rm$
::

a $MP : PQ$; esto es, $dx : dy :: y : \frac{ydy}{dx} = PQ$. Fig.

Si hacemos aplicacion de esta fórmula á la equacion $yy = px$ de la parábola, sacaremos $dy = \frac{pdx}{2y}$; y substituyendo este valor de dy en $\frac{ydy}{dx}$, hallaremos que la subnormal de la parábola es $\frac{p}{2}$, ó la mitad del parámetro (273).

567 Cuestion 1. *Tirar por un punto* M *una tangente al circulo* AMB, *estando en* A *el origen de las abscisas, y el centro en* C.

Llamo a el diámetro AB; x, la abscisa AP; 78.
y, la ordenada PM; será con esto la equacion del circulo $yy = ax - xx$; y la diferencial de esta equacion será $2ydy = adx - 2xdx$, y $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a-2x} = \frac{y}{\frac{1}{2}a-x}$; luego $\frac{ydx}{dy} = \frac{yy}{\frac{1}{2}a-x} = PT$.

Si el origen de las abscisas estuviera en C, la equacion del circulo sería (244) $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, y por consiguiente $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{-x}$; luego $\frac{ydx}{dy} = \frac{yy}{-x} = -\frac{\frac{1}{4}aa - xx}{x}$, cuya equacion, por ser negativa, está diciendo que la subtangente, la qual en el caso antecedente pasaba por el origen de las abscisas, se dexa ahora del otro lado.

568 Cuestion 2. *Hallar el valor de la subtangente de la parábola cuya equacion es* yy = px.

Esta equacion despues de diferenciada es $2ydy = pdx$; luego $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$, $\frac{ydx}{dy} = \frac{2yy}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$, despues de substituir px en lugar de yy.

569 Cuestion 3. *Hallar el valor de la subtangente de la elipse* AMB, *cuya equacion es* $yy = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$ (291), *en el supuesto de ser* AB = 2a, *el semiexe menor* = b; AP = x; PM = y.

La diferencial de esta equacion es $2ydy = \frac{bb}{aa}(2adx - 2xdx)$, ó $2aaydy = 2abbdx - 2bbxdx$, 79.

de

Fig. de donde sacamos $\frac{dx}{dy} = \frac{2aay}{2abb - 2bbx}$. Substituyo este valor en $\frac{ydx}{dy}$, y saco $\frac{ydx}{dy} = \frac{2aayy}{2abb - 2bbx}$; substituyo finalmente en lugar de yy su valor $\frac{bb}{aa}(2ax - xx)$, y despues de executadas las reducciones correspondientes queda $\frac{ydx}{dy} = PT = \frac{4abbx - 2bbxx}{2abb - 2bbx} = \frac{2ax - xx}{a - x}$.

570 Cuestion 4. *Tirar una tangente al punto* M *de una hypérbola* AMH, *cuya equacion es* $yy =$
80. $\frac{bb}{aa}(2ax + xx)$ (329), *siendo* 2a *su primer diámetro*; b, *la mitad del segundo*; AP, x; PM, y.

Despues de diferenciada esta equacion, será $2aaydy = 2abbdx + 2bbxdx$, luego $\frac{dx}{dy} = \frac{2aay}{2abb + 2bbx}$, y $\frac{ydx}{dy} = \frac{2aayy}{2abb + 2bbx}$; substituyendo en lugar de yy su valor $\frac{bb}{aa}(2ax + xx)$, y practicando las reducciones correspondientes saldrá $\frac{4abbx + 2bbxx}{2abb + 2bbx} = \frac{2ax + xx}{a + x} = PT$, y finalmente $AT = PT - AP = \frac{ax}{a + x}$.

571 Cuestion 5. *Hallar el valor de la subtan-*
81. *gente correspondiente al punto* M *de una hypérbola entre sus asymptotas, cuya equacion es* $cc = xy$ (352), *en el supuesto de ser* $AP = x$; $PM = y$; $cc =$ *la potencia de la hypérbola.*

La equacion $cc = xy$ es, despues de diferenciada $xdy + ydx = 0$; luego $\frac{dx}{dy} = -\frac{x}{y}$, y por consiguiente $PT = \frac{ydx}{dy} = -x$; manifiesta este valor que la subtangente es igual á la abscisa correspondiente al punto *M*, pero que se ha de tomar á la parte opuesta del origen *A*.

De

Fig.

De los límites de las cantidades, y de las cuestiones de máximos y mínimos.

572 Expresa $\frac{dx}{dy}$ la tangente del ángulo que la curva causa con la ordenada en qualquiera de sus puntos; y $\frac{dy}{dx}$ expresa la tangente del ángulo que la curva causa con el exe de las abscisas.

Porque con suponer el radio de las tablas $= 1$, el triángulo rectángulo *Mrm* dá $rm : rM :: 1 :$ tang rmM (I. 725); luego tang $rmM = \frac{rM}{rm} = \frac{dx}{dy}$. 76.
De lo dicho (325) tambien se inferirá que la tangente de un ángulo nulo, ó cuyo valor es cero, es tambien cero; luego siempre que el valor $\frac{dx}{dy}$ sea cero, no causará la tangente ángulo alguno con la ordenada; quiero decir, que la tangente será paralela á las ordenadas: de los mismos principios inferiremos que siempre que $\frac{dy}{dx} = 0$ no formará la tangente ángulo alguno con el exe de las abscisas; quiero decir que la tangente será paralela al exe de las abscisas.

Pero como el valor de un quebrado es cero siempre que su numerador es cero, siguese que $\frac{dx}{dy} = 0$ siempre que $dx = 0$, y que quando $dy = 0$, tambien será $\frac{dy}{dx} = 0$; como dx es el numerador, y dy el denominador del quebrado $\frac{dx}{dy}$, hemos de inferir que la tangente de una curva es paralela á las ordenadas ó á las abscisas de la curva, conforme en el quebrado $\frac{dx}{dy}$ sea cero el numerador ó el denominador. Por consiguiente para manifestar en que punto ó puntos tiene una curva su tangente paralela á las ordenadas ó á las abscisas, se sacará de

su

Fig. su equacion diferenciada el valor de $\frac{dx}{dy}$, se hará el numerador igual con cero, y se sacará una equacion, la qual, comparada con la equacion de la curva, dará el valor de x é y correspondiente al punto de la curva, donde la tangente es paralela á las ordenadas. Si se supusiese $= 0$ el valor de dy ó del denominador del quebrado $\frac{dx}{dy}$, se sacaría otra equacion, la qual, combinada con la de la curva, dará los valores de x é y correspondientes al punto de la curva donde la tangente es paralela al exe de las abscisas.

573 Para aclararlo con un exemplo familiar, consideraremos la curva cuya equacion es $yy+xx=2ay+2bx-aa-bb+rr$, que es la del circulo (230). Las lineas AP son x, y las lineas PM, PM' son los valores de y correspondientes á los valores de
82. x que dá la resolucion de la equacion. Si la diferenciamos, saldrá $2ydy+2xdx=2ady+2bdx$, y $\frac{dx}{dy}=\frac{2y-2a}{2b-2x}$.

Supongamos primero igual con cero el numerador para averiguar en que puntos la tangente es paralela á las ordenadas. Tendremos $2y-2a=0$, é $y=a$: substituida este valor en la equacion de la curva dá $aa+xx=2aa+2bx-aa-bb+rr$, ó $xx-2bx=rr-bb$, de cuya resolucion sale $x=b\pm r$, esto es, $x=AQ'$ y $x=AQ$; de lo qual se infiere que la curva ó su tangente es paralela á las ordenadas en dos puntos R y R', cada uno de los quales tiene una ordenada igual á la linea a.

Hagamos ahora igual con cero el denominador del valor de $\frac{dx}{dy}$, para saber en que puntos la curva ó su tangente es paralela á las abscisas; tendremos $2b-2x=0$, ó $x=b$. Si substituimos este valor en la equacion de la curva, saldrá $yy+bb=2ay+2bb-$

a

$aa - bb + rr$, ó $yy - 2ay = rr - aa$, de cuya resolucion sacarémos $y = a \pm r$, y está diciendo esta expresion que la tangente es paralela á las abscisas en dos puntos T y T', que tienen comun la abscisa AS $= b$; siendo $ST' = a + r$ la ordenada correspondiente al punto T', y la otra $ST = a - r$ la ordenada correspondiente al punto T. Fig. 82.

571. Los puntos Q, Q' se llaman *los límites de las abscisas*, porque entre Q y Q' á cada abscisa AP corresponden dos valores reales de y, que son PM y PM'; pero entre Q y A, y mas allá de Q' respecto de A no hay punto alguno de la curva; por manera que si suponemos x menor que $AQ = b - r$, ó mayor que $AQ' = b + r$, no saldrá ningun valor real de y. El que quisiere comprobarlo no tiene mas que substituir en la equacion en lugar de x una cantidad $b - r - q$ menor que $b - r$, ó una cantidad $b + q + r$ mayor que $b + r$; resolver despues la equacion que salga de esta substitucion, y le saldrán imaginarios ambos valores de y.

Si nos figuramos tirada por el punto A la AL' paralela á las ordenadas, y tiramos por los puntos T, T' las lineas TL, $T'L'$ paralelas á las abscisas; las lineas $AL = ST = a - r$, y $AL' = ST' = a + r$ serán los límites de las ordenadas; porque se viene á los ojos que no puede haber ninguna ordenada mayor que AL' ni menor que AL en el caso de que la tangente haya de ser paralela á las abscisas. Y si en la equacion de la curva substituimos en lugar de y una cantidad menor que $a - r$, qual sería $a - r - q$, saldrán imaginarios los valores de x despues de resuelta la equacion. Lo propio sucedería si en lugar de y substituyéramos la cantidad $a + r + q$ mayor que $a + r$.

La ordenada ST' es la mayor de todas las que rematan en la concavidad RTR' de la circunferencia;

cia; la ordenada ST es la menor de todas las que rematan en la convexidad; y las ordenadas QR, $Q'R'$ son á un tiempo las menores que rematan en la concavidad, y las mayores que rematan en la convexidad.

575 De todo esto se sigue que por un mismo método se determinan 1.º los límites de las abscisas y de las ordenadas; 2.º los casos en que la tangente es paralela á las abscisas ó á las ordenadas; 3.º las máximas y mínimas abscisas, ú ordenadas.

576 Pero, sea la que fuere la expresion algebráica de una cantidad, se la puede considerar como que representa la ordenada de una linea curva. Sea v. gr. $\frac{x^2(a-x)}{aa}$ la expresion de una cantidad que llamo y, de modo que sea $y = \frac{x^2(a-x)}{aa}$; puedo considerar esta equacion como la de una linea curva, cuya abscisa es x y la ordenada y. En este supuesto es evidente que si la cantidad $\frac{x^2(a-x)}{aa}$ puede ser en algunos casos la máxima ó la mínima entre las de su especie, ó llegar á ser un *maximo* ó un *mínimo*, se deberá practicar el método declarado; quiero decir, que se diferenciará la tal equacion, é igualará con cero el numerador ó el denominador de la fraccion que salga igual á $\frac{dy}{dx}$.

577 En esto consiste el método llamado de máximos y mínimos, á buen seguro uno de los mas socorridos del Analisis, y sirve *para averiguar qual es la máxima ó la mínima de muchas cantidades que crecen ó menguan con arreglo á una misma ley*, ó, en general, *qual es la que tiene en mayor grado que otra qualquiera de todas sus semejantes, algunas propiedades determinadas.*

578 Con la mira de hacer mas perceptible toda-

devía la utilidad de este método, y segura su aplicacion, hemos de prevenir que de lo dicho (574) se infiere que una cantidad puede llegar por dos caminos distintos á ser la máxima entre sus semejantes; quando empieza creciendo como PM', y vá despues menguando, ó quando empieza creciendo como PM, y de repente para en llegando á ser QR; pero en este último caso es á un tiempo la máxima de todas las ordenadas que rematan en la convexidad, y la mínima de todas las que rematan en la concavidad. Tambien son dos los caminos por donde puede llegar una cantidad á ser la mínima de sus semejantes; porque primero puede empezar menguando como PM, para crecer despues; ó primero mengua como $P'M''$, y para de repente; en este último caso es á un tiempo un máximo y un mínimo; es un mínimo respecto de la rama $M'T'M''$, y un máximo respecto de la rama MTM.

579 Por consiguiente, el que quiera distinguir si una cantidad es un máximo ó un mínimo, ó uno y otro, ha de suponer que sea a el valor de x correspondiente al máximo ó al mínimo, y substituir sucesivamente en la cantidad propuesta en lugar de x las cantidades $a+q$, a, $a-q$. Si la substitucion de las dos cantidades extremas diere cantidades menores que la substitucion de la cantidad media, la cantidad será un máximo; si diere cantidades mayores que la substitucion de la cantidad media, la cantidad será un mínimo; finalmente, si la substitucion del uno de los extremos dá una cantidad real, y la substitucion del otro dá una cantidad imaginaria, la cantidad será á un tiempo un máximo y un mínimo.

580 Quando al determinar un máximo ó un mínimo, es tal el valor de la variable que hace negativo el valor del máximo ó mínimo, es señal de que

Fig. el máximo ó mínimo que representa no corresponde á la cuestion conforme viene propuesta, sí de que pertenece á otra cuestion con algunas circunstancias contrarias á las que incluía la cuestion que se resolvió.

Se me propone v. gr. que parta la línea AB en el punto C, con la circunstancia que el cociente del
83. quadrado de AC, dividido por BC sea el mínimo posible. Llamaré a la línea dada AB; x, la parte AC; la otra parte BC será $a-x$; y el cociente será $\frac{x^2}{a-x}$. La diferencial de esta cantidad, ó de $x^2(a-x)^{-1}$ será $2xdx(a-x)^{-1} + x^2dx(a-x)^{-2} = 0$, ó $\frac{2xdx}{a-x} + \frac{x^2dx}{(a-x)^2} = 0$, ó $2axdx - x^2dx = 0$, ó $(2a-x)x = 0$, cuya equacion dá $x = 0$, ó $2a - x = 0$. El primer valor dá un mínimo que se conoce sin cálculo. El segundo valor dá $x = 2a$; substituido este valor en $\frac{x^2}{a-x}$, transforma la cantidad en $\frac{4a^2}{-a} = -4a$. Luego el mínimo no corresponde á la cuestion con las circunstancias expresadas; pero si considero con algun cuidado el valor $x = 2a$, echo de ver que el punto C no puede estar entre A y B, y que la cuestion se podrá resolver quando sea circunstancia hallar el punto C en la AB, prolongada mas allá de B respecto de A. Si con esta condicion llamo AC, x; la distancia BC ya no será $a-x$, sino $x-a$, y el cociente pedido será $\frac{x^2}{x-a}$, de cuya expresion la diferencial, igualada con cero, será $\frac{2xdx}{x-a} - \frac{x^2dx}{(x-a)^2} = 0$, ó, despues de practicadas las reducciones correspondientes, $x^2dx - 2axdx = 0$, que dá $x = 2a$, como antes; y como la substitucion de esta cantidad en $\frac{x^2}{x-a}$ la transforma en $4a$, es señal de que corresponde un mínimo á este caso.

Si

Si igualo con cero el denominador $(x-a)^{\frac{1}{3}}$ de la diferencial, sacaré $x = a$, que representa un máximo conforme debe ser; porque quando $x = a$, la cantidad es infinita (495). No por eso le falta el caracter distintivo del máximo, porque supóngase x mayor ó menor que a, siempre sale una cantidad menor que si supongo $x = a$.

581 Siempre que en la expresion de una cantidad que ha de ser un máximo ó un mínimo hay algun multiplicador ó divisor constante, se le puede desechar antes de practicar la diferenciacion. Supongamos que $\frac{ay}{b}$ exprese en general una cantidad que ha de ser un máximo ó un mínimo, siendo a y b cantidades constantes; será preciso que $\frac{ady}{b} = 0$, y una vez que ni a ni b son cero, es indispensable que sea $dy = 0$. Por consiguiente el paradero del cálculo es el mismo que si sola y fuese la expresion de la cantidad que ha de ser un máximo ó un mínimo, el mismo que hubiera sido si antes de diferenciar se hubiese borrado el multiplicador a y el divisor b constantes. Luego lo propio será, para el caso, diferenciar sola la cantidad que ha de ser un máximo, que diferenciar uno de sus múltiplos, submúltiplos, ó alguna de sus potencias.

582 Cuestion 1. *Partir un número* a *en dos partes, con circunstancia que el producto de la una por la otra sea mayor que el producto de otras dos partes qualesquiera del mismo número.*

Llamo x la una de las dos partes, con lo que la otra es $a-x$, y el producto de ambas $ax-xx$; por lo dicho (476) será $y = ax-xx$, $dy = adx - 2xdx$, y por consiguiente $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a-2x}$. Si suponemos el numerador igual con cero, sacaremos $1 = 0$, absurdo manifiesto; si hay un máximo, le

 sa-

Fig. sacaremos igualando con cero el denominador. Hagámoslo, pues, y sacaremos $a - 2x = 0$, que dá $x = \frac{1}{2}a$, cuyo valor nos está diciendo que de qualquier modo que se parta en dos partes un número dado, el producto de ambas será el mayor, quando cada una de las dos partes sea la mitad del número propuesto.

583 Cuestion 2. *Determinar el rectángulo máximo que se pueda inscribir en un triángulo dado* ADC.

Sea b la base AC del triángulo; a, su altura BD;
84. x, la altura BE del rectángulo inscripto. Las paralelas AC, HI dán $BD : AC :: DE : HI$, ó, $a : b :: a - x : \frac{ba - bx}{a} = HI$. Por consiguiente la area del rectángulo $HI \times BE = \frac{bax - bx^2}{a} = \frac{b}{a}(ax - x^2)$. Diferenciando $ax - x^2$, y haciendo la diferencial igual con cero, sacaremos $x = \frac{1}{2}a$, cuyo valor manifiesta que el rectángulo máximo que se pueda inscribir en el triángulo es aquel cuya altura es la mitad de la altura del triángulo.

584 Cuestion 3. *Determinar entre muchos triángulos rectángulos, que tienen una misma hypotenusa dada, el de la máxima superficie.*

85. Llamo la hypotenusa dada AC, a; AB, x; BC, y; será $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, y por lo mismo $\frac{xy}{2} = \frac{x}{2}\sqrt{(a^2 - x^2)} =$ la area del triángulo. Diferencio su quadrado $\frac{a^2x^2}{4} - \frac{x^4}{4}$, é igualando su diferencial $\frac{a^2xdx}{2} - x^3dx$ con cero, saco $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, é $y = \sqrt{(a^2 - x^2)} = a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

585 Cuestion 4. *Hallar entre todos los triángulos rectilíneos rectángulos de una misma area, uno tal, que la suma de sus lados* AB+BC *sea la menor posible.*

85. Si llamo x el un lado AB; y el otro lado BC

pero

perpendicular al primero; a, la area del triángulo; será $\frac{xy}{2} = a$, que dá $y = \frac{2a}{x} = BC$. Luego la suma de los dos lados será $x + \frac{2a}{x}$; igualando con cero la diferencial $dx - \frac{2adx}{xx}$ de esta suma, y reduciendo, saco $x = AB = \sqrt{2a}$, y $BC = \frac{2a}{x} = \sqrt{2a}$. Luego los dos lados serán iguales uno con otro.

586 Cuestion 5. *Determinar entre todos los paralelipipedos de una misma superficie y altura, qual es el de mayor cabida.*

Llamemos a la altura; cc, la superficie del paralelipipedo; x el uno, é y el otro, de los dos lados del rectángulo de la base. Toda la superficie se compone de seis rectángulos, entre los quales hay dos cuyo lado ó altura es a, y x la base; hay otros dos cuya altura es a, é y la base; finalmente hay otros dos cuya base es x e y la altura. Por consiguiente la expresion de toda la superficie será $2ax + 2ay + 2xy$, esto es, $2ax + 2ay + 2xy = cc$. Por lo que mira á la solidez, sabemos que es axy; y como ha de ser la mayor de todas las de igual superficie, es preciso que su diferencial $axdy + aydx = 0$, ó que $xdy + ydx = 0$ ([illegible]). Pero de la equacion $2ax + 2ay + 2xy = cc$, la qual está diciendo que la superficie de todos estos paralelogramos es constante, sacamos $2adx + 2ady + 2xdy + 2ydx = 0$; luego si substituimos en esta equacion el valor de dx sacándole de la primera, hallaremos, despues de executadas todas las reducciones, $x = y$; luego la base ha de ser un quadrado.

Para determinar su lado, hemos de substituir en lugar de y su valor x en la equacion $2ax + 2ay + 2xy = cc$, la qual con esto se transforma en $4ax + 2x^2 = cc$, de cuya resolucion sacaremos $x = -a \pm$

Fig. $\sqrt{(aa+\frac{1}{2}cc)}$; y como la raiz negativa $-a-\sqrt{(aa+\frac{1}{2}cc)}$ no sirve para el caso actual, el valor que buscamos de x será $=-a+\sqrt{(aa+\frac{1}{2}cc)}$.

Si queremos averiguar qual ha de ser la altura a para que el paralelipipedo sea el de la solidez máxima entre todos los de igual superficie, consideraremos que por ser a la altura, la base ha de ser un quadrado, la solidez será axx; es, pues, preciso que la diferencial de axx, en el supuesto de ser variables a y x, sea o, y por consiguiente $2axdx + xxda = 0$, ó $2adx+xda=0$, dividiendo por x. Pero como la equacion $4ax+2x^2=cc$, que expresa la superficie, es entonces constante, dará, despues de diferenciada, $4adx+4xda+4xdx=0$; y con substituir en esta equacion en lugar de da su valor sacado de la equacion $2adx+xda=0$, saldrá, despues de executadas todas las reducciones, $x=a$; luego el paralelipipedo ha de ser un cubo, una vez que su lado ó altura a ha de ser igual al lado x del quadrado base suya.

En quanto al lado de este cubo, le hallaremos con substituir en lugar de a su valor x en la equacion $4ax+2x^2=cc$, la qual con esto se transforma en $4x^2+2x^2=cc$, ó $6x^2=cc$, y esta dá $x=\sqrt{(\frac{cc}{6})}$. Luego entre todos los paralelipipedos de igual superficie, el de la solidez máxima es el cubo cuyo lado es igual á la raiz quadrada de la sexta parte de la superficie.

587 Question 6. *Determinar el cilindro máximo que se pueda inscribir en un cono dado.*

Llamemos a la altura BP del cono; b, el diámetro AC de su base; x, el diámetro $FG=DE$ 86. del cilindro, considerándole como variable; p, la area de un círculo cuyo diámetro $=1$.

Ya que las areas de los círculos tienen unas con

con otras la misma razon que los quadrados de sus diámetros (I, 580), será $1^2 : x^2 :: p : px^2 =$ la area del circulo *FIGL*. De los triángulos semejantes *APB*, *ADF* sacaremos $AP : BP :: AD : DF$, ó $\frac{1}{2}b : a :: \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}x : \frac{ab - ax}{b} = DF$, cuyo valor multiplicado por la area px^2 hallada poco ha, dará $\frac{pabx^2 - pax^3}{b}$, y será la expresion de la solidez del cilindro que ha de ser un máximo; harémos por lo mismo su diferencial $\frac{2pabxdx - 3pax^2dx}{b} = 0$, de donde sacaremos $x = \frac{2b}{3}$, y $DF = \frac{a}{3}$. Infiérese de aquí que el cilindro máximo inscripto en el cono dado es aquel cuya altura es un tercio de la altura del cono. Fig. 86.

588 Cuestion 7. *Hallar las dimensiones de una medida cilíndrica tal, que con la menor superficie interior posible, tenga una cabida determinada, esto es, que quepa en ella una cantidad determinada de agua, trigo, &c.*

Llamemos x el diámetro *AB* de la medida; y, la altura *AD*; c, su cabida; p, la circunferencia de un círculo cuyo diámetro $= 1$. Harémos esta proporcion $1 : x :: p : px$, cuyo quarto termino es la periferia de la base, y su producto por la altura y será la expresion de la superficie cóncava del cilindro. Si á esta le añadimos la superficie de la base, sacaremos toda la superficie interior del expresado cilindro. La superficie de la base la sacarémos multiplicando (I, 556) la periferia px por $\frac{x}{4}$; luego $\frac{px^2}{4}$ será la expresion de la area de la base, cuyo producto por la altura y expresará la cabida de la medida; y como suponemos que c es la tal cabida, será $\frac{pyx^2}{4} = c$; luego la superficie 87.

 cón-

Fig. cóncavo $pxy = \frac{4c}{x}$. Por consiguiente toda la superficie interior de la medida será $\frac{4c}{x} + \frac{px^2}{4}$. Si igualamos su diferencial con cero, tendrémos $-\frac{4cdx}{x^2} + \frac{pxdx}{2} = 0$, $-8c + px^3 = 0$; y finalmente $x = \sqrt[3]{\frac{8c}{p}} = 2\sqrt[3]{\frac{c}{p}}$. Ya que $px^3 = 8c$, y $px^2y = 4c$, si dividimos la primera de estas dos equaciones por la segunda, saldrá $\frac{x}{y} = 2$; luego $x = 2y$, y por último será la medida qual se pide, siempre que el diámetro de su base sea duplo de su altura.

589 Cuestion 8. *Determinar entre todos los conos de una superficie dada, el que tiene la mayor solidez.*

Sea s la superficie dada; x, el semidiámetro AC
88. de la base; y, el lado obliquo AB; p, la periferia de un círculo cuyo diámetro $= 1$. Por estos supuestos la circunferencia de la base será $2px$, la area px^2, y la superficie convexa del cono será pxy, esto es, la mitad del producto de la periferia de la base por el lado obliquo (I. 637). Como toda la superficie $= px^2 + pxy = s$, será $y = \frac{s}{px} - x$; y por consiguiente la altura $CB = \sqrt{[(AB)^2 - (AC)^2]} = \sqrt{(\frac{s^2}{p^2x^2} - \frac{2s}{p})}$; multiplicando este valor por $\frac{px^2}{3}$, esto es, por el tercio de la area de la base (I. 646), dará el producto $\frac{px^2}{3}\sqrt{(\frac{s^2}{p^2x^2} - \frac{2s}{p})}$, el qual será la expresion de la solidez del cono. Como ha de ser un máximo, lo será tambien su quadrado $\frac{s^2x^2}{9} - \frac{2spx^4}{9}$, cuya diferencial $\frac{2s^2xdx}{9} - \frac{8spx^3dx}{9} = 0$; de aquí sacarémos $4px^2 = s$, y por lo mismo $x = \sqrt{}$