Mathesis 11 (1995) 17-57
[illegible]

El realismo en matemáticas

Anastasio Alemán

Resumen

En este artículo nos ocupamos de examinar dos de los argumentos fundamentales ofrecidos por Penelope Maddy en apoyo de una determinada concepción del realismo en matemáticas. El primero tiene como base la tesis de que los conjuntos elementales son entidades no abstractas percibidas por los seres humanos. El segundo apela al conocido argumento basado en la indispensabilidad de la matemática para ciencias que, como la física, tratan de lo real. Mantendré que ninguno de los dos argumentos logra su objetivo. El primero, porque se apoya en una tesis más que dudosa y porque, aun suponiendo verdadera la tesis, no se seguiría de ella la existencia de conjuntos independientes de la mente. El segundo, porque apela tácitamente a un supuesto inaceptable, a saber, que las confirmaciones de la teoría física serían confirmaciones de la matemática empleada en ella.

Abstract

We are dealing in this article with the examination of two of the fundamental arguments offered by Penelope Maddy in support of a particular conception of realism in mathematics. The first one takes as a basis the thesis that an elemental set is a non-abstract entity perceived by human beings. The second one resorts to the well known argumentation based on the premise that mathematics is essential to sciences like physics which deal with the real. I will maintain that none of both arguments reaches its goal. The first one because is supported by a highly questionable thesis, and because, even supposing such thesis to be true, the existence of sets independent from the mind would not be derived from this. The second one because is tacitly appealing to an unacceptable assumption, that is to say, that confirmations of the physical theory are confirmations of the mathematics used for it.

1

Comenzando con una metáfora podría decirse que la 'ola realista' formada durante los últimos años en el contexto teórico de la filosofía de la ciencia, con la obra de Popper, Putnam, Quine y otros, ha llegado, y con sorprendente ímpetu, al contexto teórico de la filosofía de la matemática, alcanzando una de sus cimas extremas en la reciente obra de Maddy, de homólogo título al de este artículo, y en el que nos ocuparemos de analizar algunos de los argumentos que se han ofrecido en apoyo del realismo en matemáticas.

El término 'realismo' es uno de esos términos filosóficos que como otros *ismos* (pragmatismo, ficcionalismo, convencionalismo,[1] etc.) comparten el singular destino de que la falta de claridad en torno a su significado corre pareja a la frecuencia de su uso por parte de los filósofos. Aquí no nos vamos a detener en un análisis de los distintos significados propuestos, o presupuestos, para este término, sino que nos vamos a limitar a indicar en qué sentido lo emplearemos en lo que sigue.

En mi opinión, los diferentes modos de entender en qué consiste el realismo vienen a coincidir en esto: según el realismo, existen objetos que tienen propiedades, y tanto su existencia como su naturaleza, o esencia, son independientes de la existencia y estructura cognoscitiva de cualquier sujeto cognoscente.[2] Esta caracterización general permite dar cuenta de algunas de las formas más específicas de entender el realismo en función de cuál sea el dominio de objetos y propiedades al que se atribuye existencia independiente. Así aparecería una especie de gradación que iría desde la afirmación de existencia independiente a sólo los objetos materiales macroscópicos observables, del tipo mesas,

1. He intentado dilucidar el significado de este último término [1994] y he analizado algunas de las objeciones más importantes planteadas a una concepción convencionalista de la lógica y de la matemática [1993] y [1995].
2. No pretendo sugerir que el sentido en el que he propuesto entender el término 'realismo' se encuentre a salvo de cualquier ambigüedad. Así, por ejemplo, la expresión 'independiente de la estructura cognoscitiva del sujeto' puede recibir diferentes interpretaciones. Kirkham [1992, 76 ss.] ha señalado algunas de las posibles interpretaciones que puede recibir la expresión análoga 'independiente de la mente', y en Moulines [1991, 136 ss.] podemos encontrar una interesante distinción entre realismo ontológico y realismo epistemológico que nosotros no hemos deslindado explícitamente. No obstante, podríamos considerar la posición de Maddy desde el punto de vista de esta distinción e indicar que su realismo ontológico (la tesis de que existen conjuntos como entidades independientes de la mente) es una consecuencia de su realismo epistemológico (la tesis de que conocemos la existencia y propiedades de algunos conjuntos mediante la percepción y que nuestra creencia en su existencia está justificada por el argumento de indispensabilidad).

árboles, océanos, etc., a la atribución de existencia a entidades no observadas, pero observables, tales como los cefalópodos del cámbrico, ¿los electrones?, hasta llegar a la atribución de existencia a entidades, *prima facie* no observables, tales como números, conjuntos, conceptos o deidades.

2

He dicho *prima facie* porque la aparente unanimidad sobre la no observabilidad de los últimos tipos de entidades, al menos respecto a las entidades matemáticas, ha sido rota recientemente por Maddy al mantener que los conjuntos no sólo son entidades observables, sino entidades efectivamente observadas por los humanos. No se trata pues de entidades no observables postuladas solo para dar mejor cuenta de lo que observamos, sino de entidades directamente obervadas por nosotros. De este modo si estamos dispuestos a dar el paso de lo observado a lo existente, disponemos entonces de una nueva justificación para la creencia en la existencia de conjuntos: la percepción.

La percepción suministraría así, desde el punto de vista de Maddy, una justificación para, al menos, los enunciados matemáticos elementales del tipo '2 + 2 = 4' o 'hay conjuntos con dos elementos' o aun "la unión de dos conjuntos disyuntos con dos y tres elementos respectivamente es un conjunto con cinco elementos" [Maddy 1990a, 31]. Esto no significa que toda la teoría de conjuntos, por ejemplo, haya de ser justificada por medio de la percepción, los enunciados de la teoría de conjuntos de más alto nivel, tales como el axioma de elección, serían justificables apelando a otro tipo de criterios más generales y vagos, tales como simplicidad[3], conexiones interteóricas, rendimiento explicativo, etc. [*Ibid.*, 75, 145] en abierta analogía con los criterios de justificación en la metodología de las ciencias empíricas. Sin embargo, no nos ocuparemos aquí de analizar el modo en el que Maddy aplica estos últimos criterios al caso de la matemática, sino que cen-

3. Maddy apela, en reiteradas ocasiones, a la simplicidad como criterio de elección entre teorías, pero van Fraassen ha señalado la dificultad de invocar este criterio desde un punto de vista realista, pues "es ciertamente absurdo pensar que el mundo es más probablemente simple que complicado (a menos que se tengan ciertas opiniones teológicas o metafísicas no aceptadas usualmente como factores legítimos en la inferencia científica)" [van Fraassen 1980, 90]. Un meritorio intento de responder a esto desde un punto de vista realista se encuentra en Musgrave [1985, 202 ss.], aunque no creo que logre su objetivo.

traremos nuestra atención en aquellos dos que, en mi opinión, resultan centrales para apoyar su concepción de la matemática.

3

De entre los criterios evocados por Maddy como medios de justificación de los enunciados matemáticos hay dos de ellos que se presentan como más firmes candidatos para apoyar una interpretación realista de la matemática. El primero, mencionado antes y peculiar de Maddy, lo constituiría la percepción como medio de justificación de las afirmaciones de existencia de conjuntos (y por tanto de los números concebidos como propiedades de conjuntos). El segundo, que ha sido invocado por otros filósofos (tales como Quine y Putnam) además de Maddy, toma la forma de un argumento, el denominado 'argumento de indispensabilidad'.

4

Según Maddy, el sujeto no sólo percibe, por ejemplo, dos huevos en un cartón, sino, además, el conjunto formado por los dos huevos. Desde este punto de vista un enunciado como 'ahí hay un conjunto de dos manzanas' sería, o expresaría, un juicio de percepción o, en términos más actuales, un enunciado de observación. Ahora bien, ¿qué noción de enunciado de observación se está presuponiendo aquí? Maddy no nos lo dice, pero según un filósofo al que recurre en puntos fundamentales, Quine, una de las características esenciales de los enunciados de observación[4] es que los testigos presentes en la ocasión coincidan en el asentimiento o disentimiento ante el enunciado de observación propuesto; así 'Juan es moreno' resulta un enunciado de observación según este criterio, pero 'Juan es soltero' no, y en este caso la razón de ello resulta patente. Pero no creo que pueda mantenerse desde este punto de vista que el enunciado 'ahí hay un conjunto con tres elementos' (*v.g.* el conjunto cuyos elementos son cada una de las dos manzanas y el conjunto formado por las dos manzanas) sea un enunciado observacional, y tendría que serlo si es que el enunciado 'ahí hay un conjunto de dos manzanas' fuera observacional. Pero no creo que este último enunciado, aparentemente más elemental, resulte ob-

4. Un análisis de los enunciados de observación en Quine y de los problemas que encierra esta noción se encuentra en Alemán [1992]

servacional. Si señalamos a un cesto que contiene dos manzanas y preguntamos al sujeto qué objetos *percibe* dentro del cesto no creo que dijera nunca que percibe dos manzanas *y* un conjunto formado por dos manzanas, o un conjunto formado por el conjunto anterior junto con las dos manzanas o ... (¡salvo, al parecer, que el sujeto cuestionado sea la propia Maddy!).

En cualquier caso, una cosa parece clara, a saber, que la cuestión de si el sujeto percibe o no además de las dos manzanas en el cesto un conjunto formado por las dos manzanas es una cuestión empírica y propiamente hablando corresponde a la psicología empírica intentar averiguarlo. La afirmación de Maddy de que el sujeto *percibe*, de hecho, tal o cual conjunto es una afirmación empírica, por más que tal afirmación no se presente justificada por ninguna investigación de esa índole sobre las percepciones del sujeto referentes a conjuntos. Sin embargo, las consideraciones de Maddy respecto al asunto, así como mis propias observaciones críticas sobre él, forman parte más bien de lo que se ha dado en llamar 'psicología de sillón'. Es desde su 'sillón' desde donde Maddy cree verdadera la tesis de que Juan percibe un conjunto en determinadas circunstancias y es desde mi 'sillón' desde donde no encuentro ninguna verosimilitud en su tesis.[5]

5

Pero todo eso no es óbice para inquirir qué se seguiría del supuesto de que la tesis empírica de Maddy fuera correcta; y al planteamos esta cuestión abandonamos el campo ajeno de la psicología empírica y nos reintroducimos en el dominio de la investigación lógico-conceptual.

5. La incursión de Maddy en el campo de la psicología empírica, y aun en el de la neurología, va más lejos de lo que sugiere lo anteriormente dicho. Maddy habla de la existencia, en nuestro cerebro, de un *detector de conjuntos* que es el que nos capacitaría para percibir conjuntos, así como de un *detector de triángulos* [1990a, cap. 2]. Tales detectores de conjuntos y triángulos estarían formados por ciertos *agrupamientos de células* [cell-assemblies]. Este tipo de afirmaciones han dado pie a una crítica de Chihara [1990, 202] no carente de sorna:

> ... la persona que ve los huevos como miembros del conjunto de huevos en el cartón pero que no ve el conjunto, difiere de la persona que ve tanto los huevos como miembros del conjunto de huevos cuanto ve también el conjunto. ¿Qué tiene la última persona que no tiene la primera? ¿Carece del detector neural de conjuntos que Maddy postula? ¿O es que el detector de conjuntos no funciona bien en el caso de la primera? ¿Qué tendría que hacer el primero para ser capaz de ver el conjunto? ¿Necesitaría entrenamiento en la detección de conjuntos? Imagínese un curso de detección de conjuntos. ¿cómo sería tal curso?

Supongamos pues que efectivamente Juan percibe además de las dos manzanas el conjunto por ellas formado. ¿Qué se sigue de esto? Maddy pretende, en último término, que esto constituiría una prueba de la existencia de conjuntos a la par con la existencia de manzanas. Los conjuntos serían tan reales como las manzanas y para ambos tipos de entidades su naturaleza y existencia sería independiente de la existencia de cualquier lenguaje en el que pudieran ser representados. Estamos pues ante un realismo respecto a las entidades matemáticas, v.g., ante los conjuntos. No se trata del conocido realismo de tipo platónico que se ve en la necesidad de postular una facultad especial de conocimiento, la intuición, para poder explicar el acceso cognoscitivo a las entidades matemáticas, sino de un realismo de tipo empirista que afirma que el medio de conocimiento de tales entidades, al menos de las más elementales, no es diferente al medio de conocimiento de los objetos físicos macroscópicos. Objetos físicos macroscópicos y conjuntos elementales se conocen del mismo modo: mediante la percepción.

6

Ahora bien ¿es correcto inferir la tesis realista del hecho —suponiendo que lo fuera— de que percibamos conjuntos? Lo sería sólo si la explicación realista fuera la única explicación posible de tal hecho o, si habiendo otras explicaciones, resultara a la postre que la explicación realista resulta preferible a las demás por tales o cuales razones. Intentaré mostrar en lo que sigue que, al menos, hay una explicación alternativa al realismo empirista de Maddy del (supuesto) hecho de la percepción de conjuntos y que tal explicación resulta tan plausible, o más, que la interpretación propuesta por Maddy. Si logramos mostrar esto, entonces la opción de Maddy por el realismo empirista en matemáticas no estaría suficientemente justificada por su argumento derivado de la percepción de conjuntos.

7

Supongamos así que de hecho percibimos conjuntos, esto es, supongamos que, al percibir cualquier objeto, percibimos también su conjunto unidad, o que cuando percibimos, por ejemplo, dos objetos, percibimos además el conjunto que contiene a ambos objetos como elementos y así sucesivamente para tríos, cuaternas, etc. Pues bien, el punto clave de este asunto es que este hecho admite también una interpretación natural de corte kantiano. Así podríamos argüir que del mismo modo que percibimos los objetos (externos[6]) *en* algún lugar del espacio y *en* algún momento del tiempo, los percibimos también *en* algún conjunto u otro.

Puesto que no habría objeto (externo) percibido que no estuviera sometido a las condiciones de estar en algún lugar del espacio, en algún momento del tiempo y en algún conjunto, tales condiciones estarían funcionando como condiciones de posibilidad de la percepción de objetos. Estaríamos así ante condiciones constitutivas de la *forma* de toda percepción más que del *contenido* concreto de cada percepción particular dada. Desde este punto de vista, tales formas de la percepción formarían parte de la estructura perceptiva del sujeto, no se trataría, por tanto, de formas abstraídas por el sujeto de sus particulares percepciones de los objetos físicos.

8

La última frase parece ofrecer la oportunidad de formular una objeción obvia, pues hemos dicho que tales formas perceptivas *no son abstraídas* de las percepciones de los objetos, sino que forman parte de la estructura perceptiva del sujeto y esto tiene todo el aspecto de una *petitio principii*: nos hemos limitado a hacer una afirmación crucial sin haber intentado siquiera bosquejar una 'demostración' o, al menos, argumentación de apoyo a ella.

Cuando Kant indicó que espacio y tiempo constituyen las formas *a priori* de la percepción de objetos (externos) y que por consiguiente no son abstraídas *a posteriori* de las percepciones particulares de objetos dados, ofreció a continuación una argumentación de tipo trascendental que, de tener éxito, justificaría su afirmación. La clave de su argumento consistía en señalar que si las formas de espacio y tiempo (fundamento de la matemática) fueran abstraídas *a posteriori* de la experiencia con objetos, entonces tendrían el carácter contingente de estas experiencias y *no sería posible*, por tanto, dar cuenta del carácter necesario que, según Kant, tienen las proposiciones matemáticas. Kant pensó que su argumento ofrecía la única explicación posible del carácter necesario de las proposiciones de la matemática, es decir, que si verdadero, entonces era necesariamente verdadero.

6 La cualificación de 'externo' se debe a que, como es sabido, desde un punto de vista kantiano, el espacio no formaría parte de las condiciones trascendentales de la percepción de objetos internos, v.g., de los estados empíricos de conciencia del sujeto.

Pero nosotros no necesitamos aquí ningún argumento de ese tipo, pues nosotros no pretendemos mantener que la tesis de que la noción de conjunto formaría parte de la estructura perceptiva del sujeto y no es abstraída *a posteriori* de las percepciones particulares de éste sea verdadera; y mucho menos que se trate de una tesis necesariamente verdadera.

9

Nuestro argumento es más modesto. Se trata simplemente de indicar que del hecho (tomado como supuesto) de que percibimos conjuntos no se sigue que la noción de conjunto sea adquirida por abstracción de las experiencias perceptivas, pues tal hecho resulta perfectamente *compatible* con la interpretación de corte kantiano sugerida anteriormente y esta última interpretación es claramente incompatible con la interpretación de Maddy. Es decir, la interpretación kantiana sugerida constituye una interpretación posible del hecho (supuesto) de la percepción de conjuntos, sin embargo, no constituye la única interpretación posible de este hecho (ya que admitimos que la interpretación de Maddy representa otra posible interpretación compatible con tal hecho) y por consiguiente no se trata de una interpretación necesaria (como creyó Kant de la suya) de tal hecho.

Ahora bien, pese a que ambas interpretaciones resultan igualmente compatibles con el hecho supuesto, lo son por separado, pues las dos interpretaciones resultan obviamente incompatibles entre sí: según Maddy [1990a, 71], los conjuntos son características de los objetos en sí mismos [the things themselves] que poseen existencia independiente del sujeto perceptor, según la otra interpretación la noción de conjunto forma parte de la estructura perceptiva del sujeto y no representa, por tanto, ningún rasgo que tengan los objetos en sí mismos.

De este modo, si ambas interpretaciones son compatibles con el hecho, pero incompatibles entre sí, entonces ninguna de ellas puede ser inferida correctamente del hecho en cuestión. Por consiguiente, si no se quiere mantener injustificadamente la tesis de Maddy, se necesita un argumento adicional que permita descartar la interpretación alternativa de corte kantiano. Sin embargo, sería vano esperar encontrar tal argumento en el libro de Maddy, el nombre de Kant ni siquiera aparece en el índice de nombres de su ensayo sobre filosofía de la matemática.

10

¿Quedan, entonces, ambas interpretaciones a la par en cuanto a su aceptabilidad? No entraré aquí en un examen detallado de esta cuestión, pues mi objetivo era tan sólo mostrar que la interpretación de Maddy no era la única posible del presunto hecho de la percepción de conjuntos. Puede señalarse, no obstante, que en la interpretación de Maddy se plantean al menos dos importantes dificultades que no aparecen en la interpretación rival.

La primera consiste en lo siguiente: Maddy [1990a, 59] mantiene que el conjunto formado por dos huevos tiene la misma localización espacio-temporal que éstos y, además, que los conjuntos ya no cuentan como entidades abstractas. Pero sin duda el conjunto formado por los dos huevos constituye una entidad diferente de cualquiera de los huevos, v.g. tienen propiedades diferentes: el conjunto posee cardinalidad dos, pero no así ninguno de los huevos. Sin embargo, pese a tratarse de tres entidades no abstractas y diferentes entre sí, una de ellas, el conjunto, ocupa la misma región espacio-temporal ocupada por las otras dos, y esto choca claramente con el principio de individuación espacio-temporal para entidades no abstractas, a saber, que entidades no abstractas diferentes no pueden ocupar la misma región espacio-temporal. (Strawson [1992, 54 *ss*] por ejemplo, ha vuelto a subrayar este punto en su último libro.)

La segunda dificultad es la que ya señalara Kant [1978, A 24] para cualquier interpretación empirista, a la vieja usanza, de la matemática: si las verdades matemáticas (tales como '2 + 2 = 4' o 'la suma de los ángulos de un triángulo (euclídeo) mide dos rectos') están basadas en la observación entonces la certeza epistémica de tales enunciados es el tipo de certeza inductiva que corresponde a cualquier enunciado general empírico, tal como 'los hombres poseen veintitrés pares de cromosomas'. Deberíamos decir entonces que según lo observado hasta ahora tales enunciados son verdaderos, que cada nueva instancia observada que satisfaga el enunciado aumenta el grado de corroboración o verosimilitud del enunciado, pero que es posible que el enunciado se muestre falso en observaciones posteriores.

Pero resulta suficientemente obvio que la descripción anterior no se adecua al uso que hacen los matemáticos de sus enunciados. En ningún caso se dedican a describir observaciones en la naturaleza que prueben la verdad de sus enunciados o a diseñar experimentos que puedan corroborarlos o falsarlos. Si se asumiera la concepción de Maddy con todas sus consecuencias, habría que decir que, propiamente hablando, los matemáticos no se comportan racionalmente, pues los enunciados de la matemática (al menos los más elementales) pese a deber su verdad (o falsedad) a la observación no son nunca sometidos a contrastación empírica por los matemáticos. Por mi parte, considero que esta consecuencia constituye un contraejemplo decisivo contra tal concepción.

11

A menudo, se ha ofrecido otro argumento en apoyo de las tesis realistas en matemáticas. Se trata de lo que se ha dado en llamar 'argumento de indispensabilidad'.

El argumento comienza por señalar el hecho obvio de que una ciencia empírica como la física, que no sólo ofrece explicaciones de los fenómenos que acontecen en nuestro entorno, sino que, sobre todo, permite *predecir* con envidiable exactitud la ocurrencia de multitud de diferentes tipos de fenómenos, realiza esta tarea con la *indispensable* ayuda de la matemática.

Indispensable porque no parece que pueda haber modo alguno, por ejemplo, de predecir las posiciones de los planetas en el firmamento, o de construir y enviar una nave espacial a la Luna, sin el empleo de complejos cálculos matemáticos.

Por otra parte, de este hecho se infiere (de modo nada obvio) que la matemática tiene que ser verdadera, pues de lo contrario ¿cómo podríamos explicar su aplicación a teorías físicas que permiten predecir con éxito los fenómenos? Ahora bien, continúa el argumento: si la matemática es verdadera, y puesto que es un hecho cierto que en ella cuantificamos sobre entidades matemáticas (números, funciones, conjuntos, etc.), entonces tales entidades matemáticas tienen que existir.

Salta a la vista que el paso anterior, que procede de la cuantificación sobre objetos matemáticos a la afirmación de la existencia de éstos, no es otra cosa que la aplicación del conocido criterio ontológico de Quine. Ha sido Putnam [1972, 57] quien con más claridad ha señalado el vínculo entre el argumento de indispensabilidad y el criterio ontológico de Quine:

> La cuantificación sobre entidades matemáticas es indispensable para la ciencia, tanto para la ciencia formal, como para la física; por consiguiente, deberíamos aceptar tal cuantificación, pero esto nos compromete a aceptar la existencia de las entidades matemáticas en cuestión. Este tipo de argumento procede, por supuesto, de Quine, quien, desde hace años, subrayó tanto la indispensabilidad de la cuantificación sobre entidades matemáticas, como la deshonestidad intelectual de negar la existencia de lo que uno presupone diariamente.

Por su parte, Maddy, aunque señala que este argumento deja inexplicada la aceptación de las partes más abstractas de la matemática, como por ejemplo la hipótesis del continuo o el axioma de elección (por carecer de aplicación fuera de la propia matemática) y que los enunciados matemáticos elementales (del tipo '2 + 2 = 4') reciben una justificación directa mediante la percepción, del modo que tuvimos ocasión de examinar anteriormente, no obstante, no deja duda alguna en cuanto a su aceptación del argumento mencionado: "Estamos comprometidos a la existencia de objetos matemáticos porque son indispensables para nuestra mejor teoría del mundo y aceptamos esa teoría" [Maddy 1990a, 30].

Este tipo de argumento ha sido aceptado no sólo por Quine, Putnam, Lakatos, Tymozko y Maddy, entre otros, sino también por filósofos como Field,[7] que mantienen una posición filosófica radicalmente diferente a la de éstos; así que nuestras críticas al argumento no cabe entenderlas únicamente como críticas a la posición de esta última.

12

En el argumento de indispensabilidad hay un paso crítico: el que va de la verdad de la teoría a la existencia de las entidades postuladas por la teoría, la existencia de las entidades postuladas por la teoría se deduce (vía criterio ontológico de Quine) de la verdad de la teoría. Así, si probamos la verdad de la teoría habremos demostrado con ello, por *modus ponens*, la existencia de las entidades en cuestión. De este modo el problema de probar la existencia de las entidades matemáticas se retrotrae al problema de probar la verdad de la teoría física que

---

7. La posición de Field [1989, 8 ss.] en este tema es peculiar porque, aunque reconoce la fuerza del argumento de indispensabilidad en el sentido de que *si* la matemática resultara indispensable para la teoría física entonces tendríamos que aceptar la existencia de las entidades matemáticas presupuestas por la teoría matemática incorporada en la teoría física, no obstante su programa de filosofía de la matemática consiste en intentar mostrar que el antecedente del condicional anterior es falso, esto es, que la matemática no es indispensable (teóricamente al menos) para la física [1980], [1989]. La realización del programa requiere la ardua tarea de demostrar, para cada teoría física particular, que esta teoría física puede ser reformulada en un lenguaje nominalista y que la teoría matemática en ella empleada tiene la propiedad de ser conservativa. Si este programa pudiera realizarse para toda teoría que empleara a la matemática en su formulación, se habría eliminado con ello la premisa desde la cual el realista platónico infiere la existencia de las entidades matemáticas. Por otra parte, lo que nosotros intentamos mostrar aquí es que, aun aceptando la indispensabilidad de la matemática para la ciencia en general, no se sigue de ello la existencia independiente de las entidades matemáticas.

cuantifica sobre ellas. Ahora bien, ¿podemos *probar* la verdad de nuestra teoría física?

La respuesta a esta pregunta depende obviamente de cuál sea la noción de verdad que se emplee. Tradicionalmente, el realismo aparece asociado a una noción de verdad que resulta irreductible a nociones epistemológicas tales como 'afirmación garantizada', 'creencia garantizada', 'evidencia disponible', 'confirmación', 'verificabilidad' o 'grado de corroboración'. La irreductibilidad se muestra en que desde este punto de vista realista tiene buen sentido decir 'según toda la evidencia disponible 'p', no obstante 'p' no es (o puede no ser) verdadero' o ''p' ha sido verificado, no obstante 'p' es (o puede ser) falso' [Putnam 1978, 209].

Así entendida, la noción de verdad es una noción trascendente a la experiencia. Pero así entendida no puede probarse nunca que una teoría física sea verdadera, pues siempre será posible decir 'T está apoyada por toda la evidencia disponible, no obstante T es (o puede ser) falsa'. La siguiente reflexión vendría a apoyar esto: es posible que mediante T podamos realizar predicciones exitosas y que sin embargo T sea falsa por contener errores que se compensen mutuamente de algún modo y, por tanto, que resulten indetectables en la experiencia.

Así, si, en el anterior sentido, no podemos probar la verdad de nuestra teoría física entonces nos falta la premisa desde la que probar la existencia de las entidades matemáticas.

13

Sin embargo, creo que las observaciones anteriores no dejan a Maddy sin respuesta. Es más, creo que desde su punto de vista pueden aceptarse de buen grado tales observaciones. La razón de ello estriba en su naturalismo (cuyo origen más inmediato se encuentra, una vez más, en la obra de Quine). Desde esta última concepción no se busca un fundamento más firme para la matemática que el que pueda haber disponible para la física. Aun si no podemos probar la verdad, en el sentido anterior, de nuestra teoría física, no cabe duda que ésta aparece apoyada por la mejor evidencia disponible.

Y si nuestra teoría física resulta apoyada por toda la evidencia disponible, entonces no podemos dejar de creer razonablemente en la existencia de las entidades postuladas por la teoría:

> Es por definición no naturalista admitir que los electrones pasan todos las pruebas [tests] científicamente relevantes de existencia y mantener aún que

podemos razonablemente abstenernos de creer en ellos. [Maddy 1990b, 622]

Por idéntica razón habría que admitir la existencia de entidades matemáticas: si aceptamos la teoría física que incorpora una teoría matemática que cuantifica sobre tales entidades, entonces no sería razonable negarles la existencia.

En pocas palabras: las confirmaciones empíricas de la teoría física confirman, simultáneamente, la existencia de las entidades matemáticas presupuestas (vía cuantificación) por la teoría matemática empleada en la teoría física. Por consiguiente, la racionalidad de la creencia en la existencia de las entidades matemáticas será, como mínimo, equiparable a la racionalidad de la creencia en la existencia de las entidades postuladas por la teoría física, tales como electrones o quarks. Éste es el punto crucial del argumento de indispensabilidad considerado desde una perspectiva naturalista como la de Maddy.

14

No obstante, creo que disponemos de buenas razones para rechazar este tipo de argumento. Repárese, de entrada, en que viene a decirse que las confirmaciones empíricas de la teoría física confirman, a su vez, a la teoría matemática en ella incorporada, pues las confirmaciones lo son de la teoría completa. Pero, si aceptamos esto, entonces estamos obligados a aceptar también que las *disconfirmaciones* empíricas de la teoría física disconfirman también a su teoría matemática, pues es la teoría completa la que es sometida a contrastación.

Supongamos ahora que disponemos de dos teorías físicas rivales, T_1 y T_2, formuladas en el lenguaje común de la aritmética ordinaria A, y que implican respectivamente predicciones incompatibles sobre la posición de determinado cuerpo celeste en un momento dado. Así supongamos que T_1 implica 'p' y que T_2 implica 'no p'. Supongamos además que las observaciones relevantes permiten establecer que 'p' es el caso. Si ésta fuera la situación (y no sería difícil citar ejemplos históricos de este tipo), entonces tendríamos que decir que 'p' confirma a T_1 y disconfirma a T_2. Pero si 'p' confirma a T_1, entonces, de acuerdo con el argumento que criticamos, 'p' confirma a A; pero, puesto que 'p' disconfirma a T_2, 'p' disconfirma a A; luego tendríamos que concluir que 'p' confirma y disconfirma a A.

15

En mi opinión, el origen de la dificultad anterior es claro: radica en la idea de que al confirmar (aunque sea parcialmente) una teoría física confirmamos, a su vez, la teoría matemática empleada en ella. Creo (junto con Musgrave, Sobes y otros) que esta idea es, sencillamente, equivocada.

Si consideramos que la matemática es susceptible de recibir confirmación empírica a través de los éxitos de su aplicación al mundo externo, tendríamos que aceptar, simétricamente, que los fracasos en la aplicación de las operaciones aritméticas a objetos empíricos contarán como disconfirmaciones de estas leyes; pero lo cierto es que nunca interpretamos tales fracasos como pruebas de falsedad (o, más cautamente, como disconfirmaciones) de las leyes aritméticas. Así, por ejemplo, al añadir 50 litros de agua a una tinaja que contenía previamente otros tantos litros de agua obtenemos un total de 100 litros de agua en la tinaja. Pero si el agua añadida estaba a 20°C y el agua previamente contenida en la tinaja estaba a 80°C, no por ello obtenemos que el total de agua se encuentre a 100°C; así que si el primer cálculo lo interpretamos como confirmación de la suma '50 + 50 = 100', el segundo deberíamos interpretarlo, simétricamente, como disconfirmación de la suma '20 + 80 = 100'. Sin embargo, nunca lo interpretaremos de ese modo (creo que incluidos aquí todos los que han invocado el argumento de indispensabilidad), lo que muestra claramente que la interpretación propuesta por Maddy y otros no se ajusta al modo en el que efectivamente usamos los enunciados que consideramos puramente matemáticos.

Los casos como el precedente nunca los interpretamos como refutaciones, o disconfirmaciones, de las leyes aritméticas de la suma, sino como ofreciendo la oportunidad de distinguir entre magnitudes extensivas e intensivas. Entre las primeras se encuentran el peso, el volumen y la longitud, cuya adición física puede ser representada adecuadamente por la suma aritmética. Sin embargo, las magnitudes intensivas, como la temperatura, no pueden ser representadas de igual modo [véase Stegmüller 1979, 66 *ss*]. El hecho de que reaccionemos así, introduciendo nuevas distinciones empíricas que evitan la refutación (o disconfirmación) de ciertos enunciados por las observaciones, es lo que muestra que no usamos tales enunciados como enunciados empíricos que puedan ser disconfirmados (y, por ello, tampoco confirmados) por la experiencia.

Para Kant, como para Wittgenstein, Popper y otros, un enunciado que no puede ser refutado por ninguna experiencia posible no puede ser tampoco un enunciado que pueda considerarse justificado por la experiencia. Musgrave [1986, 90] ha indicado con claridad este punto respecto a Popper

> Si consideramos [el argumento de indispensabilidad para números naturales] desde una perspectiva popperiana, comienza a perder su encanto. Imaginemos que toda la evidencia que induce a los científicos a creer (provisionalmente) en electrones resultara diferente [...]. Los popperianos piensan que esto *podría* ocurrirle a cualquiera de los postulados teóricos de la ciencia. Pero ¿podemos imaginar a los números naturales corriendo la suerte del flogisto? ¿Podemos imaginar la acumulación de evidencia al efecto de que no hay números naturales? Esto tiene que ser posible si el argumento de indispensabilidad [para números] es correcto y los números naturales son teóricamente postulados a pie de igualdad epistemológica con los electrones.

16

La plausibilidad inicial del argumento de indispensabilidad surge cuando sólo miramos, por decirlo así, una cara de la moneda. Cuando, deslumbrados por el llamativo éxito de la utilización de las matemáticas en teorías físicas, concluimos que la observación empírica acaba justificando también a la propia matemática. Pero olvidamos mirar también la otra cara de la moneda: que teorías físicas falsas también hacen un uso impecable de la misma matemática y no por ello contamos tales fracasos como refutando (o disconfirmando, ni aun parcialmente) a la matemática. Esta especie de visión unilateral de las relaciones entre matemáticas y experiencia ha sido denunciada con total claridad por Sober [1993, 53] en un párrafo que recoge el trasfondo de nuestras últimas consideraciones en torno al argumento de indispensabilidad

> Es un hecho llamativo que la matemática nos permita construir teorías que hacen predicciones *verdaderas* y que no podríamos construir tales teorías con éxitos predictivos sin matemáticas. Menos a menudo se advierte que la matemática nos permite construir teorías que hacen predicciones *falsas* y que no podríamos construir tales teorías carentes de éxito sin matemáticas [...]. El hecho de que no dudemos de las partes matemáticas de las teorías empíricamente carentes de éxito es algo que no deberíamos olvidar. La contrastación empírica no nos permite ignorar las malas noticias y escuchar sólo las buenas.

En resumen, ninguno de los dos argumentos examinados en apoyo del realismo en matemáticas logra su objetivo. El primero, porque descansa en la más que dudosa tesis de que percibimos conjuntos, y porque, aun suponiendo verdadera la tesis, no se seguiría de ella la existencia de conjuntos independientes de la mente. El segundo, porque, aun aceptando la indispensabilidad de la matemática en la construcción de teorías físicas, no se sigue de ello que las confirmaciones de la teoría física sean, a su vez, confirmaciones de la teoría matemática en ella incorporada. Así que si se pretende continuar defendiendo el realismo en matemáticas habrá que buscar argumentos diferentes a los aquí analizados.

Referencias

ALEMÁN, Anastasio. 1992. "Los enunciados de observación en Quine". *Actas de VII Congreso de Lenguajes Naturales y Lenguajes Formales*. Barcelona.

______. 1993. "El debate Carnap-Quine en torno a la naturaleza de la Lógica". *Arbor* 576: 33-48.

______. 1994. "La noción de convención en Wittgenstein". *Revista de Filosofía* 12.

______. 1995. "Wittgenstein: Lógica, Matemática y Convención". *Revista de Filosofía* (por publicar).

CHIHARA, Charles. 1990. *Constructibility and Mathematical Existence*. Oxford: Clarendon Press.

KANT, Immanuel. 1978. *Crítica de la razón pura*. Madrid: Alfaguara. (Trad. y notas de P. Ribas.) [*Kritik der reinen Vernunft*. Hamburgo: Felix Meiner Verlag. 1956.]

KIRKHAM, Richard L. 1992. *Theories of Truth*. Massachusetts: MIT Press.

MADDY, Penelope. 1990a. *Realism in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

______. 1990b. "A problem in the Foundations of Set Theory". *Journal of Philosophy* 87: 619-629.

MOULINES, Ulises. 1991. *Pluralidad y recursión*. Madrid: Alianza Editorial.

MUSGRAVE, Alan. 1985. "Realism Versus Constructive Empiricism", en P. M. Churchland *et al.* (eds.). *Images of Science*. Chicago: University of Chicago Press.

______. 1986. "Arithmetical Platonism: Is Wright Wrong or Must Field Yield?", en M. Fricke (ed.). *Essays in Honour of Bob Durrant*. Otago: University Philosophy Department.

PUTNAM, Hilary. 1971. *Philosophy of Logic*. Londres: George Allen and Unwin.

______. 1979. "Reference and Understanding", en A. Margalit (ed.). *Meaning and Use*. Dordrecht: Reidel.

SOBER, Elliott. 1993. "Mathematics and Indispensability". *The Philosophical Review* 102: 35-57.

STEGMÜLLER, Wolfgang. 1979. *Teoría y experiencia*. Barcelona: Ariel. (Trad. de U. Moulines.) [*Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie. Band II: Theorie und Erfahrung*. Heidelberg: Springer-Verlag. 1974.]

STRAWSON, Peter F. 1992. *Analysis and Metaphysics*. Oxford: University Press.

VAN FRAASSEN, Bas C. 1980. *The Scientific Image*. Oxford: University Press.

Anastasio Alemán, es profesor titular de lógica y filosofía de la ciencia en la Universidad Autónoma de Madrid. Sus temas de investigación son la filosofía de la lógica y de la matemática. Algunas de sus publicaciones son *Teoría de los códigos*, Madrid: Tecnos y "El debate Carnap-Quine en torno a la naturaleza de la lógica". *Arbor* No. 576.