Mathesis **III 4$_2$** (2009) 239 - 263.

Hilbert y el método de los elementos ideales

Luis Carlos Arboleda

Resumen

En el presente trabajo se revisa la cuestión del método de los elementos ideales en el campo de estudios históricos y filosóficos sobre el formalismo de Hilbert. El propósito es dar una visión de conjunto del trasfondo filosófico de los ideales como instrumentos para la extensión de teorías matemáticas. Para ello se examinan tres problemáticas que conectan históricamente con los ideales en el pensamiento de Hilbert: método genético y método axiomático, matemáticas de contenido y matemáticas formales, formalismo e instrumentalismo. La literatura estudiada permite aclarar cómo la introducción de estas entidades prefigura, en la obra de Hilbert, el movimiento moderno de las matemáticas hacia estructuras idealizadas, y precisar la interacción que mantienen dichas estructuras entre ellas mismas y con la realidad concreta. Este trabajo muestra que el análisis del método de los ideales contribuye a la comprensión de la naturaleza del juego recurrente entre búsqueda atemporal de la teoría matemática formalmente más acabada, y constitución dinámica de objetos matemáticos mediante tematizaciones operadas sobre dominios previos.

Abstract

The question of the method of ideal elements in the historical and philosophical studies on Hilbert's formalism is explored here. The purpose is to analyze the whole philosophical background of the ideals as tools for the extension of mathematical theories. To that purpose we examine three problems that historically connect with Hilbert's thought: the genetic and axiomatic method, the mathematics of content and the formal mathematics, and formalism and instrumentalism. The literature here studied allows us to determine how the introduction to these theoretic entities prefigures, in Hilbert's work, the contemporary movement of mathematics toward idealized structures, and will also help us to determine the interaction that such structures maintain with them and with the concrete reality. This work shows that the analysis of ideals method contribute to the understanding of the recurrent game between the atemporal search of the mathematical theory formally achieved and the dynamic constitution of the mathematic objects through extensions operated within previous domains.

Palabras clave: Colombia, Garavito, Vera, Bellon, Teoría de Conjuntos
Key words: Colombia, Garavito, Vera, Bellon, Set theory
MSC 2000: 01A60

Introducción

Es sabido que para Hilbert la resolución de problemas es uno de los impulsos centrales de la creación matemática. "Por más inabordables […] que parezcan los problemas y por incapaces que nos sintamos ante ellos, tenemos, sin embargo, la firme convicción de que su solución debe seguir un número finito de deducciones lógicas." Una de las características de nuestro razonamiento matemático es un cierto 'axioma de resolubilidad' que se traduce en la convicción de que toda pregunta planteada por nuestro entendimiento debe tener solución. "Esta convicción en la resolución de todo problema matemático es un gran incentivo para el investigador." [Hilbert 1901, 444-445].

Un caso elemental de este axioma se manifiesta en la extensión de los sistemas numéricos, a través de la convicción de que existe un número que sirve de solución al problema planteado por el hecho de que una ecuación no tiene raíz en el dominio restringido. La extensión del campo numérico, mediante la adición sucesiva de tales soluciones (en particular, la introducción de $\sqrt{-1}$ para resolver el problema de que el polinomio $x^2 + 1$ no posea ceros en $\boldsymbol{R}$), tiene como último propósito la verificación del teorema fundamental del álgebra en el dominio de los números complejos (todo polinomio de grado n con coeficientes en $\boldsymbol{C}$ posee n raíces en $\boldsymbol{C}$).

Sin embargo, el teorema fundamental del álgebra no es una ley estándar de la aritmética, pues no se cumple en los sistemas previos a $\boldsymbol{C}$ en la extensión. De hecho el cuerpo $\boldsymbol{C}$, salvo isomorfismos, es el único cuerpo conmutativo que se obtiene agregando raíces de polinomios con coeficientes complejos al cuerpo $\boldsymbol{C}$ (Teorema de Hankel). Entonces existe una especie de interdependencia entre resolubilidad y principio de permanencia de las formas equivalentes en el sentido propuesto por Peacock y otros algebristas del siglo diecinueve, para quienes el álgebra simbólica debería preservar las leyes de la aritmética en la mayor extensión posible.

Esto equivale a afirmar que, en tanto cuerpo algebraicamente cerrado, $\boldsymbol{C}$ es el máximo *requerido* por la resolubilidad y, al mismo tiempo, el máximo *permitido* por la permanencia. Entonces parece que la confianza de resolubilidad en Hilbert es una manera de asegurar el principio de permanencia [Detlefsen 2005]. En términos del método de los ideales expuesto de manera más clara por Hilbert en [1926], se introducen elementos como $\sqrt{-1}$ para preservar ciertas leyes simples como el teorema fundamental del álgebra. Así mismo, se agregan o crean proposiciones ideales en el dominio de las proposiciones reales (como las leyes que permiten definir los ideales de un cuerpo de números algebraicos), para preservar en nuestro razonamiento por inferencia aquellas leyes de la lógica clásica que nos parecen más simples y confiables. En efecto, al adentrarnos en estudio conceptual de las sucesivas extensiones conservativas que conducen al cuerpo maximal, se reconocen dos características de la construcción. De una parte, se aclara cómo en la sucesiva cascada de tematizaciones se va decantando como una necesidad el propósito último de alcanzar la estructura de mayor simplicidad. Por otra parte, se descubre que la simplicidad de esta estructura es epistemológicamente solidaria de las estructuras previas.

Esta es una de las cuestiones más delicadas en la interpretación del formalismo. No es casual que Bernays la examine desde distintos ángulos y matices a lo largo de algunas de sus publicaciones filosóficas recopiladas en [1976]. Por ejemplo, Bernays se opone en [1923] a la posición simplista de matemáticos como Müller para quien los objetos matemáticos poseen una existencia ideal, independiente de todo pensamiento. En esta perspectiva, el método matemático estaría determinado solamente por los rasgos característicos que los objetos así concebidos le imponen al razonamiento puro. Este punto de vista, dice Bernays, se manifiesta corrientemente en una actitud que funciona en forma utilitaria en las ciencias. Sin embargo, en tanto posición epistemológica es muy primitiva y debe superarse. Sobre todo porque conduce a considerar, como lo hacía Müller, que un objeto es todo aquello 'que puede ser sujeto de juicio'. Bernays recuerda a este propósito el procedimiento de los 'elementos ideales' que se aplica en distintos campos de la actividad matemática. Estos elementos ideales se introducen de una manera puramente formal en tanto sujetos de juicios. Pero no son absolutamente nada separados de los enunciados en que ocurren formalmente.

Bernays se pone de acuerdo en [1955] con Heyting en cuanto a que la cuestión del objeto en las matemáticas estaba mal planteada y debía entonces reformularse. Afirma que la hipótesis usual de que el objeto debe darse previamente a su investigación es equivocada, puesto que "la consideración de las ciencias muestra que los objetos de las disciplinas teóricas provienen la mayoría de las veces de elaboraciones conceptuales que les asignan su exacta determinación" [Bernays 1955, 132]. En su artículo [1970], en el cual somete a revisión el programa de Hilbert (entre otras la 'tesis arbitraria' del monismo aritmético), Bernays defiende la tesis de que las matemáticas son ciencia de las estructuras idealizadas que no necesariamente pueden reducirse a representaciones numéricas.

En este mismo artículo, Bernays asocia la idealización matemática preferiblemente con la modalidad *estructurante* de axiomatización (Gonseth).[1] Los objetos y relaciones primitivas no tienen una existencia independiente al no estar dados en un lenguaje predeterminado ni vienen definidos implícitamente por un sistema de axiomas. Por el contrario, en esta axiomática los objetos intervienen en tanto que miembros de una estructura de conjunto que cumple una función gramatical, y el sistema de axiomas está constituido por enunciados sobre esta estructura de conjunto. Las estructuras idealizadas son de géneros diversos en las matemáticas (*v. gr*. teoría de grupos, topología, análisis, teoría de conjuntos, lógicas de primero y segundo orden, teoría de la demostración). De acuerdo con su género, las estructuras idealizadas poseen distintos 'horizontes' de objetividad matemática. Estos horizontes se producen poco a poco en el curso de la actividad matemática y no pueden establecerse *a priori*. La objetividad característica de esta matemática de estructuras idealizadas es de nuevo tipo. Cada componente del sistema participa, desde su horizonte, en la totalidad de objetividad propia a la estructura idealizada. Los distintos horizontes se relacionan entre sí, y tales relaciones representan las conexiones complejas que las estructuras idealizadas establecen con lo concreto [Bernays 1970, 204].

En lo que sigue vamos a tratar de colocarnos en esta perspectiva de análisis para examinar el trasfondo filosófico del método de los elementos ideales en Hilbert, en tres componentes del problema: método genético y método axiomático, matemáticas de contenido y matemáticas formales, formalismo e instrumentalismo.

Método genético y método axiomático

Hilbert formula su distinción entre método genético y método axiomático en [Hilbert 1900b], el primer trabajo suyo sobre los fundamentos de la aritmética en donde expone sus concepciones sobre la aplicación del método axiomático de la geometría a los fundamentos del análisis real. El método genético consiste en engendrar el concepto mucho más general de número real por medio de extensiones sucesivas del concepto simple de número natural. El dominio de los números reales, como cortadura o sucesión fundamental se obtiene mediante una serie de extensiones de dominios numéricos particulares. Las extensiones apuntan a un propósito con respecto a las operaciones del análisis; se trata de verificar las condiciones más generales para que una función continua sobre el dominio extendido posea una raíz.

1. Ver al respecto Panza [1992b] y Arboleda y Recalde [2003].

El método axiomático sigue un procedimiento distinto. Se supone la existencia de un sistema o dominio de objetos de naturaleza cualquiera, y se introduce un conjunto de axiomas que establecen relaciones entre tales objetos. Esta suposición plantea la necesidad de fijar un requerimiento lógico sobre el sistema de axiomas. Este requerimiento lógico será interpretado por Hilbert y Bernays bajo el concepto de *existencia axiomática.* La garantía de existencia se resuelve en geometría exhibiendo modelos del sistema de axiomas, en particular el modelo de la geometría analítica. Esta prueba de consistencia relativa se aplica igualmente a los números reales. [Hilbert 1899]. Más tarde, Hilbert propone una estrategia diferente en su conferencia de Heidelberg sobre los fundamentos de la lógica y la aritmética [1904]. Reconoce que no es posible aplicar a la aritmética la prueba de consistencia de la geometría dando una interpretación aritmética del sistema de axiomas de la geometría. Se trata ahora de proceder ya no por vía semántica, sino estrictamente mediante una prueba sintáctica de consistencia. Finalmente, será en los trabajos de los años 1920 en donde Hilbert elaborará su teoría de la demostración o metamatemática.[1]

El método axiomático consiste entonces en demostrar la consistencia y completitud de dicho sistema. Hilbert se hace dos preguntas [1900b]. ¿Es el método axiomático de la geometría el más adecuado para el estudio del concepto de número? ¿Cuál de los dos métodos es el más ventajoso para una investigación lógica de los fundamentos de la mecánica y de otras disciplinas físicas? Su opinión es la siguiente: “A pesar del gran valor pedagógico y heurístico que pueda tener el método genético, el método axiomático resulta claramente preferible para una exposición definitiva y lógicamente segura de los contenidos de nuestro conocimiento.” [Hilbert 1900b, 1093].[2]

1. Ver, por ejemplo, Sieg [1999]. Es interesante tener en cuenta la posición que Frege mantuvo al respecto. Frege y Hilbert sostuvieron una controversia alrededor de 1900 sobre la naturaleza del método axiomático, la relación entre axiomas y definiciones, las pruebas de consistencia y las pruebas de independencia. Uno de los asuntos de mayor divergencia fue el de los procedimientos de consistencia. El único criterio de prueba de consistencia aceptado por Frege era mediante la exhibición de un modelo: “apuntar al objeto que tiene todas las propiedades, para dar un caso en que se satisfacen todos los requerimientos” [Shapiro 2000, 157]. Ferreirós analiza la cuestión en [2009].
2. Según [Resnik 1974, 387], Frege y Hilbert compartieron, en general, el enfoque del método axiomático y la necesidad de utilizar la prueba en la formalización deductiva de una teoría. En este sentido, uno y otro estuvieron en desacuerdo con la utilización poco rigurosa del método genético, especialmente en la extensión de los sistemas numéricos. De otra parte, su aceptación del ideal de formalización a través de la demostración, implicaba aceptar que ésta se verificaba de manera mecánica sin apelar al significado de los símbolos empleados.

Es posible establecer una conexión histórica entre las razones de Hilbert para mantener la preferencia por lo axiomático y la manera cómo se presenta este enfoque en los trabajos de Dedekind. Explorar cómo ambos enfoques metodológicos (genético, axiomático) se articulan en Dedekind puede contribuir a aclarar la propia orientación de Hilbert en sus trabajos sobre los fundamentos de la aritmética y el análisis.

En un libro notable por muchos aspectos, especialmente porque facilitó la renovación de investigaciones históricas sobre Dedekind, Dugac [1976, 19] llamó la atención sobre el siguiente aparte de su tesis de Habilitación de 1854 en donde afirma que lo característico de las matemáticas:

> es que las extensiones de las definiciones no dan ningún lugar a lo arbitrario; por el contrario, resultan, por una imperiosa necesidad, de las definiciones restringidas anteriores, con la condición de aplicar en esta ocasión el principio de considerar que las leyes que se obtienen de las definiciones iniciales, y que son características de los conceptos definidos, son universalmente válidas.

Dedekind se refiere al principio de permanencia de las formas de Peacock y Hankel que distintos historiadores de las matemáticas ubican entre los factores de emergencia del pensamiento formal en el siglo diecinueve.[1] Seguidamente muestra cómo se aplica este procedimiento a la aritmética elemental con la generación sucesiva de nuevas clases de números a partir de los naturales, los negativos, los racionales e imaginarios y, finalmente, los imaginarios. El método genético de extensión debe complementarse con un procedimiento, de naturaleza diferente, en el cual las operaciones correspondientes a cada dominio junto con las leyes que las determinan se definen garantizando que tales operaciones preserven las leyes establecidas con anterioridad para los enteros positivos. De manera que Dedekind tenía claro desde su tesis de Habilitación que el trabajo en los fundamentos de la aritmética y el análisis consiste en "un ir y venir entre los nuevos objetos matemáticos creados, las nuevas definiciones introducidas y las leyes y teoremas a los cuales están sujetos" [Dugac 1976, 20].

Esta apreciación sobre la recurrencia que Dedekind establece entre ambos procedimientos, es compartida por Sinaceur en [2008]. Con base en la propia traducción al francés de los principales trabajos de Dedekind y de varios manuscritos suyos menos conocidos, Sinaceur presenta una visión integral de su concepción sobre los números, su naturaleza y sus propiedades, y de las relaciones que se establecen en los sistemas numéricos desde el punto de vista de sus estructuras algebraicas. Sina-

1. Ver, por ejemplo, Detlefsen [2005].

ceur recuerda que Hilbert antepone una definición axiomática intrínseca de los reales a la generación genética de ellos a partir de los racionales. Pero hay que tener en cuenta que [Sinaceur 2008, 31]:

> […] si bien el procedimiento global de Dedekind es de tipo genético en la medida en que procede por extensiones sucesivas a partir del conjunto de los naturales, sus caracterizaciones de cada dominio por separado son sin duda de tipo axiomático: sus definiciones de los números enteros en [Dedekind, 1888] y de los números racionales y los números reales en [Dedekind, 1872] se establecen mediante conjuntos de condiciones necesarias y suficientes a las cuales están sujetos los elementos del dominio considerado.

Entonces los procedimientos de Dedekind son legítimas axiomatizaciones y no parece razonable analizarlas o juzgarlas utilizando como criterio rector el enfoque de las primeras axiomatizaciones de Hilbert. En [Hilbert 1900b] se introducen los reales por el método axiomático formal sin apelar a su generación por extensiones sucesivas a partir de los naturales. Hilbert opta así por definir el cuerpo ordenado arquimediano y completo de los reales de manera intrínseca sin apelar al cuerpo ordenado de los racionales. Dedekind por su parte, prefiere definir o crear[1] los números irracionales, "basándose únicamente en los fenómenos que es posible constatar con claridad en el dominio de los números racionales" [Sinaceur 2008, 31]. Sin embargo, como escribe Sinaceur en distintos lugares de su obra, tanto en sus investigaciones sobre el cuerpo de los números reales como en su trabajo sobre la teoría categórica de los números enteros, Dedekind desarrolla su análisis sobre dos dimensiones, genética (engendrar un dominio a partir de otro) y axiomática (fijar las condiciones necesarias y suficientes que caracterizan al dominio así generado).

En este mismo orden de ideas, Schlimm y Sieg [2005] concluyen que no existe algún conflicto entre los enfoques genético y axiomático en Dedekind, y, por lo tanto, les parece irrelevante establecer algún tipo de prioridad entre el uno y el otro[2]. Por el contrario, lo que se concluye

1. La distinción entre definición y creación en Dedekind es problemática. Algunos especialistas como Sinaceur, afirman que desde sus primeros trabajos Dedekind considera de manera natural que definir es crear y crear es definir. Pero solamente a partir de *Zahlen* [1888] reconoce necesario justificar esta equivalencia por medio de un principio lógico. El ejemplo más significativo es el célebre teorema 66 de *Zahlen* que corresponde a la necesidad de dar la prueba de existencia de un sistema simplemente infinito.

2. Tanto Schlimm y Sieg como Sinaceur, divergen en este asunto puntual de la apreciación de [Ferreirós 1999], una obra que por lo demás es de consulta obligada para quien esté interesado en un estudio serio del desarrollo histórico de la teoría de conjuntos y su impacto en las matemáticas modernas. Por su parte, Ferreirós reconoce en [2009, nota 4] que en [1999] no interpreta adecuadamente las relaciones entre el enfoque de Dedekind y las primeras axiomáticas de Hilbert, y confiesa que una razón importante para ello es haber seguido la tradicional y errónea oposición entre los métodos

es que en los planteamientos de Dedekind hay una "sutil aunque penetrante circularidad", sobre todo cuando se trata de conectar creación de números con extensión de operaciones. El acto más elemental en la creación sucesiva de la serie infinita de los enteros positivos [Dedekind, 1872], es el paso de un individuo ya creado al siguiente nuevo individuo por crear. La 'cadena' de estos números, es decir, su representación mental en tanto serie de imágenes de la función sucesor, permite capturar en un solo acto la sucesión a partir de un número dado.[1] Esta es la más simple operación de la aritmética y las otras operaciones se definen de manera recursiva a partir de ella.

Schlimm y Sieg (y por su parte Sinaceur) no están de acuerdo en valorar el estilo informal deductivo propio de Dedekind, oponiéndolo al método axiomático de Hilbert. En primer lugar, porque la función de las 'condiciones' que permiten determinar el sistema abstracto de números naturales como sistema simplemente infinito, consiste precisamente en fijar los requerimientos suficientes y necesarios del sistema (los Axiomas de Dedekind-Peano). Como lo aclara Dedekind en la carta a Keferstein, estos enunciados son verdaderamente axiomas en el sentido de "propiedades fundamentales, mutuamente independientes de la sucesión ***N***, […] que, no siendo derivables unas de otras, permiten deducir todas las demás a partir de ellas" [Sinaceur 2008, 304-305].

Tampoco parece pertinente oponer uno al otro en materia de método axiomático. Los primeros trabajos de Hilbert tienen profundas raíces en la caracterización axiomática de los sistemas numéricos de Dedekind.[2] Schilmm y Sieg muestran que Hilbert utilizó los axiomas de Dedekind en la axiomatización de ***N*** al inicio de su artículo [1905]

genético y axiomático. Sin embargo, Ferreirós reivindica las consideraciones lógicas y conjuntistas en las que se basa su interpretación. Ver la explicación del asunto en el Epílogo a la reimpresión de [1999].

1. Esta es apenas una representación informal de la noción de cadena que será clave para capturar en el sistema de axiomas de [1888] la estructura de los sistemas simplemente infinitos incluidos los naturales. Sea φ una aplicación uno a uno, tal que $\varphi: S \to S$. Una parte *K de S* es una cadena si $\varphi(K) = K'$ está contenida en *K* [Dedekind 1888, definición 37]. Ver la explicación de [Sinaceur 2008, 63] y el estudio histórico y conceptual sobre la noción de cadena en [Ferreirós 1998]. Ver igualmente [Schlimm y Sieg 2005, 157] y [Ferreirós 2009].
2. "Las primeras formulaciones axiomáticas de Hilbert en [1899] y [1900b] siguen el patrón de las de Dedekind. De hecho, Hilbert es a tal punto logicista en el estilo de Dedekind que no por accidente intentó proponer una fundamentación logicista de las matemáticas alrededor de 1917/1918" [Schlimm y Sieg 2005, 157]. En [2009] Ferreirós aporta nuevas evidencias sobre el logicismo en el pensamiento axiomático de Hilbert en los años 1890, en particular en conexión con el estilo logicista de los trabajos de Dedekind sobre las matemáticas puras, a partir de las cuales propone su propia interpretación sobre las variaciones y condiciones de madurez de ese pensamiento en la perspectiva de la posterior formulación del programa formalista.

"Sobre los fundamentos de la lógica y la aritmética". En su intento de dar respuesta al problema de la prueba de consistencia, Hilbert requiere de la garantía de existencia del 'infinito más pequeño' y la encuentra precisamente en la caracterización axiomática de los sistemas simplemente infinitos de Dedekind.

La discusión sobre la influencia del enfoque axiomático de Dedekind en Hilbert, permitiría igualmente entender la insistencia de Hilbert en [1900b], en darle prioridad a la utilización de este recurso para la fundamentación del análisis. Al final del artículo, Hilbert conecta esta cuestión con uno de los propósitos generales de su entonces emergente teoría de la demostración, según el cual toda proposición matemática debe deducirse como teorema del sistema de axiomas en un número finito de inferencias, mediando obviamente la garantía de consistencia del sistema.[1] En este caso se dispondrá de una exposición axiomática 'definitiva y lógicamente segura':

> Las objeciones que se han planteado en contra de la existencia de la totalidad de los números reales y en contra de los conjuntos infinitos en general, pierden toda legitimidad con el enfoque identificado antes: no tenemos que concebir el conjunto de los reales, digamos, como la totalidad de todas las posibles leyes que permiten obtener los elementos de una sucesión fundamental, sino más bien […] como un sistema de cosas cuyas relaciones entre una y otra están dadas por el sistema finito y completo de axiomas […] y acerca del cual las nuevas proposiciones son válidas si se pueden deducir de tales axiomas en un número finito de inferencias lógicas.

Al presentar en [1935] el estado de las investigaciones de Hilbert sobre las pruebas de consistencia lógica, Bernays se refiere a la cuestión de la primacía que Hilbert le otorga al método axiomático. La perspectiva para el tratamiento de la cuestión es la misma de [Hilbert 1900b] sobre las relaciones entre método genético y método axiomático. Bernays recuerda que Hilbert retoma alrededor de 1920 las dificultades que antes se le habían planteado en el estudio de este problema, y aclara su punto de vista sobre el formalismo y las pruebas de consistencia. [Hilbert, 1922b]. La 'legitimidad' de los procedimientos del análisis matemático "no se fundamenta en la evidencia, sino en la garantía del método axiomático, sobre el cual Hilbert explica que siendo apropiado

1. En verdad, en este momento, Hilbert reconoce únicamente la prueba de consistencia de una teoría matemática relativamente a los números reales. El problema de la consistencia de los axiomas de la aritmética y la lógica será el segundo de los veintitrés problemas no resueltos que Hilbert propondrá poco después a la comunidad matemática en el congreso internacional de 1900. El segundo de los problemas tanto en la lista de diez de la conferencia, como de veintitrés en la versión publicada [Hilbert 1900a].

en lo general, también lo es en este campo. Esta es la concepción que soporta el problema de una prueba de consistencia" [Bernays 1935, 11].

La idea de Hilbert es, en primer lugar, axiomatizar el análisis y las otras teorías matemáticas expresando sus enunciados en un sistema deductivo a partir de un número finito de axiomas. Luego, investigar la consistencia de estos axiomas con base en la consistencia de los axiomas de la aritmética a los cuales se reducen todos los demás. Para alcanzar este doble propósito era necesario formalizar el sistema deductivo mediante el uso del lenguaje de la lógica formal y garantizar así el rigor de las inferencias. Esta 'actitud metodológica' se oponía a toda pretensión de aplicar el concepto intuitivo de número, concretamente en cuanto a fundar un principio como el de la inducción completa en intuiciones comunes de la sucesión numérica, y reclamaba la exigencia de un mayor nivel de reducción conceptual [Bernays 1935].

El método de los elementos ideales

La necesidad de introducir 'elementos ideales' en matemáticas puede interpretarse como una respuesta al doble propósito de Dedekind en su Tesis de Habilitación, de extender un dominio restringido de objetos por el método genético y, al mismo tiempo, caracterizar el nuevo dominio por el método axiomático con el fin de simplificar las leyes que lo regulan. Este enfoque permite explicar, por ejemplo, la introducción de los números complejos junto a los reales, o los números algebraicos junto a los racionales para garantizar que un polinomio siempre obtenga sus raíces.

Las extensiones del campo numérico en Dedekind verifican el mismo principio. Inicialmente el problema es la extensión sucesiva de una generación progresiva de números naturales, enteros, racionales, algebraicos y reales. Estas extensiones conducen al análisis de leyes y reglas que verifican las operaciones, en particular, la conmutatividad, la asociatividad, la distributividad, la existencia de un inverso. Estas reglas permiten definir estructuras, las cuales no dependen de los objetos sometidos a las operaciones sino de las reglas que determinan tales operaciones. En conclusión, el procedimiento consiste en caracterizar los sistemas de números por su estructura. Razonar sobre la estructura y no sobre los números permite aplicar los teoremas obtenidos a otros dominios, en particular a la teoría de funciones.

> Este punto de vista, que emerge en forma anónima e inconciente en los años 1880, impone el estudio de las estructuras por ellas mismas, de manera abstracta, sin especificar la naturaleza de sus elementos, la naturaleza de los objetos sometidos a las operaciones cuyas reglas se descri-

ben. Los primeros trabajos de Hilbert se inscribieron en ese movimiento [Cassou-Noguès 2003, 27].

Hilbert reconoce, por ejemplo en [1926], que la tradición de introducir elementos ideales para la extensión de teorías se encuentra presente corrientemente en distintas situaciones de la actividad matemática: en geometría proyectiva con la postulación de puntos y líneas al infinito; en álgebra con la postulación de la existencia de raíces en el Teorema Fundamental del Álgebra; en teoría de los números algebraicos con la definición de un ideal,[1] y en teoría de conjuntos con los cardinales infinitos y los números ordinales. Un caso familiar de uso de 'elementos ideales', es el procedimiento habitual de extensión conservativa del cuerpo ordenado ***Q***, para producir el cuerpo ordenado arquimediano y completo ***R*** en un nivel superior de existencia. Esta extensión respondió a la necesidad de resolver el problema histórico de llenar dos lagunas operatorias de ***Q***; una de naturaleza algebraica (***Q*** no es cerrado por la operación raíz cuadrada); la otra topológica (***Q*** no es cerrado por la operación del paso al límite). En otra publicación hemos tratado de clarificar la naturaleza de la construcción de la nueva entidad número real, por medio de las propiedades de la estructura del dominio anterior, sea que se utilicen las cortaduras de Dedekind o las sucesiones fundamentales de Cantor.[2] Los lineamientos generales del procedimiento son los siguientes: Se comienza por verificar la invarianza del principio de identidad en la extensión, y se garantiza así la equivalencia de las operaciones entre sucesiones (respectivamente cortaduras) y las operaciones entre reales. Luego se establecen las 'tematizaciones' que permiten completar a ***Q***. Se designa por ***R**** el nuevo dominio cuyos objetos son representantes de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de racionales (respectivamente de cortaduras). Luego se definen las operaciones de estructura de cuerpo en ***R**** a partir de las correspondientes operaciones del sistema de sucesiones convergentes de racionales.

Un aspecto significativo en este proceso de extensión conservativa, es que "los objetos que pertenecen al sistema ***R****, tales que toda sucesión de Cauchy converge a un límite único en ***R****, se pueden componer entre sí y con los objetos que pertenecen a ***Q*** de acuerdo con las mismas leyes" [Desanti 1968 45-47]. Por último, se pasa a la teoría formalizada

1. "[Esta es] probablemente la aplicación más genial que se ha dado al principio de los elementos ideales" [Hilbert 1926, 89]. Un ideal es un subgrupo aditivo de un anillo tal que para todo elemento i del ideal, el producto de $\boldsymbol{i}$ por un elemento a del anillo sigue siendo un elemento del ideal, [ver el estudio histórico del concepto en Dedekind en Ferreirós [1999] y en [Sinaceur 2008]].
2. Ver los detalles del procedimiento en [Arboleda 2007] y [Desanti 1968].

de ***R****, en la cual las proposiciones fundamentales del análisis se obtienen como teoremas a partir del sistema clásico de axiomas de Hilbert para un dominio de objetos de naturaleza cualquiera. Particularmente se demuestra en esta teoría la proposición que permite completar a ***Q*** y que justifica el propósito último de la extensión de llenar las lagunas de su estructura: Una sucesión de números reales es convergente (con un número real como límite) si y solo si es una sucesión de Cauchy. En este sentido es pertinente observar que en la extensión se piensa a ***Q*** como un 'objeto ideal'. Es decir, en cierto momento de la construcción, la representación familiar de la estructura 'precedente' de ***Q*** (por ejemplo, como sistema de parejas ordenadas (a, b) de enteros), se reemplaza por la presencia de ***Q*** como una entidad dentro del sistema de sucesiones convergentes. Como 'idealidad matemática', ***Q*** participa de la realidad de ***R***, pues cumple algunas leyes de la estructura de ***R.*** De hecho ***Q*** es un subcuerpo ordenado de ***R*** [Desanti 1968].

Desde sus conferencias de 1919 Hilbert utiliza los elementos ideales para establecer la distinción entre matemática de contenido y matemática formal.[1] Esto tiene que ver con el hecho de que en el programa formalista las matemáticas se reducen a una derivación mecánica de fórmulas, empleando razonamientos que no tienen alguna referencia a un contenido específico. Hilbert aborda el tema en la perspectiva de la oposición entre lo real y lo ideal. Una manera de considerar tal oposición es a través de la diferencia entre aquello que tiene contenido y aquello que es estrictamente pensamiento. Cuando los matemáticos hablan de existencia matemática, los objetos a los que se refieren no tienen contenido en el sentido usual. Hilbert subraya que la existencia en el sentido matemático siempre es relativa a un sistema dado. Entonces, los elementos ideales intervienen en la situación en que el sistema se extiende por la adjunción de nuevos elementos con respecto al sistema original. No obstante, el nuevo sistema puede ser nuevamente extendido, en cuyo caso todos sus elementos se consideran reales y los nuevos ideales. Así pues, la distinción entre lo real y lo ideal es relativa a tales sistemas.

Pero es en su artículo sobre el infinito [1926] en donde se encuentra la reflexión más elaborada de Hilbert sobre esta oposición. En respuesta a la crítica de Brouwer de que la aritmética finitista es un juego formal sin sentido, Hilbert afirma que, por el contrario, los enunciados de la

1. Ver [Mancuso 1998, 159] en conexión con los puntos de vista de Hilbert sobre los elementos ideales en tales conferencias.

aritmética finitista tienen sentido y se refieren a un contenido.[1] Examinemos las ideas de Hilbert al respecto reconstruyendo y comentando la lectura de Shapiro [2000, 159-163].[2] Por ejemplo, las fórmulas de la aritmética finitista incluyen ecuaciones como '2 + 3 = 5' y '12553 + 2477 = 15030', o bien combinaciones simples de estas como '7 + 5 = 12 ó 7 + 7 $\neq$ 10', o también '2^{10200} + 1 es primo'. Estas afirmaciones tienen dos características: se refieren a números naturales específicos, y son decidibles. Una teoría es *decidible* si para cada fórmula del sistema existe un algoritmo capaz de decidir en un número finito de pasos si la fórmula es válida o no en el sistema. En cuanto a que el contenido de la aritmética finitista sean los naturales, es bien sabido que para Hilbert éstos se identifican con símbolos numéricos con representación intuitiva mediante barras verticales.[3] Así, por ejemplo, '3 > 2' es una forma de comunicar el hecho de que el símbolo 3, es decir, | | |, tiene una extensión mayor que el símbolo 2, es decir | |.

A pesar de su importancia, la aritmética finitista tiene una gran limitación: no incluye todas las proposiciones de la matemática. Solamente incluye proposiciones que involucran cuantificadores acotados.[4] En el enunciado,

'existe un número p, 100 < p < 101! + 2, tal que p es primo'

la condición impuesta sobre p involucra un *cuantificador acotado*. Pero hay afirmaciones como,

'existe un número p > 100 tal que p y p + 2 son primos'

1. Más adelante en el aparte sobre el instrumentalismo de Hilbert, se verá cómo puede entenderse la expresión "juego sin sentido" en la matemática formal.
2. En este contexto también se aprovechan en este trabajo las interpretaciones de [Cassou-Noguès 2001] y [Boniface 2004].
3. Como observa Cassou-Noguès, en la matemática de contenido "los enunciados tienen un sentido, las nociones que intervienen en los enunciados tienen un contenido, los razonamientos dependen del sentido de los enunciados y, finalmente, se refieren a objetos concretos, las barras verticales."
4. Que el cuantificador existencial esté acotado en la matemática de contenido, significa que el razonamiento finitista está restringido a una verificación de sentido. Supongamos un enunciado E del tipo 'existe una cifra a tal que P'', en donde P es una ecuación. E es un enunciado finitista incompleto cuyo sentido depende de fijar el dominio finito de signos donde la cifra a verifica la ecuación P. En consecuencia, este tipo de enunciados de la matemática de contenido no cumplen el principio del tercero excluido. Si se cumpliera en E significaría una de dos posibilidades, o bien P se verifica para una cifra a cualquiera o bien existe una cifra a que no verifica a P. Pero el segundo término de la alternativa y, por consiguiente, la alternativa misma, expresa una proposición transfinita. [Cassou-Noguès 2001, 92-93].

en las cuales el cuantificador es *no acotado*, ya que p toma sus valores sobre todos los naturales. Para Hilbert los únicos enunciados que pertenecen a la aritmética finitista son los primeros, aquellos que involucran cuantificadores acotados. Los segundos son enunciados no finitistas.

Los enunciados verdaderos con cuantificadores acotados (*v. gr.*, combinaciones de ecuaciones sencillas), son decidibles; es decir, siempre existe un algoritmo de cálculo que los verifica [Shapiro 2000]. Cuando las cotas son finitamente grandes, tales enunciados involucran alguna idealización, pero sigue existiendo un algoritmo que los representa por el mismo hecho de incluir cuantificadores acotados. Hilbert introduce letras para representar tal generalidad. Sea el enunciado:

$$(*)\ a + 100 = 100 + a$$

Las instancias de (*) como ‘0 + 100 = 100 + 0’ y ’47 + 100 = 100 + 47’, son enunciados finitistas legítimos. El enunciado (*) asegura que cada una de tales instancias es verdadera. Según Hilbert, las generalizaciones de (*) también son finitistas; en particular lo es la ley conmutativa:

$$(**)\ a + b = b + a$$

Para Hilbert el carácter finitista de este enunciado se interpreta como que $a + b$ es el mismo numeral que $b + a$, y la “corrección concreta de esta afirmación puede ser demostrada mediante inferencias materiales” [Hilbert 1926, 97]. Es decir, mediante la ejecución de un algoritmo de cálculo. Según Shapiro [2000, 161], lo anterior no debería revestir alguna dificultad epistemológica. Pero Hilbert no es explícito sobre cómo se afirman legítimamente los enunciados finitistas con letras de generalidad. Entonces existe un desacuerdo entre los especialistas sobre las técnicas de prueba en la aritmética finitista. Aunque la cuestión está abierta a la discusión, la interpretación más comúnmente aceptada es que la aritmética finitista corresponde a la llamada ‘aritmética recursiva primitiva’.

Ahora bien, a diferencia de un enunciado finitista particular, un enunciado finista con letras de generalidad *no es susceptible de negación* (Hilbert). La negación de una ecuación, como ‘$3 + 5 \neq 8$', es un enunciado finitista legítimo. Expresa el hecho de que es falso que la suma de *3* y *5 sea 8*. Pero un enunciado con letras de generalidad no admite negación finitista. Hilbert lo expresa de la siguiente manera [Hilbert 1926, 194]:

> el enunciado de que siendo a un símbolo numérico, $a + 1 = 1 + a$ es verdad universal, desde nuestra perspectiva finitista *no es susceptible de negación*. Lo veremos mejor si consideramos que este enunciado no puede interpretarse como una conjunción de un número infinito de

> ecuaciones en términos de '*y*, sino como un juicio hipotético que únicamente afirma algo con tal de que sea dado un símbolo numérico.

Es decir, no es posible negar en un número finito de etapas una afirmación universal que equivale a una infinidad de afirmaciones relacionadas por el conector 'y'. En consecuencia, en la aritmética finitista no se puede afirmar al mismo tiempo un enunciado con letras de generalidad y su negación. Por ejemplo, negar (*) significa que existe una instancia suya, un símbolo numérico, para el cual (*) es falso. Esto es, existe un número p tal que $p + 100$ no es idéntico a $100 + p$ Entonces, la negación de un enunciado de generalidad contiene un cuantificador *no acotado*, por lo cual tal negación es un enunciado no finitista. En las propias palabras de Hilbert [1926, 100], el dominio de tales proposiciones va más allá de la aritmética finitista. A diferencia de los numerales en la aritmética finitista, los signos y las fórmulas de los *enunciados ideales* no poseen, por sí mismos, ningún significado. Sin embargo [1926, 102]:

> A partir de esa fórmula (proposiciones ideales) es posible derivar otras fórmulas a las que sí podemos asignar un significado, considerándolas como comunicaciones de enunciados finitistas. La generalización de esta idea nos lleva a una concepción de las matemáticas que considera a éstas como un inventario de fórmulas a las que corresponden, en primer lugar, expresiones concretas de enunciados finitistas y a las que se añaden, en segundo, otras fórmulas que carecen de todo significado y que constituyen los objetos ideales de nuestra teoría.

A este respecto, [Thiele 2003, 9] subraya la característica filosófica del concepto de 'proposiciones ideales' en Hilbert, entendidas como contrapartes de 'proposiciones finitistas' o reales. Las primeras no corresponden a cosas reales, sino que obran como "reguladores" en el sentido que Kant le asigna a una idea: "un concepto de razón que trasciende toda experiencia y que permite completar lo concreto como totalidad."[1] La garantía de los métodos ideales se establece mediante métodos finitistas. Desde el punto de vista de Hilbert la aceptación de toda rama de las matemáticas relacionada con conceptos ideales tiene como condición la prueba de consistencia del sistema extendido.

Una aplicación lógica de los enunciados ideales es el llamado 'axioma transfinito' que Hilbert formula en su artículo [1923] sobre los fundamentos lógicos de las matemáticas. El axioma se satisface para una función lógica τ que hace corresponder a un predicado $A(a)$ en una variable a, determinado objeto $\tau(A(a))$ o simplemente $\tau(A)$ "Para

1. Thiele [2003, 9] asocia el concepto de 'proposiciones ideales' con el concepto kantiano de mecanismo regulador [*regulatives Prinzip*], y el de 'proposiciones finitistas' o reales con el de mecanismo constitutivo [*konstitutives Prinzip*].

aclarar su contenido”, escribe Hilbert [1923, 69], “tomemos, por ejemplo, en lugar de *A* el predicado ‘ser sobornable’. Tenemos entonces que τ (*A*) designa a una persona definida, con un sentido de honestidad tan inquebrantable, que del hecho de que ella resultase sobornable se seguiría que toda persona lo sería igualmente”. Este axioma ‘debe verse como el origen de todos los conceptos, principios y axiomas transfinitos’. Es decir, el axioma transfinito permite deducir los demás axiomas transfinitos que definen las reglas lógicas de los cuantificadores universal y existencial.

Lo anterior es interpretado de la siguiente manera por [Boniface 2004, 228-229]: τ (*A*) es el representante (negativo) de la propiedad *A*. Es el objeto que posee en menor grado la propiedad que representa; si él la posee, entonces cualquier otro objeto también la posee. Dicho de otra manera, τ (*A*) es el límite, la cota, la frontera, a partir de la cual todos los objetos están dotados de la propiedad *A*. Podría llamársele el representante-límite, o representante frontera, o incluso, en analogía con los puntos al infinito, representante al infinito. Esta es la traducción en lenguaje corriente del axioma transfinito: $\tau(A(a)) \rightarrow A(a)$, es decir, si τ (*A*) posee la propiedad *A*, entonces todo objeto *a* también la posee. Así, mediante la adición de una proposición ideal, el axioma transfinito, y teniendo en cuenta la condición de no contradicción, Hilbert logra extender a las afirmaciones no finitistas la validez de las leyes de la lógica clásica y, en particular, el principio de tercero excluido.[1]

En resumen, el método de los ideales en el programa formalista de Hilbert consiste en aplicar el método genético a las proposiciones matemáticas, para superar las restricciones de la matemática de contenidos. Este procedimiento tiene las siguientes características [Cassou-Noguès 2001, 97]:

- Las proposiciones de la matemática de contenido forman un dominio restringido sobre el cual no son verdaderas las leyes de la lógica clásica.
- La matemática formal contiene las proposiciones de la matemática de contenido, demostrables en los sistemas formales, y proposiciones que no resultan de la matemática de contenidos. Las primeras son proposiciones reales y las segundas proposiciones ideales.
- La matemática formal constituye un dominio extendido en el cual se introducen elementos ideales, con el propósito de simplificar las leyes lógicas que regulan las proposiciones.

1. Por supuesto, todo lo anterior es válido a condición de que los axiomas de la lógica se sometan a una demostración de consistencia [ver las interpretaciones de Mancosu 1998, 161-162] y [Shapiro 2000, 163-164] del procedimiento empleado por Hilbert con este fin en [1926]. Hilbert completa la formalización de las teorías matemáticas con base en este procedimiento de pruebas finitistas de consistencia.

- El paso siguiente consiste en mostrar que la extensión del dominio matemático no conduce a contradicción, es decir, que los sistemas definidos por la matemática formal son consistentes. Esa es la tarea que realiza la *metamatemática* o *teoría de la demostración*, utilizando para ello razonamientos de contenido.

La metamatemática retoma entonces la matemática de contenido para asegurar la consistencia de los sistemas formales que representan la matemática finitista. En este sentido, el programa formalista constituye una contribución original al problema de los fundamentos. Sin embargo, se encuentran distintos matices o tal vez serias divergencias entre los comentaristas de Hilbert sobre estas materias.

Elementos ideales e instrumentalismo

Existen distintas explicaciones sobre el instrumentalismo en Hilbert.[1] El método de los elementos ideales puede interpretarse como un juego formal bajo condiciones de no contradicción, es decir estrictamente en función de la consistencia del sistema. Como lo afirma Hilbert [1926, 106]:

> La extensión por medio de la adición de ideales es lícita y permisible solamente cuando con ello no se provoca el surgimiento de contradicciones en el dominio original y, en consecuencia, únicamente si al suprimir los elementos ideales, las relaciones que resultan para los elementos originales son válidas en la esfera original.

Ciertamente las matemáticas ideales participan del juego formalista a partir del momento en que se acuerdan y formulan de manera explícita la sintaxis y las reglas deductivas específicas al dominio en cuestión. Un dominio de las matemáticas ideales se traduce en un sistema formal cuando se le aplican las reglas de los sistemas deductivos.

Pero como se ha visto arriba, la introducción sistemática de los elementos ideales en 1926 se hace en un contexto polémico en el cual Hilbert se defiende de la crítica de Brouwer de que la aritmética finitista es un juego formal sin sentido. Por el contrario, replica Hilbert, los enunciados de la aritmética finitista tienen significado y se refieren a un contenido. Igualmente, al referirse en [1928] a las relaciones entre proposiciones reales y proposiciones ideales, Hilbert aclara que las primeras son fórmulas de variable libre decidibles pero en condición de ser

1. La concepción instrumentalista del lenguaje o formalismo simbólico sostiene que el razonamiento utiliza los signos de manera puramente simbólica [Detlefsen 2005]. El juego formalista sería análogo a las posiciones que consideran que la ciencia teórica es un instrumento complejo para hacer predicciones sobre entidades no observables como los electrones [Shapiro 146].

verificables, como lo son las leyes de la naturaleza. Zach [2003] observa que estos dos momentos representan un cambio de pensamiento de Hilbert, puesto que del énfasis exclusivo en la consistencia de la primera etapa, Hilbert pasa en la segunda mitad de la década de 1920 a incorporar en su programa el concepto de extensión conservativa *vía* el método de los ideales. En Hilbert [1928] los elementos ideales actúan como los constructos teóricos de la física, es decir, como dispositivos que permiten deducir hipótesis que luego deben ser verificadas empíricamente. Para aclarar el sentido de la comparación, conviene recordar el contexto polémico en que ella se ubica.

En [1928] Hilbert controvierte el punto de vista de Brouwer según el cual, las afirmaciones de existencia no tienen sentido intrínseco a no ser que contengan la construcción del objeto cuya existencia se afirma, pues de lo contrario se convierten en títulos sin valor y su uso lleva a la matemática a degenerar en un juego de fórmulas. Hilbert precisa que la razón última de la validez de las afirmaciones de existencia no es su construcción sino su demostración. La fuente de los teoremas de existencia pura es un axioma lógico, el axioma transfinito que se expresa en un operador con una función lógica semejante al operador τ de [1926]. Recordemos que τ garantiza el paso de la matemática de contenido a la matemática formal. De aquí se deriva la posibilidad de construir cualquier proposición ideal. Más adelante explica lo anterior en los siguientes términos [1928, 475]:

> El valor de las pruebas de existencia pura consiste precisamente en que la construcción individual queda eliminada por [las proposiciones reales] y que muchas construcciones diferentes quedan subsumidas en una idea fundamental, de manera que únicamente se preserva con claridad lo que es esencial a la prueba. Brevedad y economía de pensamiento son la *razón de ser* de las pruebas de existencia.

Además de su valor matemático, el juego de fórmulas tiene para Hilbert una importante significación filosófica, al permitir expresar el contenido de pensamiento matemático de manera uniforme y, al mismo tiempo, orientar su desarrollo en una dirección que clarifica las interconexiones entre las proposiciones individuales y los hechos. Ello justifica la razón de ser del juego de símbolos en la matemática formal y muestra que este juego no es arbitrario, pues refleja la 'técnica de nuestro pensamiento'. Es en el contexto de esta discusión con Brouwer que Hilbert plantea su interpretación física de la introducción de los elementos ideales en una teoría formal:

> De ninguna manera es razonable establecer como condición universal que cada formula individual sea en sí misma interpretable; por el contrario, corresponde a la propia naturaleza de toda teoría que no requira-

> mos retornar a la intuición o al significado en el medio de un argumento. Aquello que el físico espera de una teoría es que las proposiciones particulares se deduzcan de leyes de la naturaleza o de hipótesis, únicamente mediante inferencias, es decir, sobre la base de un juego de fórmulas puras sin apelar a consideraciones no esenciales. Solo se chequean experimentalmente algunas combinaciones y consecuencias de las leyes físicas, de la misma manera que las proposiciones reales están directamente en capacidad de verificarse en mi teoría de la prueba. [Hilbert 1928, 475].

Los elementos ideales funcionan entonces con el carácter de los constructos teóricos de la física, es decir como instrumentos para deducir hipótesis que luego deben ser chequeadas empíricamente. Varios autores, especialmente [Mancosu 1998b] y [Zach 2005], tienden a aproximar esta posición de Hilbert en [1928] con la opinión de Weyl de asignarle una significación a los sistemas formales, en analogía con lo que ocurría en el campo de la física teórica. Buscando una mediación entre formalismo e intuicionismo, Weyl sugería establecer una conexión entre la consistencia de los sistemas formales y la verdad de los contenidos matemáticos que tales sistemas codifican [Weyl 1925, 140]:

> No cabe duda que para que las matemáticas mantengan una preocupación cultural seria hay que atribuirle algún sentido al juego de fórmulas de Hilbert, y sólo veo una posibilidad de asignarle un sentido intelectual independiente a este juego, incluyendo sus componentes transfinitos. En la física teórica se nos ofrece el magnífico ejemplo de una clase de conocimiento con un carácter completamente distinto al conocimiento común o fenomenológico que expresa en forma pura aquello que no es dado en la intuición. Mientras que en este caso todo juicio tiene un sentido intrínseco realizable por completo en la intuición, en el caso de las afirmaciones de la física teórica ocurre todo lo contrario. En este caso lo que está en cuestión si se confronta con la experiencia es más bien *el sistema como un todo*.

Otros autores prefieren privilegiar la interpretación instrumentalista en la cita antes mencionada de [Hilbert 1926]: el método de los elementos ideales se reduce a un juego de fórmulas sin sentido intrínseco sujeto a condiciones de no contradicción. La concepción instrumentalista del lenguaje o formalismo simbólico sostiene que el razonamiento utiliza los signos de manera puramente simbólica. A este tipo de instrumentalismo no le preocupa el contenido semántico de los signos, y lo tiene sin cuidado que los signos tengan o no contenido [Detlefsen 2005]. Históricamente, esta concepción de Hilbert en [1926] sería hereditaria del punto de vista de Berkeley opuesto a las posturas ‘presentistas’ dominantes entre los algebristas de los siglos dieciséis y diecisiete. Para los presentistas el rigor de un argumento algebraico consiste en garantizar que los objetos involucrados en las distintas expresiones siempre estén directamente presentes en el razonamiento o en la intuición del sujeto.

El caso paradigmático son las pruebas constructivas de la geometría sintética clásica que establecen una relación de semejanza entre los diagramas utilizados y los objetos geométricos. Berkeley propende por un patrón de rigor de razonamiento en el cual la mente de quien razona no tenga que apelar continuamente en la argumentación al significado de las expresiones involucradas.[1] La función de los signos según este patrón no es necesariamente la de expresar ideas, como cuando utilizamos $\sqrt{-1}$ en el cálculo sin tener que formarnos una idea de la expresión en términos de cantidad. Esta concepción de Berkeley fue corrientemente aceptada por los matemáticos a mediados del siglo diecinueve como lo muestra la siguiente opinión de Boole [Detlefsen 2005, 272]:

> Es una verdad generalmente admitida que el lenguaje es un instrumento de la razón humana, y no simplemente un medio para la expresión de pensamiento […]. Sea que miremos los signos como representantes de cosas o relaciones, o como representantes de concepciones u operaciones del intelecto humano, cuando estudiamos las leyes de los signos estamos, en efecto, estudiando las manifestaciones de las leyes de razonamiento.

La posición del formalismo simbólico es igualmente heredera de las ideas de Peacock y los algebristas de Cambridge en el sentido que [Detlefsen 2005, 272]:

> […] el razonamiento matemático no necesita involucrarse en la manipulación constructiva de intuiciones o en la manipulación lógica de proposiciones. En lugar de ello apela a la manipulación sintáctica de signos sin interpretación o incluso no interpretables. El razonamiento simbólico es pues muy diferente al razonamiento sobre el *contenido* (semántico) de expresiones, tengan estas expresiones un carácter intuitivo o conceptual.

Detlefsen advierte una estrecha conexión entre [Hilbert 1928] y las ideas de sus predecesores, particularmente en dos puntos: sobre la naturaleza de los signos sin contenido en los fundamentos de la teoría de la demostración, y sobre la manera como el juego de fórmulas refleja la 'técnica de nuestro pensamiento'. En la matemática formal, los signos que componen las fórmulas son vacios de significado y su encadenamiento en fórmulas y en demostraciones es una réplica del pensamiento de los matemáticos. El pensamiento es una actividad interna al entendimiento matemático y se refleja en el lenguaje sobre el papel. El pen-

1. Comparar con la concepción instrumentalista de Hilbert en la cita anterior [1928, 475] al afirmar que "corresponde a la propia naturaleza de toda teoría que no requiramos retornar a la intuición o al significado en el medio de un argumento".

samiento es análogo pero exterior a la expresión. [Hilbert 1928, 475].[1] Según la lectura de Detlefsen, en [Hilbert 1928] se expresa todavía más fielmente que antes la concepción instrumentalista de Berkeley. El razonamiento matemático atraviesa por intervalos de pura manipulación simbólica referidos generalmente al 'razonamiento ideal'. Tales intervalos se alternan con largos períodos de razonamiento de contenido. Sin embargo, la adopción de los signos es anterior a sus significados, dada la naturaleza *técnica* que por momentos mantienen el razonamiento matemático y el razonamiento en general [Detlefsen 2005, 298].[2]

Esta interpretación del formalismo simbólico como modo técnico de razonar nos conduciría a un cierto tipo de 'instrumentalismo metodológico [Zach 2003]. No es que las matemáticas no tengan significado, sino que al aplicar de manera exitosa la teoría de demostración se procede, escribe Zach, *como si* ellas no lo tuvieran. La analogía que se presenta con la física no es entonces en tanto que las proposiciones transfinitas no tengan significado como tampoco lo tienen las proposiciones con términos teóricos, sino la siguiente: las proposiciones transfinitas no requieren tener sentido intuitivo así como no se requiere observar directamente los electrones para hacer teoría sobre ellos.

Bibliografía

Álvarez, Carlos y Segura, Luis Felipe. 1993. *Fundamentos de las Matemáticas.* México: Mathema.

Arboleda, Luis Carlos y Recalde, Luis Cornelio. 2003. "Fréchet and the Logic of the Constitution of Abstract Spaces from Concrete Reality". *Synthese* **134**: 245-272.

Arboleda, Luis Carlos. 2007. "Modalidades constructivas y objetivación del cuerpo de los reales". *Revista Brasileira de Historia da Matemátic* Especial n° 1: 215-230.

1. En [1923] Hilbert escribe que los sistemas formales son las "réplicas de los pensamientos que constituyen la práctica habitual de los matemáticos", citado en [Cassou-Noguès 2001, 95].

2. Por largos períodos el razonamiento matemático tiene que operar con 'pensamientos ciegos' que actúan sobre signos sin sentido (Leibniz). Tal fue el caso del manejo operatorio de las raíces imaginarias de la cúbica antes que el objeto alcanzara su significado real como número complejo. En [Arboleda, 2007] se comentan las posiciones de Leibniz y Huygens a este respecto. Mientras que para Huygens la única actitud posible ante tales raíces era esperar a que se nos revelara ese algo cuya existencia no está garantizada por su designación escritural, enigmática en sí misma, para Leibniz era legítimo e incluso necesario operar con tales signos aparentemente sin objeto, de la misma forma como lo hicieron los algebristas italianos.

Bernays, Paul. 1923. "Erwiderung auf die Note von Herrn Aloys Müller: Über Zahlen als Zeichen". *Mathematische Annalen* **90**: 159-63. Traducción al inglés en: Mancosu 1998a, 223-226.

__________. 1935. "Hilberts Unterssuchungen über die Grundlagen der Arithmetik ". En: (Hilbert, 1935, 196-216). Traducción al inglés en: Bernays Project: Text N°. 14, URL: http://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/Pdf/untersuchungen.pdf

__________. 1955. "Die Mathematik als ein zugleich Vertrautes und Unbekanntes". *Synthese* **9**(1): 465-471. Traducción al francés en: Bernays [2003, 129-134].

__________. 1970. "Die Schematische Korrespondenz und die Idealisierten Strukturen". *Dialectica* **24**(1-3): 53-66. Traducción al francés en: Bernays [2003, 199-210].

__________. 1976. *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*. Darmstadt: Wissenschaftliche uchgesellschaft. Traducción al francés en: Bernays [2003].

__________. 2003. *Philosophie des Mathématiques.* Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Boniface, Jacqueline, 2004, *Hilbert et la notion d'existence en mathématiques.* Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Cassou-Noguès, Pierre. 2001. *Hilbert.* Paris: Les Belles Lettres.

Dedekind, Richard. 1872. *Stetigkeit und irrational Zahlen.* Brunswick: Vieweg. Traducción al francés en: Sinaceur [2008, 57-89]. Traducción al castellano en: Ferreirós [1998, 77-94].

__________. 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen.* Brunswick: Vieweg. Traducción al francés en Sinaceur (2008, 131-216). Traducción al castellano en: Ferreirós [1998, 95-144].

Desanti, Jean T. 1968. *Les Idéalités mathématiques.* Paris: Editions du Seuil.

Detlefsen, Michael. 2005. "Formalism". En: Shapiro [2005, 236-317].

Dugac, Pierre. 1976. *Richard Dedekind et les Fondements des Mathématiques.* Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Ewald, William Bragg (ed.). 1996. *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics.* vol. 2. Oxford: Oxford University Press.

Ferreirós, José. 1998. *¿Qué son y para qué sirven los números?* Madrid: Alianza Editorial.

__________. 1999. *Labyrinth of Thought. A history of Set Theory and its Role in Modern Mathematics.* Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser. Reimpreso en 2007 por Birkhäuser con un epilogo.

__________. 2009. “Hilbert, logicism, and mathematical existence”. *Synthese*, 170(1): 33-70.

Hilbert, David. 1899. *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig: Teubner. Traducción al inglés de la décima edición en alemán: *Foundations of Geometry*, Open Court, LaSalle, 1990.

__________. 1900a. "Mathematische Probleme". *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse*, 253-297. Conferencia impartida en el International Congress of Mathematicians, Paris, 1900. Traducción parcial al inglés en: Ewald [1996, 1096-1105].

__________. 1900b. "Über den Zahlbegriff", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 8: 180-84. Traducción al inglés en: Ewald [1996, 1089-1096]. Traducción al Castellano en: Álvarez y Segura [1973, 17-22].

__________. 1901. “Mathematische Probleme”. *Archiv der Mathematik und Physic.* 3rd ser., **1**: 44-63, 213-237. Traducción al inglés en: *Bulletin of the American Mathematical Society* **8** (1902): 437-479.

__________. 1905. "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik". En: *Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*, A. Krazer, ed., Leipzig: Teubner, 174-85. Traducción al inglés en: van Heijenoort [1967, 129-38].

__________. 1918a. "Axiomatisches Denken". *Mathematische Annalen.* **78**: 405-15. Lectura impartida ante la Sociedad Suiza de Matemáticas, 11 septiembre 1917. Reimpreso en: Hilbert [1935, 146-56]. Traducción al inglés en: Ewald [1996, 1105-1115].

__________. 1918b. “Prinzipien der Mathematik”. Notas de clase de Paul Bernays. Semestre de invierno 1917-18. Manuscrito inédito. Bibliothek, Mathematisches Institut, Universität Göttingen.

__________. 1922a. "Grundlagen der Mathematik". Vorlesung, Semestre de invierno 1921-22. Notas de clase de Paul Bernays. Manuscrito inédito. Bibliothek, Mathematisches Institut, Universität Göttingen.

__________. 1922b. "Neubegründung der Mathematik: Erste Mitteilung". *Abhandlungen aus dem Seminar der Hamburgischen Universität*, 1: 157-77. Serie de conferencias impartidas en la Universidad de Hamburgo. Julio 25-27, 1921. Reimpreso con notas por Bernays en: Hilbert [1935, 157-177]. Traducción al inglés en: Mancosu [1998a, 198-214] y Ewald [1996, 1115-1134]. Traducción al castellano en: Álvarez y Segura [1973, 37-62].

__________. 1923. "Die logischen Grundlagen der Mathematik". *Mathematische Annalen.* **88**: 151-165. Lectura impartida en el Deutsche Naturforscher-Gesellschaft, Septiembre 1922. Reimpreso en: Hilbert [1935, 178-191]. Traducción al inglés en: Ewald [1996, 1134-1148]. Traducción al castellano en Álvarez y Segura [1973, 63-81].

__________. 1926. "Über das Unendliche". *Mathematische Annalen*, **95**: 161-90. Lectura impartida en Münster, 4 junio 1925. Traducción al inglés en: van Heijenoort [1967, 367-392]. Traducción al castellano en: Álvarez y Segura [1973, 83-122].

__________. 1928. "Die Grundlagen der Mathematik". *Abhandlungen aus dem Seminar der Hamburgischen Universität.* **6**: 65-85. Traducción al inglés en: van Heijenoort [1967, 464-479].

__________. 1935. *Gesammelte Abhandlungen.* Dritter Band: Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes, Berlin: Springer. Reprint 1965, New York: Chelsea.

Mancosu, Paolo (ed.). 1998a. *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s.* Oxford: Oxford University Press.

__________. 1998b. "Hilbert and Bernays on Metamathematics". En: Mancosu [1998a, 149-188].

__________. 1998c. "Hermann Weyl: Predicativity and an Intuitionistic Excursion". En Mancosu [1998a, 65-85].

Panza, Marco y Pont, Jean-Claude (eds.). 1992a. *Les savants et l'épistémologie vers la fin du XIXe siècle.* Paris: Blanchard.

__________. 1992b. "Gonseth et les prolégomènes d'une logique de la connaissance". En: Panza y Pont [1992a, 23-45].

Resnik, Michael. 1974. "Frege-Hilbert Controversy". *Philosophy and Phenomenological Research* **34** (3): 386-403.

Rivenc, François y Rouilhan, Philippe de (eds.). 1992. *Logique et fondements des mathématiques. Anthologie (1850-1914).* Paris: Éditions Payot.

Shapiro, Stewart. 2000. *Thinking about Mathematics. The Philosophy of Mathematics.* New York: Oxford University Press.

__________. (ed.). 2005. *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic.* New York: Oxford University Press.

Sieg, Wilfried. 1999. "Hilbert's programs: 1917-1922". *Bulletin of Symbolic Logic*, **5**(1): 1-44.

Sieg, Wilfried and Schlimm, Dirk. 2005. "Dedekind's Analysis of Number: Systems and Axioms". *Synthese* **147**: 121-170.

Sinaceur, Hourya. 2003. "Introduction de la Traductrice". En: Bernays [2003, 7-17].

__________. (ed.). 2008. *Richard Dedekind. La création des nombres.* Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Thiele, Rüdiger. 2003. "Hilbert's Twenty-Fourth Problem". *American Mathematical Monthly* **110**:1-24.

van Heijenoort, Jean (ed.). 1967. *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1897-1931*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Zach, Richard. 2003. "Hilbert's Program". *The Stanford Encyclopedia of Philosophy, URL*: <http://plato.stanford.edu/entries/hilbert-program/>.

Weyl, Hermann. 1925. "Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik". *Symposion* **1**: 1-32. Traducción al inglés en: Mancosu [1998, 123-142].