Mathesis 11 (1995) 217-250
[illegible]

La transformación de una teoría matemática: el caso de los números poligonales*

Luis Radford

Qui sait comment naissent et voyagent les idées?
G.-H. Germain: *Christophe Colomb*

Resumen

En este trabajo planteamos la posibilidad de ver los *cambios* que ocurren en las teorías matemáticas a lo largo de su desarrollo en términos de *rupturas epistemológicas*. Sugerimos que las rupturas epistemológicas —cuyas localizaciones son dadas en términos de un criterio relativo al 'progreso' del conocimiento enunciado por Glas (1993)— pueden originar la *emergencia* de una nueva teoría o la *transformación* de una vieja teoría. Interesándonos al fenómeno de las transformaciones, en este trabajo intentamos probar que la teoría de los números poligonales de Diofanto muestra una ruptura epistemológica de tipo transformacional con relación a la teoría neopitagórica de los números poligonales de Nicómaco. Nuestro trabajo se interesa igualmente en la búsqueda de los elementos que hacen posible dicha transformación. Para ello ubicamos cada una de las teorías mencionadas en su propio *sustrato conceptual*, tomando en cuenta los factores filosóficos, epistemológicos, sociales y culturales que actúan a nivel de dichos *sustratos*; luego procedemos a un análisis detenido de los *sistemas de conocimientos matemáticos* que subtienden a cada teoría. Dicho análisis permite detectar ciertos cambios conceptuales importantes que acompañan al fenómeno de transformación en estudio, entre ellos un cambio a nivel del concepto de número, que pasa —vía ciertas representaciones geométricas— de la categoría de *número concreto* al de *número general*

* Este trabajo forma parte de un programa de investigación subvencionado por FCAR 96-ER-0716, Québec y FRUL, Ontario

operacional permitiendo así resolver nuevos problemas —como el de la obtención de fórmulas de cálculo de números poligonales—

Abstract

This article deals with the study of conceptual *changes* in mathematics. We suggest that conceptual changes can be studied in terms of *epistemological ruptures*. These ruptures can lead to two kind of different conceptual changes: the first one is the *transformation* of an already existent theory; the second one is the *emergence* of a new theory. In our approach, we suggest that the moments in the development of mathematical ideas during which an epistemological rupture occurs can be detected through a criterion stated by Glas (1993) related to the idea of progress in mathematical knowledge. Our article focuses its attention on the transformation phenomenon. Our general aim is to show that Dio- phantus theory of polygonal numbers achieves an epistemological rupture of transformational type in regards with the neopythagorean theory of polygonal numbers. The specific aim of this article is to understand how this transformation took place. In order to do so, we place the neopythagorean and the diophantine theories in their own *conceptual environment*; then we proceed to a deep analysis of the *Systems of Mathematical Knowledge* underlying each theory. The analisys shows some important conceptual changes ocurring during the transformation process. One of these changes is found in the concept of number which is transformed (via some geometrical representations) from a *concrete numerical value object* to a *general and operational object*. This conceptual change makes it possible to solve new problems, e.g. how to find a formula to calculate directly polygonal numbers of any kind and any side.

Introducción

Una pregunta que se planteó hace algunas décadas, en el campo de estudio de los patrones de cambio de las teorías matemáticas a lo largo de su desarrollo histórico, fue la de la existencia de revoluciones en las matemáticas, pregunta que fue formulada a raíz de la clásica obra de Kuhn [1962]. La pregunta anterior dio origen a 'la polémica Crowe-Dauben' [Gillies 1992]. Crowe, en sus 10 famosas leyes, sostuvo que no pueden darse revoluciones en matemáticas, pues, según él, siguiendo el sentido político del término 'revolución', las viejas teorías deberían ser abolidas y descartadas completamente, lo que no es el caso de las teorías matemáticas [Crowe 1975]. Dauben presentó una posición más abierta, aceptando cierta cohabitación entre 'viejas' y 'nuevas' teorías; esta cohabitación debe, sin embargo, de acuerdo a Dauben, pasar por una etapa de reorganización jerárquica, resultado de la propia revolución conceptual que hace posible la aparición de la nueva teoría, de manera que los teoremas y descubrimientos de la vieja matemática se ven "relegados a una posición inferior" [véase Dauben 1984]).

No obstante sus finos análisis conceptuales, Dauben deja de lado los elementos socio-culturales de la producción matemática y el papel que dichos elementos podrían haber desempeñado en la revolución conceptual. Como ha sido señalado recientemente, resulta sumamente difícil entender el desarrollo y los cambios en el conocimiento matemático sin tomar en cuenta los factores sociales y culturales subyacentes [e.g. Restivo 1993; Glas 1993]. Dichos factores aparecen, en efecto, en las aproximaciones historiográficas contemporáneas, no como simples factores externos, irrelevantes (como aparecen de hecho en la obra del propio Lakatos, con su demarcación entre 'historia interna' e 'historia externa', [véase Lakatos 1978, 102 *ss*.]) sino como co-sustanciales y fundamentales a la actividad matemática misma.

Un problema que se plantea dentro de la aproximación socio-conceptual del desarrollo de las matemáticas es el de proveer criterios que permitan detectar cambios sustanciales en el desarrollo de una teoría matemática. La complejidad del problema puede ser percibida si se toma en cuenta que dichos criterios o normas epistémicas dejan de pertenecer al dominio estricto del pensamiento lógico-matemático. El giro que toma dicho problema —y que constituye, a nuestro parecer, un giro cualitativo importante en la historiografía de las matemáticas— lleva a abandonar la búsqueda de un 'conocimiento objetivo' (por ejemplo de tipo Popperiano, como el que propuso Lakatos en sus *programas de investigación*, esto es, un conocimiento guiado por una heurística positiva de tipo lógico-falsificante) y lo reemplaza por un conocimiento social-objetivo, es decir un conocimiento objetivo que abandona sus pretenciones de ser universalmente válido por uno relativo a la época y a la cultura en la que la actividad matemática toma raíces y se desarrolla.

La relativización del conocimiento matemático no impide, sin embargo, intentar identificar ciertos 'saltos' o 'rupturas epistemológicas'. Por otro lado, es conveniente observar que estas rupturas epistemológicas no son todas de igual naturaleza: una ruptura epistemológica puede llevar a una *nueva organización* de la teoría en cuestión (un ejemplo oportuno es el de los inconmensurables en Grecia), una ruptura epistemológica puede llevar también al surgimiento de una *nueva teoría*, como es el caso del álgebra.

A propósito del progreso en el conocimiento matemático. Glas [1993 1, 46] señala una característica que, nos parece, puede dar cuenta de los "saltos" que estamos intentando identificar.

> El progreso, puede ser relacionado con una ganancia en generalidad, en explicación y poder unificador o contenido cognitivo [...]. La innovación explica las prácticas anteriores de manera continua a diferentes niveles; de ninguna manera la innovación *sigue* las prácticas anteriores de una manera continua al mismo nivel.

Así, por ejemplo, el 'álgebra' en Diofanto, que constituye una innovación con relación a los métodos numéricos de falsa posición y a los métodos geométricos de los escribas babilónicos, permite explicar esas prácticas, pero de ninguna manera sigue dichas prácticas al mismo nivel. Otro ejemplo (éste dado por Glas) es el del cálculo diferencial e integral: el cálculo puede explicar los fallos y los éxitos de los métodos anteriores para determinar áreas, tangentes, extremos, etc., pero no puede ser directamente derivable de dichos métodos. Hay, tanto en el caso de una nueva teoría o de una teoría transformada, un carácter de irreducibilidad que pone de manifiesto la ruptura epistemológica.

El propósito del trabajo que presentamos aquí es examinar la teoría de los números poligonales a fines de la antigüedad. Discutiendo las dos corrientes matemáticas diferentes que prestan atención a los números poligonales en dicha época —la primera se sitúa en el marco del neopitagorismo, y alcanza un punto máximo o apogeo en la *Introducción a la Aritmética* de Nicómaco, la otra se sitúa en el marco de la tradición euclidiana, representada por Diofanto en su obra *Sobre los Números Poligonales*—, intentaremos mostrar que la segunda corriente mencionada marca un giro epistemológico en la teoría de los números poligonales. No se trata, pues, de observar y analizar un fenómeno de *emergencia* [surgimiento] de una teoría, sino de estudiar un fenómeno de *transformación*.

Dentro de este contexto, nos proponemos identificar, con cierta amplitud, las bases conceptuales que hacen posible dicho giro epistemológico, situando el proceso de transformación en su propio contexto cultural e histórico.

En la sección 1, abordaremos el papel del neopitagorismo en el contexto filosófico de fines de la antigüedad, es decir, en la época en que las obras de Nicómaco y de Diofanto mencionadas anteriormente fueron escritas. En la sección 2 intentaremos identificar el lugar que ocuparon

Nicómaco y Diofanto en el ambiente social e intelectual de la época. En la sección 3 esbozaremos rápidamente la evolución histórico-conceptual de los números poligonales hasta antes de Nicómaco, mientras que dejaremos para la sección 4 el contraste conceptual entre las dos teorías.

1. El neopitagorismo a fines de la Antigüedad

Un fenómeno filosófico interesante del pensamiento antiguo lo constituye la emergencia del neoplatonismo. Heredero intelectual de las 'viejas escuelas' (principalmente de los primeros pitagóricos, la Academia de Platón, el Liceo de Aristóteles, la 'Vieja Academia') y de pensadores del platonismo medio, como Antíoco de Ascalón (*ca.* 130 a. C.) y Eudoro, el neoplatonismo —impulsado por Plotino (205 - 270 d. C.) y sus discípulos— no emerge, sin embargo, como una corriente uniforme. En efecto, el neoplatonismo encierra diversas tendencias, a menudo mixtas (como lo prueba Hierocles, en cuya obra convergen pensamientos platónicos, pitagóricos, orientales e incluso del propio cristianismo [véase Aujoulat 1986]), lo que hace que los temas del neoplatonismo (vistos a menudo bajo el lente de la contemplación y del éxtasis) sean también variados. Una de las corrientes neoplatonistas más fuertes es aquella en que el pitagorismo y el estudio de los números desempeñan un papel fundamental: es en esta corriente —comúnmente llamada *neopitagorismo*— que encontramos a Jámblico, Porfirio y Proclo.[1]

Es importante recordar que el neopitagorismo no es un fenómeno exclusivamente neoplatonista: el 'movimiento' neopitagorista, concebido como corriente filosófica identificada con los primeros pitagóricos, remonta a épocas más tempranas. En efecto, el interés particular que suscita el estudio de los primeros pitagóricos, hacia el siglo II y III d. C., está ligado a un movimiento intelectual que remonta a los círculos filosóficos del platonismo medio del siglo I a. C., en el cual encontramos a uno de los romanos más instruidos, Publio Nigidio Fígulo

1. Debemos recordar que, cuando hablamos de neopitagorismo, estamos imponiendo una frágil clasificación filosófica *post factum*: filósofos de entonces se reconocían más bien como pitagóricos; por otro lado, dicho grupo de filósofos parece no haber sido organizado en escuela, con un personaje a la cabeza. Se trata, pues, de una identificación en términos de formas de pensamiento que se desarrollaban en círculos intelectuales de carácter más bien formal, en donde es difícil distinguir entre 'oidores' y 'discípulos'.

(98 - 45 a. C.).[2] Es precisamente la época de Fígulo que provendría un interés marcado por el mito de la vida de Pitágoras, que se cristalizaría, algunos siglos más tarde, en el círculo de los neopitagóricos neoplatonistas, en una colección de obras sobre ese tema, entre las que se encuentran *La Vida de Pitágoras* de Jámblico, la de Porfirio, la de Diógenes Laercio, una anónima transmitida por Focio (Photius), así como otras perdidas, entre ellas una del propio Nicómaco.[3]

El neopitagorismo neoplatonista puede ser visto como una corriente de pensamiento inscrita en el platonismo "moderno" del siglo III en el cual los problemas filosóficos de los "primeros principios" son expresados en términos de números, lo que lleva, a menudo, a una descripción más o menos matemática del mundo. No vamos a discutir aquí las diferencias entre el neopitagorismo y otras tendencias filosóficas del neoplatonismo o el propio platonismo. Lo que sí conviene señalar, de acuerdo con el tema central de este trabajo, es que uno de los elementos que distingue el neopitagorismo del propio platonismo y del viejo pitagorismo es el papel que desempeña en él el número. En efecto, en el viejo pitagorismo, el número es *inmanente* a las cosas;[4] en el neopitagorismo, las cosas no son concebidas como formadas de números, sino formadas de acuerdo a un *plan numérico*. Por otro lado, si bien es cierto que en el neopitagorismo los números son vistos a menudo como entidades situadas entre las Ideas y el mundo sensible, lo que podría acercarlo al platonismo, existe, en el neopitagorismo, una idea de generación *dinámica* de números y de relaciones entre éstos que le es propia.[5] Otra diferencia entre el platonismo y neoplatonismo respecto a las matemáticas (y en particular a la aritmética) es el valor ético que el primero atribuye a éstas: la aritmética es *buena* en el sentido que ayuda a la mente a elevarse y a ocuparnos de cosas que están más allá del alcance de los sentidos.[6] El neoplatonista, por el contrario, se acerca a las matemáticas con un espíritu curioso, ávido

2. Cicerón, en su traducción del *Timeo* de Platón, da a Fígulo el crédito de haber revivido el sistema filosófico de "aquellos nobles pitagóricos", sistema que se extinguió de alguna forma, dice Cicerón, luego de haber florecido por un número de años en Italia y en Sicilia [*cf.*, Dillon 1977, 117].

3. Las primeras cuatro obras mencionadas relacionadas con la vida de Pitágoras se encuentran traducidas al inglés en Guthrie 1987.

4. Así, por ejemplo, refiriéndose a los pitagóricos, Aristóteles señala: "ellos dicen que las cosas mismas son números" [Metafísica, 987b27].

5. Teón, en la primera parte de su *Expositio Rerum Mathematicarum ad legendum Platonem utilium* dice: "Número es una colección de mónadas o una progresión de la multitud empezando y regresando a la mónada" [R. y D. Lawlor 1979, 12].

6. Recordemos, por ejemplo, la importancia que Platón da al estudio de las matemáticas en la educación de los reyes-filósofos o de los guardias, en el libro VII de *La República*.

de secretos escondidos que pueden ser revelados a través de los números. Es por ello que el neopitagorismo, en su versión más 'simple', cae en una tradición oriental prepitagórica, la *Numerología*, a la cual nos referiremos con más detenimiento en la sección 3; en su versión más 'seria', el neopitagorismo desemboca —para utilizar una expresión de Nicómaco— en el estudio de los 'números científicos', a partir de cuyo modelo el mundo sensible fue creado.

2. El lugar de Nicómaco y Diofanto en el ambiente intelectual de fines de la Antigüedad

Hacia fines de la Antigüedad, el neoplatonismo no campeaba solo en el terreno filosófico: éste cohabitaba, por ejemplo, con el cristianismo emergente y con antiguas corrientes cosmologicas (en general de origen oriental) de explicación de los sobrenatural —como la astrología. Si bien es cierto que la astrología encontró una buena recepción en el romano de las clases populares, el intelectual romano se interesó —en mayor o menor grado— en el neoplatonismo.[7] El estudio de la filosofía y de la literatura formaban parte de las actividades en que los romanos de las altas clases ocupaban su tiempo libre. Cicerón nos da una idea del valor intelectual que se daba al estudio en el mundo antiguo; en efecto, refiriéndose a Figulus, Cicerón dice: "El fue versado no solamente en todas las otras artes que son propias a un gentilhombre, sino también fue un agudo y diligente investigador de aquellas cosas que reposan detrás de la naturaleza".[8]

Los romanos de las altas clases sociales solían hablar y leer griego, y frecuentemente tomaban de 'profesores' a griegos instruidos para aprender la filosofía y la literatura. Los profesores griegos (muchos de ellos reclutados como esclavos) solían también encargarse de brindar cierta educación a los hijos de los romanos y velar por la biblioteca del patrón [Lindberg 1992, 133-137].

Las 'lecciones' que los profesores o los esclavos daban eran vistas a menudo como parte de la recreación intelectual de las altas esferas romanas. Muchas veces las 'lecciones' desembocaban en pequeñas obras escritas. Un ejemplo de esta dinámica intelectual nos lo brinda el filósofo Porfirio —que escribió una obra sobre la vida de Pitágoras

7. Sin querer decir con esto que el romano cultivado fue indiferente a la astrología (véase Raymond 1965, 93).
8. *Cf.*, Dillon 1977, 117. N. B., a lo largo del presente artículo, las traducciones al español son del autor.

[Guthrie 1987, 123-135]. Porfirio, discípulo de Plotino, y —junto con éste— uno de los personajes claves del neoplatonismo, dio clases al senador Crisoario y escribió —a raíz de una consulta sobre la filosofía aristotélica que éste le hizo— su obra *Introducción* (*Isagogé*). Esta obra, que Porfirio dirige al senador, trata brevemente del género, la especie, la diferencia, lo propio y el accidente. Otro ejemplo es dado por un platonista medio cercano al pitagorismo, Alejandro Polihistor. Alejandro fue llevado a Roma como esclavo en el año 82 a. C. Se sabe que en 70 a. C. enseñaba en esa ciudad y que escribió un libro sobre los símbolos pitagóricos, así como una *Sucesión de Filósofos* [véase Diógenes Laercio, VIII, 25, tr. Hicks, 1925 I, 341 *ss.*]. Dillon [1977, 117] ha sugerido que Fígilo (a quienes ya nos hemos referido anteriormente) habría sido instruido en el pitagorismo por Alejandro.

De la vida de Nicómaco de Geresa no sabemos mucho. Datos indirectos permiten situarlo entre 50 y 150 d. C. De sus obras sobreviven la *Introducción a la Aritmética* y su *Manual de Armonía*. Un fragmento de su *Teologoumena Arithmeticae* (Teología de los Números) se encuentra incluido en una obra del mismo nombre, atribuida a Jámblico. Nicómano escribió dos obras que no han sobrevivido: una *Vida de Pitágoras* (mencionada por Porfirio) y una *Introducción a la Geometría*. Cierto pasaje en una de sus obras sugiere que éste habría sido —como Alejandro y Porfirio— un profesor en contacto con las altas esferas romanas. En efecto, en su *Manual de Armonía*, escrito a solicitud de una dama —probablemente de alto rango— Nicómaco dice:

> Y si los dioses lo permiten, tan pronto como tenga un momento de ocio y de descanso en mis jornadas, compondré para usted una mejor y más detallada *Introducción* sobre este tema; [...] y para que usted pueda seguir con mayor facilidad el argumento, voy a empezar en el mismo punto en el que empecé su instrucción cuando expuse el tema para usted [D'Ooge *et al.* 1938, 76].

Las 'introducciones' (como la de Porfirio o la propia *Introducción a la Aritmética* de Nicómaco, que designaremos en adelante por *Int. Arit.*) forman parte de una producción científica propia a esa época, y que no puede ser comprendida sin el ambiente soco-intelectual que hemos esbozado. dichas obras son dirigidas a un público que encuentra cierto interés en la literatura, en la filosofía e incluso en las matemáticas, sin interesarse necesariamente en las finas y sofisticadas discusiones griegas de orden epistemológico [Lidberg 1992, 136-37]. Su propósito es presentar cierto material en forma clara, breve y accesible a un lector no especialista (lo que hace que muchas de esas obras —como la *Int.*

Arit.— hayan alcanzado un buen éxito como 'textos escolares'). Muchas de esas obras son concebidas como obras de iniciación a lecturas filosóficas serias que requieren un conocimiento no trivial de temas sobre la matemática, la astronomía y la música. Cabe señalar a ese respecto que uno de los objetivos de la *Introducción a la Aritmética* de Nicómaco es ayudar al lector en la comprensión de Platón. Otra obra, más o menos contemporánea a la Nicómaco, a la cual nos hemos referido previamente [nota 5], se inscribe en la misma dirección y lleva un título aun más sugestivo: *Matemáticas útiles para entender a Platón*, de Teón de Esmirna.

Los datos biográficos que poseemos de Diofanto son tan escuetos como los que poseemos de Nicómaco. Generalmente su periodo de florecimiento es situado hacia 250 d. C.; sin embargo Knorr [1993] sostiene que Diofanto fue una generación anterior a la de Anatolio (ca. siglo III d. C.), un filósofo neopitagorista convertido al cristianismo y luego hecho obispo de Laodicea.

Además de su colosal obra *Aritmética*, dividida en 13 Libros, de los cuales sólo sobreviven III, nos ha llegado —aunque incompleta— su obra *Sobre los números poligonales*.[9] La dedicatoria que Diofanto hace de la Aritmética a un 'honorable Dionisio' [véase Eecke 1926, 1], ha llevado a Tannery a sugerir que el Dionisio en cuestión es el que fue arzobispo de Alejandría, que dirigió el gimnasio cristiano en 231 d. C. y que la *Aritmética* fue destinada a los estudiantes de las escuelas cristianas. Knorr [1993] ha sugerido que la obra *Definiciones*, también dedicada a un 'Dionisio' y habitualmente atribuida a Herón, fue en realidad escrita por Diofanto, y que su objetivo era —como el de la *Aritmética*— servir como un manual escolar introductorio. A pesar de la supuesta cercanía de Diofanto con los medios escolares de la época, nada parece sugerir que su obra *Sobre los números poligonales* haya sido escrita para uso de las escuelas. Más bien dicha obra parece haber sido motivada por el auge que cobraron los números poligonales en el ambiente intelectual de fines de la Antigüedad. La obra en cuestión no intentaría responder, pues, a 'alguna necesidad', sino plantear la teoría desde una perspectiva más amplia, probando de-

9. Sin embargo Diofanto debió haber escrito más obras. Así, en ciertos pasajes de la *Aritmética*, Diofanto hace referencia a los porismas, lo que sugiere que se podría tratar de una obra —ahora perdida— escrita por él. Jámblico, en su *In Nicomachi Arithmeticam Introductionem liber*, le atribuye otra obra: *Moriastica* (Heath 1910, 3). Christianidis [1991] ha sugerido la existencia de otra obra perdida: *La enseñanza de los Elementos de Aritmética*.

ductivamente ciertos resultados y generalizando otros ya conocidos [véase la cita de Diofanto que damos en la próxima sección].

Con los datos a nuestra disposición, no es posible inferir algo respecto a las eventuales orientaciones filosóficas de Diofanto. Probablemente Diofanto no estuvo implicado en ninguna escuela filosófica, por lo menos activa y abiertamente, más bien Diofanto parecería haber estado ligado a la escuela matemática de Alejandría.

3. Los números poligonales en la tradición pitagórica

Antes de entrar de lleno al estudio de las diferencias conceptuales entre las obras de Nicómaco y de Diofanto que nos interesan, vamos a emprender, para comprender mejor dichas diferencias, un esbozo sucinto del desarrollo histórico de los números poligonales.

En ese orden de ideas, mencionaremos que los números poligonales (cuyo origen es ciertamente griego) parecen derivar de una tradición oriental prepitagórica a la que nos hemos referido previamente: la numerología. Dentro de esta tradición, los números son vistos portadores de significados ocultos y son a menudo identificados con los dioses, con los astros y con el destino de los hombres. Así, por ejemplo, en Mesopotamia, el número 60 fue identificado con el dios Anou, dios del cielo y de todos los dioses [véase Pichot 1991, 119-121]; en el mundo griego, se creía que el número siete ejercía un control sobre el nacimiento y la edad del hombre; dicho número era asociado a la diosa Atenas, una diosa sin progenitores ni descendientes, por considerarse que dicho número no es generado por otros números (por ser primo) ni genera ninguno de los números que constituyen la década.[11]

La falta de fuentes pitagóricas escritas a su inicio (sin duda por el carácter oral de la propia tradición pitagórica, alentado por la estructura hermética de la misma) no hace posible situar con precisión la emergencia de las primeras ideas sobre los números poligonales. Sin embargo, comentarios posteriores sugieren la existencia de una

11. Esa 'propiedad' no es, pues, compartida por los otros primos de la década (es decir, los números 1, 2, 3, ..., 10), como 3 o 5 que sí generan otros números de la propia década. 3, por ejemplo, genera al número 6 y al número 9. La década constituye un tema central de los neopitagóricos; por ejemplo, ése es el tema de uno de los fragmentos que sobreviven de la obra de Anatolio: *Sur la décade et les nombres qu'elle comprend* [Tannery 1915 III, 12-28]. Sin embargo, la década aparece ya en una obra de Espeusipo, sobre la cual regresaremos más adelante.

reflexión detenida sobre los números y su papel en el sistema de pensamiento pitagórico.

Filolao es considerado el primero en haber roto la tradición pitagórica oral y haber escrito sobre las ideas pitagóricas.[11] Su obra, de la cual sobreviven solamente algunos fragmentos, como es de hecho el caso de todos los 'primeros pitagóricos',[12] es conocida por comentadores y escritores posteriores.[13] Uno de esos fragmentos es particularmente importante, pues en él encontramos cierta idea sobre el valor epistemológico del número: "Toda cosa que puede ser conocida tiene un Número, pues no es posible pensar o aprehender algo sin Él [Número]" [Freeman 1956, 74, fragmento 4]. Aunque evidentemente es difícil obtener conclusiones definitivas a partir de pequeños fragmentos, la idea de Filolao parece ser la de formular una condición (necesaria) para que algo pueda ser *conocido*, a saber, la de poseer un Número.[14] No tenemos forma de saber a qué clase de conocimiento se refiere Filolao en dicho fragmento. Huffman [1988] sugiere, sin embargo, que no se trata de una simple aprehensión o reconocimiento, sino de un verdadero conocimiento. Otro de los fragmentos de Filolao trata de la distinción de números en pares, impares y pares-impares,[15] así como un estudio de las razones musicales.[16]

No es posible determinar si Filolao escribió sobre los números poligonales. Sin embargo, cuando Aristóteles menciona el procedimiento de Eurito para obtener el número que corresponde a cierta cosa [*Me-*

---

11 La época de Filolao es difícil de situar, no obstante, la mención que hace Platón de Filolao en el *Fedón* 61[de], deja inferir que Filolao debió vivir en la segunda mitad del siglo V y principios del siglo IV a. C.

12 Una compilación de fragmentos de filósofos presocráticos fue emprendida por Hermann Diels, *Die Fragmente der Vorsokratiker* (1848-1922). *Los fragmentos* fueron más tarde traducidos al inglés por Freeman [1956].

13 No es posible determinar si Filolao escribió una o más obras [Proclo, en su *Comentario al Libro I de Euclides*, menciona *Las Bacantes* como una trilogía de Filolao: cf. Proclo, véase Locke 1948, 18].

14. Un problema que se plantea en la aproximación epistemológica que parece proponer Filolao es el de saber cómo los números pueden ser asociados a las cosas. Una manera 'ingenua' de ello es mencionada por Aristóteles, quien dice, a propósito de los pitagóricos: "... Eurito decidió cuál era el número de las cosas (por ejemplo el de un hombre o el de un caballo) imitando las figuras de las cosas vivas con piedras, como cierta gente ha puesto los números en forma de triángulos o de cuadrados" [*Metafísica* 1092[b]10].

15 El fragmento, que proviene de una cita hecha por Estobeo [mitad del siglo V d. C.] de la obra *Sobre el Universo* de Filolao, dice así: "El número tiene dos formas distintas, impar y par, y una tercera compuesta de ambas, la par-impar; cada una de esas dos formas tiene varios aspectos que cada cosa muestra en sí misma" [Freeman 1956, 74, fragmento 5].

16 Freeman 1956, 74, frag. 6.

tafísica 1092b10; ver nota 14], termina diciendo: "... como cierta gente ha puesto los números en forma de triángulos o cuadrados". Se trata evidentemente de una alusión a los primeros números poligonales.[17] Esto nos permite inferir que en la época de Eurito, es decir, a principios del siglo IV a. C., los primeros conceptos sobre los números poligonales habían sido desarrollados. Dado que Eurito era discípulo de Filolao, dicha práctica pudo haberse desarrollado (o continuado, si ese fuese el caso) en el seno del círculo académico de Filolao.[18]

Sabemos que la obra de Filolao era bien conocida y apreciada por Espeusipo, sobrino de Platón y que a la muerte de éste (348 o 347 a. C.) tomó la dirección de la Academia. Sabemos también que Espeusipo, cuya vida se sitúa entre *ca.* 410 y 339 a. C. [véase Tarán, 1981, 7], escribió una pequeña obra llamada *Sobre los Números Pitagóricos*, en la cual aparecen los números poligonales y los números sólidos. Lo poco que sabemos de dicha obra se encuentra en la *Theologoumena Arithmeticae*, atribuida a Jámblico. De acuerdo a esta fuente, la mitad *Sobre los Números Pitagóricos* trataba 'de la forma más elegante sobre los números lineales y los poligonales y con toda clase de superficies y números sólidos'. La primera parte abordaba también los cinco poliedros platónicos. La otra mitad de *Sobre los Números Pitagóricos* trataba de la década, en la tradición de la numerología griega;[19] el fragmento existente pertenece a la segunda parte.[20] En todo caso, no queda claro hasta qué punto el desarrollo de la teoría de los números poligonales pudo haber llegado en la obra de Espeusipo.

En el fragmento sobreviviente de la obra *Sobre los Números Poligonales* de Diofanto, encontramos mencionado a Hypsicles (*fl.* 170

17. Recordemos que los números poligonales se dividen en triangulares, cuadrados, pentagonales, hexagonales, etc. y que esos números se obtienen como resultado de las sumas sucesivas de los primeros términos de progresiones aritméticas de primer término igual a 1 y diferencia d. Así, utilizando el simbolismo moderno, si la progresión aritmética es $1, 1+d, 1+2d, \ldots$, los números poligonales resultantes son: $1, 1+(1+d), 1+(1+d)+(1+2d)$, etc. Si $d=1$, obtenemos los números triangulares; si $d=2$, obtenemos los números cuadrados, etcétera.
18. Otro testimonio de una actividad alrededor de los números poligonales en el siglo IV a. C. nos es dado en *Vitarum scriptores Graeci Minores*, en donde se menciona que Filipo de Opus, discípulo de Platón, escribió una obra, actualmente perdida, intitulada *Sobre los números poligonales* [véase Heath 1921].
19. Un estudio de las diferentes tradiciones de la numerología griega se encuentra en Robbins 1921.
20. Dicho fragmento se encuentra traducido al inglés en Thomas 1939, 33-83. Nuestra cita textual se encuentra en la p. 77. Señalemos igualmente que la *Theologoumena Arithmeticae*, atribuida a Jámblico, fue traducida recientemente por Waterfield [1988].

a. C.]. De hecho uno de los objetivos de Diofanto en dicha obra es probar una propiedad sobre los números poligonales:

> Así se encuentra demostrado lo que fue dicho por Hypsicles en una definición: si tantos números como se quiera, empezando con la unidad, tienen igual diferencia, y si la diferencia es igual a la unidad, la suma de todos esos números será un número triangular, si la diferencia es dos unidades, la suma será un número cuadrangular, y si la diferencia es tres unidades, la suma será un número pentagonal [...] [véase Eeck 1926, 289]

No hay, sin embargo, ninguna referencia a una obra de Hypsicles en la que se encontraría desarrollado el tema de los números poligonales. Sabemos, por el contrario, que Hypsicles escribió un tratado sobre astronomía, llamado AnaforikoV [Αναφορικός], y que en él trata de ciertas propiedades sobre las progresiones aritméticas.[21] Ahora bien, como veremos con detenimiento más adelante, el tratamiento que Diofanto hace de los números poligonales es basado precisamente en propiedades de progresiones aritméticas; de esa cuenta, resulta muy probable que Hypsicles haya tenido a su disposición el marco conceptual necesario para emprender un estudio de los números poligonales en el estilo que encontramos en Diofanto. Sin embargo, en la cita anterior, Diofanto da la impresión que su obra aporta la demostración de la propiedad enunciada por Hypsicles, lo que da lugar a pensar que si éste escribió realmente una obra sobre los números poligonales y lo hizo en el estilo de la de Diofanto, su contenido no fue desarrollado hasta el punto que encontramos en el fragmento existente de la obra correspondiente de Diofanto. Como nuestro propósito en esta sección no es el de discutir los eventuales aportes de Diofanto a la teoría de los números poligonales, sino el de hacer una *descripción* del desarrollo conceptual de esta teoría, vamos a dejar esta discusión para más adelante. Subrayemos simplemente el hecho de que la mención que hace Diofanto de Hypsicles pone en evidencia una actividad matemática en torno a los números poligonales en el siglo II a. C.

Continuando con nuestro breve desarrollo conceptual de los números poligonales, debemos mencionar ahora a Plutarco, un filósofo platonista medio del siglo II d. C., discípulo de Ammonio. En *Cuestiones pla-*

21 De acuerdo a Heath, entre los resultados (expresados en notaciones modernas) obtenidos por Hypsicles se encuentra el siguiente: Si $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n}$ es una progresión aritmética decreciente de $2n$ términos con δ [$= a_1 - a_2 = a_2 - a_3 = \ldots$] como diferencia común, entonces

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n - (a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n}) = n^2\delta$$ [Heath 1921, II, 216]

tónicos, número V. Plutarco discute las razones por las cuales la recta es, en la Naturaleza, anterior al círculo. En cierto momento de la discusión, Plutarco dice: "Pero ciertamente la unidad es triangular, pues cada número triangular tomado ocho veces, añadido de una unidad, se vuelve cuadrangular, y esto sucede con la unidad" [Plutarco 1909, 517].[22]

El hecho de que Plutarco mencione dicha propiedad sin explicación adicional, nos sugiere que la propiedad en cuestión formaba parte del conocimiento corriente de los filósofos de la época. No podemos saber, empero, cómo ésta pudo haber sido obtenida. Probablemente se trata de una proposición establecida en el estilo de Nicómaco o de Teón de Esmirna. En todo caso, Diofanto, al iniciar su obra *Sobre los Números Poligonales*, menciona una propiedad que es una generalización de la mencionada por Nicómaco; en efecto, en la obra de Diofanto la propiedad tiene que ver con todos los números poligonales, no solamente con los triangulares:

> Se ha reconocido, dice Diofanto, que todo número poligonal, multiplicado por un número que depende de la cantidad de sus ángulos, más un cuadrado que depende también de dicha cantidad de ángulos, forma un cuadrado [véase Beeke 1926, 278].[23]

4. Los números poligonales en Nicómaco y en Diofanto

Para abordar el estudio de las diferencias conceptuales entre la teoría de los números poligonales de Nicómaco y la de Diofanto, vamos primeramente a concentrar nuestra atención en el *sustrato conceptual* sobre el cual reposa la teoría expuesta por cada uno de nuestros autores. El *sustrato conceptual* es lo que subtiende y delimita la forma en que la actividad matemática (esto es sus objetos, sus problemas, etc.) es *vista y practicada*.[24] En términos

22. En notaciones modernas, si Δ designa el conjunto de números triangulares y C el conjunto de números cuadrados, la propiedad afirma que $(\forall t)\ (t \in \Delta \Rightarrow 8t + 1 \in C)$. [Sin embargo, Plutarco parece utilizar la propiedad recíproca, que en este caso también es verdadera.]
23. En términos más precisos, si P designa el conjunto de números poligonales, p un elemento de P y β el número de ángulos de p, la propiedad que Diofanto va a demostrar que puede enunciarse así: $(\forall p)\ (p \in P \Rightarrow 8p(\beta - 2) + (\beta - 4)^2 \in C)$
24. El sustrato conceptual al que nos referimos aquí coincide probablemente hasta cierto punto con lo que Fleck [1979] llamó 'estilo de pensamiento'. Sin embargo, el término de Fleck nos parece evocar la existencia de cierta libertad intelectual; un 'estilo' es, en efecto, un acto deliberado, consciente, una cuestión de gusto. Nuestra posición es, en este sentido, radicalmente opuesta: el estilo de pensamiento —y esto lo reconocía Fleck (*op. cit.* 41)— está enraizado en el pensamiento social correspondiente: más oportuno hubiese sido quizás hablar de 'forma de pensamiento'.

generales, el *sustrato conceptual* está fuertemente condicionado por 'creencias' (por ejemplo acerca de la 'naturaleza' de los objetos matemáticos), posiciones epistemológicas, sociales, culturales, filosóficas, etc. Dichas creencias y posiciones no son necesariamente explícitas. Sin embargo, en el caso de Nicómaco, es posible detectar con bastante claridad las trazas de la influencia de su posición filosófica en el *sustrato conceptual* que subyace a la *Introducción a la Aritmética*. En efecto —aun sin intentar entrar a discutir a fondo la posición filosófica de Nicómaco, discusión que es, en virtud de las fuentes históricas disponibles, 'necesariamente incompleta' [D'Ooge *et al.* 1938, 88]— cabe mencionar que las primeras frases de *Int. Art.*, I, §VI sugieren que Nicómaco concibe que el universo fue determinado y ordenado de acuerdo al número conceptual, que pre-existe en la mente del Creador. El número conceptual da lugar a un patrón —que desempeña el papel de un plan preliminar— sobre el cual fueron creadas todas las cosas: "el tiempo, el movimiento, los cielos, las estrellas y toda clase de revoluciones" [*Int. Art.* I, IV, 1].[25] La creación es tal que las cosas creadas poseen una armonía. Dicha armonía es expresada no por el número conceptual sino por el número científico: éste aparece, en efecto, como la expresión de la armonía de las cosas (reales, inmateriales) existentes en el universo y, como a dichas cosas, le subyace la eterna lucha de las dos fuerzas cósmicas primeras, de lo limitado y lo ilimitado, de lo parecido y lo diferente, de la mónada y la díada [*Ibid.*, I, IV, 2].[26]

El papel epistemológico que Nicómaco atribuye al estudio de las matemáticas es precisamente el de brindar un acceso —a través del estudio de los números científicos— al conocimiento del Universo.[27] El conocimiento del Universo puede realizarse (aunque no quede claro hasta qué punto) a través de la búsqueda de las relaciones armoniosas entre sus componentes. Dicha armonía es vista en término de regularidades numéricas, que están allí esperando a ser descubiertas. El programa de investigación de la *Introducción a la Aritmética* es precisamente

25. Nuestro análisis de Nicómaco está basado en la traducción inglesa de 1938 hecha por D'Ooge, que contiene los estudios sobre la aritmética griega de Robbins y Karpinski.
26. El papel central que desempeña la *armonía* en la cosmología de Nicómaco no es una idea original, es una idea que remonta a los primeros pitagóricos [*véase*, por ejemplo, el fragmento 10 de Filolao en Freeman 1956, 75].
27. De nuevo, no se trata de una idea original. Es más: Nicómaco cita a ese respecto a Arquitas y a Platón [*cf. Ibid.*, I, III, 4 *ss*.].

ese, el de descubrir la armonía del mundo a través de las regularidades existentes en los *números*. El instrumento *par excellence* en esta investigación filosófica-matemática es el estudio de *los patrones numéricos*.

Las consideraciones anteriores respecto al sustrato conceptual de Nicómaco nos dan un punto de partida para entender el tipo de actividad matemática en el que se coloca la *Introducción a la Aritmética*. Sin embargo, dicho sustrato no puede dar cuenta de la 'dinámica' de la actividad matemática misma, esto es su estructura conceptual y los medios específicos utilizados para plantear y resolver preguntas o problemas. Para entender mejor dicha 'dinámica' debemos dotarnos de una metodología que, evidentemente, dependerá del análisis conceptual que queremos llevar a cabo.

Para intentar entender el contraste conceptual en las obras de Nicómaco y Diofanto sobre los números poligonales, vamos a recurrir aquí a lo que hemos llamado anteriormente el sistema de conocimientos matemáticos [Radford 1993]. Dicho brevemente, dada una 'teoría' matemática T, se trata de investigar la estructura conceptual τ que la subtiende, prestando atención a la tripleta (Ω, Π, Σ) —que llamamos sistema de conocimientos matemáticos de la teoría *T*—, en donde Ω designa la familia o conjunto de conceptos de *T*, Π designa la familia de problemas que son planteados en *T* y Σ designa el conjunto de métodos que permiten resolver los problemas Π de *T*.[28]

Al examinar el texto o conjunto de textos en los que las teorías en estudio son expuestas, nuestro enfoque metodológico intenta ir más allá de lo que los lingüistas han llamado la 'estructura de superficie' del texto y tener acceso a la 'estructura profunda' —una estructura implícita— con el objeto de detectar las redes conceptuales que subyacen a cada una de las teorías en cuestión. Sin embargo, para alcanzar resultados significativos en el estudio de los elementos conceptuales que distinguen las teorías de los números poligonales que estamos estudiando, el reconocimiento, inspección y análisis de la estructura profunda no puede limitarse al simple contraste de las componentes de los sistemas de conocimiento matemático que subyacen las teorías T_N y T_D de Nicómaco y de Diofanto, respectivamente, sino de

28. Los *problemas* a los que nos referimos aquí son aquellos en que la atención de la teoría es puesta, un *problema* puede ser el establecimiento de un teorema, puede ser también la búsqueda de objetos de la teoría (números, funciones, etc.) que verifiquen ciertas condiciones. En el primer caso, el *método de resolución* se refiere a un método de prueba o demostración, en el segundo a un método de solución propiamente dicho.

verlas en su interrelación propia. Se trata, pues, de ver las componentes en su interacción relacional trialéctrica interna.[29] (véase Fig. 1).

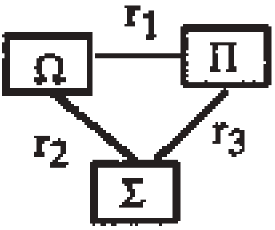


Fig. 1

Veamos ahora los puntos medulares de la exposición que hace Nicómaco de los números poligonales. Para ello empecemos considerando el concepto de número en general. Conviene observar a ese efecto que el estudio del concepto de número está supeditado al de cantidad. En efecto, de acuerdo a Nicómaco, las cantidades se dividen en dos: las cantidades absolutas y las relativas. Las absolutas se estudian en el marco de la aritmética y las relativas —las proporciones— en el marco de la música. Nicómaco menciona otra categoría: el de las cosas en la naturaleza relacionadas con el 'tamaño' o la 'talla' (éste es el caso de los objetos de la geometría y de la astronomía), las cuales pertenecen al marco de las magnitudes [D'ooge 1938, I. II. 5]. De acuerdo a esta clasificación, los números y los números poligonales, son tratadas por Nicómaco en el marco de la aritmética.

El concepto de número es definido por Nicómaco como "una multitud limitada o una combinación de unidades o una progresión de cantidades hecha de unidades" [*Ibid.* Art. I. IV. 2]. La definición está, pues, compuesta de tres definiciones (o subdefiniciones) que Nicómaco presenta como *sinónimas* o *complementarias*. La primera, que parece remontar a los antiguos pitagóricos e incluso probablemente a Tales,[30] en la que el número es visto como 'multitud limitada', está íntimamente relacionada con la idea de multitud o de cantidad y a la acción de contar dicha multitud: un número es 'número de unidades' [véase Aristóteles, *Metafísica* N5, 1092b15].[31] La segunda y la tercera (cuyo carácter dinámico parece ser un aporte

29 Una exposición más detallada del acercamiento metodológico que hemos esbozado se encuentra en Radford 1997.

30 Timaridas, en el siglo IV a. C. definía el número como 'una cantidad limitada' [véase Maziarz y Greenwood 1968, 18].

31 Sin intentar entrar a discutir el asunto a fondo, podemos preguntarnos si el hecho que el concepto griego de número se haya visto 'restringido' a la acción de contar multitudes limitadas tuvo alguna influencia en la exclusión de conteos en procesos infinitos (del estilo que planteó Zenón, por ejemplo).

del neoplatonismo)[32] son muy parecidas a la definición de Número que da Teón de Esmirna [Lawlor 1979, 12].[33]

La teoría de los números poligonales es expuesta en el Libro II, capítulos VIII a XII. Los números estudiados son: los triangulares, los cuadrados, los pentagonales, los hexagonales, los heptagonales y los octagonales (aunque no todos con la misma profundidad). La definición que da Nicómaco de los números triangulares es la siguiente: "Ahora un número triangular es uno que, cuando es analizado en sus unidades, la equilateral posición de sus partes en un plano forma una figura triangular" [D'ooge 1938 II VIII 1].

Nicómaco centra su atención en dos procedimientos de generación de números poligonales:

(a) un procedimiento numérico, en el cual los números se obtienen a través de adiciones sucesivas de los primeros términos de la progresión aritmética: así, los números triangulares son obtenidos a partir de la progresión 1, 2, 3, 4, ... Los primeros números triangulares son entonces 1, 3, 6, 10, etcétera;

(b) un procedimiento geométrico-aritmético, en el cual la representación geométrica de un número poligonal de una clase (los triangulares, por ejemplo) es obtenida añadiendo a la figura geométrica del número poligonal anteriormente construido el número de unidades indicado por el término correspondiente de la progresión aritmética en consideración. Así, por ejemplo, en el caso de los números triangulares, se tiene:

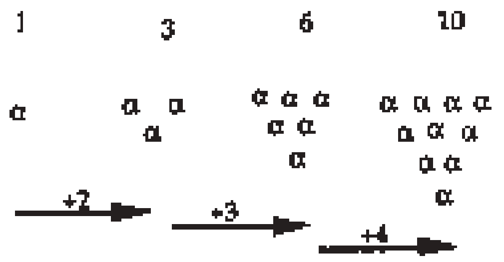


Fig. 2

32. En D'ooge 1938 II, VII, 3, Nicómaco retoma la idea de número como cantidad dinámica luego de haber expuesto que el punto es el principio de la línea, la línea el principio de la superficie y ésta del cuerpo (o sólido), dice: "Igualmente en números, la unidad es el principio de todo número que avanza de unidad en unidad en una dirección".

33. No obstante las similitudes, observemos que Teón, contrario a Nicómaco, consagra una sección a la diferencia entre el número (como objeto intangible) y la cantidad numerada (por ejemplo, '5 caballos', que se encuentra entre los objetos tangibles).

El 1 es considerado 'potencialmente' número triangular, ya que la unidad no es considerada como número. Por otro lado, observemos que, de acuerdo al sistema simbólico-numérico griego, la unidad es representada por la letra α; de esa cuenta los números triangulares mostrados en la figura 2 son vistos como 'combinación de unidades', lo que concuerda con una de las ideas fundamentales griegas respecto al número, como lo señalamos antes

Un procedimiento similar permite construir los números cuadrados:

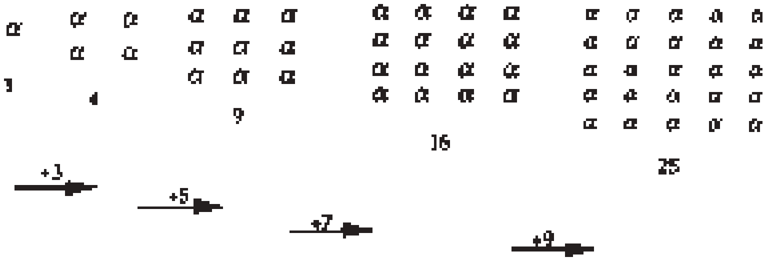


Fig. 3

Nicómaco observa que, como en el caso de los números triangulares, los 'lados' de esos números aumentan de uno en uno. Los 'lados' son, en efecto, en cada caso, 1, 2, 3, 4, 5, etcétera

Los números pentagonales son generados de forma similar a los anteriores, a partir de la sucesión 1, 5, 9, 13, 17, ... En el capítulo XII del Libro II, Nicómaco obtiene otras regularidades. Así, por ejemplo, observa que cada número cuadrado es suma de dos triangulares consecutivos y que

> cualquier triángulo añadido a una figura cuadrada hace un pentágono [...]. Similarmente, si los triángulos se añaden a los pentágonos, siguiendo el mismo orden, se producirán los hexágonos en el debido orden, y de nuevo los mismos triángulos con los últimos harán los heptágonos en orden, los octágonos después de los heptágonos, y así sucesivamente hasta el infinito [D'ooge 1938 II, XII, 3]

Las regularidades anteriormente mencionadas son ejemplificadas por Nicómaco a través del arreglo rectangular siguiente:

triángulos	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
cuadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
pentágonos	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
hexágonos	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
heptágonos	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235

Fig. 4

La notación matricial actual nos permite escribir esos resultados de la siguiente manera:

$$a_{p,n} = a_{p-1,n} + a_{1,n-1}$$

Refiriéndose al arreglo rectangular anterior (Fig. 4), Nicómaco nota varias propiedades, por ejemplo que la diferencia entre dos términos sucesivos de una misma columna es un número triangular. Esto es, utilizando de nuevo la notación moderna, $a_{p,n} - a_{p-1,n} = a_{1,n-1}$

En términos de nuestro enfoque metodológico, la familia Π de problemas planteados en la teoría de los números poligonales de Nicómaco consiste en la búsqueda de regularidades que resultan de la combinación de los términos de una o más sucesiones a través de su suma, su diferencia y —aunque en menor grado— su multiplicación, así como del cálculo de proporciones.[34] La naturaleza de los problemas no es, evidentemente, propia a la teoría de los números poligonales, sino que pertenecen al programa general de investigación de la *Introducción a la Aritmética* de Nicómaco. Así, por ejemplo, en el Libro II, XIX, Nicómaco se interesa a los números cuadrados y a los heteroméicos (es decir aquellos de la forma $n(n + 1)$, números que encierran a la vez lo similar (lo par) y lo diferente (lo impar), pues en n y $n+1$ hay siempre un número par y uno impar). Al considerar los primeros números de esas dos categorías, esto es: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, etc., y luego 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, 132, 156, 182, 210, 240, etc., Nicómaco observa ciertas regularidades, entre ellas la que concierne a las diferencias entre los términos correspondientes en cada sucesión: "Sus diferencias", dice Nicómaco, "aumentan de acuerdo a los números sucesivos a partir de 1" (esto es: 2-1=1; 6-4=2; 12-9=3; etc.). Además, "si el segundo término de los cuadrados es comparado con el primero de los heteroméicos, el tercero con el segundo, el cuarto con el tercero, y el resto similarmente [...] sus diferencias aumentarán no más a partir de 1 sino de 2". [D'ooge 1938 II, XIX, 3]. Más adelante, Nicómaco observa que

> los cuadrados entre ellos tienen sólo diferencias impares, los heteroméicos diferencias pares. Y si ponemos el primer número heteroméico como término

34. Las regularidades se estructuran a menudo en regularidades cada vez más complejas. Así, en el caso de los números cuadrados, por ejemplo, una primera regularidad es observada en la sucesión 1, 3, 5, 7, 9, ... Una segunda regularidad es observada al sumar los términos de esa sucesión 1, 1 + 3, 1 + 3 + 5, ... La sucesión así obtenida, esto es 1, 4, 9, ... participa en regularidades a su vez más complejas, expresadas siempre en términos de operaciones elementales, como las que hemos indicado arriba a propósito de la figura 4.

> medio entre los dos primeros cuadrados, el segundo entre los dos próximos, el tercero entre los dos siguientes, el cuarto entre los dos próximos que siguen, serán vistas aún más regularmente las relaciones numéricas en grupos de tres términos. [...]. El grande es al medio como el medio es al pequeño [...]. En todos los grupos, también, el producto de los extremos es igual al cuadrado del medio; y los extremos, más dos veces el medio dará siempre un cuadrado" [*Ibid.* II, XIX, 4].

El Libro II, XX empieza observando que "cada cuadrado más su propio lado se vuelve heteromécico o, por Zeus, también si su lado es restado de él" [*Ibid.* II, XX, 1].

Los métodos de resolución Σ de la teoría τ de Nicómaco no se expresan a través de un sistema simbólico: esto hace que los métodos de resolución no dejen, por decirlo así, trazas de su existencia. En su etapa heurística, es posible imaginar dichos métodos volcados al examen minucioso de sucesiones de números a un nivel intersucesión (es decir entre los diferentes términos de una misma sucesión) así como entresucesiones (es decir, entre diferentes sucesiones numéricas). En su etapa "formal", los métodos de resolución se reducen a desempeñar un papel de verificación o ilustración de la regularidad encontrada, dentro de las fronteras del plano aritmético y sobre un cierto número (pequeño) de casos. Su validez no es sostenida por un argumento deductivo, sino por una premisa filosófica que hace que la regularidad mostrada en ciertos casos se reproduce *ad infinitum*. Sospechar la regularidad observada más allá de los casos mostrados por la experiencia equivale, en el sustrato conceptual de Nicómaco, a poner en tela de juicio la armonía del universo y, de hecho, toda la cosmología en la que se circunscribe el pensamiento de Nicómaco. Este punto será de interés cuando comparemos más adelante los métodos de Diofanto con los de Nicómaco.

Vamos a intentar avanzar un peldaño más en nuestro análisis de la teoría de los números poligonales de Nicómaco, tratando de detectar lo que podríamos llamar una *frontera epistemológica* del sistema de conocimientos matemáticos asociado a dicha teoría. Esquemáticamente, dicho sistema puede ser visto, de acuerdo a lo dicho anteriormente, de esta forma: si M es una matriz de n filas (con $n \geq 1$), siendo esas filas sucesiones $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ de números 'interesantes' en el sentido de T (como los números pares, los números impares, los números cuadrados, etc.), un problema p de T es 'reconocer' una regularidad numérica r entre elementos de M. El problema p se expresa como una proposición o teorema (aun si en la organización y presentación que hace Nicómaco, el resultado no es mencionado explícitamente como una proposición). El método de resolución está confinado a ilustrar sobre casos concretos la validez de la proposición en cuestión.

Dentro del sistema de conocimientos matemáticos de Nicómaco, un problema o proposición adicional, no mencionado en la *Introducción a la Aritmética*, es el siguiente:

'La mitad de todo número heteroméico da un número triangular'.

Podemos mencionar otro problema, que tampoco se encuentra en la obra de Nicómaco, pero que pertenece a su teoría *T* de los números poligonales:[35]

> Si los heteroméicos se añaden a los triangulares, y se resta dos veces la raíz de los cuadrados, siguiendo el mismo orden, estos producen los pentagonales en el debido orden.

Ahora podríamos ilustrar, a la manera de Nicómaco, la regularidad anunciada en ese problema, con ayuda de un arreglo rectangular.

Lados	1	2	3	4
Cuadrados	1	4	9	16
heteroméicos	2	6	12	20
triangulares	1	3	6	10
pentagonales	1	5	12	22

Diríamos entonces, utilizando el tipo de argumento de Nicómaco, 'En efecto, si añadimos 2 a 1 y luego restamos el doble de 1, obtenemos 1; similarmente, si añadimos 6 a 3 y luego restamos el doble de 2, obtenemos 5, y así sucesivamente'.

Colocándonos, pues, dentro de la teoría *T* de Nicómaco, podríamos generar otros problemas como los dos anteriores. La pregunta que emerge ahora es la de tratar de sugerir problemas fuera del alcance de la teoría de Nicómaco. En ese sentido, conviene observar que problemas como el de la obtención *directa* del número triangular o cuadrado (u otro) que ocupa la posición 23 o la posición 129, etc., se encuentran fuera del paradigma constituido por la teoría *T* de Nicómaco. Una '*for-*

35. Dicho problema se expresa, en efecto, a través de los útiles conceptuales presentes en la obra de Nicómaco.

mula' de ese estilo (no necesariamente expresada en lenguaje simbólico, por supuesto) parece inconcebible, en particular, por el hecho mismo que el marco conceptual en el que Nicómaco se sitúa no incluye el concepto *operativo* de 'número general' o 'número cualquiera' (en contraste con el carácter operativo de los 'números concretos' como 1, 2, 3, ..., que obviamente sí está *presente* en Nicómaco). La aparición de fórmulas que evitan el cálculo de uno en uno de los términos de una sucesión constituye, según nosotros, una frontera epistemológica a la teoría de Nicómaco, por el contrario, la aparición de fórmulas como la mencionada anteriormente será posible en la teoría de Diofanto.

Hasta aquí nos hemos ocupado de Nicómaco. Veamos ahora la teoría de los números poligonales de Diofanto. Como hemos dicho anteriormente, lo que nos ha llegado de Diofanto al respecto es solamente un fragmento de su obra *Sobre los Números Poligonales* (dicho fragmento corresponde a la parte inicial).[36] La obra empieza con la definición de lo que es un número poligonal:

> Cada uno de los números que son aumentados en una unidad a partir de tres unidades es el primer número poligonal [de su especie] a partir de la unidad, y tiene tantos ángulos como unidades [Eecke 1926, 277]

Esto significa, pues, que 3 es el primer número triangular (y tiene 3 ángulos), 4 (obtenido al añadir 1 a las tres unidades) es el primer cuadrado (y tiene 4 ángulos), 5 el primer número pentagonal (y tiene 5 ángulos), etc. Luego Diofanto menciona una propiedad verificada por los números poligonales y que es, de hecho, la proposición o teorema que él va a demostrar. En términos modernos, se trata de la propiedad que podemos escribir así:

$$8P\cdot(a-2)+(a-4)^2 = \text{un número cuadrado.}^{37}$$

36. De hecho no se sabe si el fragmento que conocemos constituye todo lo que Diofanto escribió, en cuyo caso se trataría de una obra incompleta, o bien si la obra fue terminada y la última parte se habría perdido en el curso del tiempo. La interrogante resulta del hecho de que lo que nos ha llegado de la obra termina abruptamente en medio de una serie de cálculos en los que Diofanto está resolviendo cierto problema [véase Heath 1910, 256].
37. La propiedad dice lo siguiente: "Se ha reconocido que todo número poligonal, multiplicado por cierto número que depende de la cantidad de sus ángulos, luego aumentado en un cuadrado que depende también de la cantidad de sus ángulos, hace aparecer un cuadrado" [Eecke 1926, 278]. Esta propiedad es enunciada en forma más precisa en la proposición 4 (véase la cita de la cita de la proposición 4 más adelante).

Luego Diofanto sigue: "Estableceremos eso haciendo ver, además, cómo encontrar un número poligonal propuesto, partiendo del lado, y cómo obtener el lado de un número poligonal dado". La proposición que Diofanto va a demostrar es, como puede observarse, la generalización de la proposición mencionada por Plutarco y que hemos reportado en nuestra sección 3. La forma en que Diofanto la presenta no deja prácticamente lugar a dudas: se trata de una propiedad conocida ('Se ha reconocido que ...', dice Diofanto). Su contribución parece situarse a nivel de la demostración que él hará de esa proposición. Quizás hasta entonces la validez de la proposición se había 'reconocido' únicamente sobre casos concretos, como regularidades numéricas. Más sugestivo, desde el punto de vista de la innovación, es la frase que sigue, en la que Diofanto dice que hará 'ver, además, cómo encontrar un número poligonal propuesto, partiendo del lado' y viceversa.[18]

El libro contiene cuatro proposiciones, siendo la última precisamente la que establece la generalización de la proposición mencionada por Plutarco.

He aquí los enunciados de las dos últimas proposiciones:

> Proposición 3: Si cualquier cantidad de números tienen diferencia común, la suma del mayor y del menor, multiplicado por la cantidad de números, forma un número que es el doble de la suma de los números dados.
>
> Proposición 4: Si, comenzando con la unidad, una cantidad cualquiera de números tienen diferencia común, a la suma de todos esos números, multiplicada por 8 veces la diferencia [común], se le añade el cuadrado del número inferior en dos unidades a la diferencia, lo anterior da como resultado un cuadrado cuya raíz, disminuida en dos unidades, es la diferencia común multiplicada por un número que cuando se le añade 1 es el doble de la cantidad de números considerados [Eecke, 278-282].

Una observación que puede hacerse inmediatamente sobre las proposiciones de Diofanto es que éstas no expresan *regularidades numéricas* sino que afirman *relaciones* que se dan entre números con 'diferencia común'. Esta probablemente imperceptible diferencia en la *forma* de plantear las proposiciones marca o indica un cambio conceptual importante en el estudio de los números poligonales. En efecto, la nueva formulación de los problemas permite considerar resultados novedosos, impregnados de una generalización que los coloca por arriba de los resultados que encontramos en Nicómaco; en el caso de Diofanto,

18. Más adelante nos ocuparemos con más detalle de las innovaciones de Diofanto.

éstos no se refieren a una progresión aritmética en particular, sino cualquier progresión aritmética con un número cualquiera de términos.

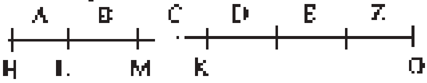
Es claro, que la naturaleza 'relacional' de las proposiciones de Diofanto se encuentran ya en los 'libros aritméticos' de Euclides, esto es los libros VII-IX de los *Elementos*. Sin embargo, en Euclides los números aparecen como 'encontrados', es decir como *números que ya estaban allí* [Mueller 1981, 60]. En Diofanto, por el contrario, los números en los enunciados aparecen como números *generados* (véase la proposición 4 mencionada antes; más espectacular es, sin embargo, la pareja de 'fórmulas' que da Diofanto para encontrar el número dado su lado o viceversa: véase el final de esta sección).

La naturaleza 'relacional' de las proposiciones en Diofanto (en contraste con los enunciados de 'regularidad numérica' de Nicómaco) marcan, según nosotros, un cambio conceptual entre la teoría de Nicómaco y la de Diofanto.

Debemos señalar también que los enunciados de las proposiciones de Diofanto refieren a números que tienen otro significado que los de Nicómaco. Sin embargo, para poder discutir este punto, primero debemos analizar ciertos aspectos de los *métodos* y los conceptos en el sistema de conocimientos de los números poligonales de Diofanto.

Para ello, empecemos observando que las proposiciones, en la obra de Diofanto, son organizadas siguiendo una línea deductiva: en efecto, la demostración de la proposición 4 se establece a partir de las tres proposiciones precedentes. Se trata, hasta donde conocemos, del primer tratamiento organizado deductivamente de la teoría de números poligonales. La organización deductiva de las proposiciones marca, sin duda, un avance a nivel del conjunto Σ de métodos de resolución de problemas del sistema de conocimientos matemáticos T_D que subyace a la teoría de los números poligonales de Diofanto respecto al sistema T_N de Nicómaco. Otro avance importante, siempre dentro de Σ, lo constituyen los métodos de prueba utilizados por Diofanto. ¿Cómo procede Diofanto para probar sus proposiciones? Veamos, a ese efecto y con la intención de no alargar innecesariamente nuestra discusión, la primera parte de la demostración que ofrece Diofanto de la proposición 3.

> Sean, dice Diofanto, A, B, C, D, E, Z una cantidad cualquiera de números con igual diferencia. Hay que demostrar que la suma de los números A, Z multiplicada por la cantidad de números A, B, C, D, E, Z forma un número que es el doble de la suma de los números A, B, C, D, E, Z.
>
> En efecto, la cantidad de números, A, B, C, D, E, Z es par o impar. Que primero sea par y que haya tantas unidades en el número HO como nú-

> meros dados de suerte que el número *HO* es par. Dividámoslo en dos partes iguales en *K*, y dividamos *HK* en sus unidades en *L*, *M*.
>
> 
>
>
> Entonces, puesto que *C* excede a *A* como *Z* excede a *D*, la suma de *Z*, *A* es igual a la suma de *C*, *D*. Pero la suma de *Z*, *A* es igual a la multiplicación de la suma de *Z*, *A* y de *HL*; de suerte que la suma de *C*, *D* es igual al producto de la suma de *Z*, *A* y de *LM*. Por la misma razón, la suma de *E*, *B* es igual a la multiplicación de la suma de *Z*, *A* y de *MK*, de suerte que la suma de *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *Z* es igual a la multiplicación de la suma de *Z*, *A* y de *HK*. Ahora bien, la multiplicación de la suma de *Z*, *A* y de *HO* es el doble de la multiplicación de la suma *Z*, *A* y de *HK*; de suerte que la multiplicación de la suma de *Z*, *A* y de *HO*, esto es de la cantidad de números *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *Z* es también el doble de la suma de los números *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *Z*, que era lo que había que demostrar.
>
> Considerando las mismas cosas, que la cantidad de números *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, sea impar, y que [...] [Eecke 280-282].

La cita anterior junto con las consideraciones previas muestran que el grado de generalidad que es alcanzado en la teoría de los números poligonales de Diofanto respecto al de Nicómaco no se limita solamente al nivel de los *enunciados* de las proposiciones sino, también, al nivel de: (a) su organización global deductiva, y (b) los procesos específicos de *prueba*. Y es que el *sustrato conceptual* de Diofanto está inscrito en una corriente matemática (o "tradición") completamente diferente de la de los neopitagóricos. Se trata de un *sustrato conceptual* que encontramos ya en Euclides y que precede (en una forma menos elaborada) probablemente a la época de Arquitas (primera mitad del siglo IV a. C.), como deja inferir el teorema de los números en razón *superparticular*.[19] La demostración aritmética de Arquitas 'de tipo geométrico' llevó a Tannery [*cf.* 1915 III, pp. 244-250] a sugerir la existencia de una obra *Elementos de Aritmética* de corte 'euclideano' anterior a Euclides. Es en esta tradición —que renuncia explícitamente a tratamientos no deductivos de prueba de proposiciones sobre números— que debemos situar la obra *Sobre los Números Poligonales* de Diofanto.

19 En efecto, como es bien sabido, Boecio preservó, en su *De institutione musica*, la demostración atribuida a Arquitas de la proposición que afirma que no hay ningún número que sea media geométrica entre dos números que tengan una razón superparticular, esto es una razón de la forma $(n + 1) : n$. La demostración es hecha en forma deductiva. (La demostración de Arquitas de acuerdo a Boecio se encuentra en Heath 1921, I, 215-216.) De hecho esta proposición es, de acuerdo a Heath, la número 3 de la *Sectio canonis* de Euclides, en donde la demostración presentada es básicamente la misma que la de Arquitas.

Dentro del estudio de los métodos de prueba de Diofanto, hay un elemento sobre el cual conviene detenernos un momento: si un número cualquiera puede simbolizarse con una letra (o dos), ¿cómo simbolizar una cantidad cualquiera de números? ¿Cómo representar una cantidad cualquiera de números con las posibilidades que ofrece el lenguaje geométrico? Como vimos en la proposición 3, Diofanto dice: 'Sean *A, B, C, D, E, Z* una cantidad cualquiera de números con igual diferencia'. Se representan seis números y se piensa en cualquier cantidad. Hay que 'ver', pues, de otra forma esa cantidad cualquiera, hay que 'verla' más allá de su realidad simbólica inmediata. El esquema geométrico que sirve de soporte al cálculo algebraico está construido, al inicio de la demostración, sobre un número par de términos (seis términos), y luego, en la segunda parte de la demostración, cuando se supone que la cantidad de números es impar, en un número impar de términos (cinco términos): el esquema geométrico organizador de los métodos de resolución (en este caso, métodos de prueba) sirve, pues, de modelo. En efecto, en la demostración de la proposición 3, por ejemplo, el sistema de representación está sujeto a respetar ciertas condiciones, en particular, la de la paridad del número estudiado. Si cambiamos, en la primera parte de la demostración de esa proposición, el número 'cualquiera' de términos de 6 a 5, la demostración no funciona más ...

Para captar mejor la esencia de los métodos de prueba de Diofanto, debemos notar que éstos son más geométricos (y en cierto sentido más fértiles) que los que Euclides nos brinda en sus libros VII-IX. En efecto, como lo ha señalado Taisbak [1971, 15], aun si Euclides representa, en el curso de sus demostraciones, los números por segmentos, Euclides no los está pensando *geométricamente*. 'Ningún teorema, añade Taisbak, es probado a través de teoremas de geometría'. En ese mismo orden de ideas, Mueller [1981, 67], refiriéndose a Euclides VII, 14, dice: "se nota que el diagrama [geométrico] no desempeña ningún papel real en la demostración, excepto posiblemente el de un medio nemotécnico para fijar el sentido de las letras". Ahora bien, Diofanto, en la demostración de la proposición 4, utiliza explícitamente un soporte geométrico que le permite probar una relación entre números cuadrados (véase Fig. 5). Por

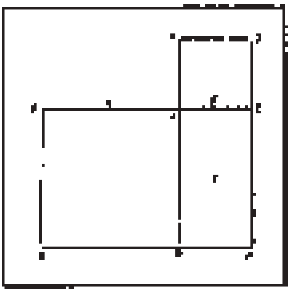


Fig. 5 [tomado de Tannery 1893]

otro lado, en las proposiciones 3 y 4, el 'diagrama geométrico' desempeña un papel que va más allá del simple recurso nemotécnico: en efecto, el diagrama permite una organización de la demostración y la deducción de ciertas relaciones numéricas sin correspondencia con el diagrama, como es el caso de la suma de los términos Z y A en la proposición 3 y su inserción en la red demostrativa. Una lectura atenta de la demostración muestra que las relaciones que Diofanto deduce van más allá del dibujo: además, al superar el registro geométrico, el cálculo diofantino desemboca en un cálculo 'casi algebraico'. La hábil utilización del registro geométrico brinda a Diofanto una herramienta altamente fértil que, impregnada de ideas euclideanas, da por resultado una nueva dimensión en lo que se refiere a los métodos de tratamiento metodológico de proposiciones sobre números que encontramos en los *Elementos* VII-IX.[40]

Siguiendo con nuestro examen del sistema de conocimientos matemáticos que subyace a la teoría de Diofanto, vamos a detenernos ahora en la familia de conceptos Ω. Es importante resaltar, a ese respecto, el papel que desempeña el concepto de número. Ya hemos dicho cómo define Diofanto al principio de su obra el número poligonal. Sin embargo, para detectar el concepto con mayor profundidad, debemos tratar de captarlo en 'acción'. Observemos a ese efecto que el número es tratado por Diofanto como número general o número cualquiera (eventualmente sujeto a ciertas condiciones, como la de pertenecer a cierta progresión aritmética). En efecto, el número es visto como objeto no solamente referencial, es decir estático, susceptible de ser a lo más reemplazado por números en el enunciado de la proposición,[41] sino (y sobre todo) que el concepto de número general (concepto más complejo sin duda que el de los números 'concretos' como '3', '4',...) es susceptible de ser insertado en una red conceptual en la cual ese número cualquiera es operado (con los números concretos y otros números generales: véase el extracto citado de la proposición 3), abriendo

40. No podemos dejar pasar por alto el muy específico uso 'casi algebraico' que hace Diofanto de la unidad o mónada, al utilizar —para decirlo en términos modernos— su propiedad de neutro multiplicativo (véase proposición 3). Este uso 'mundano' de la 'sagrada' mónada griega coloca a ésta al mismo nivel de los otros números, confiriendo a los métodos diofantinos una fertilidad particular que no encontramos en los libros aritméticos de los *Elementos* en Euclides, el respeto a la mónada (que no la considera como un número) lo lleva a menudo a repetir una misma demostración precisamente a causa de la distinción entre la mónada y los 'verdaderos números' (véase, por ejemplo, Euclides VII-9 y VII-15).

41. Como ocurre en Nicómaco (por ejemplo 'el producto de los extremos es igual al cuadrado del medio', citado anteriormente) y como probablemente es el caso en el enunciado de la proposición atribuida a Plutarco que ya hemos mencionado.

así la posibilidad para un nuevo cálculo sobre números, en el que nuevas operaciones deben ser también construidas en 44, lo que hace posible el estudio de nuevas relaciones entre números y el planteamiento de nuevos problemas, como el de encontrar la 'fórmula' que permite encontrar un número poligonal, conociendo su lado; o el de calcular el lado, conociendo el número —problemas que veremos en un momento—. La fructuosa inserción del concepto operativo de 'número general' constituye, según nosotros, otro cambio conceptual entre la teoría de Nicómaco y la de Diofanto.

A propósito de los nuevos problemas en el desarrollo conceptual de la teoría de los números poligonales, conviene observar que la proposición 4 permite a Diofanto obtener dos fórmulas, la primera cómo calcular un número poligonal, conociendo su lado, la otra indica cómo calcular el lado conociendo el número. Ninguna explicación acompaña a la deducción de la fórmula (probablemente porque no era necesario de acuerdo a Diofanto). La primera, por ejemplo, dice así:

> habiendo tomado el lado del número poligonal, tomemos el doble y quitemos una unidad; a lo que queda multipliquémoslo por el número de ángulos disminuido en dos unidades y añadamos dos unidades al número obtenido. Luego, tomando el cuadrado de ese número restémosle el cuadrado del número de ángulos disminuido de cuatro unidades y dividiendo lo que resta por 8 veces el número de ángulos disminuido de dos unidades encontramos el número poligonal buscado [Eecke 1926: 290-291].

Se trata, pues de la fórmula que nosotros escribiríamos como:

$$S = \frac{[(2n-1)(a-2)+2]^2 - (a-4)^2}{8(a-2)}$$

donde n es el lado y a el ángulo (si el número es un número triangular $a = 3$; si es un cuadrado $a = 4$, si es un pentágono $a = 5$, etc).

La aparición de una 'fórmula' en el seno de la teoría de Diofanto requiere romper y rebasar el modo pensamiento dinámico que es privilegiado en la matemática de Nicómaco. La fórmula permite economizar el recorrido paso a paso de la sucesión (o patrón) bajo estudio.

5. La transformación de una teoría vista como *ruptura epistemológica*

Al inicio de este artículo (sección 1), al discutir el problema que plantea el estudio de los cambios en el desarrollo de las teorías matemáticas, planteamos la posibilidad de ver esos cambios en términos de rupturas epistemológicas. Uno de esos *cambios* posibles es el de la *transformación* de una teoría. La transformación de una teoría supone la presencia de una teoría que —bajo la acción de ciertos factores (sociales e intelectuales)— desembocan en una nueva teoría. El fenómeno de la aparición de la teoría transformada puede, según nosotros, ser detectado a través del criterio que da Glas a propósito de los puntos de desarrollo del conocimiento en donde es localizable lo que él refiere como 'progreso'. La descripción que Glas hace de 'puntos de progreso' nos da un instrumento rico y apropiado para los cambios conceptuales que tenemos en mente. Es claro que la teoría de los números poligonales de Diofanto aparece, a la luz de este criterio, como una teoría transformada respecto a la de Nicómaco: en Diofanto ha habido una ganancia de generalidad y la aparición de explicaciones más profundas. Los métodos de Diofanto permiten explicar las regularidades numéricas presentes en la teoría de Nicómaco, sin ser derivables directamente a partir de los procedimientos de Nicómaco.

Nuestro estudio ha intentado explorar cómo dicha transformación fue posible. Situando las teorías respectivas en su propio sustrato conceptual, hemos podido ver que el de Nicómaco está fuertemente encajado en la cosmología neopitagórica y el papel epistemológico que las matemáticas desempeñan en ella. El sustrato conceptual de Diofanto, por el contrario, se sitúa en una tradición euclidiana de tratamiento deductivo de las propiedades de los números (tradición que en realidad parece ser anterior a Euclides, que remontaría por lo menos a Arquitas y en la cual habría participado, más tarde, Hypsicles). El estudio histórico-epistemológico que hemos emprendido sugiere que los sustratos conceptuales se desarrollaron 'en paralelo' y que Diofanto, aprovechando el sustrato conceptual euclidiano, pudo transformar la teoría neopitagórica de los números poligonales (superando en aspectos particulares —dicho sea de paso— los métodos que encontramos en los libros aritméticos de los *Elementos*). Para intentar entender la 'dinámica' de la transformación, hemos prestado atención particular a las transformaciones que se han operado a nivel de la estructura conceptual que subyace a la 'vieja teoría' (la de Nicómaco) y a la nueva teoría (la de Diofanto), rastreando los respectivos sistemas de conocimientos matemáticos. Esto nos ha permitido sugerir ciertos cambios conceptuales y detectar en particular un tipo de *problema* —a saber: el de *fórmula*— cuyo tratamiento involucra conceptos de abstracción superior, como el concepto operacional de número cualquiera o número general (concepto que anticipa o preludia el concepto de variable) que se encuentran mas allá de la teoría de los números poligonales de Nicómaco y que convierten a dicho problema en una *frontera epistemológica* de la teoría de éste.

El concepto operacional de número cualquiera no puede, en efecto, ser derivado directamente del concepto operativo de número concreto. De hecho nuestro estudio muestra que para poder operar numeros generales (es decir números inespecificados), Diofanto recurrió a representaciones geométricas que sobrepasan el carácter nemotécnico de las representaciones euclidianas de los 'libros aritméticos'. En la teoría de Nicómaco, por el contrario, los números no son simbolizados por letra o por segmentos. Es más, como lo señalamos anteriormente, las magnitudes y los numeros absolutos son considerados como diferentes por Nicomaco. La ausencia de números operativos generales (es decir, números inespecificados que son sometidos a operaciones de adición, sustracción, etc.) marca así un tope que vuelve inaccesible el estudio de fórmulas que serian difícilmente descubiertas a través de un estudio de patrones numéricos.

Un elemento interesante que queremos mencionar es que una transformación no es un problema puramente matemático, esto es, un problema de dos 'programas de investigación' en competición, cuyo resultado será evaluado a través de normas lógico-matemáticas. En efecto, como nuestro estudio lo ha puesto en evidencia, el 'programa' de Diofanto es —desde un punto de vista matemático— más fértil que el de Nicómaco. No hay la menor duda. Sin embargo, si vemos más allá de la antigüedad y nos adentramos a la edad media, vemos que el 'programa' que prevaleció no fue el de Diofanto sino el de Nicómaco ... La *Introducción a la Aritmética* fue objeto de varios *comentarios* (entre ellos el de Asclepius de Tralles, ed. Tarán, 1969); además fue rápidamente traducida al latín y marcó profundamente obras medievales como la de Boecio. Los números poligonales en la tradición de Nicomaco se encuentran incluso en la obra de uno de los primeros abaquistas italianos, *De arithmetica compendiose tractata*, de Maestro Guglielmo (siglo XII). Hay factores sociales, filosóficos y culturales que entran en juego en la 'evaluación' de programas de investigación en competición. El problema no es solamente un problema matemático o —para utilizar una expresión de Lakatos— un problema de 'historia interna'.

Mencionemos, para terminar, que la existencia simultánea de sustratos conceptuales —entendidos éstos como sustratos en los que se combinan factores sociales, culturales, intelectuales, etc.— podría ser vista como una de las posibles condiciones cosustanciales a los cambios en el conocimiento matemático. Evidentemente, una discusión detenida de este punto está fuera del alcance de este trabajo; para poder discutirlo necesitamos más estudios de casos. Lo que podemos conjeturar es que la coexistencia de sustratos conceptuales puede dar cabida a *cambios* de tipo *transformacional* en las teorías matemáticas, sin que esto signifique —por supuesto— que se trata de una condición necesaria, en el sentido lógico del término. La emergencia de teorías matemáticas —por el contrario— parecería estar más bien relacionada con *movimientos conceptuales* originados en el corazón mismo del sustrato conceptual de las viejas teorías; ese sería el caso de la emergencia del álgebra, vista como teoría emergente a partir de la aritmética y/o la geometría;[42] ése sería el caso también de la geometría analítica.

Referencias

AUJOULAT, N. 1986. *Le néo-platonisme alexandrin. Hiéroclès d'Alexandrie*. Leiden: E.J. Brill.

CHRISTIANIDIS, J. 1991. "Ἀριθμητικὴ Στοιχείωσις: Un traité perdu de Diophante d'Alexandrie?". *Historia Mathematica* 18: 239-246.

CROWE, M. 1975. "Ten 'laws' concerning patterns of change in the history of mathematics". *Historia Mathematica* 2: 161-166.

DAUBEN, J. 1984. "Conceptual revolutions and the history of mathematics: two studies in the growth of knowledge". En: *Transformations and tradition in the sciences. Essays in the honor of I. Bernard Cohen*. (Ed.) Mendelsohn. Cambridge University Press. pp. 81-103.

D'OOGE, M. L., ROBBINS, F. E. y KARPINSKI, L. C. (eds). 1938. *Nicomachus of Gerasa. Introduction to Arithmetic. With studies in Greek Arithmetic*. Por F.E. Robbins and L.C. Karpinski. Ann Arbor: University of Michigan Press.

DILLON, J. 1977. *The Middle Platonists. A Study of Platonism 80 B.C. to A.D. 220*. Great Britain: Duckworth.

FLECK, L. 1979. *Genesis and Development of a Scientific Fact*. Chicago and London: The University of Chicago Press.

FREEMAN, K. 1956. *Ancilla to the Pre-socratic Philosophers*. Oxford: Basil Blackwell.

GILLIES, D. 1992 (ed.). *Revolutions in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

GLAS, E. 1993. "Mathematical progress: between reason and society". *Journal for General Philosophy of Sciences*. Part I: 24: 43-62. Part II: 24: 235-255.

GUTHRIE, K.S. 1978. *The Pythagorean Sourcebook and Library*. Phanes Press.

HEATH, T. 1910. *Diophantus of Alexandria. A study in the history of Greek Algebra*. New York: Dover Publications, Inc. (Reimpresión de la segunda edición, 1964).

HEATH, T. 1921. *A History of Greek Mathematics*. Oxford: Clarendon Press. Reprinted by Dover 1981. 2 vol.

HICKS, R.D. 1925 [tr.]. *Diogenes Laertius. Lives of eminent philosophers*. Harvard University Press. Vol. I and II. Reprinted 1958.

---

42 Una reflexión al respecto se encuentra en un artículo que el autor del presente trabajo publicará próximamente [Radford 1995].

HUFFMAN, C., 1988, "The Role of Number in Philolaus's Philosophy". *Phronesis* 33: 1-30.

KUHN, T. 1962. *The Structure of Scientific Revolutions*. The University of Chicago Press. Segunda edición (corregida) 1970.

KNORR, W. 1993. "Arithmetike stoicheiosis. On Diophantus and Hero of Alexandria". *Historia Mathematica*, 20: 180-192.

LAKATOS, I. 1978. *The methodology of scientific research programmes. Philosophical papers*. Vol. I, J. Worral and G. Currie editors.

LAWLOR, R., Lawlor, D. 1979. *Theon of Smyrna. Mathematics Useful for Understanding Plato*. San Diego. Wizards Bookshelf.

LINDBERG, D. 1992. *The Beginning of Western Science*. Chicago and London. The University of Chicago Press.

MAZIARS, E.A. y Greenwood, T. 1968. *Greek Mathematical Philosophy*. New York. Frederick Ungar Publishing. Co.

MUELLER, I. 1981. *Philosophy of Mathematics and deductive structure in Euclid's Elements*. Cambridge, Massachusetts: The M.I.T. Press.

PICHOT, A. 1991. *La naissance de la science*. Vol. 1: Mesopotamie, Egypte. Editions Gallimard.

PLUTARCH. 1909. *Plutarch's Complete works*, Vol. 3 Essays and Miscelanies. New York. Thomas Y. Crowell & Co.

RADFORD, L. 1995. "Le raisonnement algebrique. Une reflexion épistemologique". Actes du Colloque "Eleve, école, societé". Radford, L. et Mesquita, A. (Eds.) Cirade. Universite du Québec à Montreal. Pp. 33-45.

RESTIVO, S., 1993. "The social life of mathematics" en *Math Worlds*. Restivo, S., Bendegem, J.P. van and Fischer, R. (eds.). State University of New York Press. Pp. 247-278.

REYMOND, A. 1963. *History of the Sciences in Greco-Roman Antiquity*. New York. Biblo and Tannen.

ROBBINS, F.E. 1921. "The tradition of Greek Arithmology". *Classical Philology* 16: 2. 97-123.

TAISBAK, C.M. 1971. *Division and logos. A theory of equivalent couples and sets of integers*. Odense University Press.

TANNERY, P. 1893. *Diophanti Alexandrini Opera Omnia cum graecis commentariis*. Leipzig. Teubner.

________ ___ 1915. *Mémoires scientifiques*. Vol. III. Toulouse: Édouard Privat, Paris Gauthier-Villares, publies par J.L. Heiberg et H.G. Zeuthen.

TARÁN, L. 1969. (ed) *Asclepius of Tralles. Commentary to Nicomachus' Introduction to Arithmetic*. Transactions of the American Philosophical Society. Vol. 59, part 4.

________ __. 1981. *Speusippus of Athens. A critical study with a collection of the related texts and commentary*. Leiden: E. J. Brill.

THOMAS, I. 1939. *Greek Mathematical Works*. Vol. I. Cambridge Massachusetts. Harvard University Press. Reimpreso con adiciones y revisiones 1991.

VER EECKE, P. 1926. *Diophante d'Alexandrie. Les six livres arithmétiques et le Livre des nombres polygones*. Desclée de Brouwer. Liege. Réimpression. Albert Blanchard, Paris 1959.

___________ 1948. *Proclus de Lycie. Les commentaires sur le premier livre des Eléments d'Euclide*. Bruges. Desclée de Brouwer et Cie. Réimpression. IREM de Lille, France.

WATERFIELD, R. 1988 (tr.) *The Theology of Arithmetic*. Michigan. Phanes Press.

Luis Radford, realizó la carrera de Ingeniero en la Universidad de San Carlos de Guatemala. Posteriormente estudió Matemáticas Aplicadas en el *Institut des Mathématiques Avancées de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg*, Francia. Obtuvo un doctorado en Didáctica de la Matemática en el *Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques* de esa misma universidad. Después efectuó estudios de post-doctorado en el *Center Interdisciplinaire de Recherche sur l'Apprentissage et le Développement en Éducation* (CIRADE) de *l'Université du Québec à Montréal*. Actualmente es profesor en Laurentian University, Ontario. Sus publicaciones incluyen trabajos sobre la historia, epistemología y enseñanza de las matemáticas.