Thémata 11 (1993). 17-126.
[illegible]

La metalógica en la propuesta de R. Carnap

Jesús Padilla Gálvez

Resumen

Abordamos en este trabajo los inicios de la investigación metalógica que se llevó a cabo alrededor del Círculo de Viena en los años treinta. En concreto, proponemos un análisis a fondo en una dirección específica, la elaborada por Carnap en una serie de conferencias sobre metalógica que fueron expuestas en el *Mathematischen Institut* durante los días 11, 18 y 25 de junio de 1931 que se traducen seguidamente. La metalógica aclarará algunos conceptos clave del trabajo realizado en este campo. Estos años son muy ricos, al destacarse determinadas discusiones que van a ser analizadas puntualmente. Es fácil demostrar que algunas de las puntualizaciones de Gödel llevan el sello de la discusión mantenida en los meses anteriores en el Círculo de Hahn y se hacen eco de algunas de las propuestas de Carnap. El análisis de Carnap es parte de un programa más amplio, cuyo objetivo se plasmará en el libro *Logische Syntax der Sprache* (1934). Dicho libro se propone desarrollar un método exacto del análisis lógico del lenguaje. Por lo tanto, los protocolos que hemos traducido tienen una importancia heurística enorme. Puntualizaremos algunos conceptos que son tratados indistintamente en sus trabajos.

Abstract

In this study we tackle the beginnings of metalogical research which was carried out around the Circle of Vienna during the thirties. More specifically, we propose a thorough analysis in a definite direction, that which was elaborated by Carnap in a series of conferences on metalogics which were put forward in the *Mathematischen Institut* on the 11th, 18th, and 25th of June 1931 and which are translated below. Metalogics will clarify some key concepts of the work performed in this field. These years are very rich, with the emergence of certain arguments which are going to be analyzed in detail. It is easy to demonstrate that some of Gödel's points carry the mark of the debate which was held during the previous months in the Circle of H. Hahn and echo some of Carnap's proposals. Carnap's analysis is part of a wider programme, whose objective is captured in the book *Logische Syntax der Sprache* (1934). This book sets out to develope a precise method of logical analysis in language. Therefore, the formalities which we have translated are of enormous importance. We shall describe in detail some concepts which are indistinctly dealt with in his works.

1. Introducción

Mi intención en esta introducción es contribuir a aclarar la historia del desenvolvimiento de la metalógica desde dos puntos de mira diferentes: por un lado, consideraré la metalógica en sus fases de evolución hasta el año en que se presentan las conferencias; por otro lado, indicaré todas las corrientes que concurren al mismo tiempo en 1931. Entramos de lleno en el ámbito propio de los historiadores de la matemática, en general, y de la lógica, en particular; de manera que el modo como se reconstruirán los presupuestos que se tematizan en unas conferencias están guiados por un interés matemático y lógico. En lo que se refiere al tema y al lapso de tiempo que nos ocupa, es fácil de delimitar, pues nos centraremos en las conferencias que dictó Carnap, y que llevan como título *Metalógica*, presentadas en 1931.

Las conferencias que seguidamente se publican y se traducen al castellano fueron presentadas en el Círculo matemático en 1931 a los miembros del Círculo de Viena. Las conferencias fueron tres y su temática está bien delimitada: la primera presenta una introducción a las definiciones más características de los conceptos metalógicos, así como una exposición informal del argumento general, las descripciones básicas con las que se trabaja. La segunda sigue profundizando en las definiciones de los conceptos metalógicos; seguidamente, se presenta la sustitución y, finalmente, las reglas de deducción. Acaba esta segunda conferencia presentando una interpretación de la noción de prueba.[1] La tercera conferencia presenta los enunciados metalógicos singulares

---

1 Sobre la definición de las funciones recursivas primitivas se había llevado a cabo una serie de trabajos anteriores por Dedekind (1888), Skolem (1923); Hilbert (1925) y (1927), Hilbert y Ackermann (1928), pero es a partir de la definición que presenta Gödel (1931a) cuando se estandariza.

e introduce el lenguaje fisicalista. Con dicha escueta estructuración de las conferencias queda perfectamente acotado el objeto a historiografiar. Las cuestiones a las que preferentemente voy a tratar de responder son las siguientes: ¿qué elementos hay involucrados en la propuesta metateórica desarrollada por Carnap?, y ¿cómo se puede dar solución puntual a cada uno de los elementos involucrados en dicha propuesta?

1. Presupuestos históricos

Con el fin de abordar la primera cuestión voy a esbozar las corrientes más relevantes que se desarrollaban en Europa en los años treinta [véase Padilla Gálvez 1994]. La segunda pregunta vendrá planteada mediante el análisis puntual de las tres conferencias. Cuatro son las corrientes más relevantes que han trabajado o trabajan hasta principios de los años treinta en la metalógica: la escuela de Gotinga, y sobre todo el trabajo de Hilbert, la investigación realizada por Skolem, el Círculo de Varsovia con los trabajos de Tarski y el trabajo de Gödel. Para Hilbert, un sistema de axiomas consta de tres características universales: consistencia, independencia de los axiomas entre sí y saturación. Tarski pone énfasis en que determinados conceptos, que son utilizados en las investigaciones lógicas, han de ser expresados en lenguajes metamatemáticos (metalenguajes) y no en lenguajes axiomáticos (lenguaje-objeto). Por último, se hace patente la prueba ideada por Gödel de la imposibilidad de la demostración de la consistencia.

Carnap había leído y tratado en numerosas charlas mantenidas con Gödel, los problemas clave de la argumentación propuesta por éste. En enero de 1931, Gödel había presentado una conferencia en el *Círculo* con el título "Über Widerspruchsfreiheit und Entscheidbarkeits in Axiomensystem" en la que había resumido su propuesta.[2] En su argumentación, Gödel se distancia claramente de un tipo de consistencia de tipo informal [véase Padilla Gálvez 1990, 461-467], asumiendo un concepto de consistencia de carácter formal. La conjetura crucial se centra alrededor de si hay dichos sistemas elementales en los que resulten de una forma concreta las sentencias indecidibles de modo transparente. Gödel asienta su refutación en un tipo de argumentación evidente. Según su propuesta, depende del sistema en el que se exponga el sistema. Acto seguido, recuerda algunos momentos clave de su ar-

2. Existe, asimismo, un protocolo de la discusión final a dicha conferencia que he traducido al castellano y que espero publicar en un próximo futuro. El texto de Gödel no ha sido publicado en las obras completas.

gumentación y llama la atención sobre el hecho que su planteamiento se construye en base a un recurso decisivo:[3]

> La representación isomorfa de las figuras deductivas de la consecuencia 12 a partir de las sucesiones numéricas de f_1, que permite ante todo formular internamente la demostración, denomina por tanto, por ejemplo $S(f_5)$ una figura deductiva $R(f_1)$ la 'longitud' de la cadena pertinente, entonces se escribe la demostración de f_1: Dem. $f_1 \equiv (\exists f_5)(S(f_5)\ \&\ f_5\ [R(f_5)] = f_1)$. De este modo, se puede dar por satisfecho u descomponer más el símbolo S.

3. La propuesta de Carnap

Carnap presenta las tres conferencias sobre metalógica en el *Mathematischen Institut* durante los días 11, 18 y 25 de junio de 1931, que aclararán algunos conceptos claves de su obra. Poseemos una fuente excepcional del trabajo realizado: en los diarios aparecen escuetas anotaciones de los días en que trabaja sobre metalógica. Así pues, un día antes de presentar la primera conferencia, el miércoles 10 de junio lo visita Gödel por la tarde y hablan sobre metalógica. El día de la primera conferencia pasa sin pena ni gloria y apunta: "[A las] siete y media [se ha celebrado el] Círculo. Mi conferencia (1ª) [trata] sobre metalógica (en el Instituto de Matemáticas) hablo sin discusión hora y media".[4] La segunda conferencia no varía el resultado. Desde el lunes trabaja sobre metalógica y el jueves 18 de junio resume: "... [por la tarde] tarde [se ha celebrado el] Círculo. Mi segunda conferencia [trata] sobre metalógica, todo el tiempo [he estado] hablando, sin discusión".[5] Finalmente, el 2 de julio presenta su última conferencia, planteándose a sí mismo una cuestión retórica: "Tres y media [llevé a cabo las] clases prácticas ... [hubo] discusión [en el] Círculo sobre mi metalógica. Último Círculo. (¿Para mí definitivamente el último?)".[6] No será el

3. Es decir, lo que Carnap denomina 'entscheidenden Kunstgriff'. Véase Protocolo 1931, 2.
4. Agradezco a la Rudolf Carnap Collection, Special Collections Department, University of Pittsburgh Libraries, el permiso concedido para citar los textos siguientes. Como es natural, están reservados todos los derechos de conformidad con lo dispuesto en la autorización preceptiva. El texto dice lo siguiente: "[Um] 1/2 8 [findet der] Zirkel [statt]. Mein Vortrag (1.) [handelt] über Metalogik (im mathematischen Institut) ich spreche ohne Diskussion 1 1/2 Stunden lang". (La traducción y las correcciones son mías). Véase Carnap 1930-1933, 276.
5. La nota afirma lo siguiente: "... Abends [findet der] Zirkel [statt]. Mein zweiter Vortrag [handelt] über Metalogik, [ich habe] die ganze Zeit gesprochen, ohne Diskussion". (La traducción y corrección son mías). Véase Carnap 1930-1933, 277.
6. La nota dice lo siguiente: "1/2 4 [führe ich] Übungen [durch] ... [im] Zirkel [gab es eine] Diskussion über meine Metalogik. Letzter Zirkel. (Für mich überhaupt letzter?)". (La traducción y corrección son mías). Véase Carnap 1930-1933, 281.

último, y las anotaciones de ese año indican que seguirá trabajando ininterrumpidamente sobre estos temas.[7] Vale la pena reseñar dos visitas que recibe Carnap a la semana siguiente. El viernes 10 de julio tiene una entrevista con Waismann y anota en su diario lo siguiente.

> ... él pregunta diversas cosas sobre metalógica. [Él es de la opinión.] Ella misma no es una teoría, sino otro cálculo. Yo: Sí, [creo que es] como en geometría, un cálculo con un ámbito de aplicación privilegiado.[8]

El paralelismo y la ejemplificación demuestran las dificultades que debían de existir para comprender adecuadamente el ámbito de estudio de la metalógica. Una última nota de los diarios nos realzará la importancia de estas conferencias para el Círculo de Viena, en particular, y para la discusión y el origen de la metalógica, en general. El domingo, 12 de julio de 1931, Gödel visita a Carnap en su apartamento. Una breve nota en el diario de éste hace que estas conferencias recobren una relevancia inusitada. Carnap anota: "Por la tarde Gödel [estuvo] aquí. [Hablamos] Sobre mi metalógica; [Llegó al resultado de que] es consistente; por lo tanto no contiene la matemática clásica, sino básicamente la intuicionista".[9] Dicha aclaración habrá de ser elaborada con cuidado. ¿Qué significa que la metalógica es consistente, si contiene esencialmente la matemática intuicionista y no la clásica? Para dar una solución puntual a dicha cuestión y otras vamos a analizar puntualmente la propuesta desarrollada por Carnap en sus conferencias sobre *Metalógica*.

4. La primera conferencia sobre metalógica

La primera conferencia introduce la siguiente definición: "Por metalógica entiendo la teoría de las formas que aparecen en un lenguaje,

---

7. En base a estos trabajos resultará el libro sobre la sintaxis lógica del lenguaje. La repercusión de las tres conferencias sobre Carnap (1934) ha sido reseñado escuetamente en Carnap 1991, 54. Véase Padilla Gálvez 1993, 467 ss.
8. El texto original dice así: "... Er fragt Verschiedenes zur Metalogik. [Er ist der Meinung] Sie selbst sei nicht eine Theorie, sondern wieder ein Kalkül. Ich: Ja, [ich glaube, daß sie] wie die Geometrie [ist], ein Kalkül mit einem bevorzugten Anwendungsgebiet". Véase Carnap 1930-1933, 282.
9. El texto que traduce reza así: "[Am] Nachmittag [war] Gödel hier. [Wir sprachen] über meine Metalogik; [Er kam zu dem Ergebnis,] sie sei widerspruchsfrei, also enthält sie nicht die klassische Mathematik, sondern im Wesentlichen die Intuitionistische". Véase Carnap 1930-1933, 283.

es decir, la exposición de la sintaxis del lenguaje" [véase Zirkelprotokoll (1931), I, (11.6.1931), p. 1]. El interés por estas investigaciones puede ser resumido de la siguiente manera: (*A*) por un lado, pretende conocer cuáles son los cambios que se pueden llevar a cabo en el lenguaje russelliano y, (*B*) por otro lado, desea indagar la forma que ha de tener una metalógica, es decir, se propone investigar si hay *enunciados sobre enunciados* y qué *sentido* tienen; desea saber si son *enunciados empíricos o tautologías*, y si resulta una *jerarquía de lenguajes*. La sintaxis contiene una serie de consecuencias que han de satisfacer los siguientes presupuestos: (i) Los cuantores sólo se pueden verificar, si vienen dados en un ámbito finito;[10] (ii) Es conveniente distinguir entre la generalización individual y la específica,[11] y (iii) Es recomendable diferenciar sintácticamente las relaciones cualitativas de las localizativas.

Seguidamente, se caracteriza el cuantificador universal [x] como la conjunción de los enunciados. Esto se realiza del siguiente modo [véase Zirkelprotokoll (1931), I, (11.6.1931), p. 2 s.]: la presentación del ámbito de un operador universal se lleva a cabo mediante la presentación del límite superior del ámbito. Así pues, un cuantificador del tipo [n]111(P(xn)) viene a ser expuesto como la conjunción de las siguientes sentencias P(x)&P(x1)&P(x11)&P(x111). Cuando el ámbito viene representado por una variable entonces de [n]m(P(xn)) resulta una conjunción con indeterminados (pero finitos) elementos asumiendo la siguiente fórmula: P(x)&----&----&----&----&P(xm). El cuantificador existencial [∃x] viene a ser disuelto mediante la disyunción, siempre y cuando el ámbito venga presentado mediante indicación numeral. Así pues, [∃n]111(P(xn)) viene a ser representado por P(x) ∨ P(x1) ∨ P(x11) ∨ P(x111). De modo que vale: [∃n]m(K(xn), y que viene a ser expresado por P(x) ∨---∨---∨---∨--- ∨P(xm).

Seguidamente, se introducen determinados símbolos, con el fin de expresar la *descripción metalógica*, ya que, para escribir una sentencia metalógica sobre una fórmula, no se puede escribir dicha fórmula. De este modo, en una sentencia metalógica no puede haber ninguna fórmula lógica [véase Zirkelprotokoll (1931), I, (11.6.1931), p. 3 ss.]. Inmediatamente después, viene a ser tratado el problema de la *identidad* según la propuesta elaborada por Russell, según el cual:

$$(x = y) =_{\mathrm{Df}} (F(x) \rightarrow F(y))$$

10. Este tema viene a ser analizado extensamente en Carnap 1934, §16.
11. Esta diferenciación viene a ser recogida de nuevo en Carnap 1934 (§16), 44.

y elabora algunas refutaciones llevadas a cabo por Wittgenstein y algunas deficiencias en las críticas de C. I. Lewis.[12] Seguidamente, presenta determinadas definiciones de algunos conceptos metalógicos como 'cifra', 'secuencia de cifras', 'elemento numérico' y 'expresión numérica'.[13]

5. La segunda conferencia sobre metalógica

La siguiente conferencia sobre metalógica sigue presentando las definiciones más relevantes de los conceptos metalógicos. Al género de los predicados aritméticos pertenecen, además del concepto de identidad I(p,q), los siguientes predicados:[14] para el predicado de grosor: Gr(m,n) = [∃ᵏ]m(– I(k,0)&I(m,kn)). El predicado de la propiedad divisible mediante: Tlb(m,n) = [∃ᵏ]m(I(m,prod)(k,n))). Y los números primos, mediante: Prim(m) = (k)m(I(k,0) ∨ I(k,m) ∨ ~Tlb(m,k)). Dichas definiciones asumen un carácter recursivo para determinados predicados y para las relaciones 'más grande' (Gr). También, para predicados que contienen la propiedad divisible (Tlb) y número primo (Prim). La definición recursiva consta de dos enunciados: el primero presenta el valor del functor respectivo (o el valor de verdad del predicado respectivo) para 0 como primer argumento; el segundo determina el valor para *x*, usando el valor para *x*.

Seguidamente, se dará paso al análisis del modo de introducir una serie de términos básicos, con los cuales se opera en la metalógica. Así pues, las *funciones aritméticas* vienen a ser definidas, en parte, de modo recursivo [Véase: Zirkelprotokoll (1931), II, (18.6.1931), p. 1 s.]. Se propone definir las variables libres y las variables ligadas mediante la ayuda del concepto 'fórmula' [Véase Zirkelprotokoll (1931), II, (18.6.1931), p. 2]. Se define el concepto de 'derivación' [*Ibid.*, p. 2 s.]. Acto seguido, se caracteriza el concepto de 'substitución' [*Ibid.*, p. 3 ss.]. Presenta las cuatro reglas de inferencia, a saber: la

12 Véase la reseña posterior que hace Carnap (1934, 168 ss.). También se pueden consultar los trabajos de Whitehead y Russell (1910-13, XIV y 659 ss.) y Wittgenstein (1921).

13 Véase Zirkelprotokoll (1931), I, (11.6.1931), p. 6, y que coincide en gran medida con Carnap 1944 (§9) 24 s.

14 Véase Zirkelprotokoll (1931), II, (18.6.1931), p. 1. Ninguno de estos elementos son desechados en su trabajo posterior, pero aparecen en órdenes diferentes. Así pues, Gr(m,n) aparece como D 9. de la siguiente manera Gr(x,y) ≡ (∃u)(x,y • – (u=y)) y Tlb(m,n) viene a ser caracterizado en D 10. de la siguiente manera: Tlb(x,y)≡(∃u)x (x = prod(y,u)). Véase Carnap 1934, 52. Del mismo modo Prim(m) viene a ser definido mediante D 11. del siguiente modo: Prim(x)≡(~(x=0) • ~(x=1) • (u)x((u=1) ∨ (u=x) ∨ ~Tlb(x,u))). Véase Carnap 1934 (§4), 15 y 52.

regla de substitución, de implicación —hoy la caracterizamos mediante el *Modus ponens*—, las reglas de identidad y el principio de la inducción completa [*Ibid.*, p. 6 ss.]. Termina, haciendo algunas anotaciones sobre las *sentencias aritméticas universales* [*Ibid.*, p. 6 s.]. Para acabar sus consideraciones sobre el concepto de *demostración* [*Ibid.*, p. 8 s.].

El concepto 'demostración' viene a recoger todos los elementos básicos de la metalógica. Carnap es de la opinión que sin una delimitación de la longitud de la demostración no se puede caracterizar ningún concepto correctamente. El simple hecho de que toda demostración deba tener un número finito de fórmulas, es una determinación clave para entender la *recursión*. Propone la siguiente puntualización: "*U* es demostrable en tantos y tantos pasos" ha de ser caracterizado mediante: "*U* es demostrable mediante tantos y tantos símbolos demostrables" [*Ibid.*, p. 8.]. Sin embargo, dicha precisión conserva algunas dificultades que vienen a ser tratadas puntualmente. Para ello, propone el método de la *aritmetización de la metalógica*, como viene a ser aplicado por Gödel en su trabajo [*Ibid.*, p. 9]. Dicho método da entrada a una distinción entre la *metalógica descriptiva*, como ha sido tratada hasta el momento por Carnap, y una *metalógica aritmética*. Esta última trata las formas posibles. El origen de la distinción viene de la mano de las puntualizaciones que se han de llevar a cabo con respecto a la longitud de la demostración. En dicha caracterización se introduce la expresión 'fórmulas posibles' con las que operar [*Ibid.*, p. 9].

6. La tercera conferencia sobre metalógica

Carnap hace una disquisición general sobre el papel de los enunciados condicionales metalógicos en la tercera conferencia, ya que tienen carácter analítico y son la consecuencia de la definición de 'fórmula elemental' [Véase Zickelprotokoll (1931), III, (25.6.1931), p. 1.]. Vuelve a repasar la idea general: las definiciones elaboradas hasta ahora hacen sólo referencia a aquello que se encuentra en el marco de la fórmula, sin embargo, el concepto de 'demostración' es diferente, ya que sólo es definible mediante una aritmetización.[15] Bajo aritmetización se entiende la asignación de números a símbolos, secuencias finitas de símbolos, y secuencias de secuencias de símbolos de forma tal que exista una correspondencia unívoca y se pueda generar un método efectivo. Carnap parte de la base de que en un lenguaje fisicalista también se ha de pasar

15 Véase Zickelprotokoll (1931), III, (25.6.1931), p. 1 s. Dicha aritmetización se debe a que se opera mediante determinadas construcciones del tipo 'demostrable con 1000 símbolos' que sólo son definibles mediante la aritmetización.

de una simple correlación cualitativa a una cuantitativa cuyos valores vienen expresados mediante números naturales. Por analogía, se introduce la numeración de Gödel, con el único fin de superar la metalógica descriptiva a la cual se refería en su conferencia anterior [véase Zirkelprotokoll (1931), III, (25.6.1931), p. 2 *ss.*]. Dicho cambio de marcha en su propuesta viene a ser expuesto mediante ejemplos. Al final de la conferencia Carnap sintetiza su planteamiento gestor de la siguiente manera:

> Gödel puede contentarse con los conceptos aritméticos, ya que sólo se ocupa de la aritmética. Pero ya que nosotros queremos describir las formas físicas, es decir, la combinación de los símbolos, tenemos que exponer además esos conceptos empíricos. Ya que describimos sólo formas físicas, a saber, sucesiones de símbolos lingüísticos, podemos expresar la metalógica de nuestro lenguaje natural y, precisamente de tal modo, que no contradigo los puntos de vista de Wittgenstein. No se trata aquí de sentencias sobre una especie de sentencias, sino de sentencias, en parte, singulares, en parte, condicionales sobre formas físicas [véase Zirkelprotokoll (1931), III, (25.6.1931), p. 4].

En su autobiografía condensaría su propuesta al afirmar:

> ... sólo el modelo estructural, y no las propiedades físicas de los trazos de tinta, es relevante para la función del lenguaje. Así, es posible construir una teoría sobre el lenguaje, a saber, la geometría del modelo escrito. Esta idea condujo posteriormente a la teoría que llamé "sintaxis lógica" del lenguaje [véase Carnap 1992, 67]

Carnap parte de una hipótesis de trabajo que viene a ser expuesta con toda su radicalidad al final de la conferencia. El siguiente enunciado:

(C) *A* cree [que] p,

no ha de ser analizado mediante la propuesta russelliana del comillado, es decir, mediante 'p', sino por la descripción metalógica del enunciado **p**, de modo que pueda desaparecer toda apariencia de intensionalidad [véase Zirkelprotokoll (1931), III, (25.6.1931), p. 4]. Lo que está en juego en dicha propuesta puede ser expuesto brevemente del siguiente modo: el axioma de reducibilidad requería en los años veinte algún perfeccionamiento.[16] Su justificación se llevaba a cabo por aquel

16. El axioma de reducibilidad permite alcanzar la teoría de los números reales evitando las paradojas. Las definiciones de individuos o de categorías de variables se puede efectuar, o bien, por medio de simples abreviaciones de escritura, o bien, mediante la enunciación que una cierta expresión puede ser representada por un signo de una categoría ya conocida. Estas definiciones pueden ser fundadas de manera uniforme por el axioma-esquema de reducibilidad. Éste confiere al formalismo su carácter general pre-

entonces de manera puramente pragmática. Por esta razón, su lectura conduce sólo a los resultados requeridos. Se barajaban dos soluciones posibles. Por un lado, se podía prescindir del axioma de reducibilidad sin adoptar ningún sustituto. Ahora bien, sus consecuencias más alarmantes eran que con dicho camino se sacrificaba gran parte de las matemáticas usuales. Por otro lado, Wittgenstein había recomendado suponer que las funciones proposicionales son siempre funciones de verdad [17] y que en una proposición sólo puede aparecer una función a través de sus valores de verdad. Las dificultades de este último enfoque vienen a ser superadas por las propuestas de Carnap. Aquí se entraña la consecuencia de que todas las funciones son extensionales, obligándonos a mantener que '*A* cree [que] *p*' no es una función de p, sino que con el fin de conocer su sentido se ha de investigar en el ámbito metalógico.

Al final de la conferencia se recoge la discusión habida en el Círculo. La discusión recalca la capacidad sintetizadora de Carnap. Según éste, los enunciados de nuestro lenguaje pueden ser caracterizados como abstractos o concretos, descriptivos o aritméticos y decidibles e indecidibles. Vienen a ser expuestos mediante el esquema de la página siguiente [véase Zirkelprotokoll (1931), III, (25.6.1931), p. 7]

dicativo, garantizando la posibilidad de efectuar cualquier relación de tipo inmediatamente superior. Véase la *Introducción* a la segunda edición del *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell.

17 Véase Wittgenstein 1921, 5.54 y ss. Allí se afirma lo siguiente: "Pero es claro que '*A* cree que *p*', '*A* dice *p*', son de la forma '"*p*" dice *p*'; y aquí se trata no de la coordinación de un hecho y un objeto, sino de la coordinación de los hechos por la coordinación de sus objetos". Wittgenstein 1921, 5.542. En la introducción que escribe Russell al *Tractatus logico-philosophicus*, acepta las críticas que lleva a cabo Wittgenstein, como lo resume de nuevo en su introducción a la segunda edición de *Principia Mathematica*.

	Decidibles en el cálculo	Decidibles fuera del cálculo	Indecidibles con nuevos símbolos	Indecidibles sin nuevos símbolos
descriptivos abstractos	Rojo(a) v –Rojo(a) Tautologías o contradicciones generales[18]	Construibles según el método de Gödel.[22]	Definiciones de conceptos fisicalistas.[25]	Leyes naturales[29]
concretos	R(17) v –R(17) Tautologías o contradicciones concretas[19]	0 [23]	Definiciones de nombres geográficos.[26]	Enunciados con contenido[30]
aritméticos abstractos	m + n = n + m [20]	El teorema de Gödel.[24]	Definiciones de conceptos matemáticos.[27]	? (Teorema de Fermat).[31]
concretos	1 + 1 = 2 [21]	0 [23]	Definición de 2 2 = 1 + 1 [28]	0 [23]

18. Se hace referencia a la distinción entre tautologías o contradicciones generales en Carnap 1934, 39.
19. Se introduce la distinción entre tautologías o contradicciones generales en Carnap 1934, 39 s.
20. Propiedad conmutativa.
21. Cifras.
22. Carnap se refiere a la correlación de distintos números naturales a los objetos formales, hablándose después de los números correlacionados en lugar de hablar de los objetos formales.
23. Cero.
24. Se refiere al teorema de incompletitud (o incompletud) y que informalmente puede ser expresado del siguiente modo: existe un enunciado verdadero que es indecidible.
25. Los conceptos fisicalistas son todos aquellos que no son conceptos lógicos. Los conceptos fisicalistas se basan en los símbolos descriptivos.
26. Los nombres geográficos juegan un papel importante en la propuesta carnapiana como algunas de sus obras lo reflejan.
27. La definición de los conceptos matemáticos viene a ser abordada en otro ámbito de trabajo.
28. La definición de 2 es constructiva. La construcción comienza con el símbolo 1, y procede de acuerdo con la regla 1 = 1 | que prescribe que para dar lugar a la cifra 1| hay que añadir | a la ya construida cifra 1.
29. Las leyes naturales tienen un carácter hipotético que se asienta sobre una convención, en parte, debida al examen de casos particulares.
30. Un enunciado posee un contenido cuando se atribuye a un objeto una propiedad determinada.
31. El Teorema de Fermat con simbolismo algebraico dice que si n es un número entero mayor que dos, y si x, y, z, son números enteros no nulos, entonces la ecuación

Hemos podido comprobar en su diario cómo durante los meses posteriores a la presentación de estas conferencias, Carnap trabaja incesablemente en lo que posteriormente sería su libro *Logische Syntax der Sprache*.

7. Conclusión y algunas notas críticas sobre la edición

El texto que seguidamente editamos y traducimos es un eslabón perdido. Su relevancia supone un giro importante para las investigaciones acerca de la metateoría. Espero que pueda ser reconocida la novedosa propuesta de Carnap de manera adecuada.

Desde que envié el texto a la revista hasta su corrección han ido llegando a mi poder una serie de trabajos sobre el tema que analizamos y sería un agravio comparativo no indicar escuetamente algunas palabras sobre éstos. Todos estos trabajos que seguidamente comentaré tienen un común denominador: hacen alusión a las investigaciones llevadas a cabo por Alberto Coffa [Véase Coffa 1987, 547-572, así como Coffa 1991]. Parece ser que Coffa repasó un texto semejante al que aquí se edita y que se encuentra en la *Rudolf Carnap Collection* de Pittsburgh. No estoy de acuerdo con muchas de las interpretaciones de Coffa pero por falta de espacio no voy a entrar en dichas consideraciones.[32] Sin embargo, sí lo voy a hacer sobre sus lectores de habla hispana. En el quinto capítulo de la monografía publicada recientemente por Ramón Cirera Duocastella se lleva a cabo una recopilación de tópicos comunes [Cirera 1990]. En dicho capítulo se paraleliza el trabajo llevado a cabo en la *Sintaxis lógica del lenguaje* a la metalógica. Presumo que el autor no ha leído el texto de la metalógica debido a los saltos argumentativos que se llevan a cabo. Se intenta equiparar esta interpretación con los análisis realizados por Tarski y Gödel. Es sabido que desde la conferencia que presentó Tarski en Viena, éste se encarga de convencer a Carnap de la necesidad de considerar una concepción jerarquizada del lenguaje que diferencie entre

$x^n + y^n = z^n$ carece de soluciones. Esta conjetura se asienta en una nota dejada por Fermat al margen de su ejemplar de la Aritmética y que decía así: 'La resolución de un cubo en suma de dos cubos, de una cuarta potencia en suma de dos cuartas potencias, y en general, de cualquier potencia superior a la segunda en suma de dos de la misma clase, es imposible, hecho del cual he hallado una notable demostración. El margen es demasiado estrecho para contenerla'.

32 De facto, en el Simposio organizado en Madrid en octubre de 1993 entré a considerar estas cuestiones. Ya que dicha conferencia se publicará en un próximo futuro no voy a entrar a considerar muchos de los argumentos esbozados. Sin embargo, quiero indicar algunas tendencias actuales que puedan servir al lector de guía sin necesidad de rebuscar demasiado en la bibliografía. Véase Padilla Gálvez (en prensa).

lenguaje-objeto y metalenguaje. La autoría de R. Carnap es indiscutible por las siguientes razones: 1º En sus diarios privados se hace referencia a las conferencias. 2º El uso de la primera persona del singular y el sujeto mayestático evidencia, que o bien dictó, o bien redactó estos protocolos; 3º La presentación de las fórmulas sólo la podía hacer el mismo R. Carnap. y 4º Las fórmulas vienen a ser recogidas posteriormente en su libro *Logische Syntax der Sprache*.

Los exegetas de K. Gödel han repetido con toda insistencia que

> ... Carnap en 1930 podía muy bien alcanzar nuestro moderno punto de vista semántico sin tener que inventarlo él mismo ni recibir instrucciones de Varsovia, puesto que en la misma Viena Kurt Gödel lo profesaba con plena lucidez.[33]

Así pues, un estudiantes asesorado por Hahn y Menger de 24 años le daba clases particulares a un matemático formado con Frege de 39 años de edad. Dichas lecturas no hacen sino confirmar la sospecha que en la historiografía contemporánea se sigue escribiendo una historia de las matemáticas de carácter heroico. Mucho me temo que éste sea el caso. Al menos, la publicación de las conferencias de Carnap pone los acentos en el lugar adecuado con respecto al año 1931: Carnap es hipercrítico ante todas las tendencias metalógicas que han surgido durante los años veinte: también con la de Gödel.

Se debe pensar que la propuesta de Gödel vive en 1931 un año difícil. Este breve croquis dará cuenta de las dudas que suscitaban sus trabajos. En este vamos a denominar los trabajos por números, P significa publicado y hace referencia al trabajo en cuestión; C se denomina crítica y el número se refiere al trabajo reseñado:

1930

[1] 7 de septiembre de 1930: Conferencia en Königsberg. *Diskussion zur Grundlegung der Mathematik* (Discusión sobre la fundamentación de la matemática) [H. Hahn / R. Carnap / J. v. Neumann / H. Scholz / A. Heyting / K. Gödel / K. Reidemeister].

[P2] 23 de octubre de 1930: Publicación de K. Gödel, *Einige metamathematische Resultate über Entscheidungsdefinitheit und Widerspruchsfreiheit*.

33 Torretti 1992, 333-340. En particular, p. 339. Esta interpretación sigue a pies juntillas las propuestas de H. Wang.

[3] 17 de noviembre de 1930 se recibe el trabajo. *Über formal unentscheidbare Sätze der* Principia Mathematica *und verwandter Systeme* I.

1931

[4] 15 de enero de 1931 conferencia de K. Gödel con el título *Über Widerspruchsfreiheit und Entscheidbarkeit in Axiomensystem* de la que hay un protocolo al que ya he aludido en el trabajo e impartida en el Instituto de Matemáticas en el que viene a ser criticada su propuesta.

[5] 22 de enero de 1931 presenta *Über Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit* es una primera exposición sintetizadora [Heijenoort 1967, 616-617].

[P3] En enero se publica *Über formal unentscheidbare Sätze der* Principia Mathematica *und verwandter Systeme* I.

[P1] En febrero / mayo se publica en *Erkenntnis el Nachtrag zur Diskussion zur Grundlegung der Mathematik*. En la discusión, las explicaciones de Gödel quedan sin respuesta y el propio H. Hahn recomienda este trabajo en el que aclare su fin [Gödel 1931b, 149-151. El texto ha quedado casi inédito].

[C1/3/4] 11, 18 y 25 de junio en las que R. Carnap lleva a cabo sus conferencias sobre *metalógica* en el Instituto de Matemáticas y efectúa algunas críticas a la propuesta aritmética.

[6] 15 de septiembre presenta la conferencia: *Über die Existenz unentscheidbarer arithmetischer Sätze in den formalen Systemen der Mathematik* en el Deutschen Mathematiker-Vereinigung en Bad Elster.

[C3] 21 de septiembre / 12 y 29 de octubre se desata la correspondencia crítica entre E. Zermelo y K. Gödel [véase Grattan-Guinness 1979, 294-304 y Dawson 1985, 66-70]

[C3] El 7. 10. 1931, E. Zermelo escribe una carta a R. Baer en la que da cuenta de la correspondencia crítica del trabajo de K. Gödel [véase Zermelo 1987, 43-48].

1932

[P5] K. Gödel publica: *Über Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit*. Ergb. math. Koll. 3 (1932) 12-13.

[P7] K. Gödel no publica pero si anuncia: *Über die Existenz unentscheidbarer arithmetischer Sätze in den formalen Systemen der Mathematik* en el Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereiningung 41 (1932) 85.

La reflexión de los autores arriba citados se basa, evidentemente, sobre un conocimiento muy superficial de la propuesta carnapiana en

1931, o sea, de los fundamentos metalógicos sobre los que posteriormente se asienta la *Logische Syntax der Sprache*. Como hemos visto, y el texto lo confirma de entrada, Carnap intenta congeniar por un lado, determinadas propuestas russellianas con las críticas que había efectuado Wittgenstein contra los *Principia Mathematica*. Por otro lado, integra la concepción lingüística que había desarrollado Tarski —el Círculo de Varsovia— con el programa del Círculo de Viena. En este segundo apartado es donde critica a Gödel que se contente con un análisis de los conceptos aritméticos e integra algunas propuestas, como la de la gödelización.

La discusión actual sigue siendo sumamente superficial con respecto al análisis de fuerzas que se ejercían en 1931 en Viena y que se ven plasmados en la propuesta metalógica desarrollada por Carnap. La mayoría de los análisis insisten en considerar la propuesta carnapiana como un acto de sumisión a la genialidad gödeliana y evitan pulcramente enfocar la real dimensión de las diferencias que existían en el núcleo del Círculo de Viena.[34] Algunas son las dificultades que deben ser analizadas en profundidad y que resumo aquí:

1ª ¿Cómo influyó Hans Hahn (*Doktorvater*: Director de la tesis de Kurt Gödel) en su trabajo matemático?

2ª ¿Qué papel juega Philipp Fürtwängler (*Korreferent*: examinador de la tesis de Gödel) en su formación filosófica?

3ª ¿Había tensiones o acuerdos entre el coloquio matemático de Menger y el Círculo de Viena?

4ª ¿Qué grupos se cristalizaron en 1931 en el Círculo de Viena y qué tensiones suscitaban los diferentes puntos de vista?

5ª ¿Qué papel juega Wittgenstein y su crítica a la metalógica en la toma de posición de algunos miembros del Círculo (por ejemplo, Neurath)?

6ª ¿Qué papel jugó el Círculo de Varsovia —y en particular Tarski— en los enfrentamientos entre Carnap y Neurath acerca de la concepción semántica de verdad, los lenguajes jerarquizados (lenguaje-objeto y metalenguaje), el tercio excluso y los presupuestos empíricos de toda teoría?

7ª ¿Cómo se formó el Círculo de Gompertz [1934/35]? ¿Asistía Gödel a dichas reuniones?

---

34. Sobre dicho tema publicaré un artículo sobre la influencia de A. Tarski en el Círculo de Viena y la reacción de O. Neurath a su ámbito de influencia. El artículo lleva como título, "Lógica, verdad y metafísica". *Aporía*. (En prensa) El ensayo se centra en considerar las diferencias habidas entre Carnap y Neurath.

Muchas de las preguntas no podrán ser contestadas ya que los archivos de Hahn se perdieron. La segunda cuestión no ha sido ni tocada en la investigación, a pesar de que Gödel reconoce en el cuestionario de Grandjean que Gompertz y Furtwängler fueron muy importantes en el desarrollo de su filosofía [véase Wang 1987, §1.2]. Se están analizando las diferentes confrontaciones dentro del Círculo. Sobre Tarski sabemos cosas cada vez más interesantes, debido a la correspondencia que mantuvo con Neurath. Algunos problemas están en vías de solución: el papel que juega Antonio Flores de Lemus en el Coloquio matemático de Menger nos podría haber suministrado alguna información puntual aunque, al destruir valiosísima información —debido a la situación dictatorial que le tocó vivir en España— se ha perdido para siempre.

El primer argumento se refleja constantemente en los escritos por lo que su justificación es evidente.[35] En el segundo de los casos soy de la opinión que la primera redacción fue un dictado y que las faltas que contenían le indujeron a escribirlo de nuevo. El texto, sin embargo, posee correcciones hechas a máquina, y unas cuantas breves modificaciones más hechas a mano. En el Archivo se encuentran dos versiones. Soy de la opinión que lo mejor es publicar íntegra esta segunda versión, más revisada y acabada. Éste último es el que he traducido y por lo tanto asumo la responsabilidad al preferir traducir éste y no la primera versión. De todos modos, las diferencias son de tipo estilístico, tiene que ver con los acentos temáticos y las correcciones de las erratas encontradas. Esto último no supone el que la segunda versión no tenga ninguna incorrección, de hecho las tiene y el propio Carnap las corrige puntualmente, como se desprende de las notas al pie de página de nuestra traducción.

He incorporado, con comentarios al pie de página, las correcciones al texto en la traducción. He procurado que la traducción sea más bien literal y lo menos parafrástica posible. Esto supone que a veces el texto pierde elasticidad. He renegado pues, a toda traducción que se asiente en la actualización de la terminología y en su unificación con los textos posteriores. Asumo la responsabilidad que supone dicha elección.

8. Notas biográficas sobre los autores que se citan en el texto

CARNAP, Rudolf (1891-1970). Profesor en Viena, Praga, Chicago y Los Ángeles. Miembro destacado del Círculo de Viena (véase). Su

35. Un informe del contenido de este Archivo se encuentra en Padilla Gálvez 1992a.

trabajo se desarrolló en el análisis crítico-filosófico, lógico, de la constitución, en la sintaxis lógica del lenguaje, en semántica e inducción. Sus libros más importantes son: *Der logische Aufbau der Welt* (1928), *Logische Syntax der Sprache* (1934), *Meaning and Necessity* (1947), *Logical Foundations of Probability* (1950). Una biografía se encuentra en Schilpp 1963.

CÍRCULO DE BERLÍN. Formación alrededor de la *Gesellschaft fur empirische Philosophie* (1927-1933). Pertenecen, entre otros, Walter DUBISLAV, Josef PETZOLDT, Hans REICHENBACH, Kurt GRELLING, Rudolf von MISES. Una breve biografía se encuentra en Hentschel 1990.

CÍRCULO DE GÖTTINGEN. Formación alrededor de la Cátedra de D. Hilbert. Pertenecen, entre otros, David HILBERT, Leonard NELSON, Ernst ZERMELO, Kurt GRELLING. Un estudio sistemático se encuentra en Peckhaus 1990. [Reseña en *Mathesis* 1991, 547 *ss.*]

CÍRCULO DE VARSOVIA. Formación alrededor de las investigaciones que se realizaban en la Universidad de Varsovia. Pertenecen, entre otros, Stanislaw LEŚNIEWSKI, Alfred TARSKI, Kazimierz TWARDOWSKI, Jan LUKASIEWICZ, Tadeusz KOTARSBINSK. Una breve biografía se encuentra en Haller 1992 y Wolenski 1989.

CÍRCULO DE VIENA. Formación en 1929 debido al Congreso para la Epistemología de las Ciencias Exactas. Pertenecen, entre otros, Otto NEURATH (véase), Rudolf CARNAP (véase), Hans HAHN (véase), Philip FRANK (véase), Hilbert FEIGL (véase). Una breve biografía se encuentra en Neurath *et al.* 1929 así como en Neurath 1935 y Haller 1993.

FEIGL, Herbert (1902-1988). Profesor en Viena, Iowa, Minnesota. Discípulo de Moritz SCHLICK y miembro activo del Círculo de Viena (véase). Su trabajo giró alrededor del positivismo lógico bajo la forma del empirismo lógico. Analizó la validez semántica y la relación mental-físico. Entre sus libros más importantes hay que destacar *Theorie und Erfahrung in der Physik* (1929), *The "Mental" and the "Physical": The Essay and a Postscript* (1967). Una biografía detallada se encuentra en Feyerabend y Maxwell 1966.

FLORES [DE LEMUS], Antonio (1912-1992). Matemático. Investigó con Karl MENGER (véase) sobre topología entre 1932 y 1935. Investigador en el Institute für Advanced Studies (Princeton) (1936). Docencia en las Universidades de Zulia y Central de Venezuela.

FRANK, Philipp (1884-1966). Profesor en Praga y Harvard. Fundador del Círculo de Viena (véase). No acepta las tendencias convencionalistas y centra su trabajo en filosofía de la ciencia y la física. Entre sus trabajos más relevantes destacamos *Das Kausalgesetz und seine Grenzen* (1932), *Das Ende der mechanistischen Physik* (1935), *Foundations of Physics* (1946). Una bibliografía se encuentra en Cohen y Wartofsky 1965.

FREGE, Gottlob (1848-1925). Profesor de matemáticas en Jena, relevante por sus estudios en lógica matemática, logización de la aritmética, análisis semántico y crítica al psicologismo. Entre sus libros más destacados ha de resaltarse: *Begriffschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (1879), *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884), *Grundgesetze der Arithmetik* (1893-1903). La bibliografía es muy extensa.

GÖDEL, Kurt (1906-1978). Profesor de matemáticas en Viena, Institute for Advanced Studies (Princeton). Estrecha relación con el Círculo de Viena (véase). Contribución a la lógica matemática y la metalógica. Obras: Die Unvollständigkeit der Axiome des logischen Funktionskalküls (1930), Einige metamathematische Resultate über Entscheidungsdefinitheit und Widerspruchsfreiheit (1930), Über formal-unentscheidbare Sätze der PM und verwandter Systeme (1931). Bibliografía, véase: Gödel 1986 *ss*.

HAHN, Hans (1879-1934). Profesor de matemáticas en Viena. Miembro del Círculo de Viena (véase). Su trabajo se centra en una crítica al racionalismo y empiricismo tradicional, trata cuestiones fundamentales de la concepción del mundo científico, las matemáticas y la lógica. Entre sus libros pueden ser destacados: *Weiterentwicklung der Variationsrechnung in den letzten Jahren* (1904), *Theorie der reelen Funktionen I* (1932), *Empirismus, Logik, Mathematik* (1988), en el que se encuentra reseñada una extensa bibliografía.

HILBERT, David (1862-1943). Profesor en Königsberg y Göttingen. Su trabajo contribuyó a la matemática y lógica matemática así como a la fundamentación de la geometría, teoría de la demostración, consistencia de sistemas deductivos y a la formalización. Fundador del Círculo de Gottinga (véase). Sus obras más importantes son *Grundlagen der Geometrie* (1899), *Grundzüge der theoretischen Logik* (1929), *Grundlagen der Mathematik* (1934-1939). Una bibliografía se encuentra en Peckhaus 1990. [Véase: *Mathesis* 1991, 347 ss.]

KAUFMANN, Felix (1895-1949). Profesor de filosofía del derecho en Viena, en el Graduate School, Nueva York. Estrecha relación con el Círculo de Viena (véase). Su trabajo se centró en el positivismo lógico, en la fenomenología de Husserl, en lógica y metodología. Entre sus obras destacan *Logik und Rechtwissenschaft* (1922), *Die Kriterien des Rechts* (1924), *Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung* (1930).

LEWIS, Clarence Irving (1883-1964). Profesor en California y Harvard. Su trabajo se centró en lógica simbólica, lógica modal y cálculo de modalidades. Obras relevantes: *A Survey of Symbolic Logic* (1918), *Symbolic Logic* (1932).

MENGER, Karl (1902-1985). Profesor de matemáticas en Viena, Amsterdam, Harvard, Notre Dame Indiana, Chicago. Trabajó sobre lógica y matemáticas.

NEUMANN, Johan von (1903-1957). Profesor en Berlín, Hamburgo, Princeton, Institute for Advanced Studies (Princeton). Trabajó en lógica, matemáticas, cibernética y mecánica cuántica. Sus obras se encuentran publicadas en *Collected Works* (1961-1966).

NEURATH, Otto (1882-1945). Miembro del Círculo de Viena (véase), defensor y propagador de las ideas del Círculo y del positivismo lógico. Su trabajo se centra en analizar los enunciados protocolarios, los problemas sociales, el marxismo y el fisicalismo. Entre sus obras destacan *Lebensgestaltung und Klassenkampf* (1928) y *Empirische Soziologie* (1931). Véase Haller 1993.

RUSSELL, Bertrand (1872-1970). Trabajó en multitud de instituciones. Su investigación se centró en las matemáticas, filosofía, historia y temas sociales. Entre sus contribuciones han de destacarse *The Principles of Mathematics* (1903), *Principia Mathematica*, con A. N. Whitehead

(1910-1913). *Our Knowledge of the External World* (1914). Su bibliografía se encuentra en Schilpp 1971.

TARSKI, Alfred (1902-1983). Perteneciente al Círculo de Varsovia (véase). Fue profesor en Varsovia, California (Berkeley). Su trabajo se centró en las matemáticas, fundamentación de las matemáticas, lógica, metodología y semántica. Entre sus obras ha de destacarse *Der Wahrheitsbegriff in den Sprachen der deduktiven Disziplinen* (1932). Sus obras han sido recogidas en Givant y McKenzis 1986.

WITTGENSTEIN, Ludwig (1889-1951). Profesor en Cambridge. Trabajó en lógica, filosofía de la lógica, semántica, etc. Enorme repercusión sobre el Círculo de Viena (véase). Entre sus obras han de destacarse *Tractatus logico-philosophicus* (1921), *Philosophische Untersuchungen* (1953). La bibliografía secundaria es muy abundante. Véase Dridis 1990.

Fuentes

PROTOCOLO. 1931. *Über Widerspruchsfreiheit und Entscheidbarkeit in Axiomensystemen.* Wechselrede Z. (Referat Herrn Gödels). Protokoll am 15.1.1931. En: *Wiener Kreis Archiv.* Haarlem (Holanda), WK 3: 10/D, pp. 1-3.

ZIRKELPROTOKOLL. 1931. *Metalogik.* Zirkelprotokoll vom 11. Juni 1931, pp. 1-9; v. 18. 6. 1931, pp. 1-9; v. 25. Juni 1931, pp. 1-8. En: *Wiener Kreis Archiv.* Haarlem (Holanda). WK 14-15-16.

Referencias

ACKERMANN, W. 1924. "Begründung des «tertium non datur» mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit". *Mathematische Annalen* 93: 1-36.

BEHMANN, H. 1927. *Mathematik und Logik.* Leipzig - Berlin.

BERNAYS, P. 1926. "Erwiderung auf die Note von Herrn Aloys Müller, «Über Zahlen als Zeichen»". *Mathematische Annalen* 90: 159-163.

BRAITHWAITE, R. B. 1960. "Introduction". En Gödel 1950: i-xxxii.

CARNAP, R. 1931. "Protocolo".

__________. 1930-1933. *Tagebücher.*

__________. 1934. *Logische Syntax der Sprache.* Viena: Julius Springer.

__________. 1939. "Foundations of Logic and Mathematics". En: *International Encyclopedia of Unified Science.* Chicago: The University of Chicago Press.

__________. 1963. "Intellectual Autobiography". [Contenida en Schilpp 1963: 1-84]

__________. 1992. *Autobiografía intelectual.* Barcelona: Paidós.

CIRERA Duocastella, R. 1990. *Carnap i el Cercle de Viena. Empirisme i sintaxi lògica.* Barcelona: Anthropos.

COFFA, A. 1987. "Carnap, Tarski and the Search for Truth". *Noûs* 21: 547-572.

__________. 1991. *The Semantic Tradition from Kant to Carnap. To the Vienna Station* [Ed. Linda Wessels]. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

COHEN, Robert S. y WARTOFSKY, Max W. (Eds.) 1965. *A Bibliography of Ph. F. - Selected Writings on the Philosophy of Science.* Contents on Boston Studies in the Philosophy of Science, II. In Honor of Ph. F.

CHURCH, A. 1936. "A note on the Entscheidungsproblem". *The Journal of Symbolic Logic* 1: 40-41.

_____. 1956. *Introduction to Mathematical Logic.* Vol. I. Princeton, N.Y.

DAWSON J. W. 1985. "Completing the Gödel-Zermelo Correspondence". *Historia Mathematica* 12: 66-70.

DEDEKIND, R. 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen.* Braunschweig. Friedr. Vieweg & Sohn.

DRUDIS, R. 1990. "Bibliografía sobre L. W." *Aporía* 9.

FEYERABEND, Paul F. y MAXWELL, G. (Eds.) 1966. *Mind, Matter, and Method: Essays in the Philosophy of Science in Honor of Herbert Feigl.*

FREGE, G. 1884. *Die Grundlagen der Arithmetik.* Hildesheim. Olms.

GIVANT, S. y MCKENZIE, R. N. (Eds.) 1986. *Alfred Tarski. Collected Papers.* 4 vols. Basilea. Birkhäuser.

GÖDEL, K. 1930a. "Einige metamathematische Resultate über Entscheidungsdefinitheit und Widerspruchsfreiheit". *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse* 67: 214-215. [Trad. cast.: Gödel 1981, 42-43]

_____. 1930b. "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls". *Monatshefte für Mathematik und Physik* 37: 349-360. [Trad. cast.: Gödel 1981, 20-34].

GÖDEL, K. 1931a. "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I". *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38: 173-198. [Trad. cast.: Gödel 1980, 11-50 y Gödel 1981, 55-89]

_____. 1931b. "Nachtrag zur Diskussion zur Grundlegung der Mathematik". *Erkenntnis* 2: 149-151. (El texto ha quedado casi inédito.)

_____. 1980. *Sobre proposiciones formalmente indecidibles de los Principia Mathematica y sistemas afines.* Valencia: Cuadernos Teorema.

_____. 1981. *Obras completas.* Madrid: Alianza. [Intr. y trad. de J. Mosterín.]

_____. 1986 ss. *Kurt Gödel. Collected Works.* Vol. I-II. Oxford. Oxford University Press.

GRATTAN-GUINNESS, I. 1979. "In Memoriam Kurt Gödel: His 1931 Correspondence with Zermelo on his Incompletability Theorem". *Historia Mathematica* 6: 294-304.

HALLER, Rudolf. 1992. "Alfred Tarski. Drei Briefe an Otto Neurath". *Grazer Philosophische Studien* 43: 1-32.

_____. 1993. *Neopositivismus.* Darmstadt. Wiss. Buchgesellschaft.

HEIJENOORT, J. van. 1967. *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931.* Cambridge Mass.: Harvard Univ. Press.

HENTSCHEL, K. 1990. *Die Korrespondenz Petzoldt-Reichenbach. Zur Entwicklung der "wissenschaftlichen Philosophie" in Berlin.* Berlin. Sigma.

HERMES, H. 1971. *Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit.* Berlin: Springer. [Trad. cast.: *Introducción a la teoría de la computabilidad.* Madrid. Tecnos. 1984]

HEYTING, A. 1930. "Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik". *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-Mathematische Klasse* II: 42-56.

_____. 1930a. "Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik". *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-Mathematische Klasse* II: 57-71 y 158-169.

HILBERT, D. 1900. "Mathematische Probleme. Vortrag gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris". *Archiv der Mathematik und Physik* 3. Serie, I, 1901: 44-63 y 213-237.

HILBERT, D. 1904. "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik". *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904.* Leipzig: Teubner. Pp. 174-185.

______. 1923. "Die logischen Grundlagen der Mathematik". *Mathematische Annalen* 88: 151-165.

______. 1925. "Über das Unendliche". *Mathematische Annalen* 95: 161-190.

______. 1927. "Die Grundlagen der Mathematik". *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 6: 65-85.

______. 1928. "Probleme der Grundlegung der Mathematik". *Atti del Congresso internazionale dei matematici. Bologna 3-10 settembre 1928.* Bologna. 1929. Vol. I. pp. 135-141.

HILBERT, D. y ACKERMANN, W. 1928. *Grundzüge der theoretischen Logik.* Berlin: Springer.

HUSSERL, E. 1921. *Logische Untersuchungen.* (3 vols.) Halle: Niemeyer.

KLEENE, ST. C. 1971. *Introduction to Metamathematics.* Amsterdam, New-York: North-Holland. [Trad. cast.: *Introducción a la metamatemática.* Madrid: Tecnos. 1974.]

LEWIS, C. I. 1918. *A Survey of Symbolic Logic.* Berkeley: University of California.

LORENZEN, P. 1969. *Einführung in die operative Logik und Mathematik.* Berlin: Springer Verlag.

______. 1980. *Metamathematik.* Hildesheim: Biblio. Institut.

LORENZEN, P. y LORENZ, K. 1978. *Dialogische Logik.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

LUKASIEWICZ, J. y TARSKI, A. 1930. "Untersuchungen über den Aussagenkalkül". *Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III* 23: 30-50.

LUSIN, N. N. 1927. "Sur les ensembles analytiques". *Fundamenta mathematicae* 10: 1-95.

______. 1930. *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications.* Paris: Gauthier-Villars.

NAGEL, E. y NEWMAN, J. R. 1969. "La demostración de Gödel". En: *Sigma. El mundo de las matemáticas.* (Ed. J. R. Newman). Vol. 5. Barcelona: Grijalbo. Pp. 57-84.

______. 1970. *El teorema de Gödel.* Madrid: Tecnos.

NEUMANN, J. v. 1927. "Zur Hilbertschen Beweistheorie". *Mathematische Zeitschrift* 26: 1-46.

______. 1928. "Die Axiomatisierung der Mengenlehre". *Mathematische Zeitschrift* 27: 669-752.

NEURATH, O. 1935. *Le développement du Cercle de Vienne et l'avenir de l'empirisme logique.*

NEURATH, O.; CARNAP, R. y HAHN, H. 1929. *Wissenschaftliche Weltauffassung. Der Wiener Kreis.* Veröffentlichungen des Vereines Ernst Mach. Viena: Artur Wolf Verlag.

PADILLA GÁLVEZ, J. 1988. "Identität und Selbigkeit. Ontologische Interpretation der Leibnizschen Individuen". *V. Internationaler Leibniz-Kongreß. Leibniz: Tradition und Aktualität.* Pp. 685-692.

______. 1990. "¿Pueden aplicarse los argumentos informales contra el punto de vista formal?". En: *Structures in Mathematical Theories.* Ed. A. Díez. San Sebastián. UPV. pp. 461-467.

______. 1991a. "La verdad y descripción de estado". En: *Actas del encuentro de Lógica y filosofía de la Ciencia. Rudolf Carnap y Hans Reichenbach in Memoriam.* Madrid: Univ. Complutense. Pp. 413-422.

______. 1991b. "Niveles de lenguaje, autorreferencia y las paradojas". *Conexión* 9: 17-18 y 121-148.

______. 1992a. "El Círculo de Viena reconsiderado". *LLULL* 15: 487-491.

PADILLA GÁLVEZ, J. 1992b. "Autorreferencia, lógica de la probabilidad y modalidad matemática". *Actas del VIII Congreso de Lenguajes Naturales y Lenguajes Formales*. Barcelona: PPU. Pp. 475-482.

———. 1993. "Los presupuestos metalógicos de la Logische Syntax der Sprache de Rudolf Carnap". *I Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia*. Madrid. Pp. 467-471.

———. 1994. "Los inicios de la metalógica en los años veinte". *LLULL* 17. [En prensa].

———. (En prensa). "Metalógica descriptiva *versus* metalógica aritmética".

PEANO, J. 1889. *Arithmetices principia, nova methodo exposita*. Turín. Fratres Bocca.

PECKHAUS, V. 1990. *Hilbertprogramm und Kritische Philosophie*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. [Véase: *Mathesis* 1991, 547 ss.]

RUSSELL, B. 1923. *Einführung in die mathematische Philosophie*. München.

———. 1925[1]. *Principia Mathematica*. (2a. ed.).

———. 1965. *Einführung in die mathematische Philosophie*. Wiesbaden: Emil Vollmer Verlag.

RUSSELL, B. y WHITEHEAD, A. N. 1932. *Einführung in die mathematische Logik*. München - Berlin.

SCHILPP, P. A. (Ed.). 1963. *The Philosophy of Rudolf Carnap*. La Salle, Ill.: Open Court. (*The Library of Living Philosophers*. Vol. IX).

SCHILPP, P. A. (Ed.). 1971. *The Philosophy of Bertrand Russell*. La Salle, Ill.: Open Court. (*The Library of Living Philosophers*. Vol. V).

SKOLEM, Th. 1920. "Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theorem über dichte Mengen". En: *Skr. Vidensk. Kristiana. Math.-nat. Kl.* Nr 4. 1-36.

———. 1923. "Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich". *Videnskapsselskapets skrifter. I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse*, 6.

SPECK, J. (Ed.). 1992. *Grundprobleme der großen Philosophen*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

STEGMÜLLER, W. 1973. *Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit. Die metamathematischen Resultate von Gödel, Church, Kleene, Rosser und ihre Erkenntnistheoretische Bedeutung*. Berlin: Springer.

TARSKI, A. 1930. "Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik". *C. R. Soc. Sciences Varsovie* 23, Cl. III.

———. 1935. "Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen". *Studia Philosophica* 1: 261-405.

THIEL, Ch. 1992. "Kurt Gödel. Die Grenzen der Kalküle". [Contenido en Speck 1992, 138-181].

TORRETTI, R. 1992. "La tradición semántica". *Revista Latinoamericana de Filosofía*. 18: 333-340.

WANG, Hao. 1987. *Reflections on Kurt Gödel*. Cambridge MA: MIT Press.

———. 1991. *Reflexiones sobre Kurt Gödel*. Madrid: Alianza.

WHITEHEAD, A. N. y RUSSELL, B. 1910-13. *Principia Mathematica*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

WITTGENSTEIN, L. 1921. Tractatus logico-philosophicus. *Annalen der Naturphilosophie* 14: 185-162. (Reimpr. en: Schriften von Ludwig Wittgenstein. Frankfurt a. M. Suhrkamp. 1960 ss.)

WOLENSKI, J. 1989. *Logic and Philosophy in the Lvov-Warsaw School*. Dordrecht. Reidel.

ZERMELO, E. 1987. "A Letter to Reinhold Baer". En *Gödel Remembered*. [Ed. P. Weingartner y L. Schmetterer]. Napoli: Bibliopolis. Pp. 43-48.

Jesús Padilla Gálvez obtuvo el doctorado en Filosofía en la Universidad de Colonia (Alemania) en 1988. Se incorporó desde 1988 hasta 1991 al Departamento de Filosofía y Lógica de la Universidad de Murcia, donde desarrolló su actividad investigadora en lógica y teoría e historia de la ciencia. Ha llevado a cabo proyectos de investigación en las Universidades de Rotterdam, Graz y Erlangen/Nurenberg sobre historia de la lógica. Desde 1991 trabaja en la Universidad de León (España) en el área de Lógica y Filosofía de la Ciencia. Ha publicado un libro de investigación con el título *Referenz und Theorie der möglichen Welten* y artículos de investigación en diferentes revistas como *Theoria*, *Arbor*, *Filozofska Istraživanja*, *Journal of Philosophy of Science*, *Mathesis*, etcétera.