Mathesis II 1_1 (2001) 37-49.

Lógica y fundamentos en filosofía de la matemática

Angel Nepomuceno Fernández

Resumen

Varias nociones son relevantes para definir una filosofía de la matemática. Los contextos de investigación científica tal vez expliquen las prácticas matemáticas, que son como procesos que tienen asociada una lógica subyacente. El modo de introducir sistemas de objetos y el carácter de tal lógica son básicos para el estudio de las prácticas. Así, repasamos conceptos conocidos, añadiendo algunas notas cuando es necesario y presentamos una interpretación de momentos de los procesos en términos inspirados en lógica clásica y no clásica. Por último vemos que los trabajos de fundamento pertenecen a la clase de las prácticas matemáticas.

Abstract

In order to define a philosophy of mathematics several notions are relevant. The scientific research contexts may explain the mathematical practices, which are as processes that have associated an underlying logic. The way of introducing systems of objects and the character of such logic are basic to study practices. So that we go trough known concepts, adding some notes when necessary, and present an interpretation of moments of processes in terms inspired by classical and non classical logic. Finally, we see that the foundational works belong to the class of mathematical practices.

1. Introducción

Las concepciones de las teorías científicas han tenido como inspiración, en cierto sentido, las ciencias de la naturaleza. Desde la denominada 'concepción heredada' hasta la 'concepción estructural', la mayoría de las alternativas propuestas han incluido en sus estudios ejemplos tomados del ámbito de la física y a veces de las ciencias sociales; sin embargo, es menos frecuente que la matemática (mejor: la matemática clásica) haya inspirado directamente la formulación de una filosofía general de la ciencia, incluso cabe afirmar que algunas teorías matemáticas no encuentran fácilmente ubicación con respecto a las concepciones generales.[1] Tal vez se requiera por ello no ya adoptar sin más una filosofía general de la ciencia y considerar la matemática bajo la misma, sino elaborar una filosofía específica compatible con la concepción general.

Las materias que constituyen los ingredientes principales de una filosofía de la matemática son diversas, si bien se trata de establecer las características esenciales de esta actividad. En cualquier caso, hay una serie de conceptos que es necesario estudiar, destacando entre ellos los de *práctica matemática, lógica subyacente* y *tareas de fundamento* y las relaciones que se pueden dar entre los mismos cuya relevancia se manifiesta en la falta de unanimidad en la visión de tales relaciones. Cuando se trata del trabajo que se realiza en algunas fases de la elaboración de una teoría (por ejemplo, sus fundamentos), la propia comunidad científica puede plantear dudas acerca de la consideración de tal actividad como una genuina práctica matemática. Algo análogo podemos decir con respecto a la lógica subyacente.

Un mínimo estudio de los contextos de la investigación científica y la perspectiva de considerar las prácticas como procesos en los que se involucran teorías permiten una mejor comprensión del concepto de *lógica subyacente* (anejo a cada práctica matemática). Los sistemas de lógica clásica son imprescindibles en la explicación de las lógicas subyacentes, pero los aspectos lógicos no se agotan en la determinación del tipo de lógica asociada a una práctica matemática; por el contrario, la adecuada descripción de la construcción de una teoría matemática tal vez haya de ser de carácter lógico, lo que vendría a poner de manifiesto su especificidad en comparación con los procesos de descubrimiento en otras ciencias.

Cualquiera que sea el tipo de fundamentación (reconstrucción o reducción, como veremos más abajo), su culminación viene a significar que se cuenta con más elementos explicativos de las teorías en cuestión. Pero las tareas de fundamento son de carácter lógico y en ellas la lógica subyacente desempeña un papel destacado. Así pues, las tareas de fundamento, como habíamos dicho, no resultan ajenas a las prácticas matemáticas, sino que, por el contrario, son clarificadoras respecto del alcance de las teorías, y completan, por así decir, su elaboración.

1. No obstante, algunos autores como Lakatos han tenido muy en cuenta la historia de la matemática. Un ejemplo de teoría de difícil catalogación es el 'Análisis no estándar'.

2. Los contextos de investigación científica

La tradicional distinción entre *contexto de descubrimiento* y *contexto de justificación* en la investigación científica, tal como fue propuesta originalmente, ha sido sustituida por otra más amplia que considera al menos cuatro contextos [*Cfr*. Echeverría 1995, 51 y *ss*.].[2]

Educación o enseñanza de la ciencia;
Innovación. Viene a ser el antiguo contexto de descubrimiento incorporando elementos de la ingeniería y la técnica;
Justificación o evaluación (teniendo también en cuenta aspectos de valoración de aportaciones técnicas: utilidad, viabilidad, etc.); y, por último:
Aplicación.

Dichos contextos constituyen el ámbito de actividad de la ciencia de que se trate. En el caso que ahora nos interesa, la matemática en general, es posible aplicar esta distinción. En efecto, el primer contexto corresponde a la enseñanza, especialmente superior, y da cuenta de un aspecto nada desdeñable en la reflexión sobre la ciencia que nos ocupa. La enseñanza comprende la elaboración de programas de estudio, en el marco de un plan diseñado previamente, como condición primera de posibilidad para la investigación futura; en estrecha conexión con ello, los métodos didácticos, a veces su omisión, establecen, de alguna manera, el modo de transmisión de los conocimientos básicos para la práctica matemática, así como la adquisición de determinadas competencias como destreza en la demostración de teoremas a partir de supuestos dados. La organización de congresos, por ejemplo, se hará teniendo en cuenta múltiples factores, siendo importante el paradigma establecido en ese momento. Se trata, en suma, de elementos relevantes para explicar la actividad de matemáticos profesionales y, a partir de aquí, determinadas prácticas matemáticas.[2]

2. Un ejemplo es el caso de la lógica: En los planes de estudio de las universidades españolas, en general, esta materia tiene escaso tratamiento; esta falta no se cubre después con programas de doctorado y sólo aparecen determinados cursos y algún interés más en Facultades de Filosofía que en las de Matemáticas (recientemente existía un programa de *Lógica Pura y Aplicada* en la Universidad de Barcelona, a cargo del Departamento de Lógica, Historia y Filosofía de la Ciencia, cuyo profesorado, en su inmensa mayoría, ejerce la docencia en Filosofía, pero este programa constituía una excepción). Ello incide de alguna manera en la investigación posterior (tanto en ámbitos matemáticos como en los filosóficos).

De los restantes contextos, el segundo y el tercero son aceptables para el estudio de las prácticas matemáticas, si embargo el de aplicación puede parecer algo extraño, salvo que se matice adecuadamente el concepto de 'aplicación' cuando se refiere a teorías matemáticas. No se trata ahora de una mera aplicación directa e inmediata que permita ciertos avances técnicos; si bien en campos de ingeniería se desarrolla lo que podemos denominar el área de la matemática aplicada, las aplicaciones de teorías matemáticas se extienden a muchos más campos; la teoría de las funciones recursivas, por ejemplo, se despliega en múltiples aplicaciones: lógica, teoría de la computabilidad, teoría de la complejidad, etc., que constituyen otros tantos ámbitos teóricos, con ciertas consecuencias en el plano técnico en algunos casos, pero cuya primera aplicación consiste en su carácter de instrumento teórico, auxiliar para la elaboración de nuevas teorías.

Históricamente, el contexto de aplicación aparece en los planteamientos de la *concepción estructural*: junto a 'núcleo teórico', 'modelos potenciales', etc., queda incorporada la noción de 'aplicaciones propuestas', la cual fácilmente se asimila a la de contexto de aplicación. En cualquier caso, la dificultad para precisar el sentido de 'aplicaciones propuestas' de disciplinas matemáticas, como se ha apuntado, es mayor que en aquéllas en las que las teorías pueden tener un carácter instrumental práctico respecto de otras.

La distinción de los cuatro contextos no implica una desconexión entre los mismos; por el contrario se trata de un análisis funcional, alejado de la formulación de un criterio de carácter demarcacionista [*Cfr*. Echeverría 1995, 65], hay que considerar a los contextos como estrechamente relacionados. Por otra parte, se presentan como elementos conceptualmente útiles para el estudio de la noción de práctica matemática.

3. Prácticas matemáticas

Dado el conjunto de todas las ciencias, la matemática es una clase de éstas tal que cada uno de sus elementos posee un dominio propio. En efecto, tomemos dicha clase como integrada por disciplinas (en las que se incluyen una o más teorías) cada una de las cuales posee su propio dominio de objetos, que suele ser conocido como un sistema abstracto. En ello se presenta una diferencia fundamental con respecto a otras ciencias, al menos considerando una diferencia de grado de abstracción; a este respecto, determinadas teorías físicas versan sobre sistemas abstractos, pero cuando el grado de abstracción es suficientemente alto se habla ya de 'física matemática', 'física teórica', etc. Ahora bien, especifiquemos en qué consiste un sistema abstracto. Se parte de un dominio no vacío, cuya existencia se considera independiente de la voluntad humana [*Cfr.* Nepomuceno [1995, 204]], al margen de consideraciones ontológicas que puedan hacerse acerca de ello, es decir, sin importar cuál sea la naturaleza de tal existencia.

Cuando contamos con una serie de relaciones entre los elementos del dominio en cuestión, estamos ante un sistema: $\Sigma = \langle S, R \rangle$, donde $S \neq \emptyset$, *mientras que* R es un conjunto de relaciones entre elementos de S; ahora bien, si los elementos de S se conocen únicamente mediante el estudio de R, entonces Σ es un sistema abstracto. Por otra parte, hecho así el estudio de R, se puede considerar el dominio S pero también otro cualquiera S' con tal que se cumplan todas las relaciones; sea, por ejemplo, el conjunto de relaciones que definen el conjunto de los números naturales,[3] podemos considerar que éstas definen un sistema abstracto y que los siguientes dominios, en los que se dan dichas relaciones, especifican modelos del sistema:

$$N^* = \{0, 10, 20, 30, ...\}, \; N^{**} = \{0, 100, 200, 300, ...\},$$

donde *sucesor de* 10 = 20, *sucesor de* 100 = 200, y así sucesivamente.

Los sistemas que interesan a la matemática no aparecen de un modo arbitrario. Antes bien, los sistemas se introducen por métodos que podemos agrupar en procedimientos *genéticos* y en procedimientos *axiomáticos*. Cada uno de estos tipos no es excluyente, es decir, en el curso del desarrollo de una determinada teoría podemos hallar que un sistema introducido genéticamente pasa a ser justificado más tarde axiomáticamente. Los procedimientos genéticos no tienen un carácter unitario. Genéticamente se puede introducir, por ejemplo, el sistema de los números naturales, tomando como existente el conjunto de dichos números, o de entidades que cumplen las relaciones características de los naturales, como en el ejemplo precedente. Asimismo el conjunto de los números complejos, a partir del de los números reales mediante potencia cartesiana de éstos. Axiomáticamente, en cambio, se han de proponer un conjunto de condiciones: se establece un determinado número de proposiciones (o esquemas proposicionales: cada esquema daría lugar a un número de proposiciones concretas), llamadas *axiomas*

3. Dado que cualquier función se puede presentar como una relación, la función 'sucesor' es expresable como relación, la existencia de un cero apelando a esta relación, etc..

o *postulados*, las cuales expresan las condiciones que ha de cumplir el sistema de objetos en cuestión. Así pues, los axiomas son proposiciones verdaderas enunciadas en un lenguaje específico de la práctica de que se trate; también se introducen definiciones, que regulan el uso de términos o enuncian otras verdades del sistema; por último, mediante una lógica asociada (coetánea, aunque no siempre explícita) se deducen nuevas verdades, a las que comúnmente se les conoce como *lemas*, *teoremas* o *corolarios*.

Las prácticas generan una o diversas teorías, incluso se podría hablar de ramas cuya caracterización quedaría establecida por identificación de la práctica que las sustenta. Ahora bien, la noción de práctica matemática se obtiene a partir de un examen de los distintos contextos de la investigación científica antes citados, o bien considerando cada práctica como un proceso en el cual se distinguen, al menos, tres momentos:[4]

Creación. En este momento se trata de una actividad tendente a obtener soluciones a problemas (teóricos) que estaban pendientes.

Justificación. En este momento se intentan fundamentar, ordenar y precisar las proposiciones de la teoría de que se trate.

Instauración doctrinal. Es el momento en que la teoría, con un grado mínimo de elaboración, se convierte en producto que se trata de introducir en determinado 'mercado'.

El último momento puede ser del mayor interés, tal vez determinante de la investigación posterior, porque, por ejemplo, la aportación de recursos a la investigación básica dependa de la pujanza de una teoría en su mercado, es decir, de la recepción que se tenga de la misma en los organismos correspondientes. Sin embargo, la intervención de múltiples factores externos recomienda que nuestra atención se centre más en la creación y en la justificación.

4. La lógica subyacente

Asociar el primer momento con procedimientos genéticos y el segundo con los axiomáticos es una simplificación, aunque puede servir como una primera aproximación al problema de cómo se instituye definitivamente una práctica matemática. Sin embargo, la búsqueda de técnicas para la solución de problemas es un proceso dinámico y complejo. Así, por ejemplo, la clase de problemas que da lugar a

4. *Cfr.* Martínez-Freire [1996, 270]. El punto de vista previo se presenta más desarrollado en Nepomuceno [1995, 204 *ss*].

diversos métodos de análisis que culminaría en los descubrimientos de Leibniz y Newton son la construcción de las tangentes a las curvas, la obtención de máximos y mínimos y el cálculo de cuadraturas [*Cfr*. Collete [1993, II 101] y de Lorenzo [1994, XXIII]], pero la generalización del concepto de función y el uso de técnicas en cierto modo contradictorias, el programa de aritmetización, pusieron de manifiesto la necesidad de una mayor comprensión de la naturaleza de los números reales [*Cfr*. Fernández Margarit [1995, 68]].

Una mejor clarificación del proceso vendrá dada por la revelación del tipo de lógica que subyace y si ésta permanece invariable en cada momento. Denominaremos *lógica subyacente* a la teoría de la deducción asociada, aunque no siempre puesta de manifiesto explícitamente, a una práctica matemática; un sistema formal de lógica constituye un modelo de lógica subyacente, independientemente de su presentación como sistema axiomático o como sistema deductivo natural.[5]

Al comenzar una práctica matemática ya tenemos una lógica subyacente, con independencia de las trabas y dificultades que se presenten para reconocerla. Una práctica que da lugar a una teoría T vendrá explicada por el modo en que se han obtenido las proposiciones propias de la teoría. Si T es una teoría cuyo lenguaje es $L(T)$, dado que $T \subset L(T)$ y $T \neq L(T)$ (al menos una proposición enunciada en $L(T)$ no pertenece a T, pues se aspira a la consistencia), ¿Cuál ha sido el criterio para seleccionar las proposiciones de $L(T)$ con objeto de obtener el conjunto T?[6] La respuesta a esta cuestión conlleva una buena dosis de clarificación del proceso que nos ocupa.

Situándonos en el primer momento, el de creación, al buscar la solución a un problema pendiente, se hallarán 'elementos de juicio' para seleccionar proposiciones e incorporarlas a la teoría, aunque ello se haga de una manera provisional, hasta una posterior revisión en la que se desechen algunas de ellas. La diversidad de tales elementos de juicio se corresponde con las distintas clases de proposiciones; éstas pueden expresar las propiedades más básicas del sistema de objetos en cuestión, o aparecer como postulados, mientras que otras serán definiciones, otras serán

5. Seguimos la noción establecida en Nepomuceno [1995, 204]. El término 'modelo' se utiliza en *Teoría de modelos* para designar estructuras que mantienen (o no) cierta relación con conjuntos de fórmulas de un lenguaje formal, más concretamente, que pueden satisfacer tales fórmulas; en nuestro caso, respetando este sentido, entendemos que los principios y reglas lógicas (en el contexto de que se trate) son representables en el sistema formal correspondiente, el cual vendrá dado por un lenguaje formal, un mecanismo deductivo y una semántica general.

6. La adopción de $L(T)$ no es instantánea; el investigador no es un mero usuario del lenguaje científico, en cierto modo lo crea siguiendo ciertas pautas explicables desde un punto de vista lógico. Para mayor facilidad hacemos abstracción de ello.

teoremas cuyas tesis son justificables mediante una cadena de razonamientos, etc.; también se ha de tener en cuenta que este momento se corresponde aproximadamente con los dos primeros contextos indicados. Ahora bien, aquellos elementos de juicio pertenecerán a lo que se puede llamar el *sentido común* de los investigadores de que se trate y su descripción puede ser análoga a la de las inferencias propias del sentido común sin más.

La lógica subyacente, en un buen número de casos, ha sido un sistema de lógica clásica, de primer orden con identidad o de segundo orden (tal vez débil, o con semántica no estándar, etc.) ¿Acaso una lógica deductiva por excelencia puede dar cuenta del momento de creación? Para mayor simplicidad, supongamos que analizamos una teoría en la que se ha trabajado axiomáticamente, en ella las definiciones y los postulados no se han deducido (en el sentido de la correspondiente lógica subyacente) de premisas más básicas; más aún, no hay una lógica del descubrimiento en plena coincidencia con la lógica subyacente. No obstante, como ya hemos indicado, cada práctica matemática, desde un primer momento, tiene asociada una lógica subyacente y, por tanto, una noción precisa de deducción.

En un sistema formal, una fórmula es consecuencia inmediata de otras si a partir de éstas se obtiene la primera por aplicación de una regla de transformación; una deducción no es más que una sucesión finita ordenada de fórmulas del lenguaje del sistema de que se trate, de tal manera que cada una de las fórmulas de la sucesión es un axioma (lógico), o consecuencia inmediata de una o varias fórmulas precedentes. Si Γ es un conjunto de fórmulas, la fórmula φ es demostrable en el sistema formal a partir de Γ si existe una deducción tal que cada fórmula de la deducción pertenece a Γ, o es un axioma lógico o consecuencia inmediata de fórmulas precedentes y la última fórmula de la deducción es φ, lo que se representa como $\Gamma \vdash \varphi$.[7]

Los problemas para los cuales se busca solución en el momento de creación motivan la aparición de un conjunto de proposiciones, que podemos denominar *conjunto de requisitos previos*, y constituye el núcleo inicial de la teoría. Sea N el conjunto de requisitos previos de una teoría T; en el trabajo de investigación se adoptan una serie de reglas que permiten obtener conclusiones a partir de los requisitos previos y de proposiciones del conjunto $P = P^1 \cup P^2 \cup \ldots \cup P^n$, tal que para cada

7. Podemos decir que $\vdash$ representa una relación de 'consecuencia' propia del sistema de lógica en cuestión (lógica subyacente). Destaca su carácter monótono: una vez establecida la relación, ésta no varía si se amplía el conjunto inicial; es decir, si $\Gamma \vdash \varphi$, entonces, $\Gamma \cup \Delta \vdash \varphi$, para cualquier conjunto no vacío .

$i \leq n \leq \aleph$, si $p \in P^i$, entonces p no es falsa, o bien p es una proposición posible[8] y, además, $\neg p \notin N \cup P^{i-1}$. Cada uno puede ser llamado *conjunto i de proposiciones relevantes*. Naturalmente, tanto N como P están contenidos en el lenguaje de la teoría $L(T)$. Más concretamente, las reglas —a cuyo conjunto llamaremos R— tienen la forma $\langle \alpha, \Gamma, \beta \rangle$ donde $a \in N \cup P^j$, $\Gamma \subseteq P$ y $\{\alpha\} \cup \Gamma \vdash \beta$. En cada momento de su desarrollo la teoría no es más que una extensión del núcleo inicial referido; sea éste $Ext(N(T))$, una demostración en $Ext(N(T))$ es una sucesión finita ordenada de proposiciones p^1, p^2, ..., p^n, tal que para cada $i \leq n$, vale al menos una de las siguientes condiciones:

1. $p^i \in N \cup P^j$, para $j \geq 1$,
2. p^i es un axioma lógico (o una instancia de un axioma lógico),
3. p^i es consecuencia de alguna (o algunas) proposiciones precedentes, según la lógica subyacente, es decir existen otras proposiciones $p^k, p^{k+1}, ..., p^m$, tales que $m \neq i$ y $\{p^k, p^{k+1}, ..., p^m\} \vdash p^i$.
4. existe $r \in R$ tal que $r = \langle p^s, \Gamma, p^i \rangle$ y $s < i$.

Los conjuntos de proposiciones relevantes no se forman arbitrariamente, pero los criterios por los cuales se establecen se integrarían en una 'lógica del descubrimiento', que ha de contar con todo tipo de inferencias —analogía, ejemplos, inducciones, etc.—, aunque no existe, por así decir, un algoritmo descubridor.[9] En todo caso se pueden fijar unas condiciones mínimas que se han de satisfacer en su construcción, además de las señaladas, las cuales se pueden agrupar en condiciones *sintácticas* y en condiciones *semánticas*. Las primeras aluden a

8. Para establecer modelos 'lógicos' de este tipo de procesos pueden ser útiles los sistemas de lógica modal, los de lógica parcial y los de lógica de la omisión (o *default logic*), incluso, a veces, de las lógicas de la relevancia. En este trabajo hacemos uso de nociones conocidas: '*p* no es falsa' debe entenderse en el sentido de las lógicas parciales (además de 'verdadero' y 'falso', se construyen tablas con un 'no valor' o 'valor nulo') o de las lógicas trivalentes (considerando tres valores de verdad, ya sea con las tablas de Kleene, Bocvar, etc.), mientras que '*p* es una proposición posible' debe entenderse en el sentido establecido en los sistemas de lógica modal, cuya semántica es la de tipo kripkeano de 'mundos posibles', aunque también puede tener un sentido epistémico: '*p* es posible' tendría entonces el sentido de ser consistente con lo que es comúnmente conocido. Son textos fundamentales Huertas [1994], Kleene [1974] y Hughes-Cresswell [1968], respectivamente.
9. *Cfr.* M. C. Hernández [1992, 17]; en esta obra su autora viene a sostener una noción de práctica o actividad matemática que podría equipararse al aquí considerado más arriba, como los momentos de creación y de justificación, lo que sustenta en un profundo conocimiento de la historia de la matemática griega, y a partir de los trabajos de Euclides y de Arquímedes, señala que se ponen "en evidencia dos maneras de concebir la actividad matemática: 1) como construcción, como creación, como hallazgo, como avance del conocimiento; 2) como ordenación, organización, axiomatización de lo ya logrado".

proposiciones posibles a partir de otras precedentes siguiendo criterios meramente sintácticos; las segundas, en cambio, tienen en cuenta criterios semánticos. Es decir, para cada $i \geq 1$, $p \in P^{i+1}$ si existe $q \in P^i$ tal que p se obtiene de q de acuerdo con reglas del tipo q se puede usar para demostrar p, o bien q y p comparten alguna unidad de información, que son, respectivamente, de carácter sintáctico y de carácter semántico.[10]

5. Fundamentación como parte de la práctica matemática

El momento de justificación cubre una buena parte del contexto homónimo y, en el caso de la matemática, justificar una teoría es una primera forma de fundamentarla. Para responder a la cuestión de si las tareas de fundamento se incluyen en (o se instituyen como) determinada práctica matemática, concretamos el sentido conferido a este término. Una fundamentación de una teoría no es más que la reconstrucción de sus principios, verdades o proposiciones que la constituyen, o bien es una operación de reducción, entendiendo por tal la explicación de los conceptos básicos de la teoría apelando a los de otra (que es fundamento de la primera) [*Cfr.* Shapiro [1991, 26]]. Muchas axiomatizaciones se encuadran en la primera de estas formas; las definiciones de números enteros como pares de naturales, de racionales como pares de enteros, de reales como secuencias (de Cauchy) de racionales y de complejos como pares de reales, se encuadran en la segunda.

Los trabajos motivados por la gran crisis de la matemática clásica (finales del siglo XIX y principios del XX), en el ámbito de los fundamentos, se agruparon en las conocidas escuelas formalista, logicista e intuicionista. Los puntos de vista de las dos primeras aceptarían una lógica clásica como lógica subyacente, mientras que la tercera propone una lógica alternativa rechazando el principio de *tercer excluido*, por lo que aquéllas resultan más pertinentes en este contexto. Precisamente el método axiomático y la reducción han sido el estandarte que las ha identificado respectivamente; cualquiera de ellos es, en última instancia, un proceso que puede ser analizado en los términos antes propuestos. En efecto, se trata ahora de un modo de ordenar el conjunto de las proposiciones de la teoría, para lo cual se tendrá en cuenta si se trata de requisitos previos o son de carácter relevante, cómo se han

10. Inspirado en los criterios de la lógica de la relevancia para ser premisas de una inferencia (relevante). Estos criterios (sintáctico y semántico) vendrán determinados por el lenguaje de que se trate (véase nota número 8).

demostrado, etc. Así pues, en la medida en que se reconstruye axiomáticamente una teoría, se reduce, o se combinan ambos métodos —teoría surgida primariamente para la solución de algún problema—, se está en una práctica matemática.

La lógica subyacente se hace ahora más explícita. A este respecto, una teoría T, una vez que ha sido fundamentada, viene dada por un conjunto de axiomas, integrado por proposiciones del núcleo inicial o de los requisitos previos u obtenidas a partir de ellos por demostración según las reglas antes citadas, el sistema de lógica —un lenguaje, propio de T, y un sistema deductivo (el mecanismo que explica $\vdash$)—, y la interpretación que se da de los términos (no lógicos) del lenguaje de T. Es decir, se define entonces T de la siguiente manera:

$$T = \{\varphi \in L(T): \Sigma \vdash \varphi \quad \& \ \Sigma \subseteq N \cup P\};$$

donde Σ es el conjunto de los axiomas, obtenido a partir de los requisitos previos y las proposiciones relevantes, N y P, respectivamente.

Los *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert son un claro ejemplo de fundamento axiomático de la geometría.[11] En efecto, si bien se contaba con un *corpus* conocido, por lo que respecta a los *Elementos* de Euclides, a pesar de todas sus innegables virtudes, contienen ciertos defectos, por lo que más bien se pueden considerar como una teoría elaborada susceptible de fundamentación; los momentos de creación y justificación (en primera instancia) se dieron en la propia presentación euclídea y en la serie de trabajos posteriores que discutían ciertas cuestiones, como el problema del quinto postulado, pero no había concluido: Riemann, Lobachevski y Peano, entre otros, son autores algunos de cuyos trabajos se incluyen en momentos de justificación. Sin embargo, será Hilbert quien proponga una justificación más definitiva, es decir, una fundamentación. En efecto, partiendo de ciertas nociones indefinidas (punto, recta y plano), de algunos conceptos (como la relación 'estar sobre' que se da entre punto y recta y entre punto y plano, 'entre', etc.) y de veinte axiomas (agrupados en los de pertenencia, de orden, de congruencia y de continuidad además del de las paralelas), se deduce toda la geometría euclídea. Asimismo, mediante ciertas modificaciones (con un abandono selectivo de determinados axiomas) se puede obtener cada vez una geometría distinta aunque coherente (la de Lobachevski, no arquimediana, etc.).

11 *Cfr.* Collette [1993 II, 580]. El siguiente resumen sigue básicamente este texto.

Así pues, podemos afirmar que el trabajo de Hilbert constituye un hito en la fundamentación lógica de una teoría (más bien de varias, que integran una disciplina, la geometría tomada en su conjunto). A partir de la definición dada más arriba, cada una de las geometrías (justificadas definitivamente con el método de Hilbert) es una teoría que difiere de las otras porque el conjunto Σ seleccionado es distinto; simbólicamente:

$$T = \{\varphi \in L(T)\text{: } \Sigma^i \vdash \varphi \quad \& \ \Sigma^i \subseteq N \cup P,\ i \geq 1\};$$

para cada i, j tales que $i \neq j$, tendremos $T^i \neq T^j$, dado que $\Sigma^i \neq \Sigma^j$, aunque obviamente $\Sigma^i \cap \Sigma^j \neq \varnothing$, en la medida en que las modificaciones del conjunto de los axiomas no implican un abandono total de éstos. La opción entre un conjunto de axiomas u otro no será arbitraria, dado que la teoría de que se trate ya está creada y posiblemente sus aspectos más controvertidos han sido sometidos a discusión; tal es el caso, por ejemplo, del axioma de elección propuesto por Zermelo en 1904 en el ámbito de la teoría de conjuntos.

Por otra parte, en toda práctica matemática hay aspectos éticos, políticos y sociológicos [*Cfr*. Wang [1961, 148]]. Además de los estrictamente científicos, aspectos que aparecen en el contexto de aplicación y en los momentos de justificación y, sobre todo, de instauración doctrinal más arriba mencionados, los cuales habrían de ser tenidos en cuenta en las valoraciones de este tipo de tareas. Cuando el fundamento se propone como reducción podemos distinguir un fundamentismo fuerte de otro débil. Según el primero, la fundamentación consiste en hallar las últimas bases para la creencia en las tesis de la teoría (lo que puede obedecer a exigencias de mercado u otras), mientras que para el segundo es posible una reconstrucción de la teoría que ofrezca la mayor certeza posible (aunque no se trate de las leyes últimas).

La anterior noción es una formulación acorde con este punto de vista más moderado y a partir de él se puede dar una respuesta a la cuestión de qué justificación hay para desarrollar esta o aquella particular rama de la matemática (o disciplina, considerando como tal las tareas de fundamento). En efecto, en el desarrollo de las teorías, podemos hallar momentos en que la comunidad científica considere deseable la reconstrucción de cada rama de las matemáticas sobre una base completamente segura, de tal manera que goce de la máxima inmunidad, por así decir, a toda duda racional; ello por determinados intereses relacionados con los aspectos referidos. De hecho, los programas de fundamento han sido motores de la investigación en ciertos ámbitos durante varias décadas, como en lógica matemática, constituyendo tendencias que, aunque hoy no tengan el mismo auge, han perdurado más allá de las propias corrientes; éste sería el caso de cierto 'formologicismo' consistente en postular un reduccionismo de diversas ramas de matemática clásica a una misma teoría asociada a un sistema de lógica, el cual se considera un genuino representante de lógica subyacente.

Angel Nepomuceno Fernández. Profesor Titular de Lógica y Filosofía de la Ciencia, Universidad de Sevilla. Algunas publicaciones: "A formal approach to nominalization of predicates", en Carlos Martín (ed.) *Current Issues in Mathematical Linguistics*, North-Holland, Amsterdam 1994, 163-170. "Un estudio formal de aspectos relevantes de estructuras informativas", *Agora* **14**$_2$ (1995) 23-30. "Lógica y práctica matemática", *Mathesis* **11** (1995) 201-216. *Lógica formal. Orígenes, métodos y aplicaciones* (Editor y autor del capítulo "Lógica formal elemental", 37-65), Kronos, Sevilla 1995. "Interpretación no estándar de la lógica de segundo orden", *Actas del II Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España*, Bellaterra 1997, 486-489.

Referencias

COLLETTE, Jean Paul 1993. *Historia de las matemáticas*. Madrid: Siglo XXI Editores, S. A. (Vols. I, II). Trad. Alfonso Casal.

DE LORENZO, Javier 1994. Estudio preliminar. *Análisis infinitesimal de G. W. Leibniz*. Madrid: Tecnos.

ECHEVERRIA, Javier 1995. *Filosofía de la Ciencia*. Madrid: Akal.

FERNANDEZ MARGARIT, Alejandro 1995. "Teoría de conjuntos". *Lógica formal. Orígenes, métodos y aplicaciones*. A. Nepomuceno (Ed.). Sevilla: Kronos, pp. 67-106.

HERNANDEZ, María del Carmen 1992. *Lógica y racionalidad del descubrimiento (Acerca del* Método *de Arquímedes)*. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla.

HUGHES, G. E., CRESSWELL, M. J. 1968. *An introduction to modal logic*. London: Methuen.

HUERTAS, María Antonia 1995. *Modal logic (of predicates) and (partial and heterogeneous) non-classical logic*. Departament de Lògica, Història i Filosofia de la Ciència. Universitat de Barcelona.

KLEENE, Stephen 1974. *Introducción a la metamatemática*. Madrid: Tecnos. Trad. Manuel Garrido.

MARTINEZ FREIRE, Pascual 1997. "Externalismo sistémico como metodología y como ontología". *Actas del II Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España*. U. A. B., Bellaterra, pp. 275-279.

NEPOMUCENO, Angel 1995. "Lógica y práctica matemática". *Mathesis* **11**: 201-216.

SHAPIRO, Stewart 1991. *Foundation whithout Foundationalism. A case for Second-Order Logic*. Oxford: Clarendon Press.

WANG, Hao 1961. "What is Mathematical Practice? *New directions in the philosophy of mathematics*, Thomas Tymoczko (Ed.) 1986, Boston, Birkhäuser, pp. 129-152.