Mathesis 11 (1995) 311-320
Impreso en México. Derechos reservados © 1995 por UNAM. ISSN 0185-6200

Consideraciones comparativas sobre nuevas investigaciones geométricas*

Felix Klein[1]

[Programa para el ingreso a la Facultad Filosófica y al Senado de la *k. Friedrich-Alexanders-Universität* en Erlangen. Erlangen, A. Deichert. 1872.]

Entre los logros alcanzados los últimos cincuenta años en el ámbito de la Geometría, el desarrollo de la *Geometría Proyectiva* ocupa el primer lugar. Parecía al principio que las llamadas relaciones métricas no podían ser estudiadas, ya que al ser proyectadas no se mantenían invariantes; sin embargo, recientemente se aprendió también a estudiarlas desde el punto de vista proyectivo, de modo que ahora el método proyectivo abarca la Geometría en su totalidad. Las propiedades métricas ya no aparecen en ella como propiedades de los objetos espaciales en sí, sino como relaciones de los mismos con una construcción fundamental, la esfera al infinito.[2]

---

* (Traducción de Carlos Prieto de Castro, Instituto de Matemáticas, UNAM, México a iniciativa del Dr. Eli de Gortari). El texto reproducido aquí corresponde a la última versión redactada por el mismo Klein del "Programa de Erlangen": ésta está incluida en Felix Klein: *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Band 1, Berlin 1921, S. 460-497. La impresión de esta traducción se logró gracias a la amable autorización de Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York. Klein proveyó al texto del "Programa de Erlangen" en diversas ocasiones, de comentarios: éstos también se reproducen aquí. Además de ellos hace Klein observaciones de carácter autobiográfico en este volumen de sus obras completas, p. 411-414, antecediendo su "Programa de Erlangen".

1. [El programa de Erlangen lo publiqué en el año 1893 en el Vol. 43 de los *Math. Annalen* provisto de una serie de observaciones mías, las cuales adoptaré sin cambio en lo que sigue. Sólo aquellas de nueva inclusión las distinguiré encerrándolas en paréntesis cuadrados, y a las cuales, para diferenciarlas se, les agrega el año 1893. K.]
2. *Cf.* Nota I del apéndice.

Al comparar el punto de vista que poco a poco se va obteniendo así de los objetos espaciales con las ideas de la Geometría ordinaria (elemental), surge la pregunta acerca de un principio general, según el cual se pueden perfeccionar ambos métodos. Esta pregunta parece ser más importante, en cuanto junto a la Geometría elemental y la Geometría proyectiva, aunque poco desarrolladas, se coloca una serie de diversos métodos, a los que hay que conceder el derecho a una existencia autónoma semejante. Entre ellos están la Geometría de los radios recíprocos, la Geometría de las deformaciones racionales, etc., que deben ser mencionados y representados en esa serie.

Si nos proponemos en lo que sigue llevar a cabo el planteamiento de tal principio, no tenemos, en realidad, que desarrollar nuevas ideas, sino solamente delimitar de manera clara y precisa, lo que ya ha sido seguramente pensado por algunos. Parecía, sin embargo, muy justo publicar tales consideraciones recopilatorias, como la Geometría, que aunque constituye una unidad en su contenido, debido al rápido desarrollo que ha tenido en los últimos años se ha dispersado en una serie de disciplinas casi separadas,[3] que van progresando de una forma bastante independiente unas de otras. Había también la intención especial de evidenciar métodos y puntos de vista que habían sido desarrollados por Lie y por mí en trabajos recientes. Estos trabajos de ambos, habiéndose también referido a varios temas, coincidentemente conducen a la consideración general expresada aquí, de modo que había una cierta necesidad de exponerla y con ello caracterizar los trabajos en cuestión según contenido y tendencia.

Si bien hemos hablado hasta ahora de investigaciones geométricas, hemos de entender que entre ellas se encuentran estudios sobre variedades arbitrariamente extendidas, que, quitando la idea espacial de ellas —no esencial para la consideración puramente matemática,[4] han surgido de la Geometría.[5] Hay en el estudio de las variedades tantos tipos diferentes como en la Geometría, y es válido, también como en la Geometría, hacer resaltar las analogías y las diferencias de las investigaciones realizadas independientemente. Visto de manera abstracta, sólo sería necesario en lo que sigue hablar sencillamente de variedades múltiplemente extendidas;[6] pero la restricción a las ideas espaciales más usuales permite una discusión más simple y comprensible. Partiendo de la consideración de los objetos geométricos y de-

3. *Cf.* Nota II.
4. *Cf.* Nota III.
5. *Cf.* Nota IV.
6. N. de T. En lenguaje moderno 'múltiplemente extendida' significa 'de varias dimensiones'.

sarrollando en ellos como ejemplo las ideas generales, seguimos el curso que la Ciencia en su evolución ha tomado y que usualmente es el más ventajoso para usarse como base de la presentación.

Una presentación provisional del contenido que adelante se discute no es aquí posible hacerla, ya que éste no permite una forma más concisa;[7] los títulos de las secciones indicarán el desarrollo general de las ideas. Al final incluí una serie de notas en las cuales extendí el desarrollo de ciertos puntos que, ya sea, me parecieron útiles al interés general de la discusión, o en los cuales me esforcé por delimitar el punto de vista matemático abstracto de otros puntos de vista relacionados, que es decisivo para las discusiones del texto.

1. Grupos de transformaciones espaciales: Grupo principal. Planteamiento de un problema general

El concepto más esencial, necesario para las discusiones siguientes, es el de *grupo* de transformaciones espaciales.

Cualquier número de transformaciones de un espacio[8] dan, al componerlas, nuevamente una transformación. Si una cierta colección de transformaciones dadas tiene la propiedad de que cada transformación obtenida de la composición de ellas pertenece nuevamente a tal colección, entonces se llamará esa colección *grupo de transformaciones*.[9]

Un ejemplo de un grupo de transformaciones está constituido por todos los movimientos (cada movimiento, considerado como una operación efectuada en todo el espacio. Otro grupo contenido en el anterior es el de las rotaciones alrededor de un punto.[10] Un grupo que, inver-

7. Esta forma concisa es una falla en la presentación dada en lo que sigue, y temo que dificulte bastante la comprensión. Esto sólo podría haber sido solucionado haciendo una discusión más extensa en la que cada una de las teorías que aquí sólo se tocan levemente, se hubiera desarrollado más ampliamente.

8. Pensamos siempre en transformaciones que afectan simultáneamente la totalidad del espacio y por eso simplemente hablamos de transformaciones del espacio. Las transformaciones, como por ejemplo las duales, pueden introducir otros elementos en vez de puntos, esto no se distingue en el texto.

9. El concepto y la notación han sido tomados de la *Teoría de la sustitución*, en la cual, en vez de transformaciones de un dominio continuo, aparecen permutaciones de un número finito de magnitudes discretas. [Esta definición requiere aún ser completada. En los grupos del texto se hace la suposición tácita de que junto con cada operación contenida en ellos también está contenida su inversa; esto, sin embargo, como primeramente Lie lo hizo ver, en el caso de un número infinito de operaciones no es de ninguna manera consecuencia del concepto de grupo como tal, esta hipótesis debe ser agregada explícitamente a la definición dada en el texto. 1893]

10. Camille Jordan enlistó todos los grupos contenidos en el grupo de movimientos. *Sur les groupes de mouvements*. Annali di Matematica, 2, (1869).

samente, incluye al grupo de los movimientos, puede concebirse como la totalidad de las colineaciones. Por el contrario, la totalidad de las transformaciones duales no constituye un grupo —ya que dos transformaciones duales compuestas dan una colineación—, sin embargo se obtiene nuevamente un grupo al tomar todas las transformaciones duales junto con todas las colineales.[11]

Existen transformaciones espaciales que no modifican para nada las propiedades geométricas de objetos espaciales. Las propiedades geométricas son, por su definición, independientes de la posición que el objeto geométrico que se desea estudiar tenga en el espacio, o de su tamaño, incluso también del sentido[12] en el que estén acomodadas sus partes. Las propiedades de un objeto espacial permanecen así invariantes bajo todos los movimientos del espacio, bajo sus transformaciones de semejanza, bajo el proceso de reflexión, así como bajo todas las transformaciones que como composición de éstas se obtienen. A la totalidad de estas transformaciones la designamos como *grupo principal*[13] de transformaciones espaciales; *las transformaciones geométricas permanecen invariantes bajo las transformaciones del grupo principal*. También inversamente puede decirse: *Las propiedades geométricas están caracterizadas por su invariabilidad bajo las transformaciones del grupo principal*. Si se considera por un momento al espacio como inmóvil, como una variedad rígida, entonces tiene cada figura un interés individual; de las propiedades que como individuo tiene, son solamente las propiamente geométricas las que permanecen invariantes bajo las transformaciones del grupo principal. Esta idea formulada aquí de manera poco precisa, se irá haciendo más nítida en el curso de la discusión.

Quitemos ahora la imagen sensible, matemáticamente inesencial, y contemplemos en el espacio sólo una variedad múltiplemente extendida; así, fijando la idea usual del punto como elemento del espacio, es una variedad triplemente extendida. En analogía con las transformaciones espaciales, hablaremos de las transformaciones de la variedad; también ellas constituyen *grupos*. Sólo que ya no es un grupo que, como el

11. Las transformaciones en un grupo de ninguna manera necesitan estar ordenadas en una secuencia continua, como tampoco será el caso en los grupos que se mencionan en el texto. Un grupo también lo constituye, por ejemplo, la secuencia finita de movimientos que hacen que un cuerpo regular se cubra a sí mismo, o la secuencia infinita, aunque discreta, que hace que una sinusoide se superponga a sí misma.
12. Por sentido entiendo aquí la propiedad de orden que funda la diferencia respecto de la figura simétrica (la imagen especular). Por su sentido se diferencian, por ejemplo, una rosca izquierda y una rosca derecha en un tornillo.
13. El que estas transformaciones formen un grupo es conceptualmente necesario.

del espacio, quede especificado por su significado; cada grupo tiene igual derecho que cualquier otro. Como generalización de la Geometría surge así el siguiente problema general:

Sea dada una variedad y un grupo de transformaciones de ella; investíguense los objetos pertenecientes a la variedad desde el punto de vista de aquellas propiedades que permanecen invariantes bajo las transformaciones del grupo.

Apegándose a la terminología moderna, que suele referirse solamente a un grupo determinado, el grupo de las deformaciones lineales, puede también decirse:

Sea dada una variedad y un grupo de transformaciones de ella. Desarróllese la teoría de invariantes[14] *relativa al grupo.*

Este es el problema general, que no sólo comprende a la Geometría usual, sino también a los nuevos métodos geométricos aquí mencionados y a las diversas maneras de estudiar variedades arbitrariamente extendidas. Lo que conviene resaltar especialmente es la arbitrariedad con la que se elige el grupo de transformaciones, y con ello la igualdad de derechos que en este sentido tienen las consideraciones subordinadas a la exigencia general.

2. Adjunción de grupos de transformaciones donde uno contiene al otro. Los diversos tipos de investigaciones geométricas y sus relaciones mutuas

Ya que las propiedades geométricas de los objetos espaciales permanecen invariantes bajo *todas* las transformaciones del grupo principal, resulta absurdo preguntarse por aquellas propiedades que no son invariantes más que bajo una parte de estas transformaciones. Este cuestionamiento se justifica, al menos desde el punto de vista *formal* si estudiamos los objetos espaciales en cuanto a su relación con elementos fijados de antemano.

14 [De ningún modo se piensa con esta expresión, ni aquí ni en lo que sigue, en la cuestión de los invariantes enteros racionales de alguna forma prefijada, respecto de los syzygies enteros racionales que entre ellos existen. Esta cuestión ya me era, por supuesto, bien conocida en 1872 durante mi correspondencia con Clebsch (quien primeramente publicó en 1871 su teoría de formas binarias). Sin embargo no me sentía atraído por ella de ninguna manera. Yo entendía por teoría de invariantes de un grupo simplemente a la teoría de las relaciones entre cualesquiera objetos dados, que permanecen invariantes bajo el grupo. Compárese también con la aclaración explícita en el párrafo 5 de mi segundo tratado sobre Geometría no Euclidiana. Por ejemplo, toda la Trigonometría plana y esférica, que de ninguna manera se agota con el esquema, pertenece, en este sentido, a la teoría de invariantes. K.]

Por ejemplo, consideremos, como en la Trigonometría esférica, los objetos del espacio con un punto distinguido. La primera cuestión es estudiar las propiedades invariantes bajo el grupo principal, ya no de los objetos espaciales en sí, sino del sistema que forman junto con el punto dado. Se puede plantear de otra forma: estudiar los objetos espaciales en sí respecto a aquellas propiedades que permanecen invariantes bajo las transformaciones del grupo principal que subsisten al suponer fijo el punto. En otras palabras: es lo mismo estudiar los objetos espaciales en cuanto al grupo principal y añadirles el punto dado, que añadirles el punto y estudiarlos en cuanto al grupo contenido en el grupo principal cuyas transformaciones dejan invariante al punto respectivo.

Este es un principio que en lo que sigue aplicaremos frecuentemente, por lo que deseamos formularlo aquí de manera general; digamos de la forma siguiente.

Sea una variedad y, para hacer el estudio, uno de sus grupos de transformaciones. Propóngase el problema de estudiar los objetos de la variedad con respecto a uno de ellos dado. *Se puede adjuntar este objeto al sistema, y preguntarse acerca del sistema extendido con respecto al grupo dado, —o se deja el sistema sin extender, y se restringe a las transformaciones tomadas como base del estudio, a aquéllas contenidas en el grupo dado y que dejan invariante al objeto dado (y que necesariamente forman un grupo).*

Ocupémonos ahora de la cuestión inversa a la planteada al principio del párrafo, que es inmediatamente comprensible. Nos preguntamos por aquellas propiedades de los objetos espaciales, que permanecen invariantes bajo un grupo de transformaciones que contiene al grupo principal. Cada propiedad que encontremos en un estudio tal será una propiedad geométrica del objeto en sí, mas el inverso no es válido. En el inverso entra en vigor el principio recién establecido, y el grupo principal juega el papel del grupo más pequeño. Así obtenemos:

Si se reemplaza el grupo principal por un grupo que lo contenga, entonces sólo se conserva una parte de las propiedades geométricas, las restantes ya no aparecen como propiedades intrínsecas de los objetos espaciales, sino como propiedades del sistema obtenidas adjuntando un objeto especial. Este objeto especial, en tanto que está, en general, determinado,[15] *está definido por la condición de que supo-*

15. Se genera un tal objeto, por ejemplo, aplicando las transformaciones del grupo principal a un elemento inicial cualquiera que por ninguna de las transformaciones del grupo dado vaya a dar a sí mismo. [El teorema del texto constituye sin lugar a dudas el meollo de todas las reflexiones de mi programa, y por lo mismo ha sido designado por

niéndolo fijo, las únicas transformaciones del grupo dado que son admisibles, son las del grupo principal.

En este teorema descansa la peculiaridad de las nuevas direcciones geométricas que aquí discutiremos, y su relación con el método elemental. Ellas se pueden caracterizar por el hecho de que fundamentan sus consideraciones en un grupo extendido de deformaciones espaciales en el lugar del grupo principal. Su relación mutua, en tanto que los grupos se contienen uno al otro, se determina a través de un teorema correspondiente. Lo mismo se tiene en relación con las diversas formas de tratar aquí variedades múltiplemente extendidas. Mostraremos ahora, en métodos concretos, en qué se convierten los teoremas generales tratados en este párrafo y el anterior al aplicarlos a objetos concretos.

---

otros autores más modernos como "Teorema de Adjunción". Sin embargo, resulta frecuentemente mal entendido, en el sentido de la siguiente esta al caso. Pensando solamente en invariantes racionales enteros, resp. syzygies, se nombra al teorema como una pura conjetura, o también se construyen casos, en los cuales, falsamente interpretado, no se cumple. Me refiero precisamente a lo que Cayley en la Sixth Memoir upon Quantics 1859 (Phil. Trans. 1859, Coll. Pap. Vol. II, pp. 560ff, en particular la observación final p. 592) desarrolló para el caso especial de la Geometría proyectiva y de la Geometría métrica elemental, y a lo que además ya Laguerre en 1853 en sus teoremas aparecidos en op. cit. p. 242-243 en forma más particular se refirió. Cayley anota al final de su tratado lo siguiente: "Metrical geometry is a part of descriptive geometry and descriptive geometry is all geometry and reciprocally". Deseo exponer esto aquí, por mi parte, en una versión que por su forma prosaica debería excluir cualquier forma de malentendido: Cada hecho de la geometría elemental puede describirse a través de relaciones entre coordenadas tetraédricas, en tanto se agregue cómo se representa la esfera en las coordenadas ya escogidas.

Quizás convenga agregar lo siguiente. La esfera con una sección cónica no degenerada es proyectiva, el sistema de coordenadas puede así ser elegido de tal forma que en sus planos a través de los ceros puede representarse como forma cuadrática ternaria con determinante distinto de cero. Elijamos en su lugar ahora, como ejemplo, uno de los planos al infinito C_3 con punta (la que será una W-curva, es decir, va a dar a sí misma por medio de un grupo de colineaciones con un parámetro). Todos los puntos del plano al infinito quedan fijos bajo G_4, que está dado por las siguientes fórmulas

$$x' = \lambda x + a,\ y' = \lambda y + b,\ z' = \lambda z + c$$

Si ahora fijamos a C_3 en su totalidad, tenemos un G_4 de colineaciones y podemos pensar en una geometría asociada. Si se desea integrar esta Geometría dentro de la Geometría proyectiva general, naturalmente no se puede adjuntar un plano al infinito arbitrario C_3 (dado por los ceros de una forma cúbica ternaria general). Más aún, se tiene que introducir dicha forma tan especializada, que al hacerla cero, represente un C_3 con punta. Esta última condición basta también porque todos los C_3 con punta están relacionados proyectivamente entre sí. Y de manera análoga en todos los otros casos que se le puedan a uno ocurrir. [K.]

3. La geometría proyectiva

Cada transformación del espacio que no pertenece al grupo principal puede ser utilizada para transladar propiedades de figuras conocidas a figuras nuevas. Así aprovechamos la Geometría del plano para la Geometría de las superficies que se pueden representar en el plano; así, mucho antes del surgimiento de la Geometría proyectiva propiamente dicha, se deducían propiedades de una figura dada a partir de propiedades de otra, deducidas a través de una proyección. Sin embargo, la Geometría proyectiva surgió primeramente, al acostumbrarse a considerar como enteramente idénticas la figura original y todas las que se obtienen por proyección, y al enunciar que la independencia de sus propiedades se pone en evidencia por las modificaciones producidas por la proyección. Aquí se tomó como base de consideraciones, en el sentido del párrafo 1, al *grupo de todas las transformaciones proyectivas*, y así se creó la diferencia entre Geometría proyectiva y ordinaria.

Para cada tipo de transformación del espacio puede imaginarse un tren de desarrollo análogo al delineado aquí; a esto regresaremos frecuentemente. En lo que se refiere a la Geometría proyectiva, este proceso toma dos direcciones. Una de ellas surge de admitir dentro del grupo de las transformaciones admisibles, transformaciones a través de *dualización*. Desde el punto de vista moderno ya no se consideran diferentes dos figuras correlacionadas dualmente, sino como una y la misma figura. La otra dirección consiste en extender el grupo dado de transformaciones colineales y duales admitiendo las llamadas transformaciones *imaginarias*. Esto requiere haber extendido el ámbito de los elementos propios del espacio admitiendo en él los elementos imaginarios —lo que corresponde plenamente a la admisión de las transformaciones imaginarias en el grupo básico y, consecuentemente, a la introducción de punto y plano como elementos del espacio—. No es éste el lugar para discutir la conveniencia de introducir elementos imaginarios, a través de lo cual se llega a hacer corresponder exactamente la teoría del espacio con el aspecto adoptado de las operaciones algebraicas. Por el contrario, hay que hacer hincapié en que la razón de esto yace en la consideración de operaciones algebraicas y no en el grupo de las transformaciones reales, ya que las colineaciones y las transformaciones duales reales forman un grupo, podemos introducir elementos del espacio imaginarios, aun cuando no partamos del punto de vista proyectivo, y lo hacemos, ya que en principio investigamos objetos algebraicos.

La manera como deben considerarse desde el punto de vista proyectivo las propiedades métricas queda determinada según el teorema general del párrafo anterior. Las propiedades métricas deben verse como relaciones proyectivas relativas a un objeto fundamental, la esfera imaginaria al infinito,[16] la cual tiene la propiedad de que sólo las transformaciones del grupo proyectivo, que también son transformaciones del grupo principal, la transforman en sí misma. Este teorema expresado de modo tan sencillo requiere aún de un complemento esencial, que corresponde a restringir las consideraciones habituales a los elementos (y las transformaciones) reales del espacio. Para ser consecuentes con este punto de vista, hay que añadir a la esfera, de manera explícita, todo el sistema de los elementos espaciales (puntos) reales: las propiedades en el sentido de la Geometría elemental que son proyectivas, son, ya sea propiedades de los objetos en sí o relaciones relativas a este sistema de elementos reales, o a la esfera o, finalmente, a ambos simultáneamente.

Puede ser recordado aquí cómo v. Staudt, en su Geometría de la posición (1847), construye la Geometría proyectiva, es decir, esa Geometría proyectiva que se restringe a la especificación del grupo de las transformaciones reales proyectivas y duales.[17]

Se sabe cómo él extrae sólo aquellos aspectos del material intuitivo ordinario, que se conservan bajo transformaciones proyectivas. Si se desea incluir en las consideraciones también propiedades métricas, entonces hay que introducirlas como relaciones relativas a la esfera al infinito. Este tren de ideas así completado es, para las consideraciones aquí presentadas, de una gran importancia, ya que es posible construir de manera semejante, la Geometría en el sentido de cada uno de los métodos que aún nos quedan por estudiar.

4. Correlación por medio de aplicación

Antes de continuar con la discusión de los métodos geométricos, que se colocan junto a la Geometría elemental y la proyectiva, podemos desarrollar en general algunas consideraciones, que en lo que sigue aparecerán constantemente, y para las cuales las teorías ya abordadas proveen un número suficiente de ejemplos. Es a éstas que éste y el siguiente párrafo se refieren

16. Esta concepción debe ser considerada como una de las más bellas obras de la escuela francesa, fue por primera vez a través de ella que se dio un contenido preciso a la división en propiedades de posición y propiedades de medida, que siempre gusta de colocarse a la punta de la Geometría proyectiva.
17. No es sino hasta en los *Beiträge zur Geometrie der Lage* que v. Staudt (1856) tomó como base al grupo más extendido que también incluye transformaciones imaginarias.

Supongamos que se estudia una variedad A tomando como base a un grupo B. Si por medio de una transformación arbitraria se lleva A a otra variedad A', el grupo B de transformaciones que llevan a A en sí misma, da origen a un grupo B' de transformaciones de A'. Es entonces un principio evidente: *que tratar a A tomando como base a B conduce a tratar a A' tomando como base a B'*, es decir, cada propiedad que tenga un objeto de A con respecto al grupo B, da una propiedad del correspondiente objeto de A' con respecto al grupo B'.

Si por ejemplo, hacemos que A sea una recta y B la triple infinidad de transformaciones lineales que la reproducen, entonces el estudio de A no es más que la nueva álgebra designada como la teoría de las formas binarias. Ahora podemos relacionar por proyección desde un punto la recta dada con una cónica plana A'. De las transformaciones lineales B de la recta en sí misma se obtienen las transformaciones lineales B' de la cónica en sí misma, es decir, transformaciones lineales del plano que aplican la cónica en sí misma.

Ahora bien, según el principio del párrafo 2.[18] es lo mismo estudiar la geometría de una cónica suponiéndola fija y considerando sólo las transformaciones lineales del plano que la aplican en sí misma, que estudiar la geometría de la cónica considerando todas las transformaciones lineales del plano y dejando a la cónica variar con ellas. Las propiedades así descubiertas en los sistemas de puntos de la cónica son, con ello, proyectivas en el sentido usual. Relacionando esto con el resultado anterior se obtiene:

La teoría de las formas binarias y la geometría de los sistemas de puntos de una cónica son lo mismo, es decir, a cada teorema binario le corresponde un teorema sobre tales sistemas de puntos e inversamente.[19]

Otro ejemplo para aclarar este tipo de consideraciones es el siguiente: si se relaciona una superficie de segundo grado con un plano por proyección estereográfica, aparece en la superficie un punto fundamental: el punto de proyección; en el plano son dos: las imágenes de las generatrices que pasan por el punto de proyección. Se ve inmediatamente que las transformaciones lineales del plano que no alteran los dos puntos fundamentales, se transforman por la aplicación en transformaciones lineales de la superficie de segundo grado que la aplican en sí misma sin alterar

18. Si se quiere, este principio se aplica aquí en una forma un poco más general.
19. En vez de la cónica en el plano puede introducirse con el mismo éxito una curva espacial de tercer orden, o incluso en n dimensiones algo correspondiente.

el punto de proyección. Se entiende como transformaciones lineales de la superficie en sí misma aquéllas que sufre la superficie cuando se ejercen transformaciones lineales del espacio, que aplican a la superficie en sí misma. Según esto el estudio proyectivo de un plano, dejando fijos dos puntos, y el estudio proyectivo de una superficie de segundo grado, dejando fijo un punto, son idénticos. El primero, siempre y cuando se admitan elementos imaginarios en la consideración, no es otra cosa que el estudio del plano en el sentido de la Geometría elemental, pues el grupo principal de transformaciones planas consiste, en efecto, de las transformaciones lineales que dejan fijo un par de puntos (los puntos cíclicos al infinito). Finalmente obtenemos así:

La Geometría elemental del plano y el estudio proyectivo de una superficie fijando un punto fundamental son idénticos.

Estos ejemplos pueden multiplicarse arbitrariamente;[20] los desarrollados aquí se eligieron en vista de que en lo que sigue tendremos oportunidad de retornar a ellos.

5. De la arbitrariedad en la elección del elemento del espacio. El principio de correlación de Hesse. La geometría lineal

Como elemento de la recta, del plano, del espacio, y en general de alguna variedad que se desea estudiar, puede tomarse en vez del punto, cualquier objeto contenido en la variedad: un grupo de puntos, o en caso dado, una curva o una superficie.[21] Como, a priori, no se ha determinado el número de parámetros arbitrarios de los que se hará depender este objeto, aparecen la recta, el plano, el espacio, etc., según el número de dimensiones con que el elemento escogido esté provisto. *Pero mientras tomemos como base del estudio geométrico al mismo grupo de transformaciones, no se modifica en nada el contenido de la Geometría*, es decir, cada teorema obtenido al tomar un cierto elemento del espacio, es igualmente un teorema al tomar cualquier otro; sólo varía el orden y la interrelación de los teoremas.

Lo esencial es, pues, el grupo de transformaciones; el número de dimensiones que deseamos que tenga la variedad aparece como algo secundario.

La interrelación de esta observación con el principio del párrafo anterior da una serie de bellas aplicaciones, de las cuales podremos desarrollar aquí

20. Para otros ejemplos, así como, en particular, para la extensión a un mayor número de dimensiones, refiero a uno de mis trabajos: *Über Liniengeometrie und metrische Geometrie*, Math. Annalen, Bd. 5; y a otros trabajos de Lie que vamos a citar adelante.
21. *Cf.* Nota III.

algunos, ya que estos ejemplos representan el sentido de consideraciones generales de una mejor manera que largas discusiones.

La Geometría proyectiva en la recta (la teoría de las formas binarias) es, según el párrafo anterior, equivalente a la Geometría proyectiva sobre las cónicas. En estas últimas consideramos en vez de un punto una pareja de puntos como elemento. La totalidad de las parejas de puntos puede hacerse corresponder con la totalidad de las rectas del plano, asociándole a cada recta la pareja de puntos en los que corta a la cónica. A través de esta aplicación van a dar las transformaciones lineales de la cónica en sí misma a las transformaciones lineales del plano (visto como consistente de rectas) que dejan invariante a la cónica. Es así pues, lo mismo, según el párrafo 2., considerar el grupo consistente de estas últimas transformaciones, o la totalidad de las transformaciones lineales del plano añadiendo la cónica a los objetos del plano que se desee estudiar. Compendiando todo esto obtenemos:

La teoría de las formas binarias y la geometría proyectiva del plano, fijando una cónica, son equivalentes.

Ya que, finalmente, la Geometría proyectiva del plano fijando una cónica coincide con la Geometría métrica proyectiva que puede ser establecida en el plano sobre una cónica[22] podemos así también decir:

La teoría de las formas binarias y la Geometría métrica proyectiva general del plano son lo mismo.

En lugar de la cónica en el plano podemos tomar en las consideraciones anteriores una curva de tercer orden en el espacio, etc., pero esto no lo desarrollaremos. La conexión aquí expuesta entre la Geometría del plano, o más aún, del espacio o de una variedad arbitrariamente extendida coincide esencialmente con el principio de correlación propuesto por Hesse (Borchardts Journal, 66 (1866)).

Un ejemplo del mismo estilo lo da la Geometría proyectiva del espacio, o expresado de otra forma, la teoría de las formas cuaternarias. Si se considera la recta como un elemento del espacio y se le dan, como sucede en la Geometría lineal, seis coordenadas homogéneas, las cuales se sujetan a una ecuación de segundo grado, entonces aparecen las transformaciones lineales y duales del espacio como aquellas transformaciones lineales de las seis variables consideradas independientes.

22 *Cf.* Nota V.

que mandan la ecuación en sí misma. Haciendo deducciones, como las llevadas a cabo arriba, se obtiene el teorema:

La teoría de las formas cuaternarias es acorde con la determinación métrica proyectiva de una variable generada por seis variables homogéneas.

Para una discusión más detallada de esta versión hago referencia a un trabajo que está por aparecer en Math. Annalen, 6: *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie (zweite Abhandlung)*, así como a una nota al final de esta comunicación.[23]

Deseo añadir dos observaciones más a las consideraciones precedentes, de las cuales, la primera ya está contenida implícitamente en lo que se ha dicho, pero requiere de ser desarrollada, ya que el objeto del que trata, puede muy fácilmente ser malinterpretado.

Si introducimos objetos arbitrarios como elementos del espacio, obtiene éste un número arbitrario de dimensiones. Pero si nos colocamos en el punto de vista usual (elemental o proyectivo), entonces el grupo que tenemos que tomar para la variedad múltiplemente extendida, está dado de antemano; se trata del grupo principal, o el grupo de las transformaciones proyectivas. Si quisiéramos suponer otro grupo, tendríamos que partir del punto de vista ordinario o proyectivo. Así, es tan correcto que para una elección conveniente del elemento del espacio, éste represente variedades de un número arbitrario de dimensiones, como que se añada *que con esta representación hay que tomar como base un grupo determinado de antemano para estudiar la variedad, o si no, para poder disponer del grupo a voluntad, hay que adaptar convenientemente nuestras concepciones geométricas.* — Sin esta observación, se podría, por ejemplo, buscar una representación de la Geometría lineal de la forma siguiente. En la Geometría lineal, la recta tiene seis coordenadas; éste es también el número de coeficientes de la cónica en el plano. La reproducción de la Geometría lineal sería, pues, la Geometría de un sistema de cónicas, seleccionadas de la totalidad de las cónicas a través de una relación cuadrática entre los coeficientes. Esto estaría correcto, si como grupo para la Geometría plana tomamos a todas las transformaciones representadas por transformaciones lineales de los coeficientes de la cónica, y que reproducen la ecuación cuadrática de la condición. Pero si conservamos el punto de vista elemental o proyectivo de la Geometría plana, entonces no tendríamos absolutamente *ninguna* representación.

---

23. *Cf.* Nota VI.

La segunda observación se refiere al siguiente concepto. Considérese cualquier grupo en el espacio, por ejemplo, el grupo principal. Elíjase un solo objeto en el espacio, por ejemplo, un punto, una recta, un elipsoide, etc., y aplíquensele todas las transformaciones del grupo. Se obtiene así una variedad múltiplemente infinita, con un número de dimensiones igual al número de los parámetros arbitrarios contenidos en el grupo, que en casos especiales disminuye, si el objeto escogido originalmente tiene la propiedad de ser aplicado en sí mismo por una infinidad de transformaciones en el grupo. Toda variedad así generada se denomina, con relación al grupo generador, un *cuerpo*.[24] Si queremos ahora estudiar el espacio en el sentido del grupo, y con ello especificar objetos determinados como elementos del espacio, y no queremos que objetos equivalentes sean representados de forma desigual, *entonces deberemos elegir los elementos del espacio evidentemente de tal forma que su variedad forme un solo cuerpo o pueda ser descompuesta en cuerpos*.[25] De esta observación evidente haremos después (párrafo 9.) una aplicación. El propio concepto de cuerpo se correlacionará en el último párrafo una vez más con conceptos del mismo tipo.

6. La geometría de los radios recíprocos. La interpretación de $x + iy$

Con este párrafo regresamos a la discusión de las diferentes direcciones de la investigación geométrica, conforme se empezó en los párrafos 2 y 3.

Como un análogo a las formas de consideración de la Geometría proyectiva puede considerarse desde muchos puntos de vista una clase de reflexiones geométricas, en las cuales se hace uso constante de la deformación por radios recíprocos. A esto pertenecen las investigaciones acerca de los llamados ciclidos y superficies anallagmáticas, acerca de la teoría general de los sistemas ortogonales, y además investigaciones acerca del potencial, entre otras. Si aún no se han resumido a una Geometría especial las consideraciones de estas teorías, como se ha hecho con las proyectivas, *Geometría en la cual se podría poner como grupo fundamental la totalidad* ...

24. Escojo el nombre según lo hiciera Dedekind, quien en la Teoría de los Números designa a un dominio de números como cuerpo,* cuando éste resulta de elementos dados a través de operaciones dadas (Segunda edición de las Vorlesungen über Zahlentheorie —Lecciones sobre Teoría de los Números— de Dirichlet.)
[* N. del T. En México, a un cuerpo se le llama campo.]
25. [En el texto no ha sido cuidado suficientemente el hecho de que el grupo propuesto puede contener los que suelen llamarse subgrupos excepcionales. Si un cierto objeto geométrico permanece invariante bajo las operaciones de un subgrupo excepcional, entonces lo mismo es cierto para todos los objetos obtenidos del primero por operaciones del grupo total, es decir, para todos los objetos del cuerpo que resulta de él. Un cuerpo así obtenido sería, sin embargo, completamente inadecuado para representar las operaciones del grupo. Por tanto, sólo se admitirán en el texto los cuerpos obtenidos de elementos del espacio que no permanezcan invariantes bajo ningún subgrupo excepcional del grupo propuesto (1893).]

de las transformaciones obtenidas conectando al grupo principal con la transformación por radios recíprocos, esto es sólo atribuible a la circunstancia casual de que las mencionadas teorías hasta ahora no han sido objeto de un estudio sistemático: seguramente una tal consideración metódica ya se encontraba cerca para los autores que han trabajado en esta dirección.

La analogía entre la Geometría de los radios recíprocos y la proyectiva se obtendrá de sí misma al igual que la cuestión de una comparación, y por ello sólo llamaremos la atención de forma muy general hacia los siguientes puntos:

En la Geometría proyectiva los conceptos elementales son punto, recta y plano. Círculo y esfera son sólo casos especiales de cónicas y superficies de segundo grado. El infinito en la Geometría elemental aparece como plano; el objeto fundamental al que se refiere la Geometría elemental es una cónica imaginaria al infinito.

En la Geometría de los radios recíprocos los conceptos elementales son punto, círculo y esfera. Recta y plano son casos especiales de estos últimos, y están caracterizados por el hecho de contener un cierto punto, que, por cierto, en el sentido del método no es más excepcional que otros, que es el punto al infinito. La Geometría elemental se obtiene al considerar fijo a este punto. La Geometría de los radios recíprocos tiene una investidura que la coloca junto a la teoría de las formas binarias y a la Geometría lineal, si se trata a estas últimas en la forma sugerida en el párrafo anterior. Para este fin, restringiremos nuestras consideraciones primeramente a la Geometría plana y en seguida a la Geometría de los radios recíprocos en el plano.[26]

Ya se pensó en la relación que existe entre la Geometría elemental del plano y la Geometría proyectiva de una superficie de segundo grado con un punto especificado (párrafo 4.). Si se ignora el punto especificado y, así, se considera la Geometría proyectiva de la superficie en sí, entonces se obtiene una representación de la Geometría de los radios recíprocos en el plano, pues uno puede convencerse fácilmente[27] de que al grupo de transformaciones de los radios recíprocos en el plano corresponde, por medio de la aplicación de la superficie de segundo grado, la totalidad de las transformaciones lineales de esta última en sí misma. Se tiene así:

---

26. La Geometría de los radios recíprocos en la recta es equivalente al estudio proyectivo de la recta, ya que las transformaciones respectivas son las mismas. Se puede así en la Geometría de los radios recíprocos hablar de una *razón doble* de cuatro puntos de una recta y, con ello, de un círculo.
27. Cf. el trabajo ya citado, *Über Liniengeometrie und metrische Geometrie*. Math. Annalen. Bd. 5.

La geometría de los radios recíprocos en el plano y la Geometría proyectiva sobre una superficie de segundo grado son lo mismo,

y, de forma completamente análoga:

La Geometría de los radios recíprocos en el espacio es equivalente al estudio proyectivo de una variedad representada por una ecuación cuadrática en cinco variables homogéneas.

La Geometría del espacio, a través de la Geometría de los radios recíprocos, mantiene exactamente la misma relación con una variedad de cuatro dimensiones, que, a través de la geometría lineal, con una variedad de cinco extensiones.

La Geometría de los radios recíprocos en el plano, mientras sólo se consideren transformaciones *reales*, permite una interesante representación, o aplicación en otra dirección más. Si se extiende en la forma usual una variable compleja $x + iy$ en el plano, entonces les corresponde a sus transformaciones lineales el grupo de los radios recíprocos, con la restricción mencionada a la parte real.[28] El estudio de las funciones de una variable compleja, sujetas a transformaciones lineales arbitrarias, no es otra cosa que lo que en una presentación un poco modificada, se llama teoría de las formas binarias. Así:

La teoría de las formas binarias encuentra su representación en la Geometría de los radios recíprocos en el plano real, de tal suerte que también los valores complejos de la variable son representados.

Del plano podemos, para acceder al dominio de representación usual de las transformaciones proyectivas, pasar a la superficie de segundo grado. Ya que sólo considerábamos elementos reales del plano, ya no

28. [La forma de expresión en el texto es poco precisa. A las transformaciones lineales

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (\text{donde } z' = x' + iy', \; z = x + iy)$$

corresponden sólo aquellas operaciones del grupo de radios recíprocos, que no involucran una reversión del ángulo (en las que los dos puntos del círculo en el plano no se intercambian el uno con el otro). Si se desea abarcar a todo el grupo de los radios recíprocos, entonces hay que agregar a las transformaciones mencionadas las otras (no menos importantes)

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$ donde otra vez $z' = x' + iy'$, pero $z = x - iy$. (1893)]

resulta indiferente la manera de elegir la superficie; evidentemente no es reglada. En particular, nos la podemos imaginar como es usual en la interpretación de una variable compleja, o sea, como esfera, y así obtener el teorema:

La teoría de las formas binarias de variables complejas encuentra su representación en la Geometría proyectiva de la esfera real.

No puedo negarme a discutir en una nota[29] de qué manera tan bella ilustra esta imagen la teoría de las formas binarias cúbicas y bicuadráticas.

7. Generalizaciones de lo anterior. La geometría de la esfera de Lie

Discutiremos ahora ciertas generalizaciones de la teoría de las formas binarias, la Geometría de los radios recíprocos y la Geometría lineal, que en la parte anterior se coordinó y aparentemente no difería más que por el número de variables. Ellas servirán para aclarar con nuevos ejemplos la idea de que el grupo que determina la forma de tratar ciertos dominios, puede extenderse arbitrariamente. La intención es, sin embargo, la de presentar consideraciones expuestas por Lie en un trabajo reciente,[30] en cuanto a su relación con las ideas dadas aquí. El camino para llegar a la Geometría esférica de Lie difiere del dado por él en tanto que él adopta ideas de la Geometría lineal, mientras que nosotros, con el fin de seguir la intuición geométrica usual y mantener la relación con lo anterior, supondremos un menor número de variables en nuestras discusiones. Las consideraciones son, como ya Lie lo señaló (Göttinger Nachrichten 1871, Nr.7. 22), independientes del número de variables. Pertenecen al gran círculo de investigaciones que se ocupan del estudio proyectivo de ecuaciones cuadráticas en un número arbitrario de variables, investigaciones que ya hemos tocado frecuentemente y que nos seguiremos encontrando (cf. entre otros, el párrafo 10.).

Me refiero a la relación producida por proyección estereográfica entre el plano real y la esfera. Ya relacionamos en el párrafo 5. la Geometría del plano con la Geometría de una cónica, asociando a una recta en el plano el par de puntos en los que ésta corta a la cónica. De forma análoga puede establecerse una relación entre la Geometría del espacio y la Geometría de la esfera, asignándole a cada plano del es-

29. Cf Nota VII
30. *Partielle Differentialgleichungen und Komplexe.* Math. Annalen, Bd. 5 (1872).

pacio el círculo en el que corta a la esfera. Si ahora trasladamos por proyección estereográfica la Geometría de la esfera a la del plano, donde cada círculo va a dar a un círculo, se tiene así una correspondencia entre:

la Geometría del espacio, que utiliza como elemento al plano y como grupo a las transformaciones lineales que mandan a una esfera en sí misma.

Y la Geometría plana, cuyo elemento es el círculo y cuyo grupo es el grupo de los radios recíprocos.

La primera de las dos Geometrías la vamos a generalizar ahora de dos maneras, al tomar en vez de su grupo original uno que lo contiene. La generalización resultante se traslada por la correspondencia, inmediatamente a la Geometría plana.

En vez de las transformaciones lineales del espacio consistente de planos que mandan a la esfera en sí misma, es natural tomar todas las transformaciones lineales del espacio, o sólo todas aquéllas que (en un sentido que ahora vamos a precisar) dejan invariante a la esfera, en un caso abstrayendo a la esfera, en el otro al carácter lineal de las transformaciones que se emplean. La primera generalización es comprensible inmediatamente y por tanto la consideraremos primeramente y estudiaremos su significado en la Geometría plana. Después regresaremos a la segunda, para lo cual primero trataremos de definir la transformación correspondiente más general.

Las transformaciones lineales del espacio tienen en común la propiedad de transformar ramilletes y haces[31] de planos en sí mismos. Pero trasladado a la esfera un ramillete de planos da un ramillete de círculos, es decir, una sucesión simplemente infinita de círculos con puntos de intersección comunes; el haz de planos da un haz de círculos, es decir, una familia doblemente infinita de círculos ortogonales a un círculo fijo (el círculo cuyo plano es el plano polar del punto común a los planos del haz dado). A las transformaciones lineales del espacio les corresponden en la esfera y, más aún, en el plano transformaciones circulares caracterizadas por la propiedad de aplicar ramilletes y haces de círculos en ramilletes y haces de círculos respectivamente.[32] *La geometría plana, que adopta al grupo de transformaciones obtenido así, es la representación de la Geometría proyectiva espacial ordinaria.* En esta Geometría no se puede utilizar al punto como elemento del plano, ya

31. N. del T. Al igual que en el trabajo original, en el que se usa la palabra 'Bündel', no hay que confundir este concepto con el concepto moderno de 'haz'.

32. Grassmann considera ocasionalmente estas transformaciones en su *Ausdehnungslehre* (en la edición 1862, p. 278).

que para el grupo de transformaciones elegido, los puntos no constituyen un cuerpo; hay que tomar círculos como elementos.

Para la segunda generalización que mencionamos, debe preguntarse primeramente, y resolverse, la cuestión respecto al grupo de transformaciones respectivo. Se trata de encontrar transformaciones del plano, que de cada [ramillete de planos, cuyo eje toca a la esfera nuevamente,] producen [otra vez un ramillete de planos]. Con el fin de expresarnos más brevemente, invertiremos dualmente la pregunta y reduciremos en uno la dimensión; nos preguntamos, pues, por transformaciones puntuales del plano que de una tangente a una cónica dada, nuevamente producen una tangente. Con este fin consideramos el plano con su cónica como representación de una superficie de segundo grado, que ha sido proyectada al plano desde un punto del espacio que no yace en ella, de tal modo que la cónica elegida represente a la curva de transición. A las tangentes a la cónica les corresponden las generatrices de la superficie, y la pregunta en la superficie es respecto a la totalidad de las transformaciones puntuales de la superficie en sí misma, bajo las cuales las generatrices se conservan como generatrices.

Ciertamente, hay un número arbitrariamente infinito de tales transformaciones, pues es suficiente considerar el punto de la superficie como intersección de las generatrices de cada sistema y de transformar a éstos en sí mismos tanto como se desee. Pero entre estas transformaciones están en particular los lineales. Solamente consideraremos estas últimas. Si no tuviéramos que ver con una superficie, sino con una variedad múltiplemente extendida, representado por una ecuación cuadrática, sólo quedarían las transformaciones lineales, las otras desaparecen.[35] Estas transformaciones lineales de la superficie en sí misma dan, vía proyección (no estereográfica) sobre el plano, transformaciones puntuales bivalentes, por medio de las cuales, de cada tangente a la cónica que determina la curva de transición, se obtiene otra vez una tangente; pero de cualquier otra tangente se obtiene en general una cónica que corta a la curva de transición dos veces. Este grupo puede ser caracterizado adecuadamente, si se define una determinación métrica proyectiva sobre la cónica que forma la curva de transición. Estas transformaciones tienen entonces la propiedad de transformar puntos que en el sentido de la determinación métrica tienen distancia cero uno

35 Si se proyecta la variedad estereográficamente, se obtiene el conocido teorema: En regiones múltiplemente extendidas (ya incluso en el espacio) no hay, aparte de las transformaciones que se encuentran en el grupo de los radios recíprocos, ninguna transformación puntual conforme. En el plano, por el contrario, hay una infinidad. *Cf.* también los trabajos citados de Lie.

del otro, así como puntos que guardan una distancia constante de otro, se transforman precisamente en puntos con las mismas propiedades.

Todas estas consideraciones pueden extenderse a un número arbitrario de variables, en particular, también para el cuestionamiento original, relativamente a la esfera y al plano, considerados ahora como elementos. En esto puede dársele al resultado una forma especialmente intuitiva, ya que el ángulo que forman dos planos en el sentido de la determinación métrica proyectiva definida sobre una esfera, es igual al ángulo que forman, en el sentido usual, los círculos de intersección en la esfera.

Obtenemos así sobre la esfera, y por tanto, también sobre el plano, un grupo de transformaciones circulares, que tienen la propiedad de *transformar círculos tangentes (que forman un ángulo nulo) así como círculos que intersectan a otros círculos con el mismo ángulo, respectivamente, en círculos que satisfacen las mismas condiciones*. A este grupo de transformaciones pertenecen las transformaciones lineales sobre la esfera y las transformaciones del grupo de radios recíprocos en el plano.[34]

---

34 [Las consideraciones del texto pueden aclararse añadiendo algunas fórmulas analíticas. Sea

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

la ecuación de la esfera en coordenadas tetraédricas ordinarias referida estereográficamente al plano. Las x que satisfacen esta ecuación, adquieren para nosotros el significado de coordenadas puntuales tetracíclicas planas, y

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

será la ecuación general del círculo en el plano. Si se calcula el radio del círculo así representado, se llega a la raíz cuadrada

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}$$

que designamos por iu. Podemos ahora considerar los círculos como elementos del plano. El grupo de los radios recíprocos queda representado entonces por todas las transformaciones lineales homogéneas de $u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ tales que

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$$

va a dar a un múltiplo de sí misma. El grupo extendido de la Geometría cíclica, que corresponde a la geometría esférica de Lie consiste de las transformaciones lineales homogéneas de las cinco variables u_1, u_2, u_3, u_4, u que transforman a

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2$$

en un múltiplo de sí misma (1893).]

La Geometría del círculo basada en este grupo es ahora el análogo a la *Geometría esférica*, como Lie la diseñó para el espacio y como parece tener una importancia excepcional en los estudios de la curvatura de superficies. Incluye a la Geometría de los radios recíprocos en el mismo sentido que ésta incluye a la Geometría elemental.

Las transformaciones circulares (esféricas) recién obtenidas tienen, en particular, la propiedad de mandar círculos (esferas) tangentes en círculos (esferas) tangentes. Si se consideran todas las curvas (superficies) como envolventes de círculos (esferas), consecuentemente van a dar curvas (superficies) que son tangentes siempre a curvas (superficies) que son tangentes. Las transformaciones en cuestión pertenecen así a la clase de las *transformaciones de tangencia*, es decir, transformaciones bajo las cuales la tangencia de figuras es un invariante, y que consideraremos en forma general más adelante. Las transformaciones circulares de Grassmann primeramente mencionadas en el presente párrafo, las que se les puede poner al lado de las análogas transformaciones esféricas, no son transformaciones de tangencia.

Si los dos tipos de generalización de que nos hemos ocupado solamente se refirieran a la Geometría de los radios recíprocos, entonces también son válidas de manera análoga para la Geometría lineal, y, en general, para el estudio proyectivo de una variedad caracterizada por una ecuación cuadrática, como ya se ha indicado, sólo que aquí no se discutirá más.

8. Enumeración de otros métodos basados en un grupo de transformaciones puntuales

La Geometría elemental, la de los radios recíprocos y también la Geometría proyectiva, mientras se haga abstracción de las transformaciones duales asociadas a un cambio del elemento del espacio, no son más que miembros especiales entre numerosas formas imaginables de ver las cosas, para las que se toman por base grupos de transformaciones puntuales. Aquí sólo deseamos hacer resaltar los siguientes tres métodos, que coinciden con los ya mencionados. Aunque estos métodos, como en la Geometría proyectiva, están lejos aún de desarrollarse como disciplinas independientes, aparecen, sin embargo, de manera muy clara en los nuevos estudios.[15]

15. [Mientras que en los ejemplos estudiados hasta ahora se ha tratado de grupos con un número finito de parámetros, se considerarán en el texto los llamados grupos infinitos (1893).] [Para evitar confusiones conviene notar que en estudios posteriores de Lie el

1. *El grupo de las transformaciones racionales*

Para las transformaciones racionales hay que distinguir si son racionales para *todos* los puntos del dominio en el que se opera, ya sea el espacio, o el plano, etc., o solamente para los puntos de una variedad contenida en el dominio, por ejemplo, una curva o una superficie. Sólo las primeras son aplicables si lo que se trata de construir, en el sentido entendido aquí, es una Geometría del espacio o del plano; las últimas 5 desde el punto de vista en el que estamos, no adquieren importancia alguna a menos que se trate de estudiar la Geometría de una superficie o curva dada. La misma distinción se aplica para el *analysis situs*,[36] del que nos ocuparemos a continuación.

En cualquier caso, los estudios que hasta ahora hemos hecho, se han ocupado esencialmente de transformaciones del segundo tipo. No ha sido la pregunta respecto a la Geometría de una superficie o una curva lo que se ha tratado, sino más bien se ha tratado de encontrar criterios para que dos curvas o dos superficies puedan ser transformadas la una en la otra, por eso se salen esos estudios de los que aquí estamos considerando.[37] El esquema general presentado aquí no abarca de ninguna manera la totalidad de la investigación matemática, sino más bien pone ciertas direcciones bajo el mismo punto de vista.

Para una Geometría de las transformaciones racionales, como se obtiene poniendo como base a las transformaciones del primer tipo, tenemos apenas los principios a mano. En el dominio de primer nivel, en la recta, las transformaciones racionales son idénticas a las lineales

concepto de grupo infinito se restringió mucho, a saber, a aquellos grupos definidos por ecuaciones diferenciales. K.]

36 N. del T. Antigua designación para 'topología'.

37 [Visto desde otro lado, lo que no sabía en 1872, es posible incorporarlas a las consideraciones del texto de la mejor manera. Si se da algún objeto algebraico (curva, superficie, etc.), entonces transfiérase a un espacio mayor en el que las razones

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \ldots : \varphi_p$$

se introducen como coordenadas homogéneas de los integrandos de primer orden asociados. Así, en este espacio sólo hay que poner como base de consideraciones posteriores el grupo de transformaciones lineales homogéneas de las φ. Cf. varios trabajos de los señores Brill, Noether y Weber, así como, por ejemplo, mi propio trabajo *Zur Theorie der Abelschen Funktionen* en el volumen 36 de los Math Annalen (1893).] [También en los ejemplos tratados en párrafos anteriores, pasando a un espacio superior elegido adecuadamente, podría sustituirse al grupo a considerar por un grupo de transformaciones *lineales*. Entonces puede hacerse el estudio proyectivamente. La pregunta obvia acerca de qué tanto puede ser esto un principio general no parece aún estar resuelta. K.]

y no nos dan nada nuevo. En el plano ciertamente se conocen todas las transformaciones racionales (las transformaciones de Cremona), y se sabe que se pueden generar componiendo transformaciones cuadráticas. También se conocen caracteres invariantes de las curvas planas: su género, la existencia de módulos; pero, en realidad, no se han desarrollado estas consideraciones para obtener una Geometría del plano en el sentido aquí referido. En el caso del espacio, la teoría está aún por nacer. De las transformaciones racionales solamente se conocen pocas hasta ahora y se utilizan para relacionar, mandando unas en otras, superficies conocidas con desconocidas.

2. El *analysis situs*

En el llamado *analysis situs* se buscan aquellas propiedades que permanecen invariantes frente a transformaciones obtenidas componiendo una infinidad de deformaciones infinitamente pequeñas. También aquí hay que distinguir, como ya se dijo, si todo el dominio, digamos el espacio, debe considerarse como objeto de la transformación o sólo una variedad definida en él, por ejemplo, una superficie. Las transformaciones del primer tipo son las que se pondrían como base para una Geometría espacial. Su grupo estaría constituido de manera muy diferente a los que hemos considerado hasta aquí. Dado que incluye a todas las transformaciones que se componen de transformaciones puntuales infinitamente pequeñas pensadas como reales, lleva por principio la restricción a elementos reales y se mueve dentro del dominio de las funciones arbitrarias. Este grupo de transformaciones no puede extenderse sin cuidado, uniéndolo con las colineaciones reales que también modifican los elementos al infinito.

3. El grupo de todas las transformaciones puntuales

Si frente a este grupo ninguna superficie posee propiedades individuales, ya que cada una de ellas puede ser transformada en cualquier otra, entonces existen objetos de orden mayor para cuyo estudio se puede emplear con ventaja. En la consideración de la Geometría, como ha sido la base en este trabajo, es indiferente que estos objetos no hayan sido considerados como geométricos, sino sólo como objetos analíticos, que constantemente encuentran aplicación geométrica, y que para su estudio se apliquen procesos (como, por ejemplo, transformaciones puntuales arbitrarias), que sólo recientemente han empezado a ser consideradas conscientemente como transformaciones geométricas. Entre estos objetos analíticos se encuentran ante todo las expresiones diferenciales homogéneas y con ellas las ecuaciones diferenciales parciales. Pero en la discusión general de estas últimas parece que, como se expondrá en los párrafos siguientes, es más ventajoso considerar el grupo más grande de todas las transformaciones de tangencia.

El teorema principal válido en la Geometría que tiene por base al grupo de todas las transformaciones puntuales es que *una transformación puntual para una parte infinitamente pequeña del espacio siempre tiene el valor de una transformación lineal*. Los desarrollos de la geometría proyectiva tienen, así, solamente un valor para lo infinitamente pequeño, sea cual sea la elección del grupo en el estudio de variedades *—he aquí un carácter notable de la forma proyectiva de ver las cosas—*.

Después de haber hablado ya desde mucho antes de las formas de considerar las relaciones respecto a grupos contenidos unos en otros, volveremos a dar aquí un ejemplo para la teoría general del párrafo 2. Deseamos plantear la pregunta acerca de cómo se ven las propiedades proyectivas usuales desde el punto de vista de 'todas las transformaciones puntuales', haciendo caso omiso de las transformaciones duales que en realidad ya pertenecen de por sí al grupo de la geometría proyectiva. Esta cuestión se empalma con la siguiente: qué condición determina, dentro del grupo de todas las transformaciones puntuales, al grupo de las transformaciones lineales. Lo característico de estas últimas es que a cada plano se le asigna un plano; son aquellas transformaciones puntuales por medio de las cuales la variedad de los planos (o, lo que es lo mismo, la variedad de las rectas) permanece invariante. *La Geometría proyectiva puede obtenerse de la Geometría de todas las transformaciones puntuales, si se le adjunta la variedad de todos los planos, en la misma forma como la Geometría elemental se puede obtener de la proyectiva adjuntando la esfera al infinito*. En particular, desde el punto de vista de todas las transformaciones puntuales, tenemos, por ejemplo, la denominación de una superficie como algebraica de cierto orden, como una relación invariante de la variedad de los planos. Esto se verá mucho más claramente, si, con Grassmann, se liga la generación de objetos algebraicos a su construcción lineal.

9. Sobre el grupo de las transformaciones de tangencia[38]

Las transformaciones de tangencia, en ciertos casos especiales, ya han sido consideradas desde hace mucho tiempo, también Jacobi ya hizo uso de las tranformaciones de tangencia más generales en estudios ana-

38. N. del T. También se les suele llamar 'transformaciones de tangencia'.

líticos. Pero en la intuición geométrica viva, fueron recientemente introducidas en trabajos de Lie.[39] Por esto, no es superfluo discutir aquí explícitamente lo que es una transformación de tangencia, donde, como siempre, nos restringiremos al espacio puntual con sus tres dimensiones.

Hablando analíticamente, entenderemos por una transformación de tangencia, a una substitución, que expresa a las variables x, y, z y a sus cocientes diferenciales parciales

$$\frac{dz}{dx} = p, \; \frac{dz}{dy} = q$$

por nuevas x', y', z', p', q'.

Con ello se aplican superficies tangentes nuevamente en superficies tangentes, con lo que se justifica el nombre de transformaciones de tangencia. Partiendo de los puntos como elementos del espacio, se descompone la familia de las transformaciones de tangencia en tres clases, las que a la triple infinidad de puntos nuevamente les asignan puntos —éstas son las recién consideradas transformaciones puntuales—, las que les asignan curvas, y, finalmente, las que les asignan superficies. Esta subdivisión no hay que considerarla como algo esencial, pues usando otros elementos del espacio también en número triplemente infinito, como los planos, vuelve a ser posible una subdivisión en tres clases, que no coincide con la subdivisión obtenida con base en los puntos.

Si aplicamos a un punto todas las transformaciones de tangencia, va éste a dar a todos los puntos, todas las curvas y todas las superficies. En su totalidad, pues, constituyen así los puntos, curvas y superficies un *cuerpo* de nuestro grupo. Podemos tomar de esto la regla general, de que el tratamiento formal de un problema en el sentido de todas las transformaciones de tangencia (como, por ejemplo, la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales, que estudiaremos a continuación), estará incompleta, pues se opera con coordenadas puntuales (o planas), ya que los elementos espaciales puestos como base no forman un cuerpo.

Pero, si se quieren conservar los métodos habituales, la introducción como elementos del espacio de los individuos de un cuerpo no es posible, pues su número es una infinidad de veces infinito. Aquí yace la necesidad de introducir en estas consideraciones, no al punto, ni la curva, ni la superficie como elementos del espacio, sino el elemento *de superficie*, es decir, el sistema de valores x, y, z, p, q como *elemento del espacio*. Cada trans-

[39] Cf. en particular el trabajo ya citado: *Über partielle Differentialgleichungen und Komplexe*. Math. Annalen, Bd. 5. Los desarrollos hechos en el texto con relación a las ecuaciones diferenciales parciales los tomé esencialmente de comunicaciones orales de Lie, cf. su nota *Zur Theorie partieller Differentialgleichungen*. Göttinger Nachrichten, Okt. 1872.

formación de tangencia manda a un elemento de superficie en uno nuevo; la quíntuple infinidad de elementos de superficie constituyen por tanto un cuerpo.

Desde este punto de vista, hay que considerar a los puntos, curvas, superficies, etc., uniformemente como agregados de elementos de superficie, a saber, de una doble infinidad de ellos. Ya que la superficie se cubre con ∞^2 elementos, la curva es tocada por la misma cantidad, y éste es también el número de los que pasan por un punto. Pero estos agregados doblemente infinitos de elementos tienen todavía otra característica en común. Llámese *posición unida* de dos elementos de superficie consecutivos x, y, z, p, q y $x + dx, y + dy, z + dz, p + dp, q + dq$ a la relación representada por

$$dz - pdx - qdy = 0$$

Entonces punto, curva y superficie son todos ellos *variedades doblemente infinitas de elementos, tales que cada una está en posición unida con el número simplemente finito de vecinos*. Con esto quedan caracterizados en común puntos, curvas y superficies, y con ello tienen que estar representadas analíticamente, si se quiere poner como base al grupo de las transformaciones de tangencia.

La posición unida de elementos consecutivos es una relación invariante bajo transformaciones de tangencia arbitrarias. Pero también inversamente, las transformaciones de tangencia pueden definirse como *aquellas sustituciones de las cinco variables x, y, z p, q, por medio de las cuales la relación $dz - pdx - qdy = 0$ va a dar a sí misma*. De esta forma, debe verse al espacio de estos estudios como una variedad de cinco dimensiones, y esta variedad debe tratarse poniendo como base al grupo de todas las transformaciones de variables, que dejan invariante a una relación determinada entre las diferenciales.

En primera línea, son objetos de estudio aquellas variedades representadas por una o más ecuaciones en sus variables, es decir, *las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden y sus sistemas*. Una pregunta fundamental es la siguiente: cómo deducir de las variedades de elementos que satisfacen ecuaciones dadas, series de elementos simple y doblemente infinitas, tales que cada uno está en posición unida con cada vecina. Equivalente a esta pregunta es, por ejemplo, el problema de la solución de una ecuación diferencial parcial de primer orden. Se puede formular así: Partiendo de la infinidad cuádruple de elementos que satisfacen la ecuación, hay que deducir todas las variedades doblemente infinitas de la forma indicada. En particular, el problema de la solución completa adquiere una forma precisa: descomponer la infinidad cuádruple de los elementos que satisfacen la ecuación, en alguna forma que de una doble infinidad de tales variedades.

No podemos tener aquí la intención de continuar las consideraciones acerca de ecuaciones diferenciales parciales; refiero en este respecto a los citados trabajos de Lie. Resaltemos solamente que, para el punto de vista de las transformaciones de tangencia, una ecuación diferencial de primer orden no tiene invariantes tales que cada uno sea aplicado en otro, o sea, que en particular las ecuaciones lineales no se distinguen de las otras. La distinción no aparece sino hasta que se retorna al punto de vista de las transformaciones puntuales.

Los grupos de las transformaciones de tangencia, de las transformaciones puntuales e, incluso, de las transformaciones proyectivas pueden ser caracterizados de una manera unificada, que no quisiera dejar de mencionar.[40] Las transformaciones de tangencia ya fueron definidas como aquellas transformaciones bajo las cuales la posición unida de elementos de superficie consecutivos se conserva. Las transformaciones puntuales, por el contrario, tienen la propiedad característica de transformar elementos de recta consecutivos en posición unida en otros de la misma índole. Finalmente, las transformaciones lineales y duales conservan la posición unida de elementos conexos consecutivos. Como un elemento conexo entiendo la unión de un elemento de superficie con un elemento de recta contenido en él; se dice que dos elementos conexos consecutivos están en posición unida, si no sólo el punto, sino también el elemento de recta de uno está contenido en el elemento de superficie del otro. La designación (provisional, por cierto) de elemento conexo se refiere a los elementos introducidos recientemente[41] a la Geometría por Clebsch, que están representados por una ecuación, que simultáneamente contienen una serie de coordenadas puntuales, una de coordenadas planas y una de coordenadas rectilíneas, y a cuyos análogos en el plano Clebsch designa como conexos.

10. Sobre variedades arbitrariamente extendidas

Ya se ha hecho resaltar varias veces cómo el apego de las discusiones presentadas hasta ahora a la idea del espacio, solamente respondía al deseo de poder desarrollar más fácilmente conceptos abstractos en ana-

40. Estas definiciones se las debo a una observación de Lie. [Aparentemente Lie jamás volvió a recurrir a estas definiciones, ciertamente interesantes, en sus trabajos posteriores. K.]
41. Gött. Abhandlungen, 1872 Bd. 17: *Über die Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie*, así como Gött. Nachrichten, 1872, Nr. 22: *Über ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene*.

logía con ejemplos intuitivos. En realidad, estas consideraciones son independientes de la idea sensible y pertenecen al dominio general de la investigación matemática, al que se denomina teoría de las variedades extendidas o (según Grassmann) simplemente teoría de la extensión. Es evidente cómo pasar lo anteriormente visto en el espacio al concepto puro de variedad. Sólo hay que volver a observar que, a diferencia de la Geometría, en el estudio abstracto tenemos la ventaja de poder elegir arbitrariamente el grupo de transformaciones básico, mientras que en la Geometría se da ya de antemano un grupo mínimo, el grupo principal.

Sólo deseamos aquí brevemente tocar los siguientes tres puntos en el tratamiento.

1. *Métodos de tratamiento proyectivo o Algebra moderna (Teoría de invariantes)*

Su grupo consiste de todas las transformaciones lineales y duales de las variables usadas para determinar el elemento de la variedad; es la generalización de la Geometría proyectiva. Ya se ha hecho resaltar cómo este método de tratamiento se aplica a la discusión de lo infinitamente pequeño en una variedad extendida una dimensión más. Incluye también a los dos métodos de tratamiento que trataremos a continuación, en el sentido de que su grupo incluye a los que en éstos hay que dar como base.

2. *La variedad de medida constante de curvatura*

Una idea tal surgió con Riemann de la idea más general de una variedad en la que se da una expresión diferencial de la variable. En su trabajo el grupo consiste de todas las transformaciones de las variables, que dejan la expresión dada invariante. Por otro lado se llega a la idea de una variedad de curvatura constante fijando una determinación de medida, en el sentido proyectivo, basada en una ecuación cuadrática dada entre las variables. En esta forma, a diferencia de la de Riemann, se tiene una extensión en la que las variables pueden ser consideradas como complejas; después se puede restringir la variabilidad al dominio real. A esto corresponde la serie de consideraciones que hicimos en los párrafos 5., 6. y 7.

3. La variedad plana

Riemann designa como variedad plana a una variedad con medida de curvatura constante igual a cero. Su teoría es la generalización inmediata de la Geometría elemental. Su grupo, como el grupo principal de la Geometría, puede extraerse del grupo de la Geometría proyectiva manteniendo fija una figura representada por dos ecuaciones, una lineal y una cuadrática. En esto hay que diferenciar entre real e imaginario, si se quiere apegar a la forma en la que normalmente se representa la teoría. Aquí figuran, en primer lugar, la Geometría elemental misma, después, por ejemplo, las generalizaciones recientemente desarrolladas de la teoría ordinaria de curvatura, etc.

Observaciones finales

Para terminar pondremos dos observaciones que tienen una relación íntima con todo lo dicho hasta aquí; una de ellas concierne al formalismo, a través del cual hay que representar los desarrollos conceptuales de lo anterior, la otra indica algunos problemas que parecen importantes y fecundos de tratarse después de las discusiones aquí presentadas.

Frecuentemente se le ha reprochado a la Geometría analítica el preferir, al introducir sistemas de coordenadas, elementos arbitrarios, y este reproche tiene igual validez dentro del tratamiento de cada variedad extendida en la cual los elementos están caracterizados por los valores de las variables. Si este reproche no se justificara suficientemente por la forma defectuosa con la que, sobre todo antes, se manejaba el método de coordenadas, éste desaparece totalmente con un tratamiento racional del método. Las expresiones analíticas que pueden aparecer al estudiar una variedad en el sentido de un grupo, deben ser, en el sentido de su significado, independientes del sistema de coordenadas, en tanto que éste se elige aleatoriamente, y así, es válido poner *formalmente* esta independencia en evidencia. Que esto es posible y cómo debe suceder, lo muestra el Álgebra moderna en la que el concepto formal de invariante, que aquí se tratará, se expresa de la forma más evidente. Ella cuenta con una ley general y exhaustiva de formación de expresiones invariantes y por principio sólo opera con ellas. Hay que hacer la misma exigencia al tratamiento formal, aun cuando otros grupos distintos del proyectivo, se pongan como base.[42] Ya que

42 [Por ejemplo, un tal formalismo está dado para el grupo de las rotaciones del espacio tridimensional alrededor de un punto (1893).] [Sin embargo, por mi lado no continué con el seguimiento de la exigencia del texto. No lo hice por la experiencia propia y por la adquirida en clase, de lo que el aprendizaje de cada vez nuevas formas de escritura simbólica cuestan en general más tiempo, que el que se gana por la aplicación. Esto puede tener conexión con el hecho de que todavía son pocos los matemáticos que se inclinan a utilizar la simbología recomendada vivídamente por su creador correspondiente (mientras muchos matemáticos encuentran cómodo representar sus ideas propias por medio de una nueva simbología cualquiera). Por este comportamiento

el formalismo debe adaptarse a la formación de conceptos, hay que usarlos solamente como una expresión precisa y transparente de ella, y no querer usarlo para penetrar en regiones aún no exploradas.

Los planteamientos que todavía deseamos mencionar, surgen al comparar las ideas expuestas aquí con la llamada teoría de las ecuaciones de Galois.

En la teoría de Galois, como aquí, se concentra el interés en grupos de tranformaciones. Los objetos a los que las transformaciones se refieren son, sin embargo, distintos; en ella se trata un número finito de elementos discretos, mientras que aquí es una infinidad de elementos de una variedad continua. No obstante, la comparación, debido a la identidad propia de la noción de grupo, puede llevarse más lejos,[43] aunque aquí preferiremos solamente indicarla, en vez de caracterizar la situación que puede referirse a ciertas investigaciones iniciadas por Lie y por mí[44] en el sentido de las ideas desarrolladas aquí.

En la teoría de Galois como está presentada, por ejemplo, en el *Traité d'Algèbre supérieure* de Serret o en el *Traité des substitutions* de C. Jordan, el objeto de estudio es la teoría de grupos o de la sustitución en sí misma, y la teoría de ecuaciones se desprende de ella como aplicación. De la misma forma, pretendemos obtener una teoría de las transformaciones, es decir, una teoría de los grupos engendrados por transformaciones de cierta naturaleza. Las nociones de conmutatividad, de similitud, etc., tienen, como en la teoría de la substitución, una aplicación. Una manera de aplicar la teoría de las transformaciones se obtiene al fijar los grupos de transformaciones para tratar una variedad.

Lo primero que llama la atención en la teoría de ecuaciones son las funciones simétricas de los coeficientes, e inmediatamente después, aquellas expresiones que permanecen invariantes, si bien no bajo todas, sí bajo una gran cantidad de permutaciones de las raíces. Al estudiar una variedad fijando un grupo, la pregunta es, primeramente, respecto a los cuerpos (párrafo 5.), es decir, respecto a las figuras que permanecen invariantes bajo todas las transformaciones del grupo. Sin embargo, hay figuras que no admiten a todas, sino solamente a algunas

tenemos ahora una amplia confusión del lenguaje, que aunque no es ese el propósito parece producir un bloqueo de todo progreso matemático. K.]

43. Recuérdese aquí que Grassmann ya estableció un paralelo entre la combinatoria y la teoría de la extensión en la introducción de la primera edición de su *Ausdehnungslehre* (1844).

44. Cf. nuestro trabajo *Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen*. Math. Annalen. Bd. 4.

de las transformaciones del grupo, y éstas son, en cuanto al estudio del grupo, especialmente interesantes, pues gozan de propiedades notables. Es así, por ejemplo, que, en el sentido de la Geometría ordinaria, se pueden distinguir cuerpos simétricos regulares de superficies de rotación y helicoidales. Si ahora nos colocamos en el punto de vista de la Geometría proyectiva, y exigimos, en particular, que las transformaciones que aplican figuras en sí mismas conmuten, entonces accedemos a la figura considerada por Lie y por mí en el trabajo citado y al problema general planteado en el párrafo 6. del mismo. La determinación dada ahí en los párrafos 1. y 3 . de todos los grupos que consisten de una infinidad de transformaciones lineales del plano que conmutan entre sí, pertenece, como una parte, a la anteriormente mencionada teoría general de las transformaciones.[45]

N O T A S

I. Sobre la controversia entre la tendencia sintética y la analítica en la geometría moderna

La diferencia entre la síntesis moderna y la Geometría analítica moderna ya no se considera hoy en día como esencial, ya que tanto el contenido de ideas como la forma de sacar conclusiones en ambos lados se ha ido conformando de manera cada vez más similar. Por lo tanto elegimos en el texto para hacer una designación común, las palabras 'Geometría proyectiva'. Si bien, por un lado, el método sintético trabaja más con la intuición espacial, y con ello sus primeros desarrollos más sencillos

45. Tengo que renunciar a indicar en el texto cuán fructífera es la consideración de transformaciones infinitamente pequeñas en la teoría de las ecuaciones diferenciales. En el párrafo 7. del trabajo citado demostramos Lie y yo lo siguiente: Ecuaciones diferenciales ordinarias que admiten las mismas transformaciones infinitamente pequeñas, presentan las mismas dificultades de integración. En diversos lugares y, en particular, en el trabajo citado arriba (Math. Annalen, Bd 5), Lie ha demostrado en diversos ejemplos cómo deben ser aplicadas estas consideraciones para ecuaciones diferenciales parciales (*Cf.* también, en particular, las Comunicaciones de la Academia de Christiania —*Mitteilungen der Akademie zu Christiania*— 3 de mayo de 1872).
[Dentro de las consideraciones del texto encajan en particular también mis estudios posteriores sobre ecuaciones algebraicas y sobre funciones automorfas trascendentes con las presentaciones del Programa de Erlangen, cf. el prefacio de mis "*Vorlesungen über das Ikosaeder*" (Leipzig, Teubner, 1884), donde expresamente indico el paralelo de mis trabajos correspondientes con los estudios simultáneos de Lie sobre grupos continuos de transformaciones. K.]

adquieren un atractivo particular, por otro lado, el campo de una tal intuición no se cierra en el método analítico, y las fórmulas de la Geometría analítica se pueden ver como una expresión precisa y transparente de las relaciones geométricas. Por otro lado, no hay que subestimar la ventaja de un formalismo bien aplicado, que en cierta forma puede llevar la delantera a las ideas. Hay siempre que apegarse a la exigencia que dice que un objeto matemático no puede ser considerado como completamente estudiado, sino hasta que se ha hecho conceptualmente evidente; descubrir a través del formalismo, si bien es un paso importante, es sólo el primer paso.

II. Separación de la geometría moderna en disciplinas

Si, por ejemplo, se observa cómo un físico matemático rechaza generalmente las ventajas que obtendría, en algunos casos, de una intuición proyectiva, aun cuando no estuviera bien desarrollada, por otro lado, quien cultiva la Geometría proyectiva no toca siquiera la mina riquísima que representan las verdades matemáticas de las que nació la teoría de la curvatura de las superficies; así pues hay que considerar el estado actual del conocimiento geométrico como muy imperfecto y, ojalá, como transitorio.

III. Sobre la importancia de la intuición espacial

Cuando, en el texto, hablamos de la intuición espacial como algo accesorio, esto sólo se dice en relación con el contenido puramente matemático de las consideraciones a formular. Para tal contenido, la intuición tiene solamente un valor de visualización, que, por cierto, desde el punto de vista pedagógico tiene gran importancia. Un modelo geométrico, por ejemplo, es, visto así, muy instructivo e interesante.

Sin embargo, es una cuestión muy diferente la importancia de la intuición espacial en general. La considero como algo autónomo. Existe una Geometría propiamente dicha que, a diferencia de los estudios discutidos en el texto, no va a ser solamente una forma intuitiva de estudios abstractos. En ella se trata de considerar figuras espaciales según la plena verdad de su forma y (lo que es su lado matemático), las relaciones para ellas válidas como consecuencias evidentes de los postulados de la intuición espacial. Un modelo —sea ejecutado y examinado o sólo vividamente imaginado— no es para esta Geometría un medio para algún fin, sino el objeto en sí.

Si colocamos a la Geometría como algo autónomo, junto con, e independiente de, la matemática pura, esto no es en sí nada nuevo. Sin embargo, es deseable hacer resaltar otra vez en forma explícita este punto de vista, dado que la investigación moderna lo ignora casi completamente. Con esto está relacionado el hecho de que, por el contrario, la investigación moderna rara vez se aplica, cuando de lo que se trata es de dominar relaciones de forma entre entes espaciales y, no obstante, en esta dirección parece ser fructífera.[46]

IV. Sobre variedades de un número arbitrario de dimensiones

Que el espacio, como lugar de puntos, no tenga más que tres dimensiones, no necesita ser discutido desde el punto de vista matemático; igualmente, desde el punto de vista matemático no podemos impedir a nadie que afirme que el espacio tiene cuatro, o incluso una infinidad de dimensiones, pero que nosotros sólo estamos en posibilidad de captar tres. La teoría de las variedades multiplemente extendidas, como cada vez más van apareciendo en un primer plano en la investigación matemática moderna, es según su esencia, completamente independiente de una afirmación tal. No obstante, se ha ido estableciendo una manera de hablar que de esto emana. Se habla en vez de de los individuos de una variedad, de los puntos de un espacio superior, etc. En sí, esta manera de hablar tiene algo bueno, ya que al recordar la intuición geométrica se facilita la comprensión. Ha tenido, sin embargo, la consecuencia desventajosa de hacer que en amplios círculos se consideren los estudios sobre las variedades como exactamente lo mismo que las ideas recién mencionadas acerca de la naturaleza del espacio. Nada está menos fundamentado que esta concepción. Los estudios matemáticos correspondientes encontrarían inmediatamente una aplicación geométrica si la concepción fuera correcta; pero su valor y su intención, de manera completamente independiente de esta concepción, descansan en su propio contenido matemático.

Una cosa totalmente diferente ha sido cómo Plücker ha enseñado al espacio real como una variedad de un número arbitrario de dimensiones, introduciendo como elemento del espacio una figura dependiente de un número arbitrario de parámetros (curva, superficie, etc.)(cf. el párrafo 5. del texto).

46 [Mis trabajos sobre las formas en particular de las curvas y las superficies algebraicas aparecerán en el volumen II de estas obras completas. K.] (*Kleins Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Bd. 2, Berlin 1922. H. W.)

La forma de ver las cosas que considera al elemento de la variedad arbitrariamente extendida como un análogo del punto en el espacio, fue primeramente desarrollada por Grassmann en su *Ausdehnungslehre (1844)*. En ella, la idea es totalmente independiente de la concepción mencionada de la naturaleza del espacio, esta última se remonta, en realidad, a observaciones ocasionales de Gauss y fue dada a conocer a círculos más amplios a través de los estudios de Riemann sobre variedades multiplemente extendidas, en los cuales ella se entreteje.

Ambas concepciones, la de Grassmann y la de Plucker, tienen sus preferencias propias; aplicándolas alternadamente se tienen ventajas.[47]

V. Sobre la llamada geometría no euclidiana

La Geometría métrica proyectiva mencionada en el texto coincide, como se ha visto en investigaciones recientes, según su esencia con la Geometría métrica que puede diseñarse haciendo caso omiso del axioma de las paralelas, y que hoy día se conoce como Geometría no euclidiana y se discute ampliamente. Si en el texto no hicimos mención a este nombre, esto tiene una razón relacionada con las discusiones sostenidas en la nota anterior. Con el nombre de Geometría No Euclidiana se vincula una serie de ideas no matemáticas, que por un lado con tanto celo se cuidan, como por el otro se abominan, y sin embargo, con las que nuestras consideraciones matemáticas no tienen absolutamente nada que hacer. Hagamos que el deseo de contribuir a aclarar los conceptos en esta dirección un poco sea la motivación de las siguientes discusiones.

Los estudios mencionados sobre la teoría de las paralelas y sus desarrollos sucesivos tienen, en dos aspectos, un valor definido.

Muestran por un lado —y con ello puede ser considerado el asunto como concluido— que el axioma de las paralelas no es una consecuencia matemática de los axiomas generalmente puestos antes que él, sino que es un elemento intuitivo esencialmente nuevo, que en consideraciones anteriores no había sido tocado, y ahora encuentra una expresión. Se deberían hacer estudios análogos en relación con cada

47 [No hace falta hacer notar el desarrollo que el pensamiento en muchas dimensiones ha ido adquiriendo en las últimas décadas. Refiero, en lo que concierne a la versión de Grassmann y al correspondiente tratamiento de figuras algebraicas a la ponencia de Segre en III$_2$, cuaderno 7 de la Mathematische Enzyklopädie. 1918. K.]

axioma no sólo de la Geometría, con ello se tendría una visión en la posición relativa de los axiomas.

Así, estos estudios nos han obsequiado con un concepto matemático valioso: el concepto de una variedad de curvatura constante. Como ya se observó, y como se desarrolló más ampliamente en el párrafo 10 del texto, está relacionado de la forma más estrecha con la determinación métrica proyectiva desarrollada de forma totalmente independiente de toda la teoría de las paralelas. Si bien el estudio de esta determinación métrica en sí goza de un gran interes matemático y permite numerosas aplicaciones, se tiene también que la determinación métrica dada en la Geometría es un caso especial (caso límite) y nos enseña a concebir lo mismo desde un punto de vista más alto.

De una manera totalmente independiente de los puntos de vista desarrollados se tiene la pregunta, acerca de qué razones soportan al axioma de las paralelas, si queremos considerarlo como dado absolutamente, como algunos quieren, o, como dicen otros, como establecido sólo aproximativamente por la experiencia. Si hubiera razones para suponer esto último, las investigaciones matemáticas en cuestión nos mostrarían cómo hay que construir una Geometría más exacta. Pero ésta es evidentemente una cuestión filosófica que atañe a los fundamentos más generales de nuestro conocimiento. Al matemático *como tal* no le interesa este cuestionamiento, y desea que sus investigaciones no sean consideradas como dependientes de la respuesta que de uno u otro lado se dé a la pregunta.

VI. La geometría lineal como estudio de una variedad de curvatura constante

Si queremos relacionar la Geometría lineal con la determinación métrica proyectiva en una variedad quíntuplemente extendida, debemos poner atención al hecho de que las líneas rectas no nos ofrecen (en el sentido de la determinación métrica) más que los elementos al infinito de la variedad. Por tanto, hay que meditar qué valor tiene una determinación métrica proyectiva para sus elementos al infinito; vamos a discutir aquí esta cuestión para descartar las dificultades que se oponen a la concepción de la Geometría lineal como una Geometría métrica. Vincularemos estas discusiones al ejemplo intuitivo que da la determinación métrica proyectiva basada en una superficie de segundo grado

Dos puntos tomados independientemente en el espacio tienen un invariante absoluto en relación con la superficie; su razón doble con respecto a los dos puntos de intersección de la recta por ellos determinado con la superficie. Si estos dos puntos yacen en la superficie, entonces esta razón doble es cero independientemente de la posición de los puntos, excepto en el caso en el que ambos puntos yacen sobre una generatriz donde no está definida. Esta es la única particularización que puede aparecer en su relación si no coinciden, y así tenemos el teorema:

La determinación métrica proyectiva que se puede basar en el espacio sobre una superfie de segundo grado, no da para la geometría de la superficie determinación métrica alguna.

Con esto está relacionado el hecho de que a través de transformaciones lineales de la superficie en sí misma pueden aplicarse tres puntos arbitrarios en otros tres.[48]

Si se quiere tener en la superficie misma una determinación métrica, hay que restringir el grupo de transformaciones y esto se logra fijando un punto arbitrario del espacio (o su plano polar). Primeramente tomemos el punto del espacio fuera de la superficie. Así, proyectemos la superficie desde el punto sobre un plano, en el cual aparece una cónica como curva de transición. Defínase sobre esta cónica en el plano una determinación proyectiva, la cual se regresa a la superficie misma.[49] Esta es una determinación métrica propiamente dicha, de curvatura constante, y se tiene así el teorema:

Para cada punto que se fije de la superficie se obtiene una determinación métrica sobre la superficie.

Correspondientemente se tiene:[50]

Se obtiene una determinación métrica de curvatura nula si como punto fijo se toma un punto sobre la superficie misma.

Para todas estas determinaciones métricas sobre la superficie, sus generatrices son rectas de longitud nula. La expresión del elemento de arco sobre la superficie para las diferentes determinaciones métricas

48. Estas relaciones varían en la Geometría métrica ordinaria: para dos puntos al infinito hay con seguridad un invariante absoluto. La contradicción que podría encontrarse con esto al enumerar las transformaciones lineales que admiten las superficies al infinito, se resuelve con el hecho de que las translaciones y las homotecias que entre ellas se encuentran no alteran al infinito en forma alguna.

49. *Cf.* párrafo 5 del texto.

50. *Cf.* párrafo 4 del texto.

difiere así sólo por un factor. No existe un elemento de arco absoluto sobre la superficie. Sin embargo, muy bien se puede hablar del ángulo que forman dos direcciones sobre la superficie. Todos estos teoremas y consideraciones pueden ser utilizados sin restricción en la Geometría lineal. Para el espacio lineal mismo no existe de antemano una determinación lineal propiamente dicha. Esta surge al fijar un complejo lineal, y así, adquiere una curvatura constante o nula, según el complejo sea general o especial (una recta). Al elegir este complejo se hace válida la existencia de un elemento de arco absoluto. Sea cual sea esta elección, las direcciones de rectas vecinas que cortan a la dada son de longitud cero, y también se puede hablar del ángulo que forman dos direcciones arbitrarias.[51]

VII. Sobre la interpretación de las formas binarias

Pensaremos aquí en la forma más clara, la cual, basando la interpretación de $x + iy$ sobre la superficie esférica, se obtiene para los sistemas de formas de la forma binaria cúbica y de la bicuadrática.

Una forma binaria cúbica f tiene una covariante cúbica Q, una cuadrática Δ, y un invariante R.[52] De f y Q se compone toda una serie de covariantes de sexto grado

$$Q^2 + \lambda Rf^2$$

entre los cuales está contenido también Δ^3. Se puede probar[53] que cada covariante de la forma cúbica debe descomponerse en tales grupos de seis puntos. Mientras λ pueda asumir valores complejos, hay una doble infinidad de ellos.

El conjunto de formas así definido puede ser representado sobre la esfera de la siguiente forma.[54] Usando una transformación lineal apropiada de la esfera en sí misma, aplíquense los tres puntos que representan a f en tres puntos equidistantes sobre un círculo máximo, al cual convenimos designarlo

51. *Cf.* el artículo: *Über Liniengeometrie und metrische Geometrie* Math. Annalen Bd. 5.
52. *Cf.* para esto los capítulos convenientes de Clebsch: *Theorie der binären Formen* (1871).
53. Considerando transformaciones lineales de f en sí misma, cf. Math. Annalen Bd. 4, p. 352: *Über eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen*.
54. [*Cf.* también Beltrami, *Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche*. Accademia di Bologna, Memorie, 1870 (1893)] [*Beltramis Werke*, Bd. II.]

como ecuador. En él, supongamos que los tres puntos tienen longitudes geográficas 0°, 120°, 240°. Así imaginamos a Q a través de los puntos del ecuador con longitudes 60°, 180°, 300°, y a Δ pasando por ambos polos.

Cada forma $Q^2 + \lambda \cdot Rf^2$ está representada por seis puntos, cuyas latitud y longitud geográficas estan contenidas en el siguiente esquema, donde α y β son números cualesquiera:

$$\begin{array}{c|c|c|cc|cc}
\alpha & \alpha & \alpha & -\alpha & -\alpha & & -\alpha \\
\beta & 120 + \beta & 140 + \beta & -\beta & 120 - \beta & & 240 - \beta
\end{array}$$

Persiguiendo estos sistemas de puntos sobre la esfera, es interesante ver cómo aparecen f y Q contando doblemente, y Δ contando triplemente.

Una forma bicuadrática f tiene un covariante H también bicuadrático, un covariante de sexto grado T, dos invariantes i y j. Especialmente notable es la familia de formas bicuadráticas $iH + \lambda jf$, que corresponden todas a la misma T, y entre ellas los tres cuadráticos, en los que se puede descomponer T, cuentan doblemente.

Colóquense ahora pasando por el centro de la esfera tres ejes perpendiculares entre sí OX, OY, OZ. Sus seis puntos de intersección con la esfera constituyen la forma T. Los cuatro puntos de una cuarteta $iH - \lambda jf$ están dados por el esquema

$$\begin{array}{ccc}
x, & y, & z, \\
x, & -y, & -z \\
-x, & y, & -z \\
-x, & -y, & z
\end{array}$$

donde x, y, z designan las coordenadas de un punto arbitrario de la esfera. Los cuatro puntos constituyen cada vez los cuatro vértices de un tetraedro simétrico, cuyas caras opuestas resultan divididas en dos partes iguales por los ejes del sistema de coordenadas con lo que queda caracterizado el papel que juega la T en la teoría de las ecuaciones bicuadráticas como resolvente de $iH + \lambda jf$.[55]

Erlangen, octubre de 1872.

---

55 [A las menciones del texto se añaden como exposición inmediata mis trabajos sobre *Binären Formen mit linearen Transformationen in sich* que se imprimirán en el Vol. II de esta edición (cf. nota 42, H.W.) [véase en particular Math. Annalen, Bd.9, 1875].

Felix Klein (1849-1925), matemático alemán, profesor en Erlangen (1872-1875), Leipzig (1880-1886), y Göttingen (1886-1913). Fundó (1895) y supervisó (hasta su muerte) la *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Trabajó sobre superficies de Kummer, transformaciones de Lie, teoría de funciones, geometría hiperbólica y aplicaciones de las matemáticas a la física. Algunas de sus más importantes publicaciones incluyen, entre otras: *Vorlesungen über das Ikosaeder* (1884), *Vorlesungen über die Theorie der automorphen* (1897-1912) y *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt* (1911).

Por lo demás, deseo referir, al cerrar esta reimpresión del Programa de Erlangen, a los trabajos de Moebius (cuyo contenido conocí por primera vez al participar en la edición de sus obras completas en los años 1885-1887 por la Sociedad Sajona de la Ciencia -Gesellschaft der Wissenschaft-). Moebius no conocía aún el concepto general de grupo ni tampoco muchas de las transformaciones geométricas utilizadas para su ilustración en el Programa de Erlangen. No obstante, llevado por un sentimiento seguro, arregló sus trabajos geométricos posteriores exactamente como corresponde a las ideas fundamentales del Programa. Ya en el capítulo central de su *Baryzentrischer Kalkül* (1827) ordena los ejercicios geométricos -*geometrische Aufgaben*- según relación de parentesco -*Verwandtschaft*- de la igualdad -*Gleichheit*- (congruencia), semejanza -*Ähnlichkeit*-, afinidad -*Affinität*- y colinealidad -*Kollineation*-. A partir de 1853 inician sus publicaciones sobre *Kreisverwandtschaft* (=Geometría de los radios recíprocos en el plano). Ya antes (1849) existían sus primeras comunicaciones sobre la simetría de los cristales. Pero en 1863, a la edad de 73 años, principia con las comunicaciones sobre *Elementarverwandtschaft* (es decir, sobre la parte de la Geometría que hoy llamamos *analysis situs*). Con estos datos conviene comparar las interesantes exposiciones que el señor Curt Reinhardt pudo hacer en los volúmenes II y IV de las Obras Completas de Moebius sobre el surgimiento y la relación de los trabajos individuales, según el rico contenido del legado manuscrito.]

Carlos Prieto de Castro, Estudió Física y Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la UNAM y obtuvo su doctorado en Topología Algebraica en la Universidad de Heidelberg, Alemania. Es investigador del Instituto de Matemáticas de la UNAM. Tiene, entre otras publicaciones, artículos de investigación sobre Teoría de Punto Fijo y diversas traducciones.