Un Seminario de Filosofía de las Matemáticas "Historia de los Fundamentos de las Matemáticas"

Alejandro R. Garciadiego

I. Introduccion

La finalidad de este curso es familiarizar a los estudiantes de licenciatura (de los dos últimos años) con el estudio de la historia del desarrollo de la teoría de los números cardinales y ordinales transfinitos de Cantor y con algunas de sus consecuencias más importantes. El análisis se lleva a cabo a través del estudio de fuentes primarias y secundarias. Este no es un curso netamente culturalista. No se trata de asimilar una cantidad considerable de fechas y datos, aparentemente muy interesantes, pero desprovistos de contenido y significado por sí mismos. Contrariamente a lo que sugiere el título de la materia, no se trata de llevar a cabo un curso exclusivamente relacionado con conceptos matemáticos. Más bien pretendemos mostrar cómo es que las matemáticas y otras disciplinas se influenciaron recíprocamente a través de estos años. Nos motiva mayormente entender *por qué* distintos intelectuales del pasado decidieron intentar contestar ciertas preguntas o resolver ciertos problemas; nos interesa comprender las herramientas con las que contaban, y estudiar sus posibles respuestas.

Idealmente los conceptos e ideas que conforman este curso deberían formar parte del repertorio intelectual de cualquier persona educada, no únicamente de matemáticos y otros científicos. Por consiguiente el curso está abierto y dirigido a todo estudiante, independientemente de su formación.

Las lecciones se pueden impartir los días miércoles, jueves y viernes. Cada sesión está compuesta de dos partes. La primera es conducida en forma de seminario y está dedicada a la discusión de las lecturas asignadas para cada una de las clases. En la segunda parte, el profesor explica los puntos que requieran clarificación o explicación. Los estudiantes deben estudiar cuidadosamente las lecturas asignadas *antes* de clase y llegar al salón preparados con preguntas y observaciones para la discusión que debe surgir como consecuencia de las lecturas.

Los textos básicos del curso son:

1. Abraham A. Fraenkel. *Teoría de los Conjuntos y Lógica*. México: UNAM, 1976. (Instituto de Investigaciones Filosóficas. Cuadernos # 31);
2. Alberto Dou. *Fundamentos de la Matemática*. Barcelona: Labor, 1970.

En caso de no contar con ellos en el momento deseado, también pueden ser consultados:

1. Bertrand Russell. *Introducción a la filosofía matemática*, contenido en: *Obras Completas*. Madrid: Aguilar, 1973. Vol II, págs. 1263-1390. También editado en forma individual por: Barcelona: Paidos, 1988.
2. Ivor Grattan-Guinness (editor). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Madrid. Alianza Editorial, 1984. (Col. Alianza Universidad # 387). Capítulo V y VI, págs. 235-327.

La evaluación del curso está determinada por la presentación de dos reseñas y un examen final (33% cada uno de ellos). Las reseñas deben ser presentadas escritas a máquina, en papel blanco tamaño carta, a doble espacio. El texto de la reseña debe tener una longitud *mínima* de cinco (5) cuartillas y una *máxima* de siete (7), independientemente de las referencias y notas. No se deben aceptar trabajos que no cumplan con estas normas. Para realizar sus reseñas los estudiantes deben consultar el ensayo publicado por Garciadiego y mencionado como la primera lectura del curso. Los estudiantes deben consultar, además, revistas de investigación en historia y filosofía de las ciencias para comprender cómo debe hacerse una reseña. Una reseña aceptable no puede ni debe limitarse a la lectura única del libro asignado.

Las fechas de presentación y los trabajos a reseñar son:

1. **Novena semana de clases**- Abraham A. Fraenkel *Op. cit.*;
2. **Diecisietava semana de clases**- Alberto Dou. *Op. cit.*

3. **Última semana de clases.** Examen final. El material para el examen comprende: 1) el contenido en ambos textos básicos (reseñas), y, 2) el discutido en las sesiones de clase

II. Temario

Primera semana de clases

TEMA 0. GENERALIDADES.- Metodología del curso y evaluación

Segunda semana de clases

TEMA 1. INTRODUCCIÓN AL CURSO.- ¿Qué es la historia de las ciencias y de las matemáticas? Descripción de algunos de los elementos necesarios para llevar a buen término investigación en la historia de las ideas y de algunas de las fuentes a nuestro alcance.

Lecturas:

Alejandro Garciadiego. "Historia de las ideas matemáticas: un manual introductorio de investigación". *Mathesis* 12 (1996) 3-110.

Thomas Kuhn. "La historia de la ciencia", contenido en. *Ensayos Científicos*. México: Conacyt. 1980. 2da ed. págs. 63-85.

Tercera semana de clases

TEMA 2. GENERALIDADES.- Bosquejo general de los fundamentos de las matemáticas. ¿Cuáles son las hipótesis básicas de este relato? ¿Cómo se podría sintetizar la "interpretación estándar" de este evento?

Lecturas.

Howard Eves. *An introduction to the history of mathematics*. New York. Hold, Rinehart & Winston. 1976. (4th. ed.). Capítulo XV. págs. 473-483.

Morris Kline. *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días. III*. Madrid: Alianza Editorial. 1992. (Col. Alianza Universidad # 729). Capítulo LI. págs. 1562-1602.

Eric T. Bell. *Historia de las matemáticas*. México: FCE. 1985. (2da ed.). Capítulo 12. págs. 283-294.

Cuarta semana de clases

TEMA 3. ALGUNOS ASPECTOS BIOGRÁFICOS DE CANTOR.- La literatura matemática ha formado una imagen desfavorable de la personalidad de Cantor, llena de mitos y leyendas. Se han presentado diversas interpretaciones de la influencia del padre de Cantor y de las críticas de sus colegas, así como de sus frecuentes estancias en clínicas para enfermos mentales.

Lecturas:

Eric T. Bell. *Los grandes matemáticos*. Buenos Aires: Editorial Losada. Capítulo XXIX, págs. 643-670.

Ivor Grattan-Guinness. "Hacia una biografía de Georg Cantor." *Mathesis* 8₂ (1992) 153-210.

Joseph W. Dauben. "Georg Cantor y el Papa León XIII: las matemáticas, la teología y el infinito." *Mathesis* 7₄ (1991) 445-475.

Quinta semana de clases

TEMA 4. GENERALIDADES DE LA TEORÍA DE LOS NÚMEROS CARDINALES Y ORDINALES TRANSFINITOS.- Breve bosquejo de algunos de los resultados más importantes —y que mayores implicaciones han tenido— para el desarrollo de los distintos estudios sobre los fundamentos de las matemáticas.

Lecturas:

Hans Hahn. "El infinito", contenido en: James R. Newman (editor). *El Mundo de las Matemáticas*. Madrid: Editorial Grijalbo. 1974. Vol IV, págs. 384-401.

Joseph W. Dauben. "Georg Cantor y la teoría de conjuntos cantoriana." *Investigación y Ciencia* # 83 (Agosto 1983) 82-93. [*Tratar de fotocopiarlo a color*].

Sexta semana de clases

TEMA 5. EL GRÜNDLAGEN DE CANTOR.- En este ensayo defiende —con argumentos matemáticos, filosóficos y teológicos— su aceptación del infinito actual como un objeto existente en matemáticas. Expresa sus ideas sobre lo que posteriormente se llamaría la 'hipótesis del continuo' y el 'axioma de elección'.

Lecturas:

Georg Cantor. "Foundations of a general theory of manifolds". *The Campaigner* 9 (1976) 69-96 (en particular, § 1-3, 5-6 y 8).

Joseph W. Dauben. *Georg Cantor. his mathematics and philosophy of the infinite*. Camb, Mass.. Harvard University Press. 1979. Capítulo V, págs. 95-119.

Séptima de clases

TEMA 6. EL BEITRÄGE DE CANTOR.- En esta su obra culminal. Cantor expuso su construcción de los números cardinales finitos y mostró, entre otras cosas, que existen conjuntos cuyo número cardinal no es finito y que poseen características muy diferentes a las de los números finitos.

Lecturas:

Georg Cantor. *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*. New York: Dover. págs. 85-136

Joseph W. Dauben. *Georg Cantor: his mathematics* .... págs. 169-218.

Octava semana de clases

TEMA 7. LA TRADICIÓN ITALIANA.- El trabajo de Peano y el de su escuela italiana. Sus intentos por construir un nuevo lenguaje universal, y la elaboración de sus famosos axiomas.

Lecturas:

Hubert C. Kennedy. "The mathematical philosophy of Giuseppe Peano." *Philosophy of Science* **30** (1963) 262-266.

Giuseppe Peano. *Los Principios de la Lógica Matemática*. Oviedo, España: Pentalfa ediciones. 1979. Introducción, versión castellana y bio-bibliografía de Julián Velarde L.

Francisco Rodríguez-C. "La obra logicista de Peano y su escuela". *Mathesis* **4**$_2$ (1988) 221-299.

Novena semana de clases

Entrega reseña Fraenkel

TEMA 8. BURALI-FORTI Y CANTOR: EL ORIGEN DE LAS PARADOJAS.- El estudio de diversas fuentes primarias y secundarias nos permitirán juzgar en qué términos Burali-Forti y Cantor pensaron haber descubierto las paradojas de la teoría de conjuntos.

Lecturas:

Irving Copi. "The Burali-Forti Paradox". *Philosophy of Science* **25** (1958) 281-286.

Cesare Burali-Forti. "Una questione sui numeri transfiniti", contenido (en inglés) en: Jean van Heijenoort. *From Frege to Gödel: a source book in mathematical logic, 1879-1931*. Camb. Mass.: Harvard University Press. 1967. págs. 104-111 [únicamente págs. 104, 110-111].

Alberto Dou. *Op. cit.*, págs. 65-68.

Georg Cantor. "Letter to Dedekind", contenido en: Jean van Heijenoort. *Op. cit.*, págs. 113-117.

Décima semana de clases

No hay labores, recapitulación y síntesis de lecturas

Onceava semana de clases

TEMA 9. FREGE: OTRAS PERSPECTIVA DEL CONCEPTO DE NÚMERO.- De acuerdo con Russell, dos fueron las personalidades que mayormente lo influenciaron en su creación de una nueva filosofía de las matemáticas: Peano y Frege. En esta sesión se analizará el punto de vista de este último y cómo era qué pensaba fundamentar el concepto de número.

Lecturas:

Javier de Lorenzo. "Frege". *Investigación y Ciencia* (Sept 1979), págs. 100-112.

Michael D. Resnik. *Frege and the philosophy of mathematics*. Ithaca: Cornell University Press. Capítulos IV y V, págs. 137-214.

Doceava semana de clases

TEMA 10. *LOS PRINCIPIOS DE LAS MATEMÁTICAS* (1903) DE BERTRAND RUSSELL.- Este libro contiene la primera exposición sistemática y popular de las implicaciones matemáticas de los resultados de las obras de Peano y Cantor. Más importante aun, propone una nueva filosofía de las matemáticas apoyándose en los resultados matemáticos anteriormente discutidos.

Lecturas:

Bertrand Russell. *La evolución de mi pensamiento filosófico*. Madrid: Alianza Editorial. 1982 (2da. ed.). (Col. Libros de Bolsillo No. 605). Págs. 6-74 y 271-295.

——————. *Los Principios de las Matemáticas*. Madrid. Espasa-Calpe. 1967 (2da. ed.). Libro II, capítulos XI-XVIII y Libro V, capítulos XXXVII-XLIII, págs. 145-189 y 350-419.

Treceava semana de clases

TEMA 11. EL TEOREMA DEL BUEN ORDEN DE ZERMELO Y ALGUNAS DE LAS POLÉMICAS QUE GENERÓ.- En 1904, Ernst Zermelo demostró, por primera vez, el teorema del buen-orden haciendo suso explícito del axioma de elección. La publicación de esta breve nota provocó fuertes disputas entre matemáticos alemanes, franceses e ingleses, al menos.

Lecturas:

Gregory H. Moore. "The origins of Zermelo's axiomatization of set theory. *Journal of Philosophical Logic* 7 (1978): 307-329.

——————. *Zermelo's axiom of choice*. New York: Springer-Verlag. 1982. (Col. Studies in the History of Mathematics and the Physical Sciences # 8). Capítulo II, págs. 85-141.

Catorceava semana de clases

TEMA 12. PRIMERAS DISCUSIONES DE LOS PARADOJAS COMO CONSECUENCIA DE LAS POLÉMICAS EN TORNO AL TEOREMA DEL BUEN-ORDEN.- Las paradojas fueron inicialmente conocidas por los miembros de la comunidad matemática como consecuencia de las discusiones en torno a la prioridad de la demostración del teorema del buen-orden.

Lecturas:

Philip Jourdain. "On a proof that every aggregate can be well-ordered." *Mathematische Annalen* **60** (1905) 465-470.

Henri Poincaré. *Ciencia y Método*. Madrid: Espasa-Calpe. (Col. Austral # 409). Libro II, Capítulo III, págs. 111-123.

Louis Couturat. "For the logistic." *The Monist* **22** (1912) 481-523.

Quinceava semana de clases

TEMA 13. EL SURGIMIENTO DE OTRAS PARADOJAS: LAS SEMÁNTICAS.- Hasta ahora se ha supuesto el desarrollo de las paradojas no lógicas o semánticas como una simple consecuencia directa de las ya descubiertas por Burali-Forti, Cantor y Russell. Sin embargo, la lectura de las fuentes originales nos muestra que otros fueron sus orígenes.

Lecturas:

Bertrand Russell. "On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types." *Proceedings of the London Mathematical Society* **4** (1906) 29-53 [únicamente págs. 29-36].

————. "Mathematical logic as based on the theory of types." *American Journal of Mathematics* **30** (1908) 222-262 [únicamente págs. 222-227].

Jules Richard. "The principles of mathematics and the problems of sets", contenido en: Jean van Heijenoort. *Op. Cit.*, págs. 142-144.

Dieciseiava semana de clases

TEMA 14. OTRAS PARADOJAS SEMÁNTICAS Y SU PRIMERA CLASIFICACIÓN.- Otras paradojas semánticas surgieron como consecuencia de las anteriores. Algunos de estos resultados fueron descubiertos simultáneamente por distintos matemáticos.

Lecturas:

Jules König. "On the foundations of set theory and the continuum hypothesis", contenido en: Jean van Heijenoort. *Op. cit.*, págs. 145-149.

A. C. Dixon. "A question in the theory of aggregates". *Proceedings of the London Mathematical Society* **6** (1907) 317-319.

Alejandro R. Garciadiego. "Las paradojas semánticas", contenido en *Bertrand Russell y los orígenes de las 'paradojas' de teoría de conjuntos*. Madrid: Alianza Editorial, 1992. (Col. Alianza Universidad # 714). Capítulo V, págs. 167-187. [Traducido de: *Bertrand Russell and the origins of the set theoretic paradoxes*. Basel: Birkhäuser, 1992].

Diecisieteava semana de clases

Entrega reseña Dos

TEMA 15. LA METODOLOGIA DE LAS CIENCIAS.- En esta sesión se analizarán diversos modelos propuestos por filósofos e historiadores de las matemáticas acerca de cómo surgen los nuevos conceptos matemáticos.

Lecturas.

R. L. Wilder. "Hereditary stress as a cultural force in mathematics." *Historia Mathematica* **1** (1974) 29-46

Herbert Mehrtens. "T. S. Kuhn's theories and mathematics: a discussion paper on the 'new historiography' of mathematics". *Historia Mathematica* **3** (1976) 297-320.

Dieciochoava semana de clases

Examen final

Alejandro Garciadiego Dantan mexicano de nacimiento, obtuvo su doctorado en Historia y Filosofía de las Matemáticas en la Universidad de Toronto en 1983. Labora en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM, donde imparte cursos relacionados con estas disciplinas. Ha publicado artículos de investigación, formación y divulgación en *Historia Mathematica*, los *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques de Toulouse*, *Ciencias* y *Revista Mexicana de Física*, entre otras. Recientemente fue publicado su libro de investigación *Bertrand Russell and origins of the set theoretic paradoxes* por Birkhäuser Verlag (Basilea, Suiza); Alianza Editorial (Madrid, España) publicó también una versión castellana abreviada.