Mathesis 13 (1997) 131-146

Matemáticas y experiencia

Anastasio Alemán

Resumen

En este artículo se examinan dos concepciones empiristas de la matemática que han surgido como alternativas a la concepción tradicional sostenida por el denominado 'empirismo lógico'. Se trata de un empirismo radical sostenido por Maddy, Kitcher y Tymoczko y de un empirismo holista mantenido por Quine.

En el transcurso de nuestra crítica a estas concepciones se defenderá: (i) que los enunciados matemáticos no son empíricamente confirmables; (ii) que tampoco resulta posible disconfirmarlos empíricamente y (iii) que la concepción holista no representa ninguna ventaja decisiva sobre el empirismo radical ya que no puede soslayar los inconvenientes que aquejan a esta última posición.

Abstract

In this paper, we inspect two empiricist conceptions of mathematics which have arisen as alternatives to the traditional conception held by the so-called 'logical empiricism'. We deal with a radical empiricism held up by Maddy, Kitcher and Tymoczko, and about a holistic empiricism maintained by Quine.

In the course of our critic we will defend the following: (i) that mathematical statements are not empirically confirmable; (ii) that neither can they be disconfirmed by experience; and (iii) that holistic conception doesn't represent any decisive advantage over radical empiricism since the former cannot get round the objections that inconvenience

I

Durante los últimos años se ha producido en la filosofía de la matemática un nuevo 'revival' de cierto tipo de empirismo que no sólo no continúa la línea de interpretación de la matemática emprendida por el empirismo lógico sino que, en abierta confrontación con este, encuentra su precedente más ilustre en la interpretación más crudamente empirista de J. S. Mill. El conocimiento matemático, las verdades matemáticas, se fundamentan, en último término, en nuestras percepciones sensoriales y en generalizaciones inductivas a partir de ellas. He aquí tres ejemplos ilustrativos de esta posición:

> [...] en el proceso de adquirir la habilidad de *percibir conjuntos*, adquirimos también creencias intuitivas muy generales acerca de ellos, y los más simples axiomas de la teoría de conjuntos son versiones lingüísticas de aquellas. [...] [Maddy 1980, 196 (sin cursiva en el original)].

> Resumiendo, mi teoría del conocimiento matemático hace remontar el conocimiento de los individuos contemporáneos, a través del conocimiento de sus autoridades y mediante una cadena de autoridades previas, hasta el *conocimiento perceptivo* adquirido por nuestros ancestros remotos [Kitcher 1984, 7 (sin cursiva en el original)].

> Las verdades matemáticas de nivel medio son conocidas del mismo modo que las verdades científicas de nivel medio, a través de la *evidencia de nuestros sentidos*. Los axiomas fundamentales de las matemáticas son conocidos *inductivamente*, en razón de su eficiencia en generar las verdades de nivel medio [Tymoczko 1991, 208 (sin cursiva en el original)].

En rigor, una concepción empirista de la matemática alternativa a la sostenida por los empiristas lógicos surgió con bastante antelación a las posiciones acabadas de reseñar con la publicación en 1951 de "Two dogmas of empiricism" de Quine. Sin embargo Quine no sostuvo en ese artículo, ni en su obra posterior, incluido su último libro [1996], una posición tan crudamente empirista. Lo que Quine vino a sostener entonces fue que la matemática estaba imbuida de contenido empírico a través de su empleo en las teorías claramente empíricas como la física. No hay dos dominios separados de enunciados, de una parte los lógico-matemáticos cuya verdad se basa en reglas del lenguaje y de otra parte los enunciados factuales cuya verdad se basa en último término en la observación empírica; lo que hay más bien es un sistema más o menos completo de enunciados (holismo) interconectados entre sí pero que se enfrentan *conjuntamente* al tribunal de la experiencia.

> La totalidad de lo que llamamos nuestro conocimiento, o creencias, desde las más casuales cuestiones de la geografía y la historia hasta las más profundas leyes de la física atómica o incluso de la matemática o de la lógica puras, es una fábrica construida por el hombre y que no está en contacto con la experiencia más que a lo largo de sus lados. O, con otra

> simil, el todo de la ciencia es como un campo de fuerzas cuyas condiciones-límite da la experiencia. Un conflicto con la experiencia en la periferia da lugar a reajustes en el interior del campo: hay que redistribuir los valores veritativos entre algunos de nuestros enunciados. [Quine 1962, 76-7].

Tales reajustes, como consecuencia de un hipotético conflicto con la experiencia, no se limitan a cambios en los enunciados típicamente factuales sino que pueden afectar a los propios enunciados lógico-matemáticos.

A pesar de que no se mantiene aquí la existencia de un vínculo directo entre experiencia y enunciados lógico-matemáticos, tal como sí aparece en las tres citas iniciales, creo no obstante, por razones que resultarán claras posteriormente, que tal tipo de crudo empirismo, o empirismo radical, aparece como una especie de evolución natural, aunque radical, del empirismo holista[1] de Quine.

II

La tesis central del empirismo radical viene pues a ser del siguiente tenor. Conocemos las verdades matemáticas (o lógicas) básicas mediante 'la evidencia de nuestros sentidos' [Tymoczko 1991], esto es, 'mediante la percepción' [Maddy, Kitcher]. Así es a través de nuestras percepciones como comprobamos que no sólo hay dos huevos en el cartón sino, además, el conjunto formado por los dos huevos [Maddy, 1989, 58]; similarmente comprobamos o confirmamos la verdad de '2 + 2 = 4' observando, por ejemplo, que añadiendo dos huevos a una cesta que contenía otros tantos obtenemos un total de cuatro huevos, y que lo mismo sucede en el caso de las manzanas, conejos, libros, etc.

La primera réplica que a uno se le ocurre al pensar en esto es que una cosa es la operación puramente matemática de sumar números y otra bien diferente la operación física de añadir manzanas a manzanas o conejos a conejos, y que en el párrafo precedente se incurre en la

---

1 Sin embargo conviene advertir que aquí me estoy refiriendo sólo a la posición mantenida por Quine en "Two Dogmas" y que ha sufrido un importante cambio en su último libro [1995]. Mientras que antes negaba que hubiera una diferencia epistemológica sustantiva entre los enunciados de la matemática de una parte y de los de la ciencia natural de la otra, basándose en que ambos tipos poseían contenido empírico, merced a una red de interrelaciones que llega a los enunciados de observación, ahora mantiene la misma tesis pero sobre un fundamento diametralmente opuesto, porque aunque se reconoce ahora explícitamente que los enunciados matemáticos carecen de contenido empírico, esta característica, nos dice, es compartida también por multitud de 'verdades de la ciencia natural' [op. cit., 53].

más grosera confusión al mezclar ambas cosas. Sin embargo el defensor de la tesis empirísta podría replicar a su vez que él no está confundiendo ambos tipos de operaciones; que distingue perfectamente entre *operaciones ideales* entre números, realizadas por un agente ideal, y *operaciones reales* o empíricas entre objetos físicos realizadas por un agente real, pero que mantiene que las segundas son el fundamento, o la justificación. de las primeras [Kitcher 1984,109] [2] Así si los resultados de las operaciones empíricas realizadas sobre objetos físicos, y expresados en los correspondientes enunciados empíricos. están fundados en la percepción y tales resultados constituyen el fundamento, o justificación, de las operaciones ideales expresadas en los correspondientes enunciados matemáticos, entonces la justificación de estos últimos descansa, en último término, en la percepción. Dicho de otra forma: mediante la percepción confirmamos los enunciados matemáticos básicos, del mismo modo que mediante la percepción confirmamos que hay dos huevos en el cartón

Ahora bien, si mantenemos que los enunciados matemáticos resultan confirmados empíricamente mediante la percepción de sus correspondientes instancias empíricas entonces hemos de admitir que cada nueva instancia observada aumenta el grado de probabilidad o confirmación, o corroboración, del correspondiente enunciado matemático. Pero si esto es así entonces tendríamos que decir presumiblemente que el enunciado (1) 2 + 2 = 4, está más altamente confirmado. o corroborado que el enunciado (2) La raíz cúbica de 362 es igual a 7, por ejemplo. La verdad de cualesquiera de los enunciados matemáticos de un sistema no quedaría a la par, sino que unos resultarían más fiables que otros dependiendo del número y calidad de sus correspondientes instancias confirmatorias.

A mi modo de ver esta consecuencia basta por sí sola para descartar la concepción de la matemática que conduce a ella. Pues resulta sencillamente que nunca concebimos así a los enunciados que *consideramos* como puramente matemáticos. Pero ocurre, además. que tal concepción no puede siquiera ofrecer una explicación mínimamente aceptable de la verdad (en la matemática ordinaria) del simple enunciado (3) Para todo número natural hay otro mayor que él; pues ¿cómo podríamos confirmar empíricamente este enunciado? ¿Quizás dibujando filas de trazos del tipo |||||| y añadiendo a continuación otro más? ¿Y qué diríamos si se agotaran los medios físicos de añadir un trazo más?

2. Comentario aparte merecería otra importante tesis de Kitcher con la que no podemos dejar de estar de acuerdo, a saber, que "las verdades matemáticas son verdaderas en virtud de las estipulaciones que establecemos" [*op. cit.*. 110]. He defendido una tesis análoga en [1995b]

¿Quizás que (3) no era verdadero después de todo tal como erróneamente lo habíamos considerado?.

Tampoco resulta posible desde esta concepción dar cuenta de la verdad del enunciado geométrico (4) La proporción entre los lados de un triángulo con magnitud uno y su hipotenusa es la raíz cuadrada de 2. Pues ¿cómo podríamos *percibir*, o tan siquiera *medir*, para confirmar que tal número es el resultado correcto de la proporción? ¿Hay algún procedimiento de medida, que no presuponiendo que la raíz cuadrada de 2 es el resultado, permita obtener como resultado un número que no sea un número racional? Desde luego que con una regla convenientemente graduada se puede conseguir medir la hipotenusa con toda la aproximación necesaria para nuestras necesidades prácticas, pero el matemático insistirá con toda razón en que el número obtenido por tal procedimiento es un número racional y no el pretendido número real.

En análoga situación se encontraría el simple enunciado geométrico (5) Entre dos puntos cualesquiera de una línea hay infinitos puntos. ¿Cómo podríamos intentar siquiera confirmar empíricamente este enunciado? ¿Dividiendo en dos partes un segmento dado y volviendo a dividir cualquiera de las partes obtenidas y así sucesivamente? Pero por este procedimiento sólo conseguimos un número *finito* de divisiones por grande que sea; y esto aún suponiendo que la materia resultara divisible *n* veces, siendo *n* un número natural cualquiera. Es decir, que aún suponiendo que la materia resultara indefiniblemente divisible sólo conseguiríamos un número finito de divisiones; pero es obvio que cuando el matemático formula (3) no está diciendo simplemente que entre dos puntos dados hay *n* puntos más, siendo *n* un número natural cualquiera. En el caso del enunciado (5), como en el de (4), y a diferencia del caso del enunciado (1), no es posible siquiera hablar de una confirmación parcial, puesto que, simplemente, carece de cualquier instancia confirmatoria. En el caso de (1) 2 + 2 = 4 podemos señalar instancias físicas confirmatorias si es que se desea hablar así (aún cuando no pueda ser este el fundamento de la verdad de (1)); pero en el caso de (4) y (5) ni siquiera esto resulta posible, pues tanto en (4) como, más explícitamente, en (5) estamos afirmando la existencia de una infinitud de puntos y ningún procedimiento empírico nos podrá mostrar una sola instancia de tal cosa (véase Hilbert [1925, 371-2] para una clara defensa de este punto).

Más aún, como ya he indicado en otro lugar [1995a, 45-6], si esta concepción crudamente empirista de la matemática fuera correcta entonces tendríamos que decir que los matemáticos no se comportan de forma racional, pues según esta concepción los enunciados matemáticos básicos fundamentan su verdad en la percepción *empírica* (en contraste con la *pura* de Kant) y ningún matemático indica nunca el acerbo de percepciones, o las regiones espacio-temporales en las que se sitúa para obtenerlas, a fin de justificar sus enunciados matemáticos. Ni siquiera el físico se comportaría racionalmente, considerado desde este punto de vista, cuando en sus contrastaciones empíricas deja deliberadamente al margen la teoría matemática que emplea en la formulación de sus hipótesis. No sería de gran ayuda en este punto excusar la ausencia de registros de percepciones en las que fundar los enunciados matemáticos remitiéndose a *autoridades* previas hasta llegar al 'conocimiento perceptivo adquirido por nuestros remotos antecesores' [Kitcher 1984, 7]; pues si algo caracteriza al conocimiento adquirido por la especie humana en el transcurso de la historia, ha sido su constitución, al menos en sus momentos más creativos, en oposición a las *autoridades* admitidas hasta ese momento.

En mi opinión esta consecuencia bastaría también por sí sola para descartar la concepción de la matemática que conduce a ella.

III

Pese a que, como acabo de indicar, las consideraciones precedentes resultarían suficientes para descartar la concepción empirista radical de la matemática, creo no obstante que hay más razones que ofrecer en su contra.

Una de tales razones procede de lo siguiente: Si admitimos que los enunciados matemáticos resultan *confirmables* mediante la percepción u observación empírica, tendríamos que aceptar, simétricamente, que tales observaciones podrían igualmente *disconfirmar* a los enunciados matemáticos. Carecería de sentido decir de una teoría cualquiera *T* que podría resultar confirmada por la experiencia y negarse a continuación a admitir la posibilidad de que la experiencia pudiera, simétricamente, disconfirmarla. Cuando decimos que *T* es confirmable por la experiencia lo que queremos decir es que si la experiencia siguiera determinado curso; esto es, el que *T* vaticina, entonces *T* resultaría confirmada por ella, pero que si no siguiera ese curso entonces *T* quedaría disconfirmada en alguna medida. Así que si no fuera posible disconfirmar los enunciados matemáticos apelando a observaciones empíricas habríamos de admitir que tampoco resultarían confirmables por tal tipo de observaciones. Creo que esta es una idea que se encuentra implícita en Kant y que constituye el núcleo de las concepciones de Wittgenstein y de Popper sobre las relaciones entre teoría y experiencia.

Ahora bien, ¿es posible disconfirmar un enunciado matemático mediante observaciones empíricas? Abordemos esta cuestión comenzando por los enunciados matemáticos más elementales, tales como '2 + 2 = 4', que parecen tener aplicaciones directas a los objetos físicos de nuestro entorno más inmediato. Así que nuestra cuestión se convierte en: ¿cómo disconfirmar empíricamente '2 + 2 = 4'? Supongamos que ante esta cuestión la respuesta fuera: "podemos disconfirmar '2 + 2 = 4' apelando al hecho de que en ocasiones al añadir 2 gotas de agua a 2 gotas de agua en un frasco seco no resulta haber 4 gotas de agua" (ejemplo tomado de Popper [1967, 246]). Pero parece clara cuál es la réplica correcta a esto: mediante el hecho señalado no hemos disconfirmado el puro enunciado matemático '2 + 2 = 4' sino el enunciado físico 'si se añaden, o se ponen juntas, dos gotas de agua a otras tantas se obtendrán un total de cuatro gotas de agua' que atañe al comportamiento de las gotas de agua cuando se realiza la operación física de juntarlas, y no a las leyes, o reglas, que atañen a entidades, *prima facie*, no físicas como los números. En un caso *sumamos* números, en el otro no sumamos nada, simplemente *añadimos*, y resulta sencillamente que la última operación no aparece adecuadamente *representada* por la primera en casos como el precedente.

Lo anterior puede parecer una refutación concluyente de la posición que venimos criticando pero no lo es. El empirista radical podría admitir lo anterior y añadir a continuación:

> yo no mantengo que '2 + 2 = 4' resulte disconfirmado por el comportamiento de las gotas de agua cuando se colocan juntas; por mi parte diría más bien que en este caso, y en otros análogos, lo que ocurre es que la ecuación '2 + 2 = 4' no resulta aplicable. Más aún lo que mantengo más bien es que siendo el mundo como es '2 + 2 = 4' resulta ser, de hecho, verdadero en él. Y no es que con esto esté negando la posibilidad de disconfirmarlo. Lo que digo es que, para disconfirmarlo, la experiencia tendría que tomar un curso diferente al que sigue: por ejemplo, tendría que suceder que si disponemos de dos canicas y añadimos otras dos no resultará un total de cuatro canicas, o que si añadimos dos volúmenes de agua a dos volúmenes, de igual magnitud, de agua no resultara un total de cuatro volúmenes de agua. Si esto ocurriera, lo que diría es que después de todo '2 + 2 = 4' no tenía la validez general que habíamos inicialmente conjeturado, puesto que ha sido parcialmente disconfirmado por la experiencia.

Es decir, el empirista radical admite la posible parcial disconfirmación de los enunciados matemáticos, aunque rechaza que, de hecho, estén disconfirmados por la experiencia actual. Ahora bien, este es precisamente el punto crucial, porque lo que nosotros diríamos es que aún si la experiencia siguiera el curso hipotético anterior no habríamos disconfirmado con ello el enunciado puramente matemático '2 + 2 = 4' sino sólo al enunciado físico que afirma que añadiendo, o juntando, físicamente dos canicas a dos canicas obtenemos un total de cuatro; y que en este respecto no hay ninguna diferencia significativa entre este hipotético caso y el caso real del comportamiento de las gotas de agua.

Sin embargo, nuestro hipotético empirista radical lejos de darse por vencido podría contraargumentar a su vez formulándonos una pregunta bastante embarazosa:

> Bien, usted se niega a admitir que '2 + 2 = 4' resultaría disconfirmado aún en el caso de que la experiencia siguiendo un curso diferente al actual resultara ser de tal modo que cuando contamos dos canicas, contamos otras dos y las juntamos no obtenemos un total de cuatro canicas, pero ¿estaría dispuesto a mantener que tampoco resultaría disconfirmado si la experiencia tomara un curso tal que, análogamente a lo que le sucede a las gotas de agua, cuando se añaden, le sucediera lo propio a las canicas, a las piedras, o a los cuerpos físicos en general?

La pregunta resulta embarazosa por la dificultad de imaginar qué aspecto ofrecería un mundo tal. Sin embargo una vez repuestos de nuestro estupor inicial podríamos responder que, en un mundo así, la matemática ordinaria carecería simplemente de *aplicación*; pero no que hubiese sido disconfirmada por la experiencia de tal mundo. Al fin y al cabo una situación en la que una teoría matemática no tiene aplicación ocurrió en su momento con las geometrías no euclidianas y ocurre ahora con la aritmética de los cardinales transfinitos y no por ello contamos tales situaciones como una disconfirmación empírica de la correspondiente teoría matemática. (¿Diríamos también que las lógicas que admiten n valores de verdad y siendo n un número natural cualquiera, están empíricamente disconfirmadas?)

La geometría no euclídea de Riemann estuvo guardada durante mucho tiempo en el cajón de la historia hasta que Einstein la desempolvó para emplearla en su teoría física. Pero tal geometría, en cuanto teoría matemática, era la misma antes y después de su aplicación. Su fructífera aplicación incrementa indudablemente nuestro interés en la teoría; pero ni aumenta ni disminuye su carácter en cuanto teoría matemática. Y este punto nos pone en la pista de una diferencia radical entre una teoría física y una teoría matemática: Mientras que la falta de aplicación de una teoría matemática no le resta a esta un ápice de su carácter matemático, ¿estaríamos dispuestos a mantener que *T* es una teoría física aún cuando carezca de aplicación alguna al mundo de los fenómenos naturales? (Repárese en que no nos estamos refiriendo al caso en el que no sabemos si *T* tiene aplicación o no, sino al caso en el que no la tuviera, tanto si lo sabemos como si no).

La imposibilidad de disconfirmar empíricamente al enunciado matemático '2 + 2 = 4' proviene en definitiva de que no conceptualizaríamos a ninguna posible observación empírica como disconfirmatoria. Si contáramos 25 filas de soldados y 25 soldados en cada fila y luego contando los soldados uno tras otro y obtuviéramos como resultado un total de 624, lo que diríamos es que nos habíamos equivocado al contar o que alguno de los soldados había desaparecido aunque no supiéramos explicar cómo pudo ocurrir tal cosa. Lejos de usar el resultado empírico de la acción de contar como criterio de corrección (de confirmación o disconfirmación) del enunciado matemático '25 × 25 = 625', empleamos el enunciado como criterio de corrección de la propia acción de contar 'como paradigma para juzgar la experiencia' [Wittgenstein 1987, I-37, VI-23].

El punto crucial de toda la concepción de la matemática de Wittgenstein creo que se encuentra condensado en una sola frase que, curiosamente, aparece en una nota al margen del texto principal. "Una cosa no puede ser al mismo tiempo la medida y la cosa medida" [*op.cit.*, I-40]. Es decir, si '25 × 25 = 625' es usado como criterio de corrección en nuestros cálculos entonces no puede ser juzgado (confirmado o disconfirmado) por el resultado obtenido en cada caso de su aplicación. Y si, por el contrario, nos decidimos a considerar los concretos resultados de nuestros cálculos como criterio de corrección del propio enunciado, entonces éste ha dejado de ser usado como enunciado matemático, y lo hemos convertido, mediante nuestro nuevo uso, en un enunciado empírico susceptible de ser confirmado, o disconfirmado, por la experiencia de contar objetos físicos.

En definitiva, podemos usar '25 × 25 = 625' (o cualquier otro enunciado similar) de dos modos excluyentes: o como criterio, o norma, de corrección de los resultados obtenidos en nuestras operaciones empíricas de contar objetos, o como enunciado cuya verdad o validez dependa de su adecuación a los resultados obtenidos en tal tipo de operaciones.

Esta diferencia de uso constituye una diferencia lo suficientemente importante (crucial, en mi opinión) como para emplear rótulos diferentes para aludir a los dos tipos de enunciados generados por tales diferencias de uso en relación con la experiencia; 'enunciado empírico' en un caso y 'enunciado matemático' en el otro. (Wittgenstein habría hablado más bien de 'enunciado gramatical', puesto que el rasgo que hemos señalado para distinguir a los enunciados matemáticos también es compartido por otro tipo de enunciados que no pertenecen a la matemática, por ejemplo, 'El blanco es más claro que el negro' [1987, I-105]).[3]

El empleo del rótulo 'enunciado matemático' para aludir al correspondiente tipo de enunciados no es arbitrario como hemos visto. Se trata simplemente de utilizarlo para hacer explícito lo que es característico del uso de los enunciados que consideramos matemáticos (a diferencia de los enunciados empíricos) esto es, y por decirlo una vez más, su empleo como normas o criterios de corrección de las concretas operaciones de cálculo realizadas aquí y allá; pues constituye simplemente un hecho suficientemente obvio que existe ese uso y que empleamos la expresión 'enunciado matemático' para referirnos a los enunciados que usamos de ese modo.[4]

Queda suficientemente claro así que los enunciados que consideramos matemáticos no pueden ser disconfirmados, en ningún grado, por la experiencia y, consecuentemente con la conexión a la que aludíamos anteriormente entre confirmación y disconfirmación, tampoco pueden ser considerados como enunciados confirmados, o confirmables, por la experiencia, contrariamente a las pretensiones del empirismo radical.

3. Es decir, los enunciados matemáticos constituyen un subconjunto propio de los enunciados gramaticales o reglas. No es este el momento de proseguir el análisis de esta importante cuestión; mas sobre la conexión entre enunciados matemáticos y reglas puede verse mi artículo [1995b].

4. El carácter normativo, esto es, su uso como criterio o norma de corrección, de los enunciados matemáticos no aparece tan perspicuo ante enunciados como (6) La secuencia 7777 aparece en la expansión decimal de π o (7) Todo número par mayor que 2 es la suma de dos números primos (conjetura de Goldbach).

Ahora bien, puesto que (6) ha sido probado por computación (ver [Shanks y Wrench, 1962]) su uso como criterio o norma de corrección se pondría especialmente de manifiesto si dispusiéramos de un procedimiento empírico de medida de la longitud de un semicírculo físico de radio 1 que permitiera medir hasta la 1592 cifra decimal y tal que no apareciera la secuencia 7777 en sus últimos cuatro lugares. En este caso diríamos que el procedimiento empírico de medida era incorrecto empleando como criterio de corrección el enunciado probado por computación (6') La secuencia 7777 aparece en la expansión decimal de π a partir del 1589 lugar.

(7) no ha sido probado aún, así que no sabemos realmente si es o no una 'norma', pero suponiendo que lo estuviera ¿Cabe concebir un resultado empírico que lo violara (esto es, que lo disconfirmara)? Si la respuesta es no, entonces estaríamos usando el enunciado como norma. Si la respuesta es sí, entonces no estamos concibiendo el enunciado como matemático, sino como una generalización empírica cuyo destino veritativo se decide dependiendo de los resultados observados en este o aquel dominio de objetos físicos. (Esta nota tiene su origen en las agudas observaciones de un anónimo revisor de *Mathesis* a quien agradezco sus valiosos comentarios).

IV

Acabamos de ver cómo el empirismo radical fracasa en su pretensión de mostrar que los enunciados que consideramos matemáticos resultan disconfirmables (o confirmables) por la experiencia. Sin embargo, la otra variedad de empirismo, a la que denominábamos 'empirismo holista', representa un desafío mucho más sutil y complejo a nuestra tesis de que los enunciados matemáticos son de diferente naturaleza a los enunciados considerados comúnmente como empíricos. Pues en su versión holista este tipo de empirismo se caracteriza por mantener que, efectivamente, los enunciados matemáticos (como por otra parte cualesquiera otro tipo de enunciados, por ejemplo los enunciados empíricos) no son disconfirmables *individualmente* por ningún enunciado de observación que registre cualquier tipo de experiencia sensible. Los enunciados no se enfrentan individualmente al tribunal de la experiencia sino el sistema completo de enunciados del que forman parte. Y este sistema completo sí puede ser disconfirmado por la experiencia.

Desde este punto de vista la disconfirmación de los enunciados lógicos o matemáticos no se produce en su confrontación directa con la experiencia del modo en el que lo hemos visto operar en nuestros ejemplos anteriores, sino de un modo indirecto a través de las interconexiones que guardan con los enunciados físicos, formulados en lenguaje lógico-matemático, y de estos con los enunciados de observación más directamente vinculados con la experiencia sensible. La teoría como un todo se enfrenta a la experiencia que pretende describir y predecir, y su éxito o fracaso en esta empresa afecta, a través de las interconexiones teóricas, a cualquier enunciado del sistema. En esta línea, sería el desideratum de ajustar nuestras descripciones a los fenómenos naturales lo que podría conducirnos a descartar la geometría euclídea y sustituirla por la geometría reimaniana en la teoría de la relatividad, o a eliminar la ley de distribución de la lógica clásica y reemplazar esta por una lógica en la que ya no se mantenga esa ley [Putnam, 1969] como respuesta a determinados fenómenos cuánticos.[5] Desde este punto de vista no habría ninguna diferencia de principio entre un cambio de lógica y un cambio de teoría física como respuesta a lo observado en la experiencia.

---

5 Un análisis crítico detallado de esta idea de Putnam se encuentra en Dummett [1976]. La conclusión de Dummett es que en ningún caso "sería posible mantener que la invalidez de la ley distributiva fue un descubrimiento acerca del mundo" [op. cit., 288]. A una conclusión similar llega Holland [1992] al considerar el abandono de la geometría euclídea en la teoría general de la relatividad.

> ¿Qué diferencia de principio hay entre tal cambio [de la ley de tercio excluido] y el cambio por el que Kepler reemplazó a Ptolomeo, o Einstein a Newton, o Darwin a Aristóteles? [Quine 1963:78]

Así que si admitimos que la experiencia puede disconfirmar a una teoría física (y ¿cómo podría negarse esto?) y no hay diferencia de principio, en cuanto a su relación con la experiencia, entre una teoría física, o biológica, y una teoría lógica o matemática, hemos de concluir que la experiencia puede disconfirmar igualmente a una teoría lógica *y, a fortiori,* a una teoría matemática.

No cabe duda que estamos ante un argumento serio y convincente. Un argumento que durante mucho tiempo me ha dejado en la incómoda situación que se produce cuando uno reconoce la fuerza de una argumentación dirigida contra una convicción firmemente arraigada y sin embargo no se dispone de una réplica apropiada; cuando uno tiene la sospecha de que algo va mal en el argumento pero no acierta a señalar dónde está el fallo. Y sin embargo haberlo haylo, como veremos a continuación.

Al holismo no le falta razón cuando afirma que no contrastamos empíricamente a enunciados aislados sino al sistema completo del que forman parte, y que, por consiguiente, disponemos de un amplio margen de maniobra para elegir cambiar el valor de verdad de uno u otro enunciado para restablecer la adecuación empírica al enfrentarnos a una situación disconfirmatoria. Pero esto no implica (y si lo implicara sería una razón suficiente para descartar esta alternativa) que no haya que considerar disconfirmado a *al menos uno* de los enunciados del sistema si es que la teoría es empírica. Esto es, si la teoría completa T aparece empíricamente disconfirmada será porque al menos *uno* de sus enunciados resultará disconfirmado (aún cuando no quede necesariamente determinado cuál de ellos lo está). Sería simplemente incoherente decir que T está empíricamente disconfirmada pero que ninguno de sus enunciados lo está. Es decir la disconfirmación empírica de T *implica* la disconfirmación empírica de alguno de los enunciados de T, aunque no quede estrictamente determinado cuál, o cuáles, de ellos sean los disconfirmados. Esto quiere decir que si T es una teoría matemática y la consideramos empíricamente disconfirmable nos vemos obligados a tener que admitir (por muy holista que sea nuestra perspectiva) que al *menos uno* de sus enunciados será empíricamente disconfirmable; y, por *modus tollens*, tendremos que si *ninguno* de sus enunciados resultara ser empíricamente disconfirmable entonces si T es una teoría matemática no será disconfirmable empíricamente. Por otra parte hemos podido comprobar en las páginas precedentes que si T es una teoría matemática entonces ninguno de sus enunciados resulta ser empíricamente disconfirmable, pues aunque nuestra argumentación se haya basado en ejemplos concretos de enunciados matemáticos básicos como '2 + 2 = 4' resulta suficientemente claro que un argumento similar podría construirse para cualquier enunciado matemático que eligiéramos analizar. Se sigue así, por lógica elemental, de los dos párrafos precedentes, la conclusión a la que deseábamos arribar, a saber, que si T es una teoría matemática entonces T no es empíricamente disconfirmable; y esto aún cuando aceptemos la tesis holista acerca de que la experiencia no deja estrictamente determinado qué enunciado hay que considerar disconfirmado ante una situación disconfirmatoria de la teoría global; pues el punto crucial aquí es que por muy *indirecta*, o mediada a través de otros enunciados, que consideremos la relación entre los enunciados matemáticos y los enunciados observacionales que registran la experiencia, no podremos negar que puedan resultar disconfirmados por ésta y seguir manteniendo, al mismo tiempo, que no hay diferencia de principio entre enunciados matemáticos y enunciados físicos, por ejemplo.

Si, por otra parte, T no fuera una teoría puramente matemática sino una teoría física por ejemplo, que incorporara una teoría matemática, la situación no sería significativamente diferente. Pues enfrentados a una situación empíricamente disconfirmatoria dispondríamos de dos opciones: una sería considerar la parte matemática de la teoría a salvo de cualquier posibilidad de disconfirmación y esto nos llevaría pura y simplemente a la posición que venimos manteniendo frente a las dos variedades anteriores de empirismo; la otra sería admitir la posibilidad de disconfirmación de la parte matemática de la teoría y esto nos conduciría exactamente a la posición acabada de examinar anteriormente, o a otra aún más claramente inaceptable si es que resulta posible tal cosa.

Efectivamente,[6] si guiados por esta variedad de empirismo mantuviéramos que las confirmaciones globales de una teoría física cuentan también como confirmaciones de la teoría matemática en ella incorporada entonces tendríamos que aceptar, simétricamente, que las disconfirmaciones de la teoría física puedan contar también como disconfirmaciones de la teoría matemática que incorpora. Pero si

6 Reproduzco a continuación el argumento que formulé inicialmente en [1995a, 49] formando parte de una crítica al argumento de indispensabilidad en matemáticas. En este tipo de argumento se suelen transferir las confirmaciones empíricas de la teoría física a su parte matemática y de este modo imbuir de contenido empírico a esta última. Un análisis crítico de una nueva versión del argumento ofrecida por Resnik [1995] en un intento por evitar las dificultades que conlleva el uso de la noción de confirmación, se encuentra en mi artículo "El argumento de indispensabilidad en matemáticas" (por publicar).

hiciéramos esto, es decir, si al disconfirmar una teoría física contaramos tal fracaso como una disconfirmación de la teoría matemática incorporada en ella entonces nos veríamos conducidos a una situación inaceptable: Sean T_1 y T_2 dos teorías físicas rivales, formuladas en el lenguaje común de la aritmética ordinaria A, que implican respectivamente predicciones incompatibles sobre la posición de determinado cuerpo celeste en un momento dado. Así supongamos que T_1 implica E y que T_2 implica no E. Supongamos además que las observaciones relevantes permiten establecer que E es el caso. Si ésta fuera la situación entonces tendríamos que decir que E confirma a T_1 y disconfirma a T_2. Pero si E confirma a T_1, entonces, de acuerdo con el argumento que criticamos, E confirma a A; pero, puesto que E disconfirma a T_2, E disconfirma a A; luego tendríamos que concluir que E confirma y disconfirma a A.

En resumen, aún adoptando una perspectiva holista sobre las teorías no podemos evitar la conclusión de que si T es una teoría empírica entonces al menos uno de los enunciados de T ha de ser disconfirmable por la experiencia, y de aquí que si ninguno de los enunciados de T resulta ser empíricamente disconfirmable entonces T no es una teoría empírica. Puesto que según hemos mostrado ningún enunciado matemático resulta ser empíricamente disconfirmable, la conclusión final es que la matemática no es una teoría empírica.

V

Acabamos de comprobar que la matemática no puede resultar ni confirmada ni disconfirmada por las observaciones empíricas y que esto resulta ser así tanto si la consideramos como una teoría incorporada en una teoría física como si la consideramos aisladamente de tal tipo de teorías. Pero esto nos plantea un último problema: Si la relación entre una teoría matemática y la experiencia no es una relación de confirmación ni de disconfirmación, ¿qué tipo de relación hay entre ambas? ¿o es que no hay ninguna?

En mi opinión, como en la de otros,[7] esa relación es la de *aplicabilidad* en unos casos y de no aplicabilidad en otros. Mas el concepto de no aplicabilidad no debe ser confundido con el concepto de disconfirmabilidad. La confirmación o disconfirmación de una teoría presupone la aplicabilidad de ésta, aunque la aplicabilidad de una teoría

7. Por ejemplo esta es la concepción sostenida por Ryle, Lewy y Popper sobre los cálculos lógicos, y que Popper amplía al caso de los cálculos matemáticos, en el simposio citado en referencias. También Parsons ha defendido más recientemente una opinión similar en [1986, 382-3] y Balaguer, desde una posición ficcionalista, en [1996]

no implica que sea confirmable o disconfirmable. Así la matemática es susceptible de recibir aplicaciones en unos casos y no en otros pero en ninguno de ellos resulta disconfirmable (ni por tanto confirmable), según hemos visto. Sin embargo una teoría física puede (en rigor, *tiene* que) resultar disconfirmable por la experiencia, y por ende ser aplicable a ella. Cuando la órbita del planeta Mercurio no resultó ser la prevista por la teoría de Newton no se contó tal fracaso predictivo como una prueba de mala aplicación o de inaplicabilidad de la teoría a ese concreto planeta, sino como una disconfirmación, al menos parcial, de la teoría. Se suponía que la teoría *describía* (y predecía) con precisión el movimiento de cualquier planeta y resultó que esto no era del todo así. Sin embargo no planteamos tal tipo de demanda a una teoría matemática. Esta puede carecer de aplicación y no por ello la consideraremos disconfirmada: por la sencilla razón de que disconfirmación presupone aplicación, aunque esta no implique a aquella.

Anastasio Alemán es profesor titular de lógica y filosofía de la ciencia en la Universidad Autónoma de Madrid. Sus temas preferentes de investigación son la filosofía de la lógica y de la matemática. Algunas de sus publicaciones más recientes: *Teoría de las Categorías*. Tecnos, 2ª ed. 1996. "Objetos y propiedades". *Éndoxa* nº 9, 1997.

Agradecimientos

Agradezco a Javier Díaz Bada sus correcciones al borrador de este artículo.

Referencias

ALEMÁN, Anastasio. 1995a "El realismo en matemáticas". *Mathesis* 11: 37-51.

__________ 1995b "Wittgenstein: Lógica, matemáticas y convención". *Revista de Filosofía* 8: 57-75.

__________. "El argumento de indispensabilidad en matemáticas" (por publicar en *Teorema*).

BALAGUER, Mark. 1996. "A Fictionalist Account of the Indispensable Applications of Mathematics". *Philosophical Studies* 83: 291-314.

DUMMETT, Michael. 1976. "Is Logic Empirical?" (incluido en *Truth and other enigmas*. London. Duckworth. 1978).

HILBERT, David. 1925. "On the infinite" (incluido en: J. van Heijenoort (ed.). *From Frege to Gödel*. London. Harvard University Press. 1967).

HOLLAND, Robert A. 1992. "Apriority and Applied Mathematics". *Synthese* 92: 349-370.

KITCHER, Philip. 1984. *The Nature of Mathematical Knowledge*. New York. Oxford University Press.

MADDY, Penelope. 1980. "Perception and Mathematical Intuition". *The Philosophical Review* 89: 163-195.

_________ 1990. *Realism in Mathematics*. New York: Oxford University Press.

PARSONS, Charles. 1986. "Quine on the Philosophy of Mathematics" (incluido en: L. E. Hahn y P. A. Schilpp (eds.) *The Philosophy of W. V. Quine*. La Salle, Illinois: Open Court. 1986).

POPPER, Karl. 1967. "¿Por qué son aplicables a la realidad los cálculos de la lógica y la aritmética?" (incluido en: *El desarrollo del conocimiento científico. Conjeturas y refutaciones*. Buenos Aires: Paidós. Trad. de Néstor Míguez. (Original en Ryle y otros)) [*Conjectures and Refutations*. Routledge and K. Paul].

PUTNAM, Hilary. 1969. "Is Logic Empirical?" (contenido en: R. S Cohen y M. Wartofsky (eds.) *Boston Studies for the Philosophy of Science* 5: 216-241).

QUINE, Willard V. O. 1962. "Dos dogmas del empirismo" (incluido en: *Desde un punto de vista lógico*. Barcelona. Ediciones Ariel. (trad. de Manuel Sacristán). pp. 49-81 [*From a Logical Point of View* 2ª ed. Cambridge: Harvard University Press.]

_________ 1995. *From Stimulus to Science*. Cambridge: Harvard University Press.

RESNIK, Michael. 1995. "Scientific vs. Mathematical Realism: The Indispensability Argument" *Philosophia Mathematica* 3: 166-174.

RYLE, G., LEWY, C. y POPPER, K. R. 1946. "Symposium: Why Are the Calculuses of Logic and Arithmetic Applicable to Reality?" *Proceedings Aristotelian Society*, vol. sup. 20. pp. 20-60.

SHANKS, D. y W. WRENCH, J. Jr. 1962. "Calculation of π to 100000 decimals" *Mathematics of Computation* 16: 76-99.

TYMOCZKO, Thomas. 1991. "Mathematics, Science and Ontology" *Synthese* 88. 201-228.

WITTGENSTEIN, Ludwing. 1987. *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial. (Trad. de Isidoro Reguera de la versión inglesa) [*Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Suhrkamp. 1989].