

Resultados de un coloquio matemático

Jesús Padilla Gálvez

Karl Menger *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* (Eds. E. Dierker, K. Sigmund. Con contribuciones de J.W. Dawson Jr., R. Engelking, W. Hildebrand. Prefacio de G. Debrau. Epílogo de F. Ahl). Springer: Viena, 1998. 470 págs.

El nombre de Karl Menger está asociado con los avatares de Austria durante la primera mitad de este siglo. En su persona confluyen un haz de circunstancias dignas de ser tratadas a fondo. La reciente publicación de los *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* [*Resultados de un Coloquio Matemático*; abreviadamente *EMA*], no sólo nos permite acceder a una documentación imprescindible en geometría, lógica, probabilidad y economía sino, además, nos provee de trabajos capitales sobre dichos campos de trabajo que se desarrollaron en los años treinta.

Karl Menger nació en Viena el trece de enero de 1902, hijo del famoso economista y fundador de la *Escuela Austriaca de Economía*, Carl Menger y de Hermione Andermann, conocida novelista. Su hermano Anton fue profesor de Derecho y Max diputado liberal en el Parlamento. Su interés por la economía se evidenciaría posteriormente con la promoción de los trabajos de su alumno, L. Wald.

Karl Menger se matriculó en 1920 en física que abandonó unos meses más tarde para ocuparse de las matemáticas. Durante el año de 1921 escuchó las lecciones de Hans Hahn sobre el concepto de curva en la que partía del supuesto que no podía ser definida de modo satisfactorio. Unos días más tarde Menger logró solucionar dichas deficiencias [p. 114]. Durante un tiempo enfermó y a su vuelta a la Universidad pudo presentar una tesis completa de las curvas, lo que le proporcionó el título de doctor en la Universidad de Viena.

Con el fin de profundizar en topología, Menger estudió con Luitzen E. J. Brouwer, uno de los investigadores más conocidos de su tiempo. Mediante un método de aproximación simplicial y de grados de

imágenes continuas reconstruyó los poliedros demostrando así la invarianza de los números dimensionales. Brouwer reconoció la inteligencia de Menger y le ofreció un puesto como ayudante. Sin embargo, las relaciones entre ambos fueron empeorando, debido, sobre todo, a las posiciones políticas de Brouwer. Seguramente, de esta relación se entiende su interés por la lógica y los fundamentos de las ciencias exactas.

En 1927, después de su regreso de Holanda, consigue un 'Extraordinariat' en geometría en la Universidad de Viena. A su alrededor va forjándose un grupo de investigadores de diferentes ramas con las que investiga sobre topología. La topología centraba su estudio en la investigación de las conexiones estructurales que se realizan en el espacio. Dicha conexión era expuesta mediante una conexión algebraica.

Ahora bien, la cuestión central que no llega a resolver en las introducciones bibliográficas y temáticas al libro es sencilla: ¿cómo pudo congeniar Menger sus intereses e investigaciones en campos tan dispares como la topología, los fundamentos de la lógica, la economía y la teoría de la probabilidad? En esta reseña nos proponemos acercarnos a dichos motivos e indicaremos, a modo orientativo cuál fue su plan de trabajo y metodología.

En 1928/29 comienza la publicación de los *EMK* centrándose en la presentación de los resultados en topología. Las cuestiones centrales tienen que ver con saber qué espacios tienen una dimensión finita y qué espacios topológicos son describibles con múltiples dimensiones finitas. Se formula un teorema que posteriormente será demostrado por Nöbling y confirmado por Flores y que afirma: todo espacio métrico separable n -dimensional es homomórfico a un subespacio Euclideo $(2n+1)$ -espacio \mathbb{R}^{2n+1} [véase: Aroca]. Otros tópicos que se investigan son la curvatura y la continuidad. El método que se aplicaba en el coloquio era puramente conjuntista. Así pues, los métodos algebraicos o combinatorios son accidentales y están ligados a los invitados.

Con la invitación de Tarski y la publicación de los primeros resultados de Gödel en 1930 se introduce un nuevo foco de atención en los *EMK* [p. 130 ss.]. Presumiblemente, Menger intentaba hacer más comprensible el trabajo de Brouwer a una mayor audiencia en Viena. Con este fin invitó a Tarski a presentar una serie de conferencias sobre los resultados más importantes en metamatemáticas [p. 131]. Unos meses antes, Gödel había presentado su tesis doctoral "Sobre completud del cálculo lógico" en la que se demostraba la suficiencia del cálculo lógico de primer orden. Posteriormente, demostraría que un conjunto A de fórmulas de la lógica de primer orden es decidible respecto a

satisfacibilidad si, y solo si, existe un procedimiento automático que decida en un número finito de pasos para cada fórmula A , si es satisfacible o no [p. 145 s.]. Un año más tarde publicó un resumen sobre completud y consistencia [p.168 s.] en la que se presentan los resultados más destacados acerca de la incompletud y la imposibilidad de la autodemostración de consistencia de los sistemas formales que incluyan una parte de la aritmética.

Posteriormente, responde con la propuesta de un teorema del cálculo conectivo [p.176 s.]. A finales de 1931 presentaría una prueba de la independencia del cálculo conectivo [p. 191 s.] en tanto que demuestra que no es posible llevar a cabo cada prueba de independencia de fórmulas conectivas con ayuda de matrices con un número finito de valores veritativos. En un trabajo presentado sobre la aritmética intuicionista y la teoría de número Gödel mostró que cualquier fórmula conectiva clásicamente válida construida con el negador y el conjuntor puede ser traducida a una fórmula intuicionistamente válida. Debido a que la disyunción, la implicación y el bicondicional pueden ser definibles mediante el negador y el conjuntor, de aquí resulta que el conjunto de las fórmulas válidas de la lógica conectiva clásica se puede considerar como un subconjunto del conjunto de las fórmulas válidas de la lógica conectiva intuicionista [p. 216 ss.]. Al interpretar el cálculo conectivo intuicionista [p. 221 s.] y ampliar sus axiomas [p. 222] añade el conector monario B [Beweis: Demonstrable] que permite una interpretación epistémica ' Bp ' (es decir: p es demostrable) o'y modal ' Bp ' (es decir: ' p es necesario'). En un trabajo posterior se centra en considerar la longitud de las deducciones y advierte que al pasar de un sistema formal a otro superior se pueden, o bien, deducir fórmulas nuevas, u bien, podemos simplificar las deducciones [p.341 s.].

En 1933/34 se abre un nuevo foco de atención en los *EMK*. La economía. Se indaga acerca de las igualdades en la producción en la teoría de los valores económicos [p. 280 ss.]. Como es sabido, Léon Walras desarrolló una teoría estática mediante un gran número de relaciones cuantitativas (es decir: ecuaciones) entre elementos o variables económicas (es decir: precios y cantidades de bienes de consumo y producción o de servicios), concebidas como simultáneas y recíprocamente determinadas. El sistema Walrasiano de ecuaciones simultáneas acarrecaba nuevos problemas de naturaleza específicamente lógica. Dichos problemas giran alrededor de la determinación, el equilibrio y la estabilidad. Así pues, Wald formula matemáticamente la existencia de modelos de equilibrio general. Una característica clave de una economía interdependiente es la conexión de las distintas variables

representadas (oferta, demanda, renta, precios, etcétera) mediante un sistema de ecuaciones.

Si consideramos una distinción de los métodos analíticos al intentar *explicar* o *comprender* el fenómeno del interés nos encontramos ante el análisis de, primero, las 'causas' del interés y, segundo, una vez consolidado críticamente el resultado frente a otras 'teorías' se debe solucionar cómo se determina el tipo de interés. Ya que el sistema económico no se puede tratar como un conjunto de cosas indeterminadas nos vemos obligados a definir, primero, lo que han de significar sus 'elementos' (por ejemplo: 'interés'), antes de poder formular, segundo, los problemas exactos de su determinación sobre la base de ciertas propiedades de las funciones (relaciones) implicadas por dicha significación. Desde un punto de vista lógico, la prueba depende de que el problema pueda ser efectivamente resuelto y la investigación de las leyes sean reveladas por la solución. En dicho instante, como es sabido, habremos 'explicado' los elementos que deseamos explicar. Ahora bien, es pertinente preguntar si es posible formular más rigurosamente las condiciones de las que depende la existencia de dichas soluciones, y, en especial, la existencia de una solución única. Aquí entra en juego los resultados de Wald, publicados en los *EMK* en los que se formulan rigurosamente dichas condiciones.

El curso académico 1933/34 pasaría a la historia por abrir un nuevo foco de interés en los *EMK* y que estaba ligado a la teoría de la probabilidad [p. 296 ss.] Las posiciones analíticas de Bernoulli le condujeron a trabajar en la teoría de la probabilidad. Se estudia su teorema según el cual, con el aumento de número de casos, la probabilidad de que la desviación relativa siga siendo inferior a un límite asignado arbitrariamente tiende a 1.

La publicación de los resultados de Menger eran necesarios y son recomendables que sean adquiridos por cualquier biblioteca. Son un instrumento imprescindible para cualquier matemático, historiador de las matemáticas, en particular, y de la ciencia, en general. Ahora bien, dichas publicaciones que proliferan últimamente por doquier se están centrande en publicar un fotomontaje del texto original sin alteración alguna. Le antecede una serie de trabajos biográficos no siempre bien encajados y escritos, por lo general, por autores de renombre mundial para dar relevancia a la obra. Al ser las biografías un género difícil que exige una maestría especial y un conocimiento profundo del contexto, dichos trabajos se quedan, la mayoría de las veces en un mero *aperçu*. Los biógrafos no sólo han de comprender las dificultades individuales, las acciones y las obras de sus autores, sino que también han de conocer

los contextos sociales, los procesos políticos e intelectuales. Se sabe que muchos matemáticos y filósofos austriacos y alemanes querieron e intentaron volver a Austria y Alemania después de la Segunda Guerra Mundial. Por ejemplo, el trabajo de Karl Sigmund elude el problema objetivo e intenta entender este episodio de un modo subjetivo.

Los defectos de los estudios en general resultan no tanto de la limitada semblanza del matemático y su época, como de ciertas opciones metodológicas que se adopta. En primer lugar, un problema que hace especialmente difícil comprender la importancia de Menger es el 'autocentrismo' de los trabajos. El *Coloquio Matemático* era todo menos 'austrocentrista'. Sin embargo, las introducciones giran todas alrededor de los miembros austriacos del *Círculo*. No es esta una crítica de contenido, sino estrictamente metodológica. Más grave todavía es que los trabajos de introducción eludan un análisis serio de las obras de Menger. Es cierto que se recoge un texto escrito en italiano, y traducido al inglés con poco tino, sobre las ideas fundamentales y sus tendencias; pero no se concede el mismo espacio a obras fundamentales. La publicación de dicho texto evidencia la tendencia a eludir el análisis profundo. Lo que podía haber sido una introducción interesante de Menger acaba de convertirse en una suerte de textos recogidos donde muchos especialistas puedan leer trabajos publicados en los años treinta.

Jesús Padilla Gálvez, nació en Almería en 1959. Estudió y se doctoró en la Universidad de Colonia (R.F.A.). Ha sido Profesor invitado en numerosas Universidades Europeas, entre ellas Erlangen, Euz, Polidam y Cambridge. Actualmente trabaja en la Universidad de Castilla-La Mancha, Campus de Toledo. Ha sido recientemente Wittgenstein y el *Círculo de Viena* (1998) y publicado el *Tratado metateórico de las teorías científicas* (2000). Actualmente trabaja en el resurgimiento histórico de los programas metateóricos (metamatemática y metafísica) así como las críticas a dichas proyectos (Wittgenstein).

Referencias

- ARCOA, J.M. 1998 "Los problemas de realizabilidad e invarianza en la dimensión en los trabajos de Flores de Leuz". En: *Wittgenstein y el Círculo de Viena*. Cueta. Univ. Castilla-La Mancha p. 249-260

