Mathesis **III 3₂** (2008) 347 - 360.
Impreso en México. Derechos reservados © 2008 por UNAM (ISSN 0185-6200)

Historia de la teoría de representaciones, sus inicios

Roberto Martínez Villa

Introducción

El propósito de este ensayo es motivar a los posibles interesados a iniciar una discusión histórica en torno a los orígenes de un área de investigación en matemáticas, en este caso en particular, la Teoría de Representaciones de Álgebras de Dimensión Finita, dentro del contexto internacional y analizar el papel que han jugado algunos de los matemáticos mexicanos. Propondré algunas interrogantes iniciales cuyas soluciones no triviales podrán sugerir diversas líneas y enfoques de investigación. Además, en algunos casos, sugeriré algunas respuestas intuitivas e inocentes con el objetivo de iniciar esta discusión. Es necesario tomar en cuenta que he trabajado en esta área por más de treinta años y he seguido de cerca su desarrollo, casi desde los inicios del periodo moderno; por lo que mi punto de vista, lejos de ser objetivo, está teñido por mis propios intereses y prejuicios. Sin embargo, de manera similar a la desarrollada por Jourdain en torno a los orígenes de la teoría de conjuntos y lógica matemática,[1] pretendo que algunos de los que contribuyeron al desarrollo de estas ideas, compartan sus reflexiones sobre los orígenes de sus intereses matemáticos y cómo evolucionaron éstos, a la par que progresó y se transformó la propia disciplina. Para iniciar

1. Philip Edward Bertrand Jourdain (1879-1919) es conocido por la comunidad matemática por la traducción del alemán al inglés y por la introducción que realizara a los artículos sintácticos de Georg Cantor (1845-1918) titulados: ‘Contr ibuciones a la fundamentación de la teoría de los números transfinitos’ (1895-1897), publicados originalmente en el *Mathematische Annalen*. Jourdain, quien se había formado en Cambridge University bajo la tutela de Bertrand Russell (1872-1970), publicó una serie de artículos sobre la reciente historia de la lógica matemática y de la teoría de conjuntos. Al terminar los primeros borradores, Jourdain se los enviaba a quienes habían desarrollado las ideas ahí propuestas (*e.g.*, Cantor, Russell, Peano, Frege, entre otros) ; y éstos eran eventualmente publicados incluyendo dichos comentarios, sugerencias, correcciones y críticas.

dichas cavilaciones propongo cómo punta de partida la discusión de algunas de las cuestiones siguientes:

1) ¿Cómo surge una nueva área, en este caso en particular la Teoría de Representaciones, en el contexto internacional?

2) ¿Quiénes han sido las personalidades más influyentes?

3) ¿Hasta que punto los problemas y conjeturas iniciales han motivado el desarrollo del área?

4) ¿Qué factores intervinieron en la formación de un grupo mexicano?

5) ¿Cuál fue el papel que jugaron ciertas personas y ciertas políticas científicas?

6) ¿Cómo han evolucionado las problemáticas originales?

7) ¿Cuál ha sido la aportación de las diferentes generaciones?

8) ¿Cómo se han desarrollado otros grupos en el contexto internacional y qué factores han intervenido en su desenvolvimiento?

9) ¿Cuáles han sido los aciertos y los errores?

Para establecer un primer marco conceptual, propongo establecer una cronología de la historia de la Teoría de representaciones en las siguientes etapas:

1) Periodo formativo, de finales del siglo XIX a 1940.

2) Periodo clásico, 1940-1970

3) Periodo moderno: 1970-2005

4) Período contemporáneo: 2005-…

A su vez dividiré el periodo moderno en tres partes:

a) Inicios 1968-1973

b) Periodo efervescente: 1974-1988

c) Periodo de consolidación: últimos veinte años.

Para proponer un marco teórico que circunscriba nuestra futura área de discusión, describiré brevemente en que consiste la Teoría de Representaciones de Álgebras de Dimensión Finita y mencionaré algunos de los problemas que han influido en su desarrollo. Haré una cronología del surgimiento y evolución de los conceptos y estableceré la historia de la demostración de algunos de los problemas principales. De esta manera, se podrá apreciar de manera más objetiva el surgimiento del grupo mexicano y algunos de sus logros dentro del contexto internacional.

Curtis [1998] sugiere que los orígenes de la teoría de representaciones se remontan a la segunda mitad del siglo XIX, con trabajos de, entre otros, Richard Dedekind (1831-1916), George Frobenius (1849-1917) y William Burnside (1852-1927). Para 1897, Frobenius, publicó el primer trabajo de teoría de representaciones de grupos y Burnside el primer tratado en ingles de teoría de grupos. Posteriormente se unieron al proyecto: Schur (1875-1941), alumno del primero, y el alumno de Schur, Richard Brauer. También, de gran importancia para el nacimiento de la teoría de representaciones de álgebras fueron las contribuciones de Emmy Noether (1882-1935), Emil Artin (1898-1962) Richard Brauer (1901-1977). La primera enfocó la teoría de representaciones al estudio de los módulos sobre el álgebra de grupo y el último con la creación de la teoría de representaciones modulares. No fue sino hasta 1962, cuando apareció el libro de Ch. H. Curtis y I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, texto que habría de tener una enorme importancia en la formación de futuros investigadores en el desarrollo de la Teoría de Representaciones de Álgebras. El prefacio del libro es posible encontrar una descripción de esta rama de las matemáticas:

> La Teoría de Representaciones es el estudio de la realización concreta de sistemas de álgebra abstracta. Se originó en el estudio de grupos de permutaciones, y álgebras de matrices [...]. Ambos Frobenius y Burnside se dieron cuenta que la teoría de de representaciones de grupos iba de seguro a jugar un papel importante en la teoría abstracta de grupos finitos.

Así lo demostraron, por un lado, el teorema de Burnside: todo grupo finito G de orden $p^n q^m$, con p y q primos distintos, es soluble; y, por el otro, el teorema de Feith y Thompson [1960] sobre la solubilidad de los grupos de orden impar.

Inicios de la teoría de representaciones en México

Humberto Cárdenas había trabajado en cohomología de grupos y su interés por la teoría de representaciones se debía a que percibía una relación estrecha entre esta teoría y el álgebra homológica. Él y Emilio Lluis habían escrito a principios de los 70's un texto introductorio a la Teoría de Representaciones. Raymundo Bautista se había doctorado con Cárdenas sobre cohomología de grupos y era un entusiasta expositor del seminario de álgebra que se llevaba a cabo todos los martes a las 11 en el Instituto de Matemáticas de la UNAM.

Cuando en el verano de 1975, invitado por Cárdenas, Maurice Auslander visitó México, encontró un ambiente de entusiasmo por la nueva teoría y nos invitó a Raymundo Bautista y a mi a visitar la Universidad de Brandeis por un periodo de dos años, donde nos tocó presenciar buena parte de la creación, de lo que luego sería la teoría de Auslander-Reiten.

Fue Bautista quien pensó que la organización de un congreso internacional en México sería importante para consolidar un grupo en Teoría de Representaciones y convenció a Auslander de realizar la "Third International Conference on Representations of Algebras and Workshop" del 4 al 16 de agosto de 1980, en Puebla, México.

La reunión fue altamente exitosa, pues para entonces la Teoría de Representaciones estaba en plena efervescencia e influiría en la formación de la siguiente generación de representadores mexicanos: Francisco Larrión, Leonardo Salmerón y José Antonio de la Peña.

Problemas clásicos de la teoría de representaciones

Como se mencionó más arriba, la teoría de representaciones estudia la realización concretas de estructuras abstractas, por ejemplo; dado un grupo finito G, una representación de G es un homomorfismo $\varphi:G \rightarrow Gl(n,K)$ donde $Gl(n,K)$ es el grupo lineal de las matrices invertibles de tamaño $n\times n$. Si denotamos por KG el álgebra de grupo, es decir KG es el K-espacio vectorial con base los elementos de G y multiplicación el producto en el grupo extendido linealmente, entonces las representaciones del grupo se corresponden con los KG-módulos de dimensión finita, por lo que es equivalente el estudio de todas las representaciones de G con el estudio de la categoría mod_{KG} de los KG-módulos de dimensión finita. La categoría mod_{KG} es Krull-Schmidt, es decir, todo módulo finitamente generado tiene una única descomposición en suma directa de módulos inescindibles.

El anillo KG es un ejemplo de una K-álgebra de dimensión finita, para toda K-álgebra de dimensión finita Λ la categoría de Λ-módulos finitamente generados mod_Λ es Krull-Schmidt, así el objetivo principal de la teoría de representaciones sería: Encontrar todos los Λ-módulos inescindibles. Ejemplo: El álgebra de grupo KG. Se tienen dos casos:

1) La característica del campo no divide al orden del grupo: En ese caso se tiene: Teorema (W. Maschke (1858-1908)). El álgebra de grupo KG es semisimple si y sólo si la característica del campo no divide al orden del grupo. (Las álgebras semisimples de dimensión finita fueron caracterizadas por Wedderburn en 1908).

Teorema. Una K-álgebra de dimensión finita es semisimple si y sólo si es isomorfa a un producto finito de anillos de matrices con coeficientes en un anillo con división. En el caso semisimple los únicos módulos inescindibles son los módulos simples y estos corresponden a las columnas de los anillos de matrices.

2) El campo K tiene característica un primo p que divide al orden de G.
Teorema (Higman 1954). Sea K un campo de característica p y G un grupo cuyo orden es divisible por p. Entonces KG tiene sólo un número finito de inescindibles si y sólo si el p-grupo de Sylow de G es cíclico.
¿Qué pasa si el p-grupo de Sylow no es cíclico?

Ejemplo: $G = Z_2 \times Z_2$ y K un campo de característica 2.
En 1963, Krugljak demostró que las representaciones inescindibles de $K(Z_2 \times Z_2)$ se corresponden, salvo módulos proyectivos, con las formas canónicas de los pares de matrices de Kronecker (1870) las cuales, a su vez, están relacionados con los bloques de Jordan (1870), por lo que se puede dar una lista de todos los $K(Z_2 \times Z_2)$ módulos inescindibles. Sin embargo, la situación es muy diferente para primos distintos de dos, por ejemplo, no se conocen las representaciones del grupo $Z_p \times Z_p$ sobre un campo de característica p con $p \geq 3$.

Heller y Reiner demostraron, en 1961, que este es un problema de los que hoy llamamos salvajes, es decir la clasificación de los módulos inescindibles sobre $K(Z_p \times Z_p)$ para un primo $p \geq 3$ implicaría la clasificación de todas las representaciones inescindibles de las p matrices. El problema de clasificar los inescindibles de las tres matrices implicaría a su vez, la clasificación de los módulos inescindibles para toda álgebra de dimensión finita, según demostró Gabriel (1975). Encontramos entonces tres tipos de representación:

1) Álgebras de tipo de representación finita (sólo un número finito de inescindibles).

2) Álgebras de tipo de representación mansa, para cada dimensión los inescindibles se parametrizan por un número finito de curvas.

3) Álgebras de tipo de representación salvaje, la categoría de módulos inescindibles contiene los módulos inescindibles de cualquier otra álgebra, por lo tanto se considera imposible clasificar sus módulos inescindibles.

Ejemplo: El anillo de matrices triangulares: $\begin{bmatrix} K & 0 \\ V & K \end{bmatrix}$, con K un campo y V un K-espacio vectorial de dimensión finita es de tipo de representación finita si $\dim V = 1$, es manso si $\dim V = 2$ y salvaje si $\dim V \geq 3$.
Problemas:

a) Clasificar todas las álgebras de tipo de representación finita.

b) Estudiar las álgebras mansas, clasificarlas, encontrar sus representaciones inescindibles.

c) Entender lo que significa ser salvaje.

Para las álgebras de grupo KG es muy fácil demostrar lo siguiente: 1) Si KG es de tipo de representación infinita, entonces existen módulos inescindibles de dimensión arbitrariamente grande. 2) Si KG es de tipo de representación infinita, entonces existe una sucesión de enteros positivos: $n_1 < n_2 <... < n_k <...$, tal que para cada n_i existe un número infinito de módulos inescindibles de dimensión n_i. La afirmación de que 1) es cierto para toda álgebra de dimensión finita, se conoce como la primera conjetura de Brauer-Thrall. La afirmación, mucho más fuerte, de que 2) es cierto para toda álgebra de dimensión finita, se conoce como la segunda conjetura de Brauer-Thrall. Ambas fueron formuladas explícitamente por primera vez por Jans, quien obtuvo algunos resultados (1957).

Al inicio de los años setenta, la Teoría de Representaciones de álgebras empezaba a nacer como un área independiente, separándose de la Teoría de Representaciones de Grupos y del álgebra lineal.

Cronología de la Teoría de Representaciones.
Periodo Formativo

Siglo XIX.
1870 Estudio de una transformación lineal, teorema de Jordan.

1870 Clasificación de pares de matrices por Kronecker.

1897 Creación de Teoría de Caracteres por Frobenius.

1897 Primer libro en ingles de Teoría de Grupos por Burnside.

1898 Teorema de Maschke.

Siglo XX
1908 Teorema de Wedderburn sobre álgebras semisimples.

1907-1935 Trabajo de Schur, alumo de Frobenius, en representaciones de grupos.

1915-1933 Emmy Noether, anillos y módulos.

1928 Emil Artin, anillos artinianos.

Teoría Clásica
1940 Brauer, alumno de Schur, teoría de representaciones modulares.

1940 Nakayama, álgebras uniseriales.

1941 Brauer, estudio de conjeturas de Brauer-Thrall.

1954 Higman, álgebras de grupo de tipo finito en característica positiva.

1957 Jans, algunos resultados sobre conjeturas de Brauer-Thrall.

1958 Yoshii, clasificación (incompleta) de carcajes sin ciclos orientados de tipo finito.

1960 Feith y Thompson, solubilidad de los grupos de orden impar.

1961 Heller-Reiner, representaciones de $Z_p \times Z_p$ en campo característica $p > 2$ (salvaje).

1962 Curtis-Reiner, Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras.

1963 Krugjlak, representaciones de $Z_2 \times Z_2$ característica 2 (manso).

1966 Januz, inescindibles para álgebras de grupo en característica positiva.

1968 Kupisch, inescindibles para álgebras de grupo en característica positiva.

Teoría Moderna.
Inicio Teoría Moderna.
1968 Roiter, 1a Conjetura de Brauer-Thrall.

1970 Cárdenas, Lluis, Módulos semisimples y representación de grupos finitos.

1971 Auslander, dimensión de representación, álgebra de Auslander.

1972 Gabriel, clasificación de carcajes sin ciclos orientados de tipo finito.

1972 Cardenas, Seminario Teoría de Representaciones

1972 Kleiner y Gabriel, conjuntos parcialmente ordenados tipo finito.

1973 Bernstein-Gelfand-Ponomarev, versión de teorema de Gabriel-Yoshii.

1973 Donovan-Freislich y Nazarova, álgebras de carcajes sin ciclos orientados mansas.

1973 Nazarova-Roiter, 2a Conjetura de Brauer-Thrall (errores, métodos interesantes).

Teoría de Representaciones periodo efervescente
1974 International Conference on Representation of Álgebras, ICRA.

1974 Drozd, representaciones de parcialmente ordenados, similar a BGP.

1974 Auslander, la Brauer-Tharall para anillos artinianos.

1974 Gabriel tipo finito es abierto.

1974-1980 Auslander-Reiten, artículos sobre fundamentos de la teoría, posteriormente junto con Smalo y Solberg.

1975 Nazarova, parcialmente ordenados mansos.

1975 Auslander visita México.

1976 Dlab-Ringel, especies mansas.

1975 Nazarova, conjuntos parcialmente ordenados mansos.

1975-1977 Bautista y Martínez-Villa visitan Auslander.

1977 Kleiner-Roiter, categorías graduadas con diferenciación DGC.

1977 Bondarenko-Drozd, álgebras de grupo mansas.

1978 Shkabara, Carcajes mansos con una relación.

1978 Ringel y Auslander-Bautista- Platzeck-Smalo, componentes *A-R* de carcajes.

1979 Ringel, combinación de métodos Nazarova - Roiter y Auslander-Reiten.

1979 Brenner-Butler, generalización de funtores de *BGP*.

1979 Gabriel-Riedtmann, generalización de álgebras de grupo de tipo finito.

1979 Drozd, dicotomía manso-salvaje, versión incompleta.

1980 Primera reunión internacional, ICRA en México.

1980 *Kac*, dimensiones de módulos inescindibles sobre álgebras de carcaj salvajes.

1980 Gabriel-Bongartz-Riedtmann, cubiertas universales en teoría de representaciones.

1980-1983 Riedtmann y Waschbüsch, álgebras autoinyectivas tipo finito.

1980 Todorov y Happel-Preiser-Ringel, funciones aditivas y subaditivas.

1980 Brenner-Butler, funtores de inclinación.

1981 Happel-Ringel, álgebras de inclinación.

1981 Roiter, bases multiplicativas, versión incompleta.

1981-1982 Gabriel, Bretscher-Gabriel, Martínez-V, de la Peña, bases multiplicativas álgebras estándar.

1982 Webb, componentes *AR* álgebras de grupo.

1983 Martínez-V y de la Peña, cubiertas universales para carcajes ordinarios.

1983 Green, cubiertas y graduaciones.

1983 Bautista-Larrión-Salmerón, álgebras simplemente conexas sinceras.

1983 Happel-Vossieck, álgebras mínimas de tipo de representación infinita.

1983-1985 De la Peña visita a Gabriel.

1984 Bongartz, álgebras críticas simplemente conexas.

1984 Bongartz, Criterio para tipo de representación finita.

1984 Ringel, fundamentos álgebras mansas.

1985 Bautista-Gabriel-Roiter-Salmerón, versión completa bases multiplicativas.

"Punto Cúspide de la Teoría".
1985 Bautista 2a conjetura de Brauer-Thrall.

1985 Fischbacher, Bretscher-Todorov, algunas simplificaciones 2a Brauer-Thrall.

1986-1987 Baer-Geigle- Lenzing, álgebras preproyectivas, canónonicas y geometría.

1987 Happel, álgebras de inclinación y categorías derivadas

1987-1990 Erdmann, álgebras simétricas de tipo diédrico, semidiédrico y cuaternión generalizado.

1988 Crawley-Boevey, demostración completa dicotomía manso salvaje, estructura componentes *AR* álgebras mansas.

1990 De la Peña-Takane, métodos espectrales.

A finales de los 80´s se habían desarrollado las técnicas y los fundamentos para el estudio de las álgebras de dimensión finita y se habían resuelto muchos de los problemas iniciales. Las principales técnicas que se desarrollaron fueron las siguientes:

a) Auslander, Reiten y colaboradores: álgebra de Auslander, sucesiones que casi se dividen, dual transpuesto, categoría de funtores, el radical de una categoría. equivalencia estable, categorías contravarientemente finitas, etc.;

b) Gabriel y colaboradores: métodos de geometría algebraica, carcajes, cubiertas universales y otras construcciones de topología algebraica, etc.;

c) Ringel y colaboradores: carcajes de Auslander Reiten, combinación de métodos de la escuela de Auslander y la de Roiter, álgebras de inclinación, fundamentos para el estudio de álgebras mansas, etc.;

d) Roiter, Nazarova y colaboradores: representaciones de conjuntos parcialmente ordenados y de categorías de espacios vectoriales, problemas matriciales, algoritmos, categorías graduadas con diferenciación, BOCS, etc.;

Los teoremas más fundamentales que se resolvieron en orden cronológico fueron:

1. La Conjetura de Brauer Thrall.

2. Dimensiones de módulos inescindibles sobre álgebras de carcaj salvajes.

3. Criterio para tipo de representación finita.

4. Teorema de las bases multiplicativas.

5. Segunda conjetura de Brauer-Thrall.

6. Dicotomía manso salvaje, estructura componentes AR álgebras mansas.

Fue la segunda Conjetura de Brauer Thrall la que desató mayor polémica. En 1975, Nazarova y Roiter anunciaron una demostración de la Segunda Conjetura y durante algún tiempo el resultado se consideró demostrado por estos autores. Sin embargo, los investigadores que trataron de leer el trabajo de Nazarova y Roiter encontraron puntos difíciles de entender y llegaron a la conclusión de que contenía errores insuperables. En el artículo que escribiera en 1979 Claus Ringel sobre las conjeturas de Brauer-Thrall, habla de la fertilidad de éstas. Es indudable que los esfuerzos por resolverlas generaron nuevos conceptos e ideas en teoría de representaciones, por ejemplo; los intentos de Nazorova y Roiter por demostrar la segunda conjetura de Brauer Thrall dieron lugar al estudio de los conjuntos parcialmente ordenados y a las categorías de espacios vectoriales. Una demostración completa de la segunda conjetura tuvo que esperar a que avanzara la clasificación de las álgebras de tipo de representación finita, se introdujeran las cubiertas universales y se demostrara el teorema de las bases multiplicativas. Sería Bautista (1985) el primero en dar una demostración completa.

En el *Segundo Congreso Internacional de Representaciones de Álgebras*, Drozd presentó una demostración de la conjetura de Donovan-Freislich (1972), llamada dicotomía manso-salvaje. La demostración del teorema de Drozd que apareció publicada en ingles (1979) es muy esquemática, por lo tanto difícil de leer. En 1988 Crawley-Boevey W.W. publicó un artículo con la demostración completa de la dicotomía manso-salvaje que daba además sorprendentes resultados sobre la estructura de las componentes de Auslander-Reiten de una álgebra mansa. Crawley-Boevey utilizó en la demostración las ideas de Drozd y la noción de 'bocs' [*bimodules over categories*], introducida por Roiter en 1980. Durante los siguientes veinte años emergieron otras personalidades, se atacaron otros problemas, siendo el estudio de las álgebras mansas una de las líneas principales.

Periodo de Consolidación, últimos veinte años

El séptimo ICRA que tuvo lugar en Cocoyoc, México (1994) sería la última vez en la que participaran tres de las personalidades más importantes de la Teoría de Representaciones: M. Auslander, P. Gabriel, A. Roiter. Algunos de los matemáticos que han tenido más influencia durante los últimos veinte años han sido: Crawley-Boevey, De la Peña, Happel, Lenzing, Rickard, Skowronski y más recientemente, Keller.

Álgebras mansas.

La escuela de Kiev ha contribuido de manera importante al estudio de las álgebras de tipo de representación manso. Ringel en el segundo ICRA, explicó como los métodos desarrollados en Kiev se podían combinar con los de Boston para describir carcajes de Auslander-Reiten. Christof Geiss (1995), introdujo el método geométrico de las degeneraciones que sería muy útil en el estudio de las álgebras mansas. La forma cuadrática asociada a un álgebra de dimensión global finita ha sido una herramienta importante para el estudio de las álgebras de tipo finito y manso. Esta forma ha sido investigada por Barot y De la Peña.

Inspirados por el trabajo de Geiss y de la Peña, Larrión, Salmerón y G. Raggi, escribieron un texto sobre métodos geométricos para atacar problemas de tipo manso y salvaje. Los intentos por clasificar álgebras mansas han seguido un desarrollo paralelo al de las álgebras de tipo de representación finita. La escuela de Torun y en especial Skowronski y colaboradores, han hecho aportaciones fundamentales al estudio de las álgebras mansas, en particular al estudio de: las cubiertas universales de álgebras mansas, las álgebras fuertemente simplemente conexas y las autoinyectivas. La clasificación de álgebras mansas no se ha terminado, los resultados que se han obtenido han sido fruto del esfuerzo de más de treinta años de un grupo de representadores ubicados principalmente en: Alemania, Brasil, Canadá, Inglaterra, México, Polonia y Ucrania. Entre los líderes principales están: Assem, Cohelo, Crawley-Boevey, De la Peña, Drozd, Erdmann, Happel, Lenzing, Nazarova, Ringel, Roiter y Skowronski.

Otros temas que han predominado en este periodo son:

1. Álgebras derivadamente mansas.

2. Álgebras preproyectivas, canónicas y relación con geometría.

3. Homotopía y homología de carcajes

4. Teoría de BOCS.

5. Aplicaciones a las álgebras de Lie y grupos cuánticos.

6. Equivalencia estable y derivada.

7. Conjeturas homológicas.

8. Álgebras y Categorías A_∞.

9. Módulos grandes.

10. Cohomología de Hochschild y variedades soporte.

11. Álgebras Koszul.

12. Álgebras de Conglomerados.

13. Dimensión de representación.

En los últimos cinco años se ve la emergencia de una generación de representadores con una nueva visión de la teoría, entre sus miembros se encuentran en México: Barot, Geiss y Mendoza.

Referencias

Auslander, M., Reiten, I., Smalo, S. 1995. *Representation Theory of Artin Algebras*., Cambridge University Press. Col. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36

Assem, I., Simson, D., y Skowronski, A. 2006. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*. Vol 1. Cambridge University Press 206. Col. London Mathematical Society 65.

Curtis, Ch. 1998. *Pioneers of Representation Theory: Frobenius, Burnside, Schur and Brauer*. American Mathematical Society, London Mathematical Society. History of Mathematics Vol 15.

Curtis, Ch y Reiner, I. 1962. *Representation Theory of Finite Groups and associative Algebras*. Interscience Publishers, Wiley & Sons. Pure and Applied Mathematics Vol. XI.

Cárdenas, H. y Lluis, E. 1970. *Módulos semisimples y representación de grupos finitos*. México: Trillas. Serie Sociedad Matemática Mexicana, 1.

Cibils, C., Larrión, F., Salmerón, L. 1981. 'Métodos Diagramáticos en Teoría de Representaciones'. UNAM: Monografías del Instituto de Matemáticas 11.

Erdmann, K. 1990. *Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras*. Springer Verlag. Col. Lecture Notes in Mathematics 1428.

Gustafson, W. H. 1982. *The history of algebras and their representation, Representation of Algebras*, pag. 1-28. Springer Verlag. Lecture Notes in Mathematics 944.

Happel, D. 1988. *Triangulated Categories in the Representaion Theory of Finite Dimensional Algebras*. Cambridge University Press: London Mathematical Society. Lecture Notes Series 119.

Larrión, F., Salmerón, L., y Raggi, G. 1995. *Rudimentos de Mansedumbre y Salvajismo en Teoría de Representaciones*. México: SMM. Col. Aportaciones Matemáticas 5.

Martínez-Villa, R. 1990. 'Introducción a la Teoría Clásica de Representaciones de Álgebras'. UNAM: Monografías del Instituto de Matemáticas 23.

Ringel, C. M. 1984. *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*. Springer Verlag. Lecture Notes in Mathematics 1099.

Simson, D. y Skowronski, A. 2007. *Elements of the Representation Theory of Associative Álgebras.* Vol 2, Cambridge University Press: London Mathematical Society Student Texts 71.

__________. 2007. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*. Vol 3, Cambridge University Press: London Mathematical Society Student Texts 72.

Skowronski, A. 1996. 'Module Categories over Tame Algebras, Representation Theory of Algebras and Related Topics'. *Canadian Mathematical Society Conference Proceedings* Vol. 19, pag. 281-313.

__________. 2006. 'Selfinjective Algebras: Finite and Tame Type, Trends in Representation Theory of Algebras and Related Topics'. *Contemporary Mathematics* **406**: 169-238.