*Mathesis* **III 2₁** (2007) 197-204.


# Sobre consistencia y completitud en el sistema axiomático.

*Kurt Gödel*

### Protokolo del 15 de enero de 1931
### Sobre Consistencias y decisión en el sistema axiomático
### Discusión sobre la (ponencia del Sr. Gödel)

1 Protocolo[1] del 15 de enero de ~~1930~~ 1931[2] (¡Carnap <se encuentra> del 13 al 20 de enero de 1931 en Zurich!)[3]
Sobre consistencia y decisión en el sistema axiomático.
Discusión sobre (la ponencia del Sr. Gödel.)

Kaufmann pregunta, cómo se encuentra el debate sobre la decisión de las proposiciones de un sistema parcial.

Gödel contesta que, en tanto se pueda demostrar, dicha prueba ha de requerir medios que no pueden formularse en el marco del sistema parcial. Esto está también de acuerdo con su procedimiento demostrativo.

A partir de una cuestión <suscitada por> Hahn, llama [/] Gödel de nuevo a la memoria el pensamiento gestor de su prueba para la demostración de la imposibilidad de la consistencia. Se adjunta[4] la consistencia de un sistema al sistema mismo –y dicha adjunción[5] se puede llevar a cabo formalmente– entonces se

1. El protocolo se encuentra en el *Wiener Kreis Archiv* en Haarlem (Holanda) en la carpeta con la signatura WK.3. El año ha fue insertado manualmente en el manuscrito. En el bajo se puede leer una indicación en la que aparece el siguiente texto: „von Rose Rand angefertigt. Véase: *WKA*, WK 3, pp. 1-3 así como *RR*, Nachlaß liegt bei James Alt. 3 Cedar Ct. Roosevelt NJ 08555“.
2. Ambos años “1930” y “1931” fueron escritos a mano. En el mismo renglón se encuentra tachado 1930. Por encima aparece el año 1931. Por tanto pensamos que la conferencia fue impartida en enero de 1931
3. Está escrito a mano.
4. ‘Adjungiert’ significa en alemán ‘fügt man hinzu’.
5. Estamos ante una definición sintáctica. La ‘adjunción’ es una regla que se usa para construir determinados tipos de términos y enunciados.

puede decidir en dicho sistema ampliado una proposición primitiva indecidible, consecuentemente, no se puede mostrar la consistencia de un sistema en el propio sistema.

A la consulta <motivada por> Schlick, Gödel formula la conjetura del Sr. v. Neumann:[6] Si existe una prueba de consistencia finita, entonces se puede formalizar también. Por tanto envuelve la demostración gödeliana la prueba de la imposibilidad de la consistencia en general.

Hahn pregunta por la aplicación al sistema axiomático de Heyting.[7]

Gödel <contesta:> el sistema de Heyting es mas restringido que el de Russell [véase Whitehead y Russell 1910-1913].[8] Si es ω-consistente[9] entonces se pueden detallar en el sentencias indecidibles.

Hahn indica que uno de los planteamientos rectores de la prueba <es decir el que> "no existe absolutamente una totalidad con sentido[10] de lo construible" juega un papel decisivo desde que se desarrolló el procedimiento diagonal de Cantor [véase Cantor 1932] en la teoría de conjuntos. //

**2** Gödel apunta que la aplicación precisamente de dicho planteamiento parece cuestionar también si la totalidad[11] de todas las pruebas intuicionistas correctas encuentran un lugar en *un* sistema formal. Esta es la posición débil en la argumentación de von Neumann.

Kaufmann pregunta cómo se encuentra la consistencia de las sentencias que no tienen un par conceptual en común o por caso los axiomas de Peano [véase Peano 1889]: hay un primero y hay un último número.

Gödel replica que en la prueba de consistencia no atiende a los conceptos como tales. [/] No se trata en general de consistencia en el sentido del planteamiento informal [véase: Frege 1903].

6. Véase: J. v. Neumann, Zur Hilbertschen Beweistheorie. *Mathematische Zeitschrift*, 26, pp. 1-46.
7. Compárese: A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-Mathematische Klasse*, II, S. 42-56; 57-71; 158-169.
8. Véase: A. N. Whitehead / B. Russell, *Principia Mathematica*. 3 vol. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1910-1913.
9. En el protocolo no se puede leer fácilmente por lo que en la versión propuesta por Stadler encontramos algo tan absurdo como "o-widerspruchsfrei" [Stadler 1997, 279] que no tiene sentido. Ya que la discusión está enlazada a la propuesta formulada por Gödel en sus trabajos del año 1930 somos de la opinión que se debe leer como "Systeme ω-widerspruchsfrei", es decir como sistemas ω-consistente que es lo que proponemos en el texto [véase: Gödel 1930b, 213; 1986, 142].
10. En el texto aparece una falta de ortografía y encontramos: „Gesammtheit".
11. En el texto aparece: "Gesammtheit".

A la objeción <formulada por> Kaufmanns de que la consistencia informal no se pueda excluir, puntualiza Gödel: [/] que no se trata de ~~un~~ tal 'examen' de pruebas en el sentido de una teoría formal.
Neumann consulta si existen sistemas tan sencillos que se puedan mostrar de modo transparente la forma específica de las sentencias indecidibles.
Gödel responde que depende del sistema en el que se represente. Recuerda el recurso decisivo de su procedimiento. La representación isomorfa de las figuras deductivas en las que se derivan $f_2$ de las sucesiones numéricas de $f_1$ que ante todo permite la formulación interna de la prueba. Especifica entonces, por ejemplo, una figura deductiva $S(f_2)$, la "longitud" de la hilera pertinente $l(f_2)$,[12] entonces la demostración de $f_1$ se formula como sigue:

$$\text{Dem. } f_1 \equiv (\exists f_2)\ \{S\,(f_2)\ \&\ f_2\,[\ l\,(f_2)] = f_1\}$$

De este modo, se puede dar por satisfecho el símbolo $S$ o descomponerlo aún más. //

**3** Hahn llama la atención sobre el libro de Lusin [1930] "Sobre los conjuntos analíticos" [.] Lusin distingue en las pruebas de la existencia para los conjuntos de Borel[13] escrupulosamente las clases superiores si el procedimiento diagonal se suprime o no.
Inmediatamente después pregunta Hahn: [/] si se puede excluir del procedimiento gödeliano de demostración el procedimiento diagonal.
Gödel constata que la fórmula indecidible que ha sido por él propuesta se puede construir realmente. Su contenido es finito como la conjetura de Goldbach[14] o el <teorema> de Fermat.[15]
Sobre una observación de Kaufmann opina finalmente Gödel: [/] que el intuicionismo postulado por Brouwer [1925] no se altera por su trabajo debido a que precisamente no quiere estar contenido en ningún sistema formal.

---

12. K. Gödel denomina $S(f_2)$ una figura deductiva, $l(f_2)$ la longitud de la hilera pertinente y denota la demostración de $f_1$ mediante una fórmula sencilla, a saber: Bew. $f_1 \square (f_2)\ \{S\ (f_2)\ \&\ f_2\,[\ l\ (f_2)] = f_1\}$.
13. Un conjunto boreliano se denomina a un elemento del álgebra de Borel. El álgebra de Borel se llama a la σ-álgebra $X$ generada por todos los subconjuntos compactos de un grupo topológico localmente compacto.
14. El texto hace referencia a la conjetura de Goldbach en la que se afirma que cualquier número par más grande que dos es el resultado de la suma de dos números primos. (La conjetura es denominada a Christian Goldbach, 1690-1764).
15. El teorema de Fermata afirma que si $n$ es un número entero mayor que 2, entonces no existen números enteros $x$, $y$ y $z$ (excepto las soluciones triviales, como $x = 0$ o $y = 0$ o $z = 0$) tales que cumplan la igualdad:

$$x^n + y^n = z^n$$

El teorema de Fermat pertenece a aquellos enunciados en el que se determina un procedimiento de *invalidez* pero no un concepto de *demostración*.

## Protokoll am 15. I. 1931
## Über Widerspruchsfreiheit und Entscheidbarkeit in Axiomensystem.
## Wechselrede z. (Referat Herrn Gödels.)

1 Protokoll[16] am 15. I. ~~1930~~ 1931[17] (Carnap 13.-20. I. 1931 in Zürich!)[18]
Über Widerspruchsfreiheit und Entscheidbarkeit in Axiomensystem.
Wechselrede z. (Referat Herrn Gödels.)

Kaufmann fragt, wie es mit der Entscheidbarkeit der Sätze eines Teilsystems steht.

Gödel erwidert, daß soweit sie sich beweisen läßt, dieser Beweis Mittel in Anspruch nehmen muß, die sich innerhalb des Teilsystemes selbst nicht formalisieren lassen. Das sei auch in Übereinstimmung mit einen Beweisführungen.

Auf eine Frage von Hahn ruft

Gödel noch einmal den Leitgedanken seines Beweises für die Unmöglichkeit des Widerspruchsfreiheitbeweises in Erinnerung. Adjungiert[19] man die Widerspruchsfreiheit eines Systems dem System selbst - und diese Adjunktion[20] läßt sich formal durchführen - dann wird in diesem erweiterten System ein im Ursprünglichen unentscheidbarer Satz entscheidbar, folglich kann die Widerspruchsfreiheit eines Systems im System selbst nicht gezeigt werden.

Auf eine Frage Schlicks formuliert Gödel die Vermutung Herrn v. Neumanns[21]: Wenn es einen finiten Widerspruchsbeweis überhaupt gibt, dann läßt er sich auch formalisieren. Also in[v]olviert der Gödelsche Beweis die Unmöglichkeit eines Widerspruchsbeweises überhaupt.

---

16. Das Protokoll befindet sich im *Wiener Kreis Archiv* Haarlem (Holland) unter WK.3. Das Jahr ist im Manuskript handgeschrieben. Unten kann man einen Verweis finden in dem steht: “von Rose Rand angefertigt. Nachlaß liegt bei James Alt. 3 Cedar Ct. Roosevelt NJ 08555”.
17. Beide Jahre “1930” und “1931” werden mit der Hand geschrieben. Auf derselbe Ebene steht 1930 und durchgestriechen. Oberhalb führt man das Jahr 1931.
18. Mit der Hand hinzugefügt.
19. “Adjungiert” steht für “fügt man hinzu”.
20. Hier stehen wir vor einer syntaktischen Definition. Die Adjunktion ist eine Regel zum Aufbau bestimmter Arten von Termini und Aussagen.
21. Siehe: J. v. Neumann, Zur Hilbertschen Beweistheorie. *Mathematische Zeitschrift*, 26, S. 1-46.

Hahn fragt nach der Anwendung auf das Axiomensystem von Heyting.[22]

Gödel [antwortet:] Das System Heyting ist enger als das von Russell [Whitehead y Russell 1910-1913]. Ist es ω-widerspruchsfrei[23] dann lassen sich in ihm unentscheidbare Sätze angeben.

Hahn verweist darauf, daß einer den Grundgedanken des Beweises "Es gibt keine sinnvolle Gesamtheit[24] des Konstruierbaren schlechthin" seitdem Cantorschen Diagonalver-fahren[25] in der Mengenlehre eine entscheidende Rolle spielt. //

**2** Gödel bemerkt, daß die Anwendung eben dieses Gedankens auch fraglich erscheinen läßt, ob die Gesamtheit[26] aller intuitionistisch einwandfreie Beweise in *einem* formalen System Platz findet. Das sei die schwache Stelle in der Neumannschen Argumentation.

Kaufmann fragt wie es etwa um die Widersprusfreiheit von Sätzen steht, die kein Begriffspaar gemeinsam haben oder etwa um die Peano-Axiomen:[27] Es gibt eine erste, es gibt eine letzte Zahl.

Gödel entgegnet, daß es bei einem Widerspruchsfreiheitbeweis auf die Begriffe als solche nicht ankomme.

Es handelt sich hier überhaupt nicht um Widerspruchsfreiheit im Sinne inhaltlichen Denkens.[28]

Auf den Einwurf Kaufmanns, daß inhaltliche Widerspruchsfreiheitbeweise nicht ausgeschlossen seien, stellt Gödel klar:

daß es sich bei ~~einem~~ solchen "Einsichten" überhaupt nicht um Beweise im Sinne einer formalistischen Theorie Handelt.

---

22. Hierzu: A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-Mathematische Klasse*, II, S. 42-56; S. 57-71 und S. 158-169.
23. Im Protokoll kann es sehr schwer gelesen werden. F. Stadler entscheidet sich für “o-widerspruchsfrei” (Stadler 1997, 279), aber dies ergibt keinen Sinn. Da die Diskussion an Gödel 1930 anknüpft und dort von “Systeme ω-widerspruchsfrei” handelt, so muss dies so gelesen werden. (Gödel 1930b, 213; 1986, 142).
24. Im Text steht “Gesammtheit”.
25. Siehe: Georg Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. In: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. (Hrg. Ernst Zermelo). Berlin, Julius Springer, 1932, S. 282-356.
26. Im Text steht: “Gesammtheit”.
27. Siehe: J. Peano, *Arithmetices principia, nova methodo exposita*. Turin, Edit. Fratres Bocca, 1889.
28. Siehe hierzu: G. Frege, *Die Grundgesetze der Arithmetik*. Bd. 2. Jena, 1903.

Neumann fragt an, ob es so einfache Systeme gibt, daß sich die konkrete Form des unentscheidbaren Satzes in durchsichtiger Weise angeben lässt.

Gödel erwidert, daß es dabei auf das System ankommt in dem man ihn darstellt. Er erinnert an den entscheidenden Kunstgriff seines Verfahrens. Die isomorphe Abbildung der Schlußfiguren auf Folgen $f_2$ von Zahlenfolgen $f_1$[,] der es überhaupt erst ermöglicht, die Beweisbarkeit intern zu formulieren. Bezeichnet dann z.B. S($f_2$) eine Schlußfigur, $l(f_2)$ die "Länge" der zugehörigen Kette,[29] dann schreibt sich die Beweisbarkeit von $f_1$

$$\text{Bew. } f_1 \equiv (\exists f_2)\ \{S\,(f_2)\ \&\ f_2[\,l\,(f_2)] = f_1\}$$

Damit kann man sich nun begnügen oder das Symbol S weiter auflösen. //

**3** Hahn macht auf das Buch Lusin aufmerksam "*Sur les ensembles analytiques*"[30][.] Lusin unterscheidet bei den Existenzbeweisen für die Borelschen Mengen[31] höherer Klassen sorgfältig, ob das Diagonalverfahren eingeht oder nicht.

Anschließend fragt Hahn:

ob sich auch aus der Gödelschen Beweisführung das Diagonalverfahren ausschließen lasse. Gödel stellt dem gegenüber fest, daß die von ihm angegebene unentscheidbare

29. K. Gödel bezeichnet dann S($f_2$) eine Schlußfigur l($f_2$) die Länge der zugehörigen Kette, und schreibt die Beweisbarkeit von $f_1$ mittels einer einfachen Formel:

$$\text{Bew. } f_1 \equiv (\exists f_2)\ \{S\,(f_2)\ \&\ f_2[\,l\,(f_2)] = f_1\}.$$

30. Siehe: N. N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*. Gauthier-Villars, Paris, 1930.

31. Die Borelsche Algebra ist ein Begriff aus der Mathematik, der einen Übergang zwischen den Zweigen Topologie und Maßtheorie bildet. Jeder Topologie lässt sich in eindeutiger Weise eine Boresche-Algebra zuordnen, die man die zugehörige borelsche σ-Algebra nennt. Für einen gegebenen topologischen Raum Ω ist die borelsche σ-Algebra definiert als die kleinste σ-Algebra, die die offenen Mengen von Ω enthält. Die Elemente dieser σ-Algebra heißen Borelmengen. Eine σ-Algebra auf einer Grundmenge Ω ist eine Menge von Teilmengen, die die Grundmenge enthält und die bezüglich Komplementbildung und abzählbarer Vereinigung abgeschlossen ist. Eine Grundmenge zusammen mit einer auf ihr erklärten σ-Algebra heißt auch Messraum. Dass genau eine solche *kleinste* σ-Algebra existiert, wird im Absatz über den σ-Operator gezeigt. Eine borelsche σ-Algebra ermöglicht es somit, einen topologischen Raum in kanonischer Weise mit der zusätzlichen Struktur eines Messraums auszustatten. Im Hinblick auf diese Struktur heißt der Raum dann auch *Borel-Raum*. Es sei G die Menge aller links-halboffenen Intervalle in $\mathbb{R}$ also Intervalle der Form (a, b) mit a, b $\in$ $\mathbb{R}$ und a $\le$ b. Dann heißt die von G erzeugte σ-Algebra *B* die Borel-σ – Algebra und die Elemente von *B* heißen Borelmengen. Die Borelmengen sind der Ereignisraum, falls der Merkmalraum $\mathbb{R}$ ist.

Formel wirklich konstruierbar ist. Ihr Inhalt ist finit wie der des Goldbachschen[32] oder Fermatschen Satzes.[33]
Auf eine Bemerkung Kaufmanns meint Gödel schliesslich:
dass der Intuitionismus nach der Auffassung Brouwers[34] durch seine Arbeit darum nicht berührt werde, weil er eben im keinem formalen System enthalten sein will.

**Referencias**

Brouwer, L. E. J. 1925. "Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik". *Mathematische Annalen.* **93**, S. 244-257.

Cantor, Georg. 1932. "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre". En: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. (Hrg. Ernst Zermelo). Berlin, Julius Springer, p. 282-356.

Frege, G. 1903. *Die Grundgesetze der Arithmetik*. Bd. 2. Jena,.

Gödel, Kurt. 1986. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I. En: Kurt Gödel, *Collected Works*. Volume I. *Publications 1929-1936.* (Ed. S. Feferman, J. W. Dawson, S. C. Kleene, G. H. Moore, R. M. Solovay, J. van Heijenoort). Oxford University Press, New York, Oxford, pp. 144-195.

__________.1995. *Collected Works*. Volume III. *Unpublished Essays and Lectures* (Ed. S. Feferman, J. W. Dawson, W. Goldfarb. y Ch. Parsons, R. N. Solovay). Oxford University Press, New York, Oxford. pp. 30-35.

32. Der Text bezieht sich auf die Goldbachsche Vermutung (nach Christian Goldbach, 1690-1764) die besagt, daß sich jede gerade Zahl außer 2 als Summe von zwei Primzahlen darstellen läßt.

33. Das Fermatschen Satzes behauptet, daß die diophantische Gleichung,

$$x^n + y^n = z^n$$

für $n \geq 3$ keine nichttriviale Lösung besitzt. Fermat notiert auf dem Rand seine diophantausgabe, daß er dies beweisen könne, einen solchen Beweis hat er aber nie publiziert. Der Fermatsche Satz wird von jedem Mathematiker als sinnvoll anerkannt. Es gehört zu jenem Typ von Aussagen, zu denen ein *Widerlegungsbegriff* festgelegt ist, aber kein *Beweisbegriff*. Ein Beweis kann durch Angabe einer Ableitung geführt werden. Somit ist eine Beweis durch schematische Ausführungen von Operationen mit Figuren entscheidbar, ob etwas eine Ableitung ist oder nicht. Auch die Negation (wir nennen sie (N)): (N) "*x* ist unableitbar in Kalkül", kann als definit angesehen werden. In der Negation (N) ist zwar kein Beweisbegriff festgelegt, es ist aber festgelegt, wie die Aussage zu widerlegen ist. Die Widerlegung vollzieht man durch einen Beweis der Ableitbarkeit von *x*. Somit ist ein Widerlegungsbegriff festgelegt.

34. Siehe: L. E. J. Brouwer, Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik, *Mathematische Annalen*, 1925, 93, S. 244-257.

__________. 1995. Introductory note to **1931?* En: Kurt Gödel, *Collected Works*. Volume III. *Unpublished Essays and Lectures* (Ed. S. Feferman, J. W. Dawson, W. Goldfarb, Ch. Parsons, R. N. Solovay). Oxford University Press, New York, Oxford, pp. 30-31.

Kleene, S. C. 1971. *Introduction to Metamathematics*. Amsterdam: North-Holland, Groningen.

Lusin, N. N. 1930. *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*. Paris: Gauthier-Villars.

Padilla G, Jesús 2006. Reseña de Friedrich Stadler, *Studien zum Wiener Kreis. Ursprung, Entwicklung und Wirkung des Logischen Empirismus im Kontext.* En: *Mathesis*, **III** $\mathbf{1_2}$: 391-401.

Peano, J. 1889. *Arithmetices principia, nova methodo exposita.* Turin: Edit. Fratres Bocca.

Peckhaus, Volker, reseña de Köhler, E. (Ed.); Weibel, P. (Ed.); Stölzner, M. (Ed.); Buldt, B (ed.); Klein, C. (Ed.) DePauli-Schimanovich-Göttig, W. (Ed.), *Kurt Gödel. Wahrheit und Beweisbarkeit. Vol. 1. Dokumente und historische Analysen*. Zentralblatt fur Mathematik 1014 ($2003_{14}$) 11-12.

Rand, Rose. 2002. "Wechselrede zum Referat Herrn Gödfels. Über Widerspruchsfreiheit und Entscheidbarkeit in Axiomensystemen". En: *Kurt Gödel. Wahrheit und Beweisbarkeit. Vol. 1. Dokumente und historische Analysen* (Ed. E. Köhler, P. Weibel, M. Stölzner, B. Buldt, C. Klein, W. DePauli-Schimanovich-Göttig). Öbv & Hpt, Wien, pp. 133-134.

Stadler, Friedrich 1997. *Studien zum Wiener Kreis. Ursprung, Entwicklung und Wirkung des Logischen Empirismus im Kontext.* Suhrkamp, Frankfurt a. M., , pp. 278-280.

__________. 2001. *The Vienna Circle. Studies in the Origins, Development, and Influence of Logical Empiricism.* New York: Springer Wien.

Whitehead, A. N. y Russell, B. 1910-1913. *Principia Mathematica*. 3 vol. Cambridge: Cambridge Univ. Press.