Mathesis II 4 (2001) 171-182

Los principios de la lógica hilbertiana

Jacques Herbrand

Durante los últimos años se ha desarrollado, bajo el resguardo del matemático alemán David Hilbert, una novedosa doctrina de lógica matemática con la que se pretende examinar y resolver todos los problemas y dificultades presentes tras cuarenta años de estudios en torno al fundamento de las matemáticas. Nos ha parecido interesante indicar brevemente las ideas fundamentales sobre las que se apoya esta doctrina, y la manera en que las utiliza. No pretendemos exponer en estas páginas las propias ideas de Hilbert, pues el instrumento que ha forjado es independiente de las mismas. Tan sólo queremos presentar las bases de su teoría de manera más clara y menos sujeta a objeciones en comparación con algunas otras exposiciones que se han dado.

La característica de esta nueva doctrina, que su fundador denomina "Metamatemática" queriendo expresar con ello que todas las cuestiones de principio concernientes a las matemáticas caen bajo su dominio, es que tiene por materia de estudio, no los objetos de los que se ocupan habitualmente los matemáticos, sino las frases que sobre tales objetos pueden pronunciar. La metamatemática considera las proposiciones que se pueden enunciar en tales teorías, e investiga sus propiedades características. Es, en cierto sentido, una matemática del lenguaje.

Para alcanzar sus fines, la metamatemática haría mal en tomar el lenguaje ordinario y estudiar las frases que se pueden formar con sus palabras. Este lenguaje se adapta muy mal a las matemáticas, por lo que es preferible servirse de un lenguaje especial más cómodo, que posee toda la simplicidad deseable y en el que se pueden expresar todas la frases dotadas de sentido en matemáticas, [i.e., lo que importa es preservar el sentido]. De hecho, tales lenguajes ya fueron creados por los logicistas Russell y Whitehead, en su célebre obra *Principia Mathematica* donde exponen uno particularmente simple, y donde no se tiene la necesidad de utilizar más que un número extremadamente limitado de signos, y del que derivan todos los lenguajes utilizados desde entonces.

Para comprender con claridad los principios de este lenguaje conviene recordar en qué consiste una teoría matemática: esta toma en consideración ciertas categorías de objetos y a su interior ciertos objetos particulares, ciertas propiedades que pueden tener dichos objetos y ciertas relaciones que pueden existir entre ellos. Por ejemplo, la aritmética estudia los números enteros positivos, y la relación fundamental que considera es la que prevalece entre dos números cuando el segundo se obtiene sumando la unidad al primero. Análogamente, la geometría estudia los puntos, y la relación fundamental que considera es la que existe entre tres puntos cuando se hallan sobre una misma línea recta. Se puede mostrar que todas las proposiciones ahí consideradas se pueden enunciar con base en estos objetos y esta relación. En adelante designaremos los objetos, las propiedades y las relaciones fundamentales con letras (tal como se hace con los números en el álgebra, o con los puntos en la geometría). En particular, ciertas letras que llamaremos 'variables' serán consideradas como indeterminadas, y representarán objetos *cualquiera* de cierta categoría de objetos (estas letras desempeñarán el mismo papel que la variables en el álgebra). Cuando queramos traducir a nuestro lenguaje una teoría determinada, estas letras serán siempre las mismas para un mismo objeto, relación o propiedad. La frase 'el objeto a tiene la propiedad ϕ' será traducido por ϕa, la frase 'los objetos a y b están unidos por la relación R' será traducida por Rab, y así sucesivamente. Tenemos de este modo cierto número de proposiciones básicas de la teoría, tales que cualquier otra proposición que pudiésemos enunciar en la teoría se puede construir a partir de ellas

De las investigaciones de Russell y Whitehead se sigue que para ello sólo se necesitan los tres siguientes signos (los cuales se podrían reducir aún más), un signo $\vee$ que significa 'o', un signo $\neg$ que significa 'es falso que' y un signo $\exists x$ (donde x es una variable) que significa 'existe un objeto x tal que'. (Por ejemplo, si P y Q son dos proposiciones, $P \vee Q$ significará 'P o Q', $\neg P$ significará 'es falso que P' y, finalmente, si ϕx es una proposición que contiene a la variable x, $\exists x \phi x$ significará 'hay un objeto x tal que ϕx').

Adicionalmente será necesario introducir un sistema de puntos que reemplazarán los signos de puntuación del lenguaje ordinario: un sistema de dos puntos será una puntuación más fuerte que un sistema de un punto, y en general, un sistema cualquiera de puntos será una puntuación más fuerte que un sistema con un número inferior de puntos (de este modo, en los ejemplos anteriores es necesario, para estar en lo correcto, hacer seguir al signo $\neg$ de un número de puntos superior al de cualquier sistema de puntos que figure en P, pudiéndose decir lo mismo de los signos $\vee$ y $\exists x$. Empero, en la práctica utilizamos reglas un poco más complicadas para evitar el uso de demasiados puntos en las proposiciones). Los autores de *Principia Mathematica* muestran entonces cómo todas las frases se pueden traducir con estos signos. Por ejemplo, «P implica Q» será traducida como $\neg P.\vee Q$ (es falso que P o Q). En adelante escribiremos $P \to Q$ en vez de $\neg P.\vee Q$ introduciendo de este modo un nuevo signo $\to$, al que habría que considerar como una abreviatura y que en esencia no es diferente a los otros. En tal caso, debemos suponer implícitamente que este signo se encuentra siempre reemplazado por su definición. De la misma manera, 'P y Q' será traducido por $\neg: \neg P.\vee.\neg Q$ (es falso que P o Q sean falsos), y escribiremos como abreviatura $P \wedge Q$. 'Cualquiera que se x, ϕx' será traducido por $\neg: \exists x.\neg\phi x$ (es falso que hay una x para la que ϕx es falso), y escribiremos como abreviatura $\forall x.\phi x$. No podemos indicar con más detalle cómo se procede en todos los casos, pero la conclusión a la que se llega es que, para traducir todas las proposiciones posibles, es inútil otros signos además de $\neg$, $\vee$ y $\exists x$. En adelante supondremos implícitamente que todas las proposiciones matemáticas que consideremos están escritas en este lenguaje.

Ahora que estamos en posesión de un instrumento más cómodo y más simple que el lenguaje ordinario, nos debemos preguntar bajo qué condiciones una proposición es verdadera en una teoría matemática determinada; es decir, analizar las reglas de razonamiento. La mayor parte de este trabajo también fue realizado por Russell y Whitehead. Recordemos en primer lugar que todos los razonamientos que hace un matemático en una teoría específica los lleva a cabo suponiendo verdaderas ciertas proposiciones determinadas de antemano y que dependen de la teoría. A estas proposiciones les llamamos 'hipótesis' o 'axiomas' de la teoría, términos que tendrán para nosotros el mismo sentido en adelante. Las demás proposiciones de la teoría se deducen de los axiomas con métodos puramente lógicos, por medio de reglas de razonamiento universales, independientes de la teoría en cuestión. Supongamos que todas las hipótesis están escritas en nuestro nuevo lenguaje. Puede haber un número finito de ellas, aunque también las puede haber en número infinito. Un ejemplo de esto último es el llamado 'axioma de inducción completa' en aritmética. Dicho axiomas

1. En nuestro lenguaje simbólico: $\phi 0 . \forall x . \phi x \to \phi x+1 : \to : \forall x . \phi x$

dice que si una propiedad es verdadera para 0, y si, siendo verdadera para x, también lo es para $x + 1$, entonces lo es para todos los números.[1] Cuando nos servimos de este axioma lo hacemos en relación a ciertas propiedades determinadas, por lo que es necesario considerar que da lugar a tantos axiomas como propiedades haya para aplicarlo, y que no es sino un esquema de una infinidad de axiomas, antes que un axioma propiamente dicho.

Nos falta considerar todas las reglas universales de razonamiento. Al respecto los autores de *Principia Mathematica* han mostrado que se les puede reducir a un número muy pequeño, y sus investigaciones permiten mostrar que todo razonamiento se puede llevar a cabo considerando exclusivamente las siguientes, de las que se deducen todas la demás:

Regla 1.- Se obtienen proposiciones verdaderas al reemplazar en las siguientes proposiciones las letras p, q y r por no importa qué otras proposiciones:

$p \vee p. \rightarrow p$, $p. \rightarrow p \vee q$, $p \vee .q \vee r: \rightarrow .q. \vee p \vee r$;
$q \rightarrow r. \rightarrow :p \vee r. \rightarrow .p \vee r$.

Regla 2.- Si P es verdadera y $P \rightarrow Q$ es verdadera, entonces Q es verdadera, donde P y Q denotan proposiciones.

Regla 3.- Si ϕx es una proposición verdadera, donde x es una variable, entonces $\forall x \phi x$ también es una proposición verdadera.

Regla 4.- Si ϕxy es una proposición que contiene a los objetos x e y (donde x es una variable e y un objeto determinado o una variable) que se torna verdadera cuando x es reemplazado por y, entonces $\exists x.\phi xy$ es verdadera.

Regla 5.- Una proposición sigue siendo verdadera cuando dentro de ella $\exists x \phi x.\vee p$ se cambia por $\exists x.\phi x \vee p$, o $\exists x \phi x.\wedge p$ por $\exists x.\phi x \wedge p$, y recíprocamente, siendo p una proposición que no contiene a x y ϕx una proposición que sí contiene a x.

Supongamos, por ejemplo, que buscamos las proposiciones que son verdaderas cuando no hay hipótesis. Son, en cierto sentido, aquellas que son verdaderas independientemente de las proposiciones básicas de que se forman. Se les llama 'identidades'. Las proposiciones que son verdaderas conforme a la regla 1 son algunos ejemplos. Podemos ver que es posible formar todas las demás identidades a partir de éstas, utilizando las cuatro reglas restantes. Una teoría matemática se caracteriza ahora por sus hipótesis, y todos los teoremas verdaderos de esta teoría se pueden obtener a partir de dichas hipótesis y las identidades provistas por la regla 1, utilizando las reglas 2, 3, 4 y 5.

Podemos por consiguiente razonar con los signos de nuestro lenguaje sin recurrir a cada instante a su significado en el lenguaje ordinario. Se les puede operar de manera puramente mecánica, sin preocuparse por su origen, llegándose a una especie de álgebra en la que se pueden hacer todas las matemáticas.

Este es el primer paso que se debe dar —paso que no se debe a Hilbert, pues éste lo ha tomado de sus predecesores—, a fin de plantear con claridad los problemas fundamentales de la metamatemática. Aquí se presenta una objeción: Nos podemos preguntar si *todas* las frases que se pueden pronunciar en una teoría matemática y *todas* las reglas de razonamiento que se pueden utilizar son precisamente las combinaciones de signos y las reglas previamente indicadas. Debemos reconocer que sólo tenemos una certeza experimental de tales hechos, principalmente con base en *Principia Mathematica*, donde sus autores han logrado reconstruir con estos signos y estas reglas (o reglas equivalentes) todo el fundamento de las matemáticas, e incluso a reconstruir ciertas teorías de manera avanzada. Ciertamente, no tenemos una razón *a priori* para creer que serán suficientes en todos los casos, pero tenemos la certeza más o menos absoluta de todo razonamiento considerado correcto hasta ahora en matemáticas se puede llevar a cabo con ellos. Es más, si un matemático, más o menos exigente, los quiere modificar, los métodos precedentes seguirán siendo aplicables a las teorías que construya, pues sólo su ropaje habrá cambiado, amén de que por el momento nos limitaremos a las teorías de uso ordinario, de las que podemos estar seguros que hemos logrado una traducción fiel y segura.

Hasta aquí tan solo hemos reemplazado el lenguaje ordinario con otro más cómodo, si bien esto no nos ha hecho avanzar en relación a los problemas relativos a los principios de las matemáticas. Hilbert ha buscado resolver aquellas cuestiones que se pueden plantear sujetándose al estudio de conjuntos de signos que son la traducción de las proposiciones verdaderas de una teoría determinada. Mas él ha querido que este estudio satisfaga las exigencias del rigor más absoluto, evitando tropezar con alguna de las objeciones que han levantado los detractores más severos de los métodos matemáticos habituales. Para ello se ha impuesto no emplear sino modos de razonamiento tan inmediatos que lleven consigo la convicción en todos los casos en que deban ser utilizados.

He aquí el tipo de razonamiento que será utilizado: consideremos una teoría matemática determinada, y busquemos asegurar que todas las proposiciones verdaderas de la teoría tienen cierta propiedad *A* (siendo diferente esta propiedad en cada caso particular, al cual caracteriza). En primer lugar exigiremos que esta propiedad sea tal que siempre se puede determinar si se verifica o no para una proposición dada, e incluso que se puedan especificar las operaciones que hay que efectuar para tal verificación. Además, habrá que mostrar que todas las hipótesis de la teoría y todas las proposiciones que resulten de la primera regla de razonamiento tengan la propiedad A, y esto mediante un razonamiento que estará descrito en detalle y que será posible repetir efectivamente con cualquiera de estas proposiciones. Por último se mostrará que si ciertas proposiciones poseen la propiedad A, esto también será cierto para aquellas que se puedan deducir aplicando alguna de las reglas 2, 3, 4 o 5, esto último mediante un razonamiento que se podrá repetir efectivamente en cada caso particular. Si ahora consideramos un argumento hecho en la *teoría*, éste consistirá en partir de hipótesis para llegar a una conclusión mediante la reiterada aplicación de las reglas de razonamiento, para cada una de las proposiciones intermedias que sea verdadera, la propiedad A será verdadera, lo que sin duda podrá ser verificado en cada paso del razonamiento. Al final de un cierto número de pasos, que dependerá de la longitud del argumento, llegaremos a la conclusión, que también tendrá la propiedad A. Por consiguiente, todas las proposiciones verdaderas de la teoría tendrán esta propiedad. Para todo razonamiento determinado podremos hacer tal constatación, y la demostración metamatemática precedente será en el fondo una método práctico —un manual de operación— que nos permitirá en cada caso llevar a cabo la verificación.

Todos los razonamientos metamatemáticos se hacen sobre el modelo precedente, eligiendo convenientemente las propiedades A. Nosotros examinaremos a la luz de este método dos de los problemas más importantes que se plantean en el estudio de las teorías matemáticas: nos referimos a la no-contradicción y al tercero excluido. Primero definamos dos términos de los que nos habremos de servir. Diremos que una teoría es *contradictoria* si en ella es posible demostrar un teorema y su negación, es decir, si para una proposición P, tanto P como $\neg P$ son verdaderas a la vez. Es fácil darse cuenta que si se han podido demostrar P y $\neg P$ a la vez (para una proposición P determinada), entonces se podrá deducir la verdad de cualquier otra proposición. De esta suerte, si P es verdadera en una teoría, añadiendo $\neg P$ a las hipótesis se obtiene una teoría en la que toda proposición es verdadera, lo que se expresa diciendo que de un resultado falso se puede deducir cualquier resultado, verdadero o falso.

Diremos que una teoría es *completa* si, para toda proposición P, se puede demostrar P o se puede demostrar su negación $\neg P$. Si una teoría no es completa, entonces hay un enunciado P tal que ni $\neg P$ ni P son verdaderas. En tal caso se demuestra que las teorías que se obtienen al añadir como hipótesis alguna de las proposiciones P o $\neg P$ son ambas no contradictorias; recíprocamente, cuando esto último es posible, la teoría en cuestión no es completa. De este modo, para demostrar que una teoría es incompleta nos vemos conducidos a un problema de no contradicción.

Para demostrar que una teoría es no contradictoria debemos encontrar una propiedad A que satisfaga las condiciones previamente indicadas, y con la particularidad de que si una proposición P la tiene, entonces su negación $\neg P$ no la puede tener. En tal caso jamás podríamos construir razonamientos que permitiesen demostrar a la vez una proposición P y su negación $\neg P$, porque podríamos verificar, como ya lo hemos dicho, que tanto P como $\neg P$ tendrían a la vez la propiedad A, lo que es imposible.

Al contrario, si lo que queremos es demostrar que una teoría es contradictoria, debemos encontrar una proposición P tal que tanto P como su negación $\neg P$ sean demostrables; y para demostrar que una teoría es completa debemos encontrar un procedimiento que permita, para cada proposición P, demostrar a P o a su negación $\neg P$. Así pues, de ahora en adelante contamos con los métodos que nos permiten investigar si una teoría es contradictoria o no, completa o no. Veamos ahora bajo qué condiciones los habremos de aplicar.

Muchas veces consideramos que, para que una teoría matemática no sea un vano juego de símbolos, un álgebra pura, como ya se dijo con anterioridad, debe ser la traducción de alguna cosa real; debe aplicarse a objetos realmente concebibles por el entendimiento. Es así que el estudio de los números ha dado lugar a la aritmética, el del espacio a la geometría, el del continuo al análisis, el de los conjuntos a la teoría de conjuntos. En tales caso, las proposiciones básicas de la teoría deben corresponder a las propiedades fundamentales que pueden tener los objetos estudiados y a las relaciones fundamentales que pueden existir entre ellos. De igual modo, las hipótesis deben corresponder a las proposiciones fundamentales verdaderas para ellos. Por tanto, debemos tener presente que nunca podremos estar seguros de que esta traducción sea fiel y que no se evidenciará, en un momento dado, como insuficiente. La teoría de conjuntos nos ha proporcionado algunos célebres ejemplos, y nos ha mostrado que es necesaria cierta prudencia antes de afirmar que tales propiedades son intuitivamente verdaderas para los objetos estudiados. La cuestión de los postulados de Euclides ya había mostrado este punto un siglo antes, aunque de un modo menos apremiante. El primer ejemplo nos proporciona un caso en el que las demostraciones de no contradicción serían sumamente útiles para disipar dudas; el segundo, nos proporciona un caso en el que había que demostrar que una teoría no era completa, cosa que fue resuelta sin el recurso de la metamatemática[2], aunque de manera insuficiente, pues lo que se mostró fue que las dos geometrías, la de Euclides y la Bolyai, eran simultáneamente contradictorias o no. Pero nada nos prueba que problemas semejantes no se presentan con teorías que nos parecen lo más acabadas, como la aritmética.

¿Sería posible entonces que aritmética fuese contradictoria? Sabemos que Brouwer sostiene que es ilegítimo razonar sobre el conjunto de todos los números enteros, pues le parece que esta noción no es suficientemente clara en sí misma, ni suficientemente presente en nuestra intuición. Por consiguiente, no sería imposible que los razonamientos que se sirven de él pudiesen conducir a alguna contradicción. También nos podemos preguntar si la aritmética es una teoría completa. Consideremos, por ejemplo, el famoso teorema de Fermat, según el cual es imposible hallar cuatro números enteros x, y, z y n (n mayor que 2) tales que $x^n + y^n = z^n$. No sería absurdo que fuese imposible demostrar este teorema, y que fuese también imposible demostrar su falsedad. Eso mostraría tan sólo que no tenemos una noción suficientemente precisa de todos los números enteros, y nos permitiría concluir que es posible desarrollar dos aritméticas no contradictorias, en las que el teorema de Fermat se supondría verdadero en una y falso en la otra. En una de estas teoría nos veríamos forzados a suponer que hay cuatro números x, y, z y n (n mayor que 2) tales que $x^n + y^n = z^n$ sin poder dar el valor de estos cuatro números; aún así, suponer su existencia no sería contradictorio. En la teoría de conjuntos se plantean problemas semejantes, y de manera mucho más urgente que en la aritmética. Hasta ahora, sólo los métodos de la metamatemática han permitido acometer estas cuestiones y han comenzado a dar respuestas.

El problema de la no contradicción se presenta también desde un punto de vista puramente matemático. Consideremos de nuevo el teorema de Fermat, y supongamos que lo hemos demostrado recur-

2 Cierto número de razonamientos, que nosotros habremos de incorporar a la metamatemática, estaban ya hechos, de una manera más o menos completa, antes de la invención de esta última. La mayoría de las veces tales razonamientos consistían en mostrar que ciertas teorías son no contradictorias o incompletas suponiendo que otras teorías, como la aritmética, son no contradictorias. No obstante, sólo la metamatemática permite plantear estos problemas con claridad en todos los casos.

riendo a ciertos razonamientos que Brouwer considera ilegítimos y que, sin embargo, los matemáticos utilizan a cada instante, haciendo intervenir, por ejemplo, al conjunto de todos los números enteros o a todos los números, conmensurables o no. Supongamos también que hemos logrado demostrar metamatemáticamente que la teoría obtenida al servirse de estas nociones no es contradictoria. En tal caso estaremos seguros de que es imposible encontrar cuatro números tales que $x^n + y^n = z^n$ (*n* mayor que 2), pues esto entrañaría la contradicción de la teoría cuando un razonamiento que satisface todas las exigencias de Brouwer ha mostrado que esto es imposible. Falta concluir de lo anterior que uno tiene el derecho de servirse de estas nociones prohibidas por que todo resultado que se demuestre utilizándolas como intermediarias no puede ser falso. Sólo estas nociones deberán ser consideradas por Brouwer como elementos sin significado real, como elementos ideales al decir de Hilbert. Es de esta manera que el fundador de la metamatemática piensa conciliar las exigencias de los intuicionistas que participan de las ideas de Brouwer con las de los matemáticos que no piensan abandonar ninguno de sus métodos habituales.

También la cuestión del Tercero Excluido se puede tratar fácilmente. Sabemos que el Principio del Tercero Excluido afirma que, dada una proposición *P*, o bien *P* es verdadera o bien *P* es falsa, es decir, que $P.\vee\neg P$ es una proposición verdadera en toda teoría. Este resultado se puede obtener sin ninguna dificultad con nuestras reglas de razonamiento, lo que nos permite servirnos de él en toda teoría, en las que por lo general interviene de la siguiente manera: se supone sucesivamente que *P* es verdadero y después que es falso, mostrándose en ambos casos se puede deducir una proposición *Q*, de donde se concluye que *Q* es verdadera en esta teoría. Por tanto, podemos emplear este principio en toda teoría donde nuestras reglas de razonamiento no conduzcan a contradicción. Mas de ello no resulta que *P* sea demostrable, o que $\neg P$ lo sea: la teoría puede ser incompleta. En otras palabras: es posible que ni *P* ni $\neg P$ sean verdaderas, y sin embargo, suponer en un razonamiento sucesivamente que *P* es verdadera, después que es falsa. Con ello nos vemos conducidos a dos sentidos bien distintos del Tercero Excluido: uno puramente matemático, que se traduce en el hecho de que $P.\vee\neg P$ es una identidad; el otro metamatemático, que nos lleva a preguntarnos si una teoría es completa.

Este es el aspecto general de esta nueva lógica. Ella sólo busca examinar las teorías ya existentes, y a estudiar las características de las proposiciones que son verdaderas en ellas. Esta nueva lógica no participa en las discusiones a las que dan lugar estas teorías, y no las pretende disipar. Tan sólo se limita a señalar que razonando de tal o cual manera, los resultados que se logran tienen tales o cuales propiedades. En lo que precede no hemos hecho otra cosa que indicar sus aplicaciones a las teorías matemáticas habituales. Ahora supongamos que nos encontramos en una teoría en la que se han modificado las reglas habituales de razonamiento. Como ya lo habíamos señalado, una vez formuladas dichas reglas los métodos metamatemáticos siguen siendo aplicables, y permiten el estudio de estas teorías. En ningún momento la metamatemática tratará de saber si una teoría dada describe convenientemente las propiedades de tal o cual objeto, o si corresponde o no a algo real; por lo demás, ella no lo podría hacer. A sus ojos, todas la teorías tienen el mismo derecho de ciudadanía.

Esta posición agnóstica disgustará a muchos, pero no deberíamos ocultar que el papel de las matemáticas es quizá únicamente el de proveernos de razonamientos y de formas, y no el de investigar cuáles de ellas se aplican a qué objetos. Así como el matemático que estudia la ecuación de propagación de onda no se debe preguntar si en la naturaleza las ondas satisfacen efectivamente esta ecuación, al estudiar la teoría de conjuntos o la aritmética no se debe preguntar si los conjuntos o los números que piensa intuitivamente satisfacen las hipótesis de la teoría considerada. Por el contrario, se debe limitar a desarrollar las consecuencias de dichas hipótesis y a presentarlas de la manera más sugerente; lo demás es tarea del físico o del filósofo.

Los resultados obtenidos hasta ahora con estos novedosos métodos son todavía magros. Son más las esperanzas que las realizaciones. Por lo demás, es necesario señalar la extrema dificultad de los problemas que se plantean. Entre todas las teorías matemáticas habituales, sólo se ha podido demostrar que la aritmética es no contradictoria, y esto bajo ciertas restricciones relativas al empleo del axioma de inducción. Hace cinco años Hilbert anunció que había demostrado la no contradicción de todo el análisis, e incluso de la teoría de conjuntos y de una célebre hipótesis de esta teoría, la hipótesis de continuo. No obstante, estas demostraciones no han sido publicadas y todo parece indicar que aún subsisten serias dificultades. De todos modos, hay otro camino por el que se puede transitar, y en el que se han obtenido resultados alentadores. Es el estudio de lo que los alemanes llaman el *Entscheidungsproblem*.[1] Este consiste en buscar un método que permita reconocer de golpe (al cabo de un número finito de operaciones que se podrá fijar de an-

---

1 Nota del traductor - Este vocablo se traduce como «problema de la decisión», traducción que es consistente con el sentido que se le da a continuación en el texto.

temano) si una proposición dada es o no es una identidad, y en el primer caso demostrarla. La solución de este problema permitiría reconocer si una proposición dada es verdadera en una teoría con un número finito de hipótesis, pues se puede demostrar fácilmente que si la demostración de un teorema P en una teoría solo hace uso de las hipótesis $H_1, H_2, \ldots, H_k$ entonces $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_k \rightarrow P$ es una identidad. Recíprocamente, cuando una proposición de este tipo es una identidad, P es verdadera en la teoría considerada. En particular, se podría reconocer si la teoría es contradictoria o no.[4] En general, para llevar a cabo todos los argumentos matemáticos habituales es posible arreglárselas con teorías que sólo tengan un número finito de hipótesis. Se ve en ello la importancia de este problema, cuya solución permitiría decidir de golpe la verdad de una proposición en una teoría determinada. Esto nos proporcionaría un método general que permitiría a la lógica matemática jugar, en relación a las matemáticas ordinarias, el mismo papel que desempeña la geometría analítica respecto a la geometría de Euclides. Este problema está lejos de ser resuelto, y sólo algunos casos aislados han sido tratados hasta ahora. No obstante, se le puede reducir a un problema puramente aritmético. A su vez, el estudio a a fondo de esta reducción arroja curiosos resultados sobre la estructura de toda demostración matemática y sobre cuestiones vecinas a las paradojas que resultan de considerar el 'conjunto' de todos los números definibles con un número finito de palabras. Mas nosotros no podemos profundizar aquí en estas cuestiones sin traspasar los límites que nos hemos impuesto.

Tales son los métodos de la metamatemática, y las direcciones en la que se compromete. Hasta ahora sólo se han dado los primeros pasos, faltando por explorar inmensas regiones. Pero los pocos resultados obtenidos son suficientes para mostrar el inmenso valor de la doctrina. Sólo ella permite dar respuestas decisivas que parecían haber escapado a todo tratamiento positivo. Poco a poco hará sentir su influencia sobre todas las ramas de las matemáticas, y proporcionará métodos para ellas. La realización de su más grande proyecto, la solución del *Entscheidungsproblem*, tendrá una repercusión considerable, acaso la misma por sus consecuencias prácticas que por las cuestiones de principio que permitirá resolver. Por lo demás, pareciera que esto no lo logrará en el futuro próximo. Los esfuerzos hechos en esta dirección

4 Sea P una proposición verdadera de la teoría. Con base en lo dicho al definir la no contradicción, para que la teoría sea contradictoria es necesario y suficiente con que $\bar{P}$ sea verdadera en esta teoría.

lo único que he logrado ha sido precisar la dificultad del problema. Mas esta ciencia data de ayer, y sus comienzos permiten presagiar el papel que está llamada a desempeñar.