Mathesis **IV 1**$_1$ (2017) 1 - 23.
Impreso en México. Derechos reservados © 2017 por UNAM (ISSN 0185-6200)

La Emergencia Abismal de la Matemática Moderna (I), Galois (1811-1832)

Fernando Zalamea [1]

Resumen

Se presenta una visión de conjunto de la obra de Galois: (ir) resolubilidad de ecuaciones algebraicas, teoría de números, funciones elípticas, modularidad, teoría de la ambigüedad. Se revisa la obra desde las perspectivas de su emergencia creativa y se discuten los manuscritos metodológicos de Galois.

Abstract

We present a general overview of Galois' works: (non) resolubity of algebraic equations, number theory, elliptic functions, modularity, ambiguity theory. We discuss the creative emergence of the diverse works and compare it with Galois' methodological manuscripts.

Keywords. Galois, algebraic equations, number theory, ellipticity, modularity.

MSC. 01A55, 20B30, 33E05.

Introducción

En una serie de tres artículos –*La emergencia abismal de la matemática moderna,* (I) *Galois* (*1811-1832*), (II) *Riemann* (*1826-1866*), (III) *Poincaré* (*1854-1912*)– vamos a presen-

1. Universidad Nacional de Colombia,
www.docentes.unal.edu.co/fzalameat/

tar algunas características mayores, tanto matemáticas como filosóficas, que permiten situar a la tríada Galois-Riemann-Poincaré en los fundamentos de la matemática moderna. Nuestra aproximación contempla cuatro objetivos: (i) observar los *fondos románticos* del pensamiento matemático moderno, cuyas expresiones técnicas parecen responder a la perfección a expresiones filosóficas y poéticas en Novalis; (ii) estudiar los fundamentos *matemáticos* de ese pensar (y no lógicos, muy distintos de aquellos que Cantor y Hilbert emprenderán más tarde), donde no se requieren bases para erigir el edificio, sino, muy por el contrario, se exploran *abismos contradictorios*, aparentemente vetados para la razón; (iii) calibrar algunas nuevas formas de *hacer* matemáticas (dialéctica de obstrucciones y tránsitos, vaivén de descensos y ascensos local/global, armonía negativa, plasticidad estructural, correlacionalidad en red), asociadas al planteamiento y a la resolución parcial de las grandes cuestiones que, aún hoy en día, impulsan el desarrollo de la disciplina; (iv) registrar algunos momentos cruciales en la *emergencia de la creatividad matemática*, que ayudan a desglosar el panorama y que permiten sugerir una tipología 'no estándar' (negación, oscuridad, puntos ciegos) para captar mejor la originalidad del espectro inventivo del siglo XIX.

1. Novalis: los abismos románticos

Los discípulos en Sais[1] exploran alegóricamente la problemática de pretender levantar los velos de la Naturaleza, *antinomia fundadora* del pensamiento que va acompañada

1. *Die Lehrlinge zu Sais* (inconcluso) se ha traducido como "Los discípulos en Sais", "Los aprendices de Sais", etc. Sais evoca a Isis, la antigua deidad del saber, cuyos velos ningún mortal es capaz de levantar. Los discípulos rondan alrededor de un *lugar* [*zu* = en], pero también intentan descubrir los misterios de una *figura* [*zu* = de]. Los siglos caen, nos contorsionamos y giramos, ejecutando imprevistas *Rondas en Sais*. Para otras formas de 'regresos' a ciertos lugares y "nuevos giros" de las figuras, véase [Zalamea 2011].

de una búsqueda pendular, oblicua, de *coherencias parciales*. En "La Naturaleza", la segunda parte de *Los discípulos en Sais*, una de las múltiples voces (que invitan al dialogismo posterior de Dostoievski y Bajtin) enuncia cómo "cada punto que se fija en el fluir infinito se convierte en una nueva revelación del genio del amor, un nuevo matrimonio del tú y el yo" [Novalis 1798, 291]. La antinomia heráclitea de la fijación y la fluxión, propia de cualquier acercamiento al tránsito de los saberes, se inscribe así en las bases del proyecto novalisiano, romántico, o, más extensamente, *moderno*. La celeridad y la translocalidad se encuentran reflejadas en el agitado discurrir de las inversiones y las reciprocidades novalisianas. Adentrándose en lo profundo, el genio alemán detecta el *necesario carácter abismal* de las contradicciones locales, que luego se suavizan en un *fluido translocal* globalizador, como el de su proyecto enciclopédico. El tránsito creativo procede así de unidades antinómicas a multiformidades coherentes.

Sobre la base misma de las oposiciones, una dialéctica superior permite reintegrar las diferencias, y, en varios lugares del *Borrador General* [Novalis 1799], se llega a hablar de la filosofía como un *cálculo diferencial e integral abstracto*. El joven subraya la importancia de una "inversión de los tres principios lógicos – de los cuales se derivan las tres antinomias lógicas y los tres problemas fundamentales"[1] [Novalis 1993 II 427]. En particular, el problema de cómo entender la contradicción $p\wedge\neg p$ (invirtiendo el principio de (no) contradicción) propulsa algunas de las más brillantes conjunciones dialécticas del poeta. En esa tarea, Novalis explicita algunas de las aporías fundadoras del saber: "Antinomia de la intención, o del proyecto – y del re-

1. Los "tres principios", siguiendo a Leibniz, son aquellos de identidad, contradicción y razón suficiente [Novalis 1993, vol. II, 536]. La *identidad* postula un entronque razonable entre idealidad y realidad. La *razón suficiente* se resume en el sintético dicho de Jan Zwicky: "nunca se llega a dos, cuando uno basta" [Zwicky 2004, 23].

sultado – o del proceso. Antinomia del concepto – y del objeto. Antinomia de la demostración – de la solución, etc.” [Novalis 1993 II, 403]. Su idiosincrásico *guión largo*, omnipresente en todas sus reflexiones, evoca un trazo de unión entre los opuestos. El fin (resultado, objeto, solución) y el medio (proceso, concepto, demostración) se contraponen, aunque a la vez se convocan entre sí y se unen en el guión largo, *puente sobre el abismo* y símbolo de una síntesis en el espacio-tiempo. Como lo indica Brian Kassenbrock, Novalis introduce en realidad una poderosa *geometría relativa*, donde el “tiempo y el espacio siempre se están intercambiando”, donde “la ley del tercio excluso no aplica” y donde los diversos mundos (interior/exterior, intelecto/naturaleza, cultura/ciencia) se “conectan”, se “mixturan” y forman parte de un continuo [Kassenbrock 2009, 191-193].

La unidad se expresa en un “*appetitus sensitivus e rationalis*” que desea “*todo contemporáneamente*” y que se proclama “opuesto al principio de contradicción” [Novalis 1993 II, 448]. A partir de un pegamiento de los contrarios, Novalis muestra cómo las representaciones de la *imaginación creativa* se *tri*-componen de razón, juicio y sensibilidad. Surge así una “*forma poética del mundo*” que rompe con los compartimientos estancos y que aborda sistemáticamente las *osmosis* del conocimiento. “Ser limitados e ilimitados al tiempo” y "estar ligados, de una manera infinita, con lo transmundano" [Novalis 1993 II, 449] forman parte de una *condición abierta* que impele y enaltece la acción del ser humano. Muchos artistas y pensadores posteriores parecen surgir en efecto de esa abismal simiente[1] de la *simultaneidad*. Novalis desbroza senderos y abre notables claros del paisaje en oscuras regiones prohibidas a la

1. Léase, a este respecto, uno de los bellos dísticos del poeta: “Amigos, el suelo es pobre, hemos de esparcir ricas semillas / que nos proporcionen humildes cosechas” [Novalis 1798, 191]. Las ‘ricas semillas’ produjeron, sin embargo, mucho más que ‘humildes cosechas’.

inteligencia y a la imaginación: "Desde la noche del abismo / luce un rayo de eternidad".[1]

La filosofía de Novalis se abre con particular acumen hacia el *flujo* del pensamiento. El flujo requiere tiempos y espacios amplios, cronología y *topología*: "La cronología es la teoría de la determinación de la longitud temporal de un hecho [...]. A la cronología se contrapone la teoría de la determinación del lugar en el espacio – la topología general" [Novalis 1993 II, 369].[2] El "*desarrollo* de una proporción" –el llevar "*una cosa a través de otra*" [Novalis 1993 II, 462]– permite aproximarse a lo heterogéneo y combinar fuerzas opuestas. A partir de espacios *libres*, indeterminados, surge entonces la posibilidad de "espacios *n* veces determinados"[3] [Novalis 1993 II, 359] mediante progresivos enlaces, relaciones, transiciones, quiebres, ramificaciones – como en el *cuerpo* humano, lugar fisiológico de encarnación de múltiples tensiones matemáticas y filosóficas. Los *entrecruzamientos abismales* del mundo se reflejan de hecho en los *ligamentos* del cuerpo, tal como Merleau-Ponty lo recalcaría y explicaría, siglo y medio después, en su brillante teoría del *entrelacs* y el *chiasme* [Merleau-Ponty 1960, 170-201]. Novalis presagia, en ese sentido, muchas formas complejas de la *teoría de redes* y la *teoría de nudos* (particularmente notables en Poincaré), donde los tejidos del Yo y el Mundo alternan puntadas en tramas y urdimbres superpuestas. La sensación es la de un *continuo fluir* entre polaridades, con atención especial a los *tránsitos contaminantes creativos* que permiten la evolución de la vida.

1. Fragmento de uno de los poemas de *Enrique de Ofterdingen* [Novalis 1798, 111].
2. Es notable la introducción del término 'topología', y su apropiada definición conceptual, casi cincuenta años antes de su uso sistemático en Listing [*Vorstudien sur Topologie*, 1847].
3. Se trata de otra notable anticipación, donde Novalis parece prefigurar las superficies de Riemann (1851).

Allende cualquier rigidez, la riqueza de lo humano yace en saber variar, en transformarse, en oscilar: “Ser libre es la tendencia del Yo – la facultad de ser libre es la imaginación productiva – la *armonía* es la condición de su actividad – del *oscilar* entre opuestos” [Novalis 1993 I, 234]. Las contraposiciones *amplían* el espacio. Solo en las fronteras, tras surcar el abismo, surge la novedad. Solo gracias al movimiento y al desliz emerge la creatividad [Novalis 1993 I, 239]:

> *Perpetuum mobile*. Piedra filosofal.
>
> (Conocimiento negativo
>
> (La razón sería la facultad para fijar y sostener un objeto absoluto
>
> (El intelecto ampliado a través de la imaginación.

Lo estático debe extenderse a lo dinámico, lo positivo a lo negativo, lo absoluto a lo relativo, lo racional a lo imaginal. La idiosincrásica puntuación misma de Novalis (paréntesis no cerrados a derecha) invita a la *apertura*. En particular, el *tránsito hacia lo negativo* –que puede verse autorreflexivamente como una suerte de *diagonal de la razón*– constituye uno de los fundamentos mayores de la invención. El surcar un *umbral* es prerrequisito de novedad, de conquista parcial de lo desconocido. Allende un entorno acotado, luminoso, de aguas cristalinas, la inmersión en lo oscuro y lo *enlodado* se convierte en el *proceso natural* de extensión de la razón requerido para explorar la complejidad del mundo.

En lo que sigue, veremos cómo encarnan en Galois, de manera radical e inesperada, muchas de las tensiones abismales registradas en Novalis.

2. La primera memoria sobre (ir)resolubilidad de ecuaciones algebraicas

La *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* puede ser considerada como la primera (y *summa*) tensión expresiva de la matemática moderna. La revolución de Galois es tajante. Al plantear nuevas dialécticas –*múltiples ecuaciones vs.* una ecuación dada, *relacionalidad cualitativa vs.* operatoria cuantitativa, *raíces en su conjunto vs.* raíces aisladas, *(ir)resolubilidad vs.* solución, *potencial vs.* actual, *negativo vs.* positivo, *transformable vs.* determinado, *mediado vs.* aislado, *estructurado vs.* singular, *exterior vs.* interior, *ruptura de simetría vs.* simetría–, y al acentuar en las pendularidades precedentes los lados izquierdos de las mismas, la matemática se abre a un panorama enteramente original. De hecho, los rocambolescos avatares del manuscrito (primer texto, Academia de Ciencias, 1830, perdido entre los papeles de Fourier; reescritura y nueva presentación, 1831, Academia de Ciencias, rechazado por Poisson; primera publicación por Liouville, 1846) son lancinantes testigos de la incomprensión de la vieja escuela francesa por un nuevo modo de hacer matemáticas.

La memoria reescrita (firmada el 16 de enero 1831) se abre con un asombroso resumen de lo obtenido por Galois: (i) presentación de una condición necesaria y suficiente para la solubilidad de ecuaciones por radicales, (ii) especificación de esa condición (las raíces deben ser funciones racionales de dos de ellas) en el caso de una ecuación irreducible de grado primo, (iii) afirmación de la irresolubilidad por radicales de las ecuaciones modulares de las funciones elípticas [2a].[1] A continuación, Galois introduce las magnitudes *adjuntas* y explica cómo las dificultades de las ecuaciones son *relativas* a las adjunciones [2b]: el entendimiento de un objeto depende de sus extensiones (agregar raíces) y de sus movimientos relativos (transformar raíces). Proveniente de anotaciones al margen en [3b], aparece un añadido donde se mencionan permutaciones, substitucio-

1. Las referencias a los escritos de Galois remiten a la paginación [Xy] de los *Manuscrits* (Ms 2108), en la Bibliothèque del Institut de France (ahora disponibles en red), y editados en [Galois 1997].

nes, la *clausura de la operación* en un grupo de substituciones y un primer intento (tachado) de definición de grupo: "~~el grupo es un conjunto de permutaciones, tal que si se pasa~~" [2b]. Los lemas preparatorios [3a] dan plena cuenta de la creatividad del joven genio: *se potencia la negación y se maximizan las distinciones* (Lema II: Dadas *a, b, c, ...*, raíces diferentes de una ecuación, se puede construir una función 'auxiliar' *V(a, b, c, ...)* con valores siempre distintos para cualquier permutación de las raíces), *se invierte lo múltiple en función de lo uno* (Lema III: Dada *V*, todas las raíces de la ecuación pueden expresarse racionalmente en función de *V*), *se estructura el enlace entre lo interno y lo externo* (Lema IV: conexión de las raíces de la ecuación original y las raíces de un factor irreducible –'ecuación auxiliar'– de la ecuación en *V*).

El primer teorema central [3b] asegura, para toda ecuación, la emergencia de un grupo de permutaciones de sus raíces, tal que (1) toda función de las raíces, invariante bajo las substituciones del grupo, es racional, y (2) toda función racional de las raíces es invariante bajo esas substituciones. Se trata de la invención del *Grupo de Galois* de la ecuación, donde se conjugan movimiento, invarianza y racionalidad. La demostración usa, como en una maquinaria de relojería, procesos de *uniformización* (expresiones de las raíces en función de *V*), *variación* (otras raíces asociadas a *V* en la ecuación auxiliar), *mixión* (vaivenes entre la ecuación original y la ecuación auxiliar) y *saturación* (consideración de todos los posibles adjuntos de *V*). La prueba parcial del teorema –"Hay algo para completar en esta demostración. No tengo el tiempo" [4a], comentario añadido posiblemente al revisar el texto en la víspera de su duelo– involucra, por un lado, la idea de los *subgrupos normales* ("esos grupos gozarán de una propiedad notable, tal que se pasará del uno al otro operando sobre todas las permutaciones del primero mediante una misma substitución" [4a]), y, por otro lado, el *proceso de reflexión* (parte de lo que hoy llamamos 'Correspondencia de Galois') acerca de cómo una descomposición en factores de la ecuación genera una descomposición de las permutaciones en (sub)grupos [4a]. Bajo normalidad, se puede proceder a una *dialéctica inversa* (consignada en un añadido de 1832) entre una *adjunción* de raíces y una *reducción* del grupo [4b].

Galois describe entonces [5a, 5b] una suerte de "algoritmo metodológico" (en cinco pasos *(A)-(E)*) para determinar las condiciones de solubilidad de la ecuación. *(A):* adjúntense progresivamente raíces (de orden primo); después de un número finito de extracciones de raíces, ya sea el grupo disminuye –y continúe entonces en *(B)*– o ya sea la ecuación no es soluble. *(B):* escoja la raíz *p*-ésima de mínimo grado *p* que redujo el grupo; asuma poseer las raíces de la unidad para asegurar buenos pasajes; el grupo de la ecuación se descompone entonces en *p* grupos con las mismas substituciones y con propiedades de pasaje del uno al otro mediante una misma substitución. *(C):* vale el proceso inverso de *(B)*. *(D):* considere, en orden, los subgrupos normales maximales ('índices' minimales) que permiten efectuar las descomposiciones. *(E):* continúe el proceso hasta llegar al grupo identidad ('un cierto grupo que no poseerá más que una permutación'). Galois introduce luego un 'escolio' ilustrativo [5b]: en el caso de grado 4, las ecuaciones se resuelven gracias a una ecuación de grado 3, que exige a su vez la extracción de una raíz cuadrada; "en el orden natural de las ideas", hay que invertir y empezar por esa raíz de grado 2; al adjuntarla a la ecuación de grado cuatro, el grupo de veinticuatro substituciones se descompone en dos partes, que no contienen sino doce; con la extracción de una raíz de grado 3, el grupo se reduce a cuatro, con otra raíz de grado 2 se reduce a dos, y con otra extracción de grado 2 a la unidad. La sucesión de primos <2, 3, 2, 2> determina entonces la solubilidad de la cuártica.

En la época de Galois, un manejo cuantitativo de la ecuación auxiliar era sencillamente imposible, y sólo hoy en día, gracias a la ingeniosidad de [Connes 2011], el estudio de algunas ecuaciones auxiliares ha podido ser realizado en la práctica mediante técnicas avanzadas de computación. Por el contrario, las *ideas imaginarias*, las *guías conceptuales* y las *calibraciones cualitativas* son aquellas que le permiten a Galois una *visión de las pruebas*. La sobriedad, la concisión y el éxito de su programa se deducen de su *abstracción general*, alejada del cálculo particular (ver *Sección 5*, más adelante). Una *dialéctica inversa de obstrucciones y tránsitos* guía el desarrollo de la teoría: las raíces son *indistinguibles* desde el campo base (obstrucción), pero esa indeterminación es *justamente* la que da lugar a las *transformaciones* adjuntas y a sus extensiones, es decir, a los elementos del grupo de Galois (tránsito). El hecho de conformar una nueva estructura matemática *a partir de aquello que aparentemente nos elude* constituye un corte radical en la manera de entender la matemática. La *negación* produce una inesperada iluminación. Sobre el *abismo de lo insondable* (la 'ambigüedad' de las raíces, ver *Sección 6*, más adelante) se construyen los puentes del saber (la descomponibilidad del grupo). Las variaciones (adjunciones) sobre un *motivo profundo* (ecuación auxiliar) ayudan a explicar el *perpetuum mobile* novalisiano: 'conocimiento negativo' e 'intelecto ampliado a través de la imaginación'.

3. La teoría de números y la segunda memoria

La reescritura de la primera memoria, a finales de 1830 y/o comienzos de 1831, se apoya en dos tratamientos concretos que ayudan a erigir el edificio: el artículo publicado *Sur la théorie des nombres* (Junio 1830) y el manuscrito de la segunda memoria *Des équations primitives qui sont solubles par radicaux* (¿Junio 1830?, fecha tentativa). El artículo estudia las congruencias módulo potencias de primos e introduce los *imaginarios de Galois*, en un texto límpido, combinación de profundidad y frescura –¡escrito a los 18 años!– perfectamente legible aún hoy en día. La segunda memoria introduce los *grupos transitivos* alrededor de problemas de descomposición y transitividad, en un texto críptico en cambio, tan rico como oscuro, que abre problemáticas para todo el siglo posterior. En ambos casos, se observa un manejo fluido de *descomposiciones estructurales*, cercanas a la primera memoria: (1) estructura de potencias y residuos módulo *p*, campos de Galois, endomorfismo 'de Frobenius', (2) estructura de grupos asociados a ecuaciones primitivas, transitividad, representación, linealidad.

El artículo *Sur la théorie des nombres* [Galois 1997, 113-127; original en *Bulletin des sciences mathématiques de Ferussac* XIII (1830): 428-435] presenta, en solo ocho páginas, las congruencias de Gauss, las raíces imaginarias de las congruencias, los que se llamarán "campos de Galois" $F(p^n)$ ("nombres (...) d'expression (A)" [Galois 1997, 115]), la noción de primitividad *en campos* y las descomposiciones asociadas, el estudio detallado del caso $F(7^3)$, la solubilidad por radicales de ecuaciones primitivas. La fluidez conceptual y el tránsito estructural son completos, *excepto* en dos casos muy interesantes: las ecuaciones de grados nueve (3^2) y veinticinco (5^2) [Galois 1997, 125]. Por su lado, la segunda memoria [Galois 1997, 129-147] introduce la noción de primitividad *en grupos* y las descomposiciones asociadas, estudia el caso p^2 (*p* primo impar) mediante indexaciones y combinatoria, ofrece un teorema de representación para el grupo de Galois $Gal(F(p^2))$ vía grupos lineales de permutaciones y se enfrenta a sus conexiones con las formas modulares (grupo lineal: periodos, reducciones, conjugados). Otra *obstrucción* de peso surge al final de la segunda memoria, con la oscura aparición de las ecuaciones modulares de las integrales elípticas.

Conviene observar aquí, en relación con las dos obstrucciones mayores del artículo y de la memoria, que estas ocurren cuando Galois se acerca a los ámbitos de la *elipticidad* y de la *modularidad*. En realidad, la situación no es casual y hay que tener en cuenta que Galois dedicó su más extenso conjunto de manuscritos (cerca de setenta páginas) a *cálculos específicos y particulares* (!) sobre funciones elípticas y modulares [Galois 1997, 243-361]. El presagio de algunos trabajos posteriores de Jacobi y de Riemann es impactante, pero el interés profundo del asunto yace en el *necesario actuar contradictorio* del matemático. Comprender ese conjunto positivo de cálculos en el entorno general de la 'abstracción negativa' de Galois es sin duda el *mayor problema aún abierto* en el entendimiento de su obra. Aunque, convenientemente, esos 'últimos vestigios' (términos de los editores franceses) han desaparecido en la traducción al inglés [Neumann 2011], la tarea doble de enlazar el cálculo con la estructura, y las formas del número con las formas del espacio, es el reto más difícil que presentan todavía los vestigios del joven visionario.

Se encuentra en lo anterior una *acción conceptual compleja*, con sofisticados *estratos diagonales* entre cuatro "puntos cardinales": abstracción/concreción, positividad/negatividad. Las solidaridades aritméticas (artículo – luz) y las estructuraciones algebraicas (memoria – sombra) parecen involucrar todas las direcciones en una *enfangada rosa de los vientos*. La profunda clarividencia del final de la segunda memoria –el entronque cuártico aritmética/álgebra/análisis/geometría (*aaag*), que presagia la aparición de la Teoría de Cuerpos de Clases (caso abeliano) y del Programa de Langlands (caso no abeliano)– se expresa en unas pocas líneas *enredadas* (¡suerte de ícono de la red *aaag*!) que conforman un *punto ciego sobre el abismo*. "Desde la noche del abismo / luce un rayo de eternidad", diría Novalis.

'El llevar una cosa a través de otra', recomendación del poeta romántico, encarna a la perfección en Galois. De hecho, el ascenso y el descenso entre el *eidos* (idealización, abstracción) y el *quidditas* (realización, concreción) da lugar a una notable espiral metodológica (ver *Figura 1*): (1) *adjunción*: ascensos al *eidos*, raíces de irreducibles, imaginarios de Galois; (2) *variación*: tránsitos en el *eidos*, ecuación auxiliar, grupo de Galois; (3) *descomposición*: descensos al *quidditas*, normalidad, primitividad; (4) *invarianza*: tránsitos en el *quidditas*, funciones racionales, representaciones lineales. Nos encontramos así ante una plena realización matemática (en los linderos de lo abstracto y lo concreto, lo ideal y lo real, lo negativo y lo positivo) del 'oscilar entre opuestos' y de la 'facultad de ser libre' según Novalis.

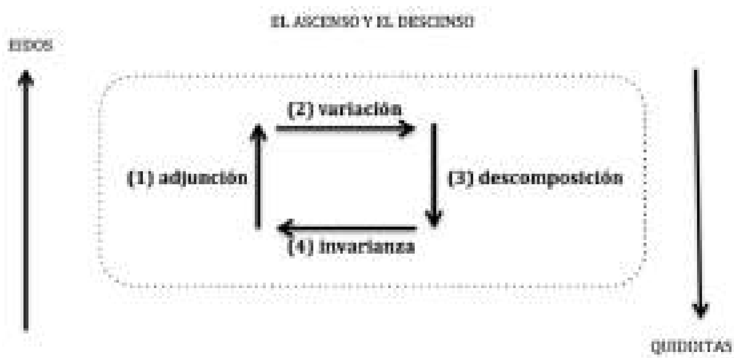

Figura 1. Dialécticas galoisianas mayores:
(1) extensiones de campos; (2) grupos de automorfismos;
(3) subgrupos normales; (4) subcampos fijos.

4. La carta testamentaria a Auguste Chevalier

Pocos días antes del duelo, Galois intuye la eventual ocurrencia de la muerte y pone en orden sus papeles. "Desencantado de todo, aún del amor de la gloria" –como escribe en su penúltima carta (25 mayo 1832) a Auguste Chevalier [Chevalier 1832, 752]–, Galois relee sus memorias y realiza un último esfuerzo por sintetizar su pensamiento. La famosa *carta testamentaria* a su amigo (siete páginas manuscritas, 29 mayo 1832),[1] escrita en la noche anterior al duelo, resalta las características mayores de su obra. Galois indica cómo ha hecho “en análisis varias cosas nuevas, las unas atañen a la teoría de Ecuaciones, las otras a las funciones Integrales” y cómo “podrá hacerse con todo eso tres memorias”: “la primera está escrita y, a pesar de lo que diga Poisson, la mantengo con las correcciones que he realizado”, “la segunda contiene aplicaciones bastante curiosas de la teoría de ecuaciones” [8a] y la “tercera memoria se refiere a las integrales” de las funciones algebraicas [10a]. El joven resalta algunas de las fundamentales *inversiones/invenciones* introducidas: *visibilidad del todo* allende lo singular (“gran diferencia entre adjuntar a una ecuación una de las raíces de la ecuación auxiliar, o adjuntarlas todas” [8a]), *descomponibilidad canónica/icónica* de una ecuación (“si los grupos poseen cada uno un número primo de permutaciones, la ecuación es soluble por radicales, sino no” [8b]), *representabilidad modular* (parámetros lineales, periodos, variables canónicas, reducciones aritméticas, grupo $SL(2, p)$ [9a, 9b]), *uniformizabilidad* de las integrales abelianas [10a, 10b], instanciación final de la *teoría de la ambigüedad* [11a] (ver *Sección 6*, más adelante).

La carta combina una serie contrastante de elementos que la tornan única. Por un lado, impacta su aspecto coyuntural y psicológico, donde una *situación límite* lleva a una expresión también limítrofe, confrontada con los bordes de la emoción y de la razón. El *abismo conceptual* de la matemática galoisiana encarna a su vez en un *abismo vivencial*. Por otro lado, impresionan la claridad y la sangre fría de aquel que alcanza a vislumbrar, en unas pocas horas, el ‘todo’ metodológico de una obra difícil de explicar a los demás. A la víspera del balazo (30 mayo 1832) que producirá, al día siguiente, la peritonitis y la muerte, Galois apro-

1. Publicada por vez primera, bajo los cuidados de Chevalier, en *Revue Encyclopédique* 55 (1832): 566-576, y retomada en [Galois 1997].

vecha su gran capacidad de concentración para delinear el panorama de sus logros. La *contradicción* no puede ser mayor entre el destino heroico de su obra y el destino vulgar de su muerte ("Piedad, ¡nunca! Odio, eso es todo. Quien no resiente profundamente ese odio del presente, no posee realmente el amor del porvenir" [Chevalier 1832, 751-752]). Finalmente, y este es tal vez el aspecto más fascinante de la carta, se combinan admirablemente los *tránsitos* (recuento de lo conseguido por Galois en teoría de ecuaciones) y las *obstrucciones* (problemas abiertos en teoría de integrales y programa general de la teoría de la ambigüedad), para dar lugar a un *diagrama de la matemática del futuro*, trazado desde la singular circunstancia de una coyuntura trágica que nunca debía haber ocurrido.

5. Los manuscritos metodológicos

En varios lugares de su obra, Galois se muestra preocupado por aspectos metodológicos referentes a las formas de hacer y entender matemáticas, que en algunos casos extrapola a problemas generales del saber. En su *Discours préliminaire* (introducción a la primera memoria, septiembre 1830, revisitado/revisado abril 1832), califica la resolubilidad de ecuaciones por radicales como un "material oscuro y aislado" que requiere "nuevas denominaciones, nuevos caracteres" [59a]. Los "cálculos impracticables" de la teoría llevan a abordar "consideraciones Metafísicas que planean sobre todos los cálculos" y a "indicar la marcha del análisis y prever sus resultados sin nunca poder efectuarlos" [59b]. Contrariamente con las supuestas claridad y cuantificación clásicas, el *giro galoisiano* indica que debemos ante todo sumergirnos en un lodo oscuro, para luego evaluarlo cualitativamente desde una alta 'metafísica' que devele su estructura profunda.

En su *Préface* (proemio a un proyecto de publicación de sus memorias, diciembre 1831), Galois empieza burlándose de su propio destino: reniega por haber caído en manos de “estúpidos Zoilos” (de Zoilus, gramático alejandrino, impenitente detractor de Homero), se queja de los manuscritos que se pierden en los cajones de los Académicos [72a], se mofa de los cálculos y las solemnidades, se precia de que en sus memorias aparezca “tanto francés como álgebra” [72b], arremete contra los examinadores de la Escuela Politécnica, y dice someterse conscientemente “al reír de los imbéciles” [73a]. Con el ánimo ya más descargado, indica cómo, allende los “cerrojos” y la “morgue”, emerge “una nueva vía que debe seguir el análisis en sus ramas más altas”, un “análisis puro”, opuesto a aplicaciones “paradójicas”, cuyo “lenguaje más breve” y cuya “elegancia” permiten “abrazar varias operaciones a la vez” [73a]. Desde la altura, la abstracción, el análisis conceptual y la unidad, Galois expresa entonces su credo fundamental: “*Saltar a pies juntillas sobre los cálculos*, agrupar las operaciones, clasificarlas según sus dificultades y no según sus formas; tal es, a mi parecer, la misión de los geómetras futuros” [73b, nuestro énfasis]. El ‘análisis del análisis’ y la conciencia de las *limitantes del entendimiento* (“se encontrará a menudo la fórmula «no lo sé»”, “el libro más preciado del más sabio sería aquel donde diría todo lo que no sabe” [73b]) ordenan la revolución metodológica galoisiana.

En las *Discussions sur les progrès de l'analyse pure* (comienzo de artículo destinado a la *Revue Encyclopédique*, abril 1832), Galois subraya los frágiles vaivenes que acaecen en el descubrimiento: “La ciencia progresa por una serie de combinaciones, donde el azar no juega el menor papel, su vida en bruto semeja aquella de los minerales que crecen por yuxtaposición” [75a].[1] Para el joven revolucionario, los analistas “no deducen”, sino “combinan, compo-

1. La metáfora nos envía de inmediato al Novalis inspector de minas en Friburgo, cuya práctica minerológica se extiende sobre todo su sistema poético y filosófico (véase [Margantin 1998]).

nen", adelantan un hondo "sondeo" del mundo matemático y encuentran la "verdad chocando de lado y lado" [75a]. Las "ideas nuevas" son las "ideas metafísicas más abstractas que pueda el hombre concebir", "lo más general, lo más filosófico" [74a]. "Sin complicaciones de ejemplos y aperitivos", Galois explica que procede "de buena fe, indicando sin vueltas la vía que allí nos condujo, y los obstáculos que nos detuvieron" [74b]. El *reconocimiento pendular simultáneo* de varios *modos de obstrucción* –azar, sondeo, choque, obstáculo– y de varios *modos asociados de abstracción* que ayudan a sortear las obstrucciones –yuxtaposición, composición, generalización, descomplicación– se convierte entonces en una suerte de *teoría de Galois de segundo orden (dialéctica obstrucción/abstracción)* que guía la creatividad.

6. La teoría de la ambigüedad

La dinámica *conceptual* de la teoría de Galois se articula alrededor de cuatro procesos centrales: [1] (i) reconocer *estructuras* (campos, extensiones; grupos, descomposiciones normales) y *operaciones* (suma, multiplicación, división; adjunción, simetría, racionalidad); (ii) estudiar las *dualidades, transformaciones e invarianzas* asociadas a esas operaciones sobre estructuras; (iii) aprovechar el *revés* y las *dialécticas inversas* emergentes (construcción de rupturas de simetría, vía la función auxiliar *V*; descomposición con índices minimales, vía subgrupos normales maximales; elaboración de teoremas de limitación, vía irresolubilidad algebraica; representación lineal de lo aritmético/algebraico /analítico/geométrico (*aaag*), vía el grupo modular); (iv) *convertir obstrucciones/ambigüedades en objetos matemáticos* (usualmente grupos).

1. Debe nítidamente distinguirse una 'dinámica conceptual' de un *desarrollo genético*, cuyos *zigzags* son mucho más complejos. Véase la Tabla de la Creatividad en Galois (*Figura 3*) al final de este artículo.

Este último proceso constituye lo que Galois denomina la "Teoría de la Ambigüedad": "Se trata de ver *a priori* en una relación entre cantidades o funciones trascendentes cuáles cambios pueden hacerse, cuáles cantidades pueden substituirse a las cantidades dadas sin que la relación deje de tener lugar. Esto permite reconocer de inmediato la imposibilidad de muchas expresiones que pudiesen buscarse" [11a]. En el caso específico de las 'cantidades' algebraicas, se tiene que las raíces de un polinomio irreducible sobre un campo *K* se pueden substituir entre ellas, sin que las relaciones de simetría entre las raíces dejen de tener lugar. Por tanto, las raíces son *indiscernibles* a los ojos de *K*, acentuando su carácter *ambiguo, negativo, obstructivo*. Las substituciones entre las raíces (es decir, los focos de *invisibilidad* a los ojos de *K*) generan el grupo de Galois del campo de descomposición, grupo que se convierte así en una suerte de *medidor/mediador de las obstrucciones* en el conocimiento de las raíces. El *vaivén inverso entre ambigüedad y discernibilidad* determina las tensiones mayores de la teoría: *ascenso en campos* –raíces ambiguas sobre la base, que adquieren una progresiva discernibilidad en las adjunciones– y *descenso en grupos* –grupo de Galois ambiguo global, que adquiere una progresiva discernibilidad en su descomposición normal–.

De manera similar, las consideraciones finales de la segunda memoria muestran el uso de las funciones modulares para proveer representaciones del grupo de Galois $Gal(F(p^2))$ y el uso del grupo modular como *moderador* de las transformaciones de los periodos (primera ambigüedad) de las integrales elípticas [41a, 41b]. Por su lado, la *Mémoire sur la division d'une fonction elliptique de première classe* (¿inicios de 1831?) anuncia una división de las funciones elípticas ligada a invariantes de transformaciones módulo p^n [98a], aprovecha los trabajos en ecuaciones algebraicas [98b, 99b], *transpone* las técnicas al caso trascendente (segunda ambigüedad) [100b] y propone un "algoritmo" de resolución de las ecuaciones modulares asociadas [100a]. Finalmente, los vestigios de la cárcel, con sus crípticos cálculos sobre elipticidad (particularmente los manuscritos [159a, 159b], ligados a las obstrucciones 3^2 y 5^2; tercera ambigüedad), indican el turbio lecho sobre el que se basan las intuiciones del joven acerca del comportamiento de las ecuaciones modulares de las funciones elípticas.

"La belleza y a la vez la dificultad de la teoría" [59b] se expresan con fuerza en esa teoría de la ambigüedad que *media* entre las grandes dialécticas introducidas: vaguedad *vs.* precisión, plasticidad *vs.* estabilidad, *verso vs. recto*. En esa mediación, se observa cómo la matemática va *mucho más allá* de lo demostrativo, lo tautológico, lo bien ordenado, y cómo necesita también un *denso imaginario, ambiguo, plástico, analógico*. Más aún, en la emergencia misma de la creatividad esa contraparte 'oscura' resulta ser prioritaria, pues, como lo observará André Weil, "nada es más fecundo, lo saben todos los matemáticos, que esas oscuras analogías, esos reflejos turbios de una teoría en otra, esas caricias furtivas, esas inexplicables contrariedades" [Weil 1960, 53]. La analogía, el reflejo, la caricia se *potencian* mediante el encuentro con lo oscuro, lo turbio, lo contrario. El *arkhê* –simultáneamente comienzo (*arkhô*) y comando (*arkhên*)– gobierna el entendimiento desde una profundidad aparentemente inescrutable, que, no obstante, puede ser conquistada. La potenciación de la creatividad se consigue entonces mediante una observación fina de la oscuridad, desbrozada por el *grupo de transformaciones de los indiscernibles*. El arsenal de contrapuntos, deslices e inversiones de Galois se urde así sobre el subyacente *entrecruzamiento abismal* de Novalis.

Los reveses y los en/red/os de la creación son plásticos y multiformes. Para Châtelet, los problemas, las figuras, los procesos creativos ocurren "en los puntos sensibles, pero *ciegos*, del entendimiento, en las bisagras-horizonte donde se despliegan las sistematicidades emergentes” [Châtelet 1993, 22; nuestro énfasis]. Desde esos puntos ciegos, formas de negación, emerge la abducción según Peirce: “La *abducción* es el proceso de formación de hipótesis explicativas, la única operación lógica que introduce una *nueva idea*” [Peirce 1903 V, § 171; nuestros énfasis]. En casos complejos, como en la teoría de Galois, se puede luego imaginar la construcción de *jets*, es decir, entramados abductivos que *reintegren lo integral y lo diferencial*, lo uno y lo múltiple, en el sentido de Ehresmann: “Se define una ley de composición de *jets*: es la estructura algebraica que se encuentra en la base de toda la geometría diferencial” [Ehresmann 1955, 17; nuestro énfasis]. El paso del *punto ciego* (unitario, integral) a la ramificación (múltiple, diferencial), a través de *jets abductivos*, puede verse como el paso ‘no estándar’ que lleva de la negación (¬, ‘no’) a la *doble negación* intuicionista (¬¬, ‘no no’), que no equivale a un “sí” clásico (o ‘sí’ actual) sino al despliegue de un ‘denso-sí-en-el-futuro’ (o ‘sí’ en potencia), es decir, al espacio de todas las ramificaciones posibles (ver *Figura 2*).

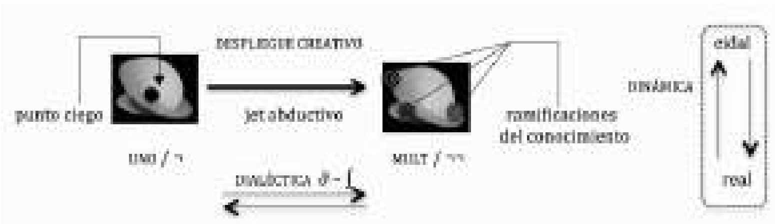

Figura 2. Formas de despliegue creativo: negación y puntos ciegos, abducción y jets, ramificaciones y multiplicidad

La *densidad de recubrimientos intermedios* en el caso de la obra de Galois (“mixtos” en el sentido de [Lautman 1934, 1937]) es particularmente impactante. Sus estructuras arquetípicas de recubrimiento (campos: clausuras racionales;

grupos: clausuras transformativas) sondean el abismo subyacente. En la tabla siguiente (ver *Figura 3*) resumimos la situación:

puntos ciegos	giros abductivos	ramificaciones del saber
(I) Emergencia del Grupo de Galois		
ruptura de simetría	función V	múltiples raíces vía unidad V
indiscernibilidad	ecuación auxiliar	substituciones
ambigüedad	invarianza racional	*Grupo de Galois*
(II) Emergencia de las Condiciones de Solubilidad		
singularidad	campo de descomposición	todas las raíces en su conjunto
no conmutatividad	conjugaciones y normalidad	serie de subgrupos normales
división descontrolada	series maximales	*Condiciones Canónicas*
(III) Emergencia de los Campos de Galois		
limitaciones de congruencias	polinomios generadores	imaginarios de Galois
no distribución	extensiones lineales	*Determinación de $F(p^\nu)$*
(IV) Emergencia de las Representaciones de Grupos (trabajos incompletos)		
aritmética azarosa	modulaciones vía primos	espectros
indexación caótica	transformaciones uniformes	*Representaciones Lineales*
(V) Emergencia del Grupo Modular (trabajos incompletos)		
no seccionabilidad	ecuaciones de división	funciones elípticas
desorden calculatorio	invarianzas geométricas	géneros
no estructura	funciones modulares	*Grupo Modular*

Figura 3. Tabla de la Creatividad en Galois

Debe observarse aquí el zigzagueante, y nada lineal, camino de la creación. Por un lado, aunque no contamos con el texto perdido de la primera memoria, su reelaboración posterior (fines 1830 - comienzos 1831) permite conjeturar un vaivén pendular entre la emergencia del grupo de Galois (en la ‘abstracción pura’ de la primera memoria) y la emergencia de los campos de Galois (en la ‘particularización concreta’ de su artículo sobre teoría de números). Por otro lado, las obstrucciones que aparecen en la teoría de representaciones de grupos y en el entendimiento de la acción del grupo modular parecen surgir en tiempos cercanos a los cálculos llenos de borrones realizados en la prisión Sainte-Pélagie (julio 1831 - marzo 1832). En ambos casos, lo más general se enreda con lo más concreto, casi siguiendo una *conexión de Galois metateórica* entre estratos estructurales abstractos y rastros icónicos concretos, donde la adjunción entre lo general y lo particular, lo negativo y lo positivo, lo ideal y lo real, requiere siempre de ambas partes para permitir avances en el conocimiento.

Referencias.

CHEVALIER, Auguste. 1832. “Nécrologie. Évariste Galois”. *Revue Encyclopédique* **55**: 744-754.

CHÂTELET, Gilles. 1993. *Les enjeux du mobile. Mathématique, physique, philosophie*. París: Éditions du Seuil.

CONNES, Alain. 2011. “Évariste Galois et la théorie de l'ambigüité”. Académie des Sciences, París, http://www.youtube.com/watch?v=rMb9UE5msH8.

EHRESMANN, Charles. 1955. “Notice sur les travaux scientifiques”. En : C. Ehresmann, *Oeuvres complètes et commentées*. Amiens: Evrard (publ. 1984), pp. 471-488.

GALOIS, Évariste. 1997. *Écrits et mémoires mathématiques. Édition critique intégrale des manuscrits et publications d'Évariste Galois* (eds. Bourge, Azra). París: Jacques Gabay (1ª ed. 1962).

KASSENBROCK, Brian W. 2009. *Novalis and the Two Cultures: The Chiasmic Discourse of Mathematics, Philosophy and Poetics*. Tesis Doctoral, New York University.

LAUTMAN, Albert. 1934. “Considérations sur la logique mathématique”. En: Albert Lautman, *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, París: UGE (publ. 1977), pp. 305-315.

LAUTMAN, Albert. 1937. *Essai sur les notions de structure et de existence en mathématiques. II. Les schémas de genèse*. París: Hermann.

MARGANTIN, Laurent. 1998. *Système minéralogique et cosmologique chez Novalis, ou les plis de la terre*, París: L'Harmattan.

MERLEAU-PONTY, Maurice. 1960. *Le visible et l'invisible*. París: Gallimard (reed. 2004).

NEUMANN, Peter. 2011. *The Mathematical Writings of Évariste Galois*. Zürich: European Mathematical Society.

NOVALIS. 1798. *Poesías completas. Los discípulos en Sais* (trad. Häsler). Barcelona: DVD Ediciones (publ. 2004).

________. 1799. *La Enciclopedia* (trad. Montes). Caracas/Madrid: Fundamentos (publ. 1976).

________. 1993. *Opera Filosofica* (ed. Moretti, 2 vols.), Torino: Einaudi.

PEIRCE, Charles Sanders. 1903. "Harvard Lectures". En: C. S. Peirce, *Collected Papers* (8 vols.). Harvard: Harvard University Press (publ. 1931-1958).

WEIL, André. 1960. "De la métaphysique aux mathématiques". *Sciences* **60**: 52-56.

ZALAMEA, Fernando. 2011. *La figura y la torsión. Pasado y presente de una visión ondulada del mundo*. Valencia: Alfons el Magnànim.

ZWICKY, Jan. 2004. *Robinson's Crossing*. London/Ontario: Brick Books.