Mathesis 11 (1995) 201-216.
Impreso en México. Derechos reservados [illegible]

Lógica y práctica matemática

Angel Nepomuceno Fernández

Resumen

Varias lógicas se presuponen en la práctica matemática, a saber, lo que ha sido llamado lógica subyacente, que pueden ser modelizadas por sistemas formales de lógica. Una característica importante de la práctica matemática es el método para introducir objetos matemáticos, empezando por proposiciones (postulados o axiomas) a los que se aplican reglas de deducción. En este trabajo nos referiremos a aquellas partes de la matemática cuya lógica subyacente es la lógica clásica. Algunas extensiones de primer orden tal vez sean apropiadas (ω-lógica, Q-lógica, lógica infinitaria). Si nos centramos en algunos postulados (usuales en algunas prácticas), como completitud, reemplazo e inducción, entonces podemos optar por lógica de primer orden como lógica subyacente o, por el contrario, lógica de segundo orden. Así la opción de la lógica de segundo orden representa una de las actitudes filosóficas desde las cuales algunas prácticas matemáticas podrían ser estudiadas.

Abstract

Several logics are presupposed in mathematical practice, namely what has been called its underlying logics, that can be modeled by means of formal systems of logic. An important feature of mathematical practice is the method for introducing (mathematical) objects, starting from some propositions (postulates or axioms) to which deduction rules are applied. In this paper we shall refer to those parts of mathematics whose underlying logic is classical logic. Some extensions of first order logic may be appropriated (ω-logic, Q-logic, infinitary logic). If we focus on some postulates (usual in some practices), as completeness, replacement and induction, then we can choose first order logic as underlying logic or on the contrary second order logic. So option of second order logic represents one of the philosophical attitudes from which some mathematical practices may be studied.

1. Introducción

Al ocuparnos de la práctica matemática hemos de estudiar los modos en que los sistemas de objetos son incorporados a lo que podríamos llamar el *cuerpo de conocimientos* de la matemática. La lógica juega un papel relevante en la elaboración de este cuerpo, tanto si se hacen explícitas las reglas que van a regir las pruebas de los teoremas como si no. A título de ejemplo, si mediante unos diagramas se establece la prueba de una proposición —teorema de Pitágoras o cualquier otra que requiera el uso de "regla y compás"—, ¿no estaremos más bien mostrando un caso particular que una prueba de carácter general? ¿Es esta forma de visualización lo que caracteriza la prueba? No es la producción física de diagramas lo que distingue la actividad matemática, sino la posibilidad de usarlos para auxiliar nuestra experimentación mental en la búsqueda de las conexiones deseadas [Wang 1986, 131]; lo que importa es su carácter *lógico*: un diagrama será una figura tomada en tanto que tal, por ello sus propiedades se pueden atribuir a todos los diagramas del mismo tipo. Se trata del viejo principio según el cual lo que se afirma de un miembro cualquiera de una clase, *en tanto que miembro de tal clase*, se puede afirmar de todos y cada uno de los miembros de dicha clase.

Diremos que cada práctica matemática posee una lógica subyacente —lógica clásica de primer orden para teoría de modelos, lógica intuicionista para el constructivismo, etc.— que puede ser modelizada haciendo uso, por ejemplo, de lenguajes formales. En los sucesivos apartados presentamos el modo de caracterización de los lenguajes formales, la noción de práctica matemática y su relación con la de demostración; así mismo algunos sistemas de lógica (clásica) que pueden resultar de interés, en la medida en que aparezcan como modelos de la lógica subyacente en las prácticas matemáticas. Destacaremos el papel de la lógica de segundo orden, concluyendo con un somero repaso de algunos de los puntos de vista que se suscitan.

2. Caracterización de los lenguajes formales

Un lenguaje formal consta de un conjunto de signos lógicos, que comparten la mayoría de los lenguajes formales, y un conjunto de signos no lógicos. $L = \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ expresa que los símbolos no lógicos del lenguaje formal L son precisamente los t_i para $i \leq k$. Se definen conjuntos de *términos* y *fórmulas* del lenguaje como es usual: cada signo individual es un término, si $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son n términos (no necesariamente distintos), para $n \geq 1$, y f es un signo funcional n-ádico, entonces $f(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ es un término, etcétera. Una L-estructura M se define de la siguiente manera: $\mathbf{M} = \langle M, \Re, \langle c_j \rangle_{j \in J} \rangle$, donde M es un conjunto no vacío llamado el *universo de discurso*, $\Re$ es un conjunto de predicados y relaciones definidos[1] en M, y $\langle c_j \rangle_{j \in J}$ representa el conjunto de los individuos designados de $\mathbf{M}$.

Una asignación σ de valores a los signos no lógicos de L no es más que la asignación a cada variable de un miembro de M; a cada constante individual uno de los antes llamados individuos designados; a cada signo funcional una función definida con dominio en M (o en M^k, si el signo funcional es k-ádico) y rango en el propio M; por último, a cada término predicativo n-ádico un predicado n-ádico de $\Re$. Cuando L es un lenguaje de segundo orden, a cada variable predicativa n-ádica se asigna un miembro de $P(M^n)$. Dada una estructura $\mathbf{M}$, el conjunto de asignaciones posibles a una variable individual cualquiera es el propio M, mientras que a una variable predicativa n-ádica serán asignables los miembros de $P(M^n)$. A este respecto, para una variable cualquiera x, definimos RAN(x) —*rango de x*— como el conjunto de asignaciones posibles en determinada L-estructura.

Sean x y X una variable individual y una predicativa monádica, respectivamente, de L; $\langle M, \Re, \langle c_j \rangle_{j \in J} \rangle$ una L-estructura, por otra parte, ω representa el cardinal de los números naturales y ω_1 el del continuo. Entonces, los rangos de x y X para dicha L-estructura vendrán dados como

$$\mathrm{RAN}(x) = \{\sigma_i(x) \in M: i \leq \omega\},$$
$$\mathrm{RAN}(X) = \{\sigma_j(X) \in P(M): j \leq \omega_1\}.$$

Fácilmente se comprueba que son, respectivamente, los conjuntos M —que hemos supuesto de un cardinal no mayor que el de los números naturales— y $P(M)$ —cuyo cardinal es a lo sumo el del continuo—.

Las nociones de *satisfacción*, *validez*, etc., son las usuales. En concreto, dada una L-estructura $\mathbf{M}$ y una asignación σ, éstas satisfacen una fórmula de L si (y sólo si) los valores asignados a los términos que ocurren en la fórmula en cuestión cumplen determinados requisitos (establecidos en términos de teoría de modelos). $\mathbf{M}, \sigma \models \phi$ expresa que '$\mathbf{M}, \sigma$ satisfacen la fórmula ϕ'.

1. Dado $M \neq \emptyset$, un conjunto de predicados definidos en M no es más que un subconjunto —no necesariamente propio— de $P(M)$; así mismo, un conjunto de relaciones n-ádicas, para n > 1, definidas en M es un subconjunto de $P(M^n)$. Para mayor facilidad, se puede hablar de predicados monádicos, diádicos, etc., definidos en M, no teniendo que distinguir entre predicado puro y relación.

3. La noción de práctica matemática

Siguiendo a Corcoran [1973, 23 *ss.*] tomamos la matemática como una clase de ciencias que tienen su propia materia o universo de discurso; la teoría de conjuntos es una ciencia de objetos denominados conjuntos, la teoría de grupos presupone la existencia de unos objetos llamados grupos, etc. Consideraremos a los objetos existentes e independientes de la mente humana, en el sentido de que sus propiedades están fijadas y no sujetas a alteración alguna y, además, no han sido creados mediante un acto de la voluntad humana, aunque la cuestión de cuál sea la naturaleza última de esta existencia no ha sido respondida en absoluto; podemos decir que el universo de discurso es un dominio de determinado sistema. Un sistema (de objetos) viene dado por un dominio no vacío de objetos entre los cuales se establecen relaciones; si los objetos se conocen únicamente apelando a las relaciones del sistema, entonces éste es un sistema *abstracto*, y cualquier especificación posterior proporciona un *modelo* del sistema abstracto [Kleene 1974, 34].

Los sistemas se introducen en la matemática por diversos métodos, lo que constituye un importante aspecto de la práctica matemática. Es de destacar el método axiomático, en el cual se propone un conjunto de proposiciones como condiciones de un sistema de objetos [Kleene 1974, 35], estas proposiciones son denominadas *axiomas* o *postulados* y a ellas se aplican reglas de deducción lógica. Los axiomas codifican determinadas verdades iniciales del sistema de objetos en cuestión; a éstas se añaden las obtenidas mediante definiciones adecuadas y otras por medio de deducciones (desde los axiomas y definiciones) para obtener una caracterización del sistema de objetos; más aún, se llega a una teoría de cualquier sistema de objetos que satisfaga los axiomas. Pero como es la deducción lógica es algo presupuesto, no explícito, a pesar de que en el método axiomático se use un lenguaje preciso.

Llamaremos *lógica subyacente* a la lógica presupuesta en una práctica matemática y que podemos estructurar en los niveles siguientes: 1) un lenguaje; 2) un mecanismo deductivo, y 3) un sistema interpretativo. Mediante lenguajes formales se pueden modelizar lógicas subyacentes, presentando una gramática del lenguaje correspondiente, un sistema deductivo y una semántica, respectivamente, de manera que el uso de tales lenguajes tiene aplicación en el estudio de las prácticas matemáticas, lo cual no significa que formalización y método axiomático sean lo mismo. En concreto, sea una teoría T que caracteriza axiomáticamente cierto sistema de objetos σ; sea L un lenguaje formal con suficientes símbolos no lógicos para representar los axiomas y las definiciones de T;[2] entonces una formalización de T vendrá dada por un conjunto de fórmulas que representan los axiomas y definiciones de T y un modelo de la lógica subyacente, es decir, un conjunto de fórmulas consideradas axiomas (junto con las definiciones), un sistema deductivo y, finalmente, un modo de relación de tales fórmulas con σ. Acerca de esto último se puede establecer si los objetos de σ constituyen el universo de discurso de una L-estructura y el rango de las variables (individuales) de L es el conjunto de tales objetos, o si desde los sistemas de objetos que satisfacen los axiomas pueden establecerse L-estructuras y determinarse el rango de las variables.[3] En resumen, como es sabido, una teoría formalizada T, a partir de un lenguaje formal L, vendría expresada como $< Ax\ (T), \lambda\ (L), \Im >$, donde $Ax\ (T)$ es el conjunto de fórmulas de L que representan los axiomas de T, $\lambda\ (L)$ es el sistema que modeliza la lógica subyacente —conteniendo, por tanto, la gramática de L, el mecanismo deductivo, ya sea axiomáticamente o un cálculo deductivo natural, y las nociones semánticas correspondientes— y, por último, $\Im$ es la semántica específica, es decir, el universo de discurso y la interpretación de los signos no lógicos de L.

4. Demostración y práctica matemática

Tomando, como resultado de la práctica matemática, determinada teoría, si se quieren hacer explícitas las condiciones que permiten establecer qué proposiciones valen en la misma, una de las tareas será ordenar deductivamente las proposiciones conocidas de la teoría, señalando las que se consideran axiomas o postulados (a partir de las cuales se deducirían las demás).[4] Las deducciones se harían de acuerdo con la lógica subyacente de que se trate. Una modelización de una lógica subyacente contendrá, por tanto, una codificación de esta noción en términos de un lenguaje formal; ello nos sitúa ante una importante cuestión: ¿cuál es la modelización adecuada de lógica subyacente en la práctica matemática?, o lo que viene a ser lo mismo: ¿qué sistema de lógica está presupuesto en la práctica matemática? En primera ins-

2 La representación (o expresión) se entiende en el sentido de que se hacen corresponder proposiciones de la teoría con fórmulas del lenguaje formal. Así, en aritmética, por ejemplo, si x es una variable de L, s un signo funcional y N un signo predicativo monádico, la fórmula $\forall x(Nx \rightarrow Ns(x))$ podría representar 'el siguiente de un número es un número'.

3 En [Kleene 1974, 81 ss.] aparece un sistema formal para teoría de números que se puede considerar paradigmático de modelización de práctica matemática.

4. Acerca de cómo hacer objeto de estudio matemático exacto una teoría matemática dada, interesa [Kleene 1974, 62 ss.]

tancia habría que aclarar si es posible hablar de 'práctica' o más bien de 'prácticas' y, en consecuencia, no existiría una única lógica subyacente sino tantas como prácticas matemáticas. A efectos de la presente discusión estimamos que se da una pluralidad de prácticas, aunque se pueden tomar en consideración algunas agrupaciones para ciertos propósitos (las que constituyen el objeto de reconstrucción o reducción de determinadas doctrinas fundamentistas, por ejemplo). Por otra parte, no hay un único sistema de lógica, por lo que se pueden presentar diversos modelos de lógica subyacente. A continuación nos referimos a algunos de éstos.[5]

Además de las lógicas clásicas de primero y de segundo orden se definen otros sistemas lógicos. Una *lógica multivariada* posee un lenguaje que contiene diversas clases de variables y el rango de las variables depende de la clase de éstas. Sea V_T el conjunto de las variables de L_{mv}, un lenguaje formal multivariado, entonces $V_T = \{V_i : i \geq 1\}$, donde V_i representa el conjunto de variables de tipo i y $V_i = \{v_{ij} : j \in N - 0\}$, una L_{mv}-estructura consta de una familia de dominios $M = \{M_i : i \geq 1\}$, y cada asignación se establece de manera que el rango de las variables V_i es M_i, para cada $i \geq 1$. La lógica multivariada es equivalente a la lógica de segundo orden con semántica de Henkin [Manzano 1993, 65]

Una *ω-lógica* se define a partir de estructuras denominadas ω-modelos cuya característica principal es que el universo de discurso correspondiente es de cardinalidad ω. Sea el lenguaje $L_1 = \{0, ', +, \cdot, <\}$, dada la estructura **M** con M como universo de discurso, tal que $|M| = \omega$, el rango de las variables (individuales) de L será $\{\sigma(x) \in M : \mathbf{M}, \sigma \models \exists y (y = x \vee x < y)\}$.

A partir de este lenguaje sea una ampliación a segundo orden. Una *lógica débil* de segundo orden se define tomando tal ampliación y estructuras con M como universo de discurso (posiblemente de cardinalidad ω) y los siguientes rangos de variables predicativas: si X es una variable predicativa n-ádica, para $n \geq 1$, $RAN(X) = \{\sigma(X) \in P(M^n) : |\sigma(X)| < \omega\}$: es decir, constituyen el rango de las variables predicativas conjuntos de predicados definidos en M de cardinalidad finita. Si en lógica de segundo orden (estándar) es representable la infinitud —mediante fórmula que asegura la existencia de una función 1-1 con rango en un subconjunto propio del dominio de tal función (definición de Dedekind)—, y, en consecuencia —por negación de la fórmula anterior—, la

5. Al hablar ahora de sistemas de lógica nos referimos a los correspondientes sistemas formales que los modelizan como 'lógica de primer orden', 'lógica de segundo orden', etc., destacando la caracterización de sus lenguajes formales.

finitud, ésta también es representable en una lógica débil de segundo orden.[6]

La *lógica de cuantificación* Q —para abreviar, Q-lógica— contiene fórmulas de la forma $Qx\phi$ entendidas como 'para infinitos x, ϕ'. A partir del mencionado lenguaje, una Q-lógica es definible, la cual se caracteriza porque, dadas una estructura M, una asignación σ y una fórmula ϕ, $M, \sigma \models Qx\phi$ si (y sólo si) hay ω asignaciones σ', diferentes de σ a lo sumo en cuanto al valor de x, tales que $M, \sigma' \models \phi$. En realidad, para cada ordinal ν es definible una Q_ν-lógica: $M, \sigma \models Q_\nu x\phi$ si (y sólo si) hay ω_ν asignaciones σ' (coincidentes con σ excepto tal vez respecto del valor asignado a x) tales que $M, \sigma' \models \phi$.

Dada una lógica cualquiera cuyo lenguaje es $\mathcal{L}$ (el cual contiene todos los signos de $\mathcal{L}_1$), si en ella hay una fórmula ϕ sin ninguna constante no lógica distinta de $<$, 0 — tal que para cada $\mathcal{L}$-estructura M, M satisface ϕ si y sólo si M es un ω-modelo, entonces se dice que esta lógica incluye una ω-lógica. Tanto una lógica débil de segundo orden como una Q-lógica (con lenguaje ampliado de $\mathcal{L}_1$) incluyen ω-lógica, en efecto, sea β la fórmula obtenida por conjunción de las fórmulas que expresan los axiomas del sucesor, suma y multiplicación, y de orden, entonces las siguientes fórmulas son satisfechas por un ω-modelo:[7]

1) $\beta \wedge \forall x \neg Qy(y < x)$;

2) $\beta \wedge \forall x \exists Z \forall y(y < x \rightarrow Zy)$;

las cuales son fórmulas de una Q-lógica y de una lógica débil de segundo orden, respectivamente.

Las lógicas infinitarias se definen a partir de lenguajes infinitarios. Sea $L_{\omega_1\omega}$ tal que dados conjuntos de fórmulas $\Phi = \{\phi_i \in L_{\omega_1\omega} : i < \omega\}$, la conjunción y disyunción de todas las fórmulas de Φ son también fórmulas; es decir, se permiten la conjunción y disyunción infinitas, de un número de fórmulas menor que ω_1, aunque las secuencias de cuantificadores serán finitas. Esta última lógica incluye a las precedentes en el sentido de que para cada fórmula (cerrada) σ del lenguaje de una Q-lógica (o del de una ω-lógica) existe una fórmula σ' de $L_{\omega_1\omega}$ tales

6. Fórmulas con una variable individual libre que es satisfecha en estructuras para un número finito de asignaciones de tal variable, o fórmulas con una variable predicativa libre satisfecha por predicados definidos en el correspondiente universo de discurso, de cardinal finito.

7. En [Shapiro 1991, 229] se obtiene este resultado para cuya demostración se definen determinadas fórmulas, nosotros lo extractamos para abreviar.

que una estructura satisface ϕ si (y sólo si) satisface ϕ'. En estas lógicas se puede expresar la finitud, siendo la teoría de modelos su principal ámbito de aplicación, en particular el estudio de *omisión de tipos*, entendiendo por *tipo* un conjunto de sentencias consistente; si $\Phi(x) = \{\phi_k \in L: k \leq \omega\}$, donde x ocurre libre en cada ϕ_k, entonces una *L*-estructura M (siendo *L* el correspondiente lenguaje) *da cuenta de* $\Phi(x)$ si hay algún $c \in M$ y una asignación σ, tales que $\sigma(x) = c$ y $M, \sigma \models \phi_k$, en otro caso M *omite* $\Phi(x)$.

En cuanto a las relaciones que pudieran establecerse entre unas lógicas u otras, hemos de tener en cuenta que ninguna lógica infinitaria incluye —en el sentido expresado— una lógica de segundo orden, como tampoco ninguna lógica de segundo orden incluye una lógica infinitaria (lo mismo sucede con las otras dos aquí referidas).

Haciendo uso de lógica de segundo orden se pueden describir un buen número de estructuras matemáticas.[8] Veamos, en apoyo de esta afirmación, un caso ilustrativo: el de la lógica *monádica* de segundo orden. Se trata de una parte de la lógica de segundo orden en la cual las únicas variables predicativas son las monádicas, siendo su rango el conjunto de los subconjuntos del universo de discurso (los demás términos predicativos no son cuantificables). Esta lógica, una de cuyas estructuras es la de los números naturales (con adición y producto), tiene aplicación en el estudio de otros marcos algebraicos, constituyendo la lógica subyacente de teorías en las que se conjugan mayor expresividad y cierta manejabilidad; como ejemplos están la teoría monádica de *cadenas finitas*, la teoría monádica de la *línea real*, la teoría monádica de *árboles binarios de dos sucesores* —árbol binario como conjunto de todas las palabras en un alfabeto de dos miembros—, etcétera.

Cabe plantearse si es posible que una misma teoría sea formulable en primero o en segundo orden; es decir, si dos teorías *T* y *T'* —con lógicas cuyos lenguajes sean de primero y segundo orden— refieren los mismos sistemas de objetos. A este respecto, cabe hablar de una aritmética de primer orden, una aritmética de segundo orden, etcétera.

Con vistas a determinar, si ello es posible, qué lógica hemos de considerar más habitual (en su caso, más recomendable) en ciertas prácticas matemáticas, fijemos nuestra atención en tres postulados; concretamente de teoría de números reales, de teoría de conjuntos y de teoría de números naturales: son los denominados *axioma de completitud*, *axioma de reemplazo* y *principio de inducción matemática*, respecti-

8. *Cf.* López-Escobar 1967.

vamente. En cuanto al primero, el campo de los números reales puede ser caracterizado axiomáticamente como un dominio, cierta relación de orden definida en el mismo, dos operaciones internas (correspondientes a la suma y el producto) que tienen determinadas propiedades (asociatividad, conmutatividad, etc.), de tal manera que si un subconjunto del dominio es no vacío y está acotado superiormente, entonces posee un límite superior mínimo (supremo), es decir, que verifica el axioma de completitud, cuya expresión simbólica es[9]

$$\exists x \forall y(y \in X \rightarrow y \leq x) \rightarrow \exists x[\forall y(y \in X \rightarrow y \leq x) \,\&\, \forall z(\forall y(y \in X \rightarrow y \leq z) \rightarrow x \leq z)].$$

En la teoría de conjuntos de *Zermelo-Fraenkel* es posible establecer un sistema de objetos (la jerarquía de 'conjuntos') a partir de un dominio inicial V_0, además, para cada ordinal $\delta \in$, $V_{\delta+1} = P(V_\delta)$; por último $V = \cup\{V_\delta, \delta \in \omega\}$, de manera que únicamente los miembros de V son conjuntos (V es una *clase propia*, no es un conjunto). En cumplimiento del axioma de reemplazo, si el dominio de una función está en la jerarquía de conjuntos, también lo está el rango, lo que simbólicamente se expresa

$$\forall x \exists y(f(x) = y) \rightarrow \forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists w(w \in x \,\&\, z = f(x))),$$

donde $\exists y$ significa que existe un único y.

El principio de inducción nos dice que si al cero conviene un predicado y si cada vez que dicho predicado conviene a un número también conviene al siguiente de éste, entonces conviene a todos los números; en símbolos

$$\Pi(0) \,\&\, \forall x(\Pi(x) \rightarrow \Pi(x')) \rightarrow \forall x \Pi(x),$$

donde x' representa el siguiente de x —cuyo rango es el conjunto de los números naturales—.

En primer término, los tres postulados —en adelante REEM, COMP e IND, respectivamente— son expresables en fórmulas de un lenguaje formal de primer orden, interpretable en una estructura cuyo universo de discurso está formado por los objetos del universo de los conjuntos. Cabe, no obstante, otro modo de entenderlos, como se desprende del

9 Estos signos no son los de un lenguaje formal específico y tienen el sentido habitual

sentido de ciertos usos de cada uno de ellos. REEM se refiere a funciones; en su expresión simbólica anterior ello se indicaba mediante f, que se puede considerar una variable cuyo rango (RAN(f)) es distinto del rango de las otras variables sometidas a cuantificación; si éstos se consideran individuales, f no es del mismo tipo. Análogamente, COMP es aplicable a 'todos los subconjuntos de números reales', mientras que el rango de las variables individuales es el propio conjunto de números reales. En el caso de IND, resulta obvio que RAN(Π) es de tipo distinto de RAN(x).

En los contextos donde se usan los postulados mencionados éstos suelen estar codificados en sistemas de primer orden, si bien cabe interpretar que en realidad la lógica subyacente es una lógica de segundo orden, de manera que la expresión de estos postulados, en toda su generalidad, se haría en segundo orden. De optar por esta última interpretación, serían de aplicación las lógicas indicadas más arriba; en particular, la lógica multivariada resulta atractiva para explicar cómo las variables de distinto tipo poseen rangos distintos y, dado que esta lógica equivale a la de segundo orden (con semántica de Henkin), se llegaría a modelizaciones de la lógica subyacente en ciertas prácticas en sistemas formales multivariados o de segundo orden con semántica de Henkin. Si, dentro de esta punto de vista, se debe mantener esta opción como definitiva o no es algo de lo que nos ocupamos en el próximo apartado.

5. Lógica de segundo orden

Supongamos que contamos con un lenguaje formal en el cual expresaremos REEM, COMP e IND. Sean las fórmulas α, en la que ocurre un término funcional, β y γ, en las que ocurre un término predicativo, todos ellos no sometidos a cuantificación —f, X y Π, respectivamente, por no incrementar el número de signos—. Dado que los postulados que nos ocupan son relativos a *todas las funciones, todos los conjuntos de números reales y todo predicado*, para expresarlos simbólicamente en toda su generalidad será necesario clausurar universalmente α, β y γ, es decir, si el lenguaje formal en cuestión es de segundo orden, las siguientes fórmulas representarán adecuadamente los postulados $\forall f\alpha$, $\forall X\beta$, $\forall \Pi\gamma$.

La capacidad expresiva de un lenguaje formal de segundo orden es obviamente mayor que la de uno de primer orden cuyas constantes predicativas sean compartidas por ambos. En efecto, en este caso, cada una de las fórmulas de primer orden no es más que el consecuente de representaciones del axioma de Aristóteles en segundo orden.[10] Así pues, considerando el uso práctico de estos postulados, la lógica subyacente correspondiente podría ser de segundo orden; el problema está en si sería con semántica *estándar* o con semántica de Henkin.

Los sistemas formales de lógica de segundo orden con semántica *estándar*, como es sabido, presentan algunos inconvenientes respecto de los de primer orden —en los cuales no se dan diferentes tipos de semántica extensional (en términos de teoría de modelos)—, aunque tengan la ventaja de la mayor expresividad. Es por ello que, a la hora de modelizar una lógica subyacente, aun cabe preguntarse si no será a la postre conveniente obtener sistemas de primer orden definiendo una operación de sustitución de términos predicativos; en este caso, las mencionadas fórmulas α, β y γ serían consideradas esquemas de un lenguaje de primer orden y para cualesquiera términos f_i, X_j y Π_k, se obtendrían las fórmulas $\alpha(f_i/f)$, $\beta(X_j/X)$ y $\gamma(\Pi_k/\Pi)$, respectivamente y REEM, COM e IND no estarían representados cada uno por una fórmula sino posiblemente por un número infinito (enumerable) de fórmulas, resultantes de aplicar la operación de sustitución a los esquemas correspondientes.

Esta última opción no varía esencialmente de la que adoptaría una lógica de segundo orden con interpretación sustitucional de la cuantificación, en un lenguaje que posee un número infinito enumerable de términos del mismo tipo que las variables cuantificadas. En general, dada una fórmula de la forma $\forall x\phi$ de un lenguaje formal L y una L-estructura M decimos que se toma la cuantificación en sentido referencial cuando M satisface $\forall x\phi$ si y sólo si M satisface ϕ para todos los valores posibles (en M) de la variable x (sufijo del cuantificador); por otro lado, si M satisface $\forall x\phi$ equivale a que M satisface todas las fórmulas $\phi(c/x)$ —resultantes de sustituir en ϕ la variable x por cada término c del mismo tipo que x—, entonces se toma la cuantificación en sentido sustitucional; de modo análogo respecto del existencial.

Por otra parte, mediante la interpretación sustitucional de la cuantificación relativa a las variables predicativas —siempre que el número de términos de cada tipo coincida con el de miembros de los rangos de las respectivas variables— se adopta una lógica de segundo

10. Esta denominación se debe a Hilbert, se trata de una proposición condicional cuyo consecuente es la fórmula resultante de eliminar el prefijo de cuantificación universal del antecedente, manteniendo en el consecuente las variables libres o sustituidas por términos del mismo tipo. Simbólicamente $\forall x_1 \ldots x_n\phi \rightarrow \phi(c_1 \ldots c_n/x_1 \ldots x_n)$, donde $\phi(c_1 \ldots c_n/x_1 \ldots x_n)$ es la fórmula resultante de sustituir en ϕ c_1 por x_1, c_2 por x_2, y así sucesivamente, de acuerdo con la definición usual de la operación de sustitución.

orden equivalente en realidad a una de segundo orden (con interpretación referencial de la cuantificación) con semántica de Henkin y ello, en suma, es lo mismo que mantenerse en primer orden, como indicamos a continuación. Sea γ un conjunto de fórmulas[11] de segundo orden. Sean L y L_2 lenguajes de primero y segundo orden que compartan los términos no lógicos que sean constantes (en el sentido de que no son susceptibles de cuantificación); entonces para cada fórmula $Kx\beta \in L_2$ —donde K es uno de los cuantificadores y x una variable predicativa— tal que en β no ocurren variables predicativas distintas de x, $\beta \in L \cup \{x\}$. Considerando que $\Gamma \subset L_2$ y $z_1, z_2, \ldots, z_m$ sean todas las variables predicativas que aparecen en fórmulas de γ, examinando cada fórmula de γ —en su caso, las subfórmulas correspondientes, cuando tengan un cuantificador como signo principal—, será posible hallar $\Gamma^* \subset L \cup \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$.

Sea M una L_2-estructura (para mayor facilidad se considera que cada uno de los $< c_i >_{i \in I}$ está en M —no se destacan elementos de M, se toman todos—) tal que $M \models \gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$. Sea $\gamma^* \in \Gamma^*$ obtenida a partir de $\gamma \in \Gamma$; y si γ es $\exists x\beta$ en β no ocurre ninguna variable predicativa distinta de x, entonces $M, \sigma' \models \beta$ para alguna asignación σ' que difiere de σ a lo sumo respecto del valor asignado a x; así mismo, si se trata de $\forall x\beta$ (β en las mismas condiciones), se han de verificar

1) $M, \sigma' \models \beta$, para toda σ' que difiere de σ a lo sumo respecto del valor asignado a x;[12]

2) $M, \sigma \models \beta(t_i/x)$, para todos los términos t_i del mismo tipo que x.

El resultado, pues, es que $M \models \gamma^*$ para cada $\gamma^* \in \Gamma^*$ y, de manera análoga se puede establecer que si una $L \cup \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$-estructura satisface las fórmulas de Γ^*, entonces también satisface las de Γ.

6. Actitudes filosóficas

De acuerdo con las consideraciones expuestas en el apartado anterior, si la mejor modelización de la lógica subyacente en una práctica matemática es una lógica de segundo orden, parece conveniente que ésta sea

11 En particular, se puede tratar de un conjunto definido a partir de las fórmulas que expresen unos postulados y por aplicación de la lógica correspondiente, es decir, ser el conjunto de fórmulas que representan una determinada teoría.

12 Aquí, como en el caso anterior, por tratarse de semántica de Henkin, $|RAN(\sigma)| < \omega$.

con semántica *estándar*, dada la equivalencia (desde el punto de vista de las semánticas respectivas) entre la lógica de segundo orden con semántica de Henkin y la de primer orden. En cualquier caso, el discurso sobre objetos se extiende naturalmente al discurso sobre propiedades y relaciones [Shapiro 1991, 203] —o bien el discurso sobre objetos, propiedades y relaciones puede restringirse a un discurso sobre objetos—; de aquí que, respecto de los lenguajes formales, un lenguaje con variables cuyo rango son propiedades y relaciones (los conjuntos de predicados definidos en el universo de discurso de que se trate) no es más que la extensión de otro cuyas variables tienen objetos como rango.

No estando la lógica de segundo orden (con semántica *estándar*) exenta de dificultades,[13] procede reseñar brevemente las opciones que se nos presentan. Se puede considerar, en primer lugar, que la lógica subyacente en la práctica matemática debe ser adecuada para introducir sistemas de objetos que serán únicos salvo isomorfismo. De este modo, si una modelización de la lógica subyacente es contraria a ello, cabría rechazar la modelización como tal o bien el intento mismo de realizarla. Sin embargo, la descripción de los sistemas de objetos no puede estar supeditada a que tal o cual sistema formal capte o no la lógica subyacente en cuestión; en última instancia, por analogía con lo que ocurre en la aritmética con lógica de segundo orden —cuyo sistema formal es incompleto, lo que constituye una característica esencial de la modelización de tal lógica—, los sistemas de segundo orden (con semántica *estándar*) captan perfectamente la lógica subyacente en buena parte de la práctica matemática, y los problemas de tales sistemas no afectan tanto a esta práctica como a la lógica misma.

Otro punto de vista es que la existencia de modelos no *estándar* (por ejemplo, de la aritmética) viene a denegar que se puedan tomar sistemas que sean únicos. Esta es la opción relativista consecuencia de la denominada *paradoja de Skolem*.[14] En realidad, desde este punto de vista, la lógica subyacente en una práctica matemática será, a lo sumo, modelizable como lógica de segundo orden con semántica de Henkin. Otra variante consiste en apelar a la caracterización de la semántica en términos de teoría de conjuntos, que puede ser realizada con una lógica subyacente de primer orden. Sin embargo, es posible

13. Los sistemas formales de segundo orden no verifican *compacidad*, tampoco *teorema de Löwenheim-Skolem* ni *completitud* (es posible hallar una fórmula válida no demostrable, como consecuencia del resultado conocido como *teorema de incompletitud de Gödel*).

14. En Shapiro 1991, se explican todos estos puntos de vista.

presentar un sistema formal de lógica de segundo orden (con nominalización de predicados) interpretable con una estructura que posee alguna *clase propia* (que no es realmente un miembro de la jerarquía de conjuntos). Así mismo podemos decir que mientras en el universo de los conjuntos (en ZF) se da una iteración infinita, en semántica para la lógica de segundo orden, una vez fijado el universo de discurso, los valores de la función interpretación para cada signo predicativo o el rango de las variables predicativas no requieren tal tipo de iteración, sino que basta la potencia cartesiana de la aridad de que se trate.

Si, finalmente, se toma partido por el punto de vista de describir los sistemas de objetos huyendo del relativismo, entonces en determinados contextos será más conveniente la lógica de segundo orden. Los postulados antes mencionados, para expresarlos en toda su generalidad, requieren del segundo orden (con semántica *estándar*, al menos en cuanto a la fundamentación del cuerpo de conocimientos de que se trate. Una fundamentación de un cuerpo de conocimientos, dicho esquemáticamente, no es más que una reconstrucción de los postulados y proposiciones que lo constituyen, tanto si se procede axiomáticamente o mediante reducción o expresión de los anteriores en términos de otro cuerpo comúnmente aceptado. A la fundamentación misma corresponderá una lógica subyacente. A este respecto, REEM, COMP e IND, si aparecen como esquemas en una modelización de primer orden, siendo las fórmulas correspondientes el consecuente de las respectivas instancias del axioma de Aristóteles, como se indicó más arriba, éstos se obtienen asumiendo los antecedentes en todo su generalidad (como expresiones de segundo orden con semántica *estándar*, por tanto) y aplicando *modus ponens*. Para expresarlo simbólicamente, sean las fórmulas $\forall f\alpha$, $\forall X\beta$, $\forall\Pi\gamma$ de L_2 —que podría ser el L_1 expresado más arriba, adaptado a segundo orden— las cuales formalizan los principios que nos ocupan: las instancias del axioma de Aristóteles son: $\forall f\alpha \rightarrow \alpha(g/f)$, $\forall X\beta \rightarrow \beta(Y/X)$, $\forall\Pi\gamma \rightarrow \gamma(\phi/\Pi)$, de donde se obtienen $\alpha(g/f)$, $\beta(Y/X)$ y $\gamma(\phi/\Pi)$, respectivamente, pero estas últimas serán fórmulas del lenguaje de primer orden $L \cup \{g, Y, \phi\}$.

Por otra parte, la adopción de una lógica de segundo orden puede reforzar la aceptación de determinados esquemas. A este respecto, consideremos que T_1 y T_2 son los conjuntos de axiomas de dos teorías cuyas lógicas son de primero y segundo orden, respectivamente. Si para cada $\beta \in T_1$ —para abreviar, supongamos que en β únicamente ocurre un signo predicativo P—, $\forall X\beta(X/P) \in T_2$, entonces, ambas teorías describen, *mutatis mutandi*, el mismo sistema de objetos. La evidencia de unos axiomas puede estar justificada de manera diversa; la adopción de una lógica de segundo orden (como lógica subyacente de una fundamentación) añade lo que denominaríamos 'fuerza epistemológica' a los axiomas (evidentes porque caracterizan determinados sistemas). Si la justificación se detiene en primer orden, ello es coherente con la actitud filosófica de rechazo del segundo orden de acuerdo con las limitaciones de esta lógica, pero la aceptación del segundo orden en el nivel de la fundamentación implica que una práctica matemática y otras estén interrelacionadas, en el sentido de combinar la lógica de primer orden con nociones de segundo orden, como, por ejemplo, cuando al estudiar el plano complejo decimos que éste contiene una 'copia isomórfica' de los naturales y, para completar el estudio de éstos, recurrimos al análisis complejo [Shapiro 1991, 123].

Al margen de los puntos de vista basados en lógica clásica, así como del estudio de prácticas que han tenido una importancia fundamental para el desarrollo de sus propias lógicas subyacentes (lógica modal, lógica de la relevancia, etc.), destacan las actitudes filosóficas que consideran la lógica intuicionista como la más adecuada para ciertas prácticas. Un planteamiento fundamentista consiste en reducir teorías clásicas a teorías intuicionistas y hacer uso de la interpretabilidad de éstas, siendo una variante la teoría de tipos (intuicionista) con axioma de comprehensión. Estudios de espacios métricos, recursividad y otros, poseen este tipo de lógicas como lógica subyacente, si bien la investigación en este ámbito va más allá de los límites de este trabajo.

Referencias

BARWISE, Jon (ed.). 1991-6th. p., *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland.

BOOLOS, George. 1975. "On second-order logic". *Journal of Philosophy* n. 72, pp. 509-527.

CORCORAN, John. 1973. "Gaps between Logical Theory and Mathematical Practice". *The Methodological Unity of Science*. Mario Bunge (Ed.). Dordrecht, Reidel Publishing Co. Pp. 23-49.

HENKIN, Leon. 1949. "Completeness in the Theory of Types". En: Jaakko Hintikka (Ed.). *The Philosophy of Mathematics*: 52-63.

JOHNSTONE, P. T. 1987. *Notes on Logic and Set Theory*. New York: Cambridge University Press.

KLEENE, Stephen. 1974. *Introducción a la metamatemática*. Trad. Manuel Garrido. Madrid: Tecnos.

LAKATOS, Imre (ed.) 1972. *Problems in the Philosophy of Mathematics*. Amsterdam: North-Holland.

LOPEZ-ESCOBAR, E.G.K. 1967. "A complete, infinitary axiomatization of weak second-order logic". *Fundamenta Mathematicae* 61: 93-103.

NEPOMUCENO, Angel. 1993. "Nociones logicistas en filosofía de la matemática". *[illegible]* 35: 85-103.

__________ 1994. "A formal approach to nominalization of predicates". En: Carlos Martín (ed.) *Current Issues in Mathematical Linguistics*. Amsterdam: North-Holland. Pp. 49-58.

MANZANO, María 1993. "Introduction to Many Sorted Logic". *Many-Sorted Logic and its Applications*. K. Meinke, J. V. Tucker (Eds.). London: John Wiley and Sons Ltd.

SHAPIRO, Stewart 1991. *Foundation without Foundationalism. A case for Second-Order Logic*. Oxford: Clarendon Press.

WANG, Hao 1986. "Theory and Practice in Mathematics". *New directions in the Philosophy of Mathematics*. Thomas Tymoczko (Ed.). Boston: Birkhäuser. Pp. 131-152.

Angel Nepomuceno Fernández, es doctor en el área de lógica con el trabajo de investigación: 'Lógica de segundo orden: problemas metateóricos'. Entre sus artículos más recientes se cuenta con: "A formal approach to nominalization of predicates". En: Carlos Martín (ed.) *Current Issues in Mathematical Linguistics*. Amsterdam, North-Holland. 1994. Pp. 49-58. "Lógica y análisis no estándar". *Agora* **12** (2): 163-170.