Mathesis 13 (1997) 1-115.

Filosofías de la matemática, fin de siglo XX. Breve panorama

Javier de Lorenzo

Resumen

En los últimos años del siglo XIX y primeros del XX se produce una explosión creadora en el hacer matemático acompañada por una no menos rica reflexión filosófica acerca de este hacer. En la literatura tópica sólo parece tenerse en cuenta lo que se calificó "crisis de los fundamentos". Cantor, Dedekind, Frege, Hilbert, Poincaré, Peano, Peirce, Russell ... no sólo hicieron matemática y trataron sus fundamentos y crisis, sino que realizaron análisis conceptuales de una finura y riqueza extraordinarias. Desde los años treinta de este siglo la filosofía de la matemática quedó en un muy segundo plano; y sólo desde los años setenta parece haber resurgido con fuerza. A las puertas de un nuevo siglo parece conveniente realizar un panorama sobre las "nuevas filosofías de la matemática", los problemas que considera centrales, sus métodos ... Panorama que dé cuenta no sólo de lo que se ha ido realizando sino que, como programa de trabajo, deje la puerta abierta tanto a que sea completado como a nuevos planteamientos, bien en pugna con los anteriores, bien prolongándolos de alguna manera.

Abstract

In the letter years of the XIX century and the years of the XX century there was an explosive creation in mathematical doing accompanied by a no less rich philosophical reflection about this doing. Conventional literature only seemed to take into account what was called "crisis of fundaments". Cantor, Dedekind, Frege, Hilbert, Poincaré, Peano, Peirce Russell ... not only worked with mathematics and dealt with its fundaments and crisis but also carried out an extraordinarily refined and rich conceptual analysis. After the 1930s the philosophy of mathematics was left somewhat in the background and only since

> the sixties has it begun to regain a new impetus. On the threshold of a new century it seems appropriate to offer an overview of the 'new philosophies of mathematics', the problems which are considered to be core, its methods ... an overview which not only reflects what has been done but also, as a work programme, paves the way both for its completion as well as for the new ideas which emerge both to challenge the old ones and to further them

A. Situando el tema

1. Como producción y producto de la especie humana, el hacer matemático se ha ido mostrando según las necesidades y ámbitos en los que esa especie humana, o alguna de sus partes, ha evolucionado.

En un primer momento, el hacer matemático aparece como técnica u arte que culmina en los intentos de convertirse en *lingua characteristica* y, simultáneo, en *calculus*. Como técnica, y según normas o reglas más o menos adecuadas, al servicio de otras técnicas o artes, básicamente al servicio del ámbito simbólico en el que se incardina. Tratando de trascender esa mera técnica, convertido en ocasiones en un hacer dador de metáforas, analogías con las que cubrir o justificar ese mismo ámbito simbólico.

En un segundo momento, el hacer matemático se transforma y convierte en manifestación de una razón conceptual constructora de métodos, estructuras, espacios que puedan ser modelos posibles de lo real. Hacer conceptual desde el cual un sujeto epistémico pretende un conocimiento de la *physis* que ve enfrentada al mismo. Y el hacer matemático se convierte en elemento constitutivo del conocimiento científico y, a la vez, paradigma de la razón discursiva, razón enfrentada a la razón simbólica, a los saberes que se pretenden últimos y definitivos. Desde este carácter constitutivo para el conocimiento de la *physis*, desde la construcción de modelos posibles de lo real, y con palabras de Born 'mathematics knows better than our intuitions ...'.

Y, tercer momento por ahora, el hacer matemático se ha convertido en tecnología computacional condicionadora, junto a otras tecnologías, de un tipo de sociedad que cae bajo el ámbito tecnológico. No se pretende ya, por modo exclusivo, el conocimiento de la *physis* sino de un conocimiento que posibilite la transformación de esa *physis* en función de una producción y un elemento consumista propios de este último ámbito y que ha llevado a que esa sociedad pueda considerarse con un carácter global, ocupante de una pequeña nave espacial llamada Tierra, con pasajeros en sus distintas clases pero donde todos se encuentran en dicha nave, sin salida, y en la que un posible desajuste en una *zona* puede afectar al equilibrio y estabilidad total.

En cualquiera de esos ámbitos —simbólico, conceptual, tecnológico— y en cualquiera de las caras que el hacer matemático ha ido mostrando, es un hacer que ha planteado constantes problemas en cuanto a su ontología, metodología, epistemología, pedagogía ..., en cuanto a su estatuto tanto interno como externo. Problemas de estatuto, de situación acompañados siempre de unas valoraciones asociadas y propias de cada uno de los ámbitos en que se ha ido produciendo.

En particular, y dado que aquí se pretende un panorama de lo que se ha calificado filosofía de la matemática —sea esto lo que sea, si es que es algo—, las relaciones entre el hacer matemático y la filosofía se han mostrado permanentemente conflictivas, al cubrir la filosofía los restos del ámbito simbólico. Desde el dictum atribuido a Platón 'no entre quien no sepa matemática', hasta la afirmación del neokantiano Lotze 'la filosofía no se dejará someter por la matemática'.

Atracción permanente para todo filósofo porque el hacer matemático, lo quiera o no, es piedra de toque para el sistema que pretenda elaborar. Y, o tiene que partir del hacer matemático para esa elaboración, o delimitar su sistema respecto a ese hacer, o tratar de abarcarlo y, con ello, subsumirlo.

En cualquier caso, el filósofo ha de enfrentarse al mismo en un enfrentamiento en el cual, y desde el orgullo del filósofo, se ha llegado a la afirmación de que, en general, el matemático debe limitarse a hacer matemática ya que es a él, al filósofo, al que corresponde 'pensar' acerca de ese hacer. Para el filósofo, el matemático no sabe, en el fondo, lo que hace, por qué lo hace, cuáles son los fundamentos de lo que hace, ni siquiera acerca de qué habla o trabaja.

Como ejemplo de una posición general como la anterior, Simons discutiendo las relaciones entre matemática y metafísica, acentuará la posición kantiana cuando en *Crítica de la razón pura* acusaba a los matemáticos de no ocuparse de los aspectos filosóficos de su materia para terminar afirmando que no podían hacerlo salvo construir castillos en la arena. Simons [1990, 18] señalará que al matemático *qua* matemático no le parece esencial reflexionar metafísicamente acerca de lo que hace y de lo que habla. De ahí que, *qua* matemático, desdeñoso hacia la metafísica, actúe como un platónico, como una especie de geógrafo o astrónomo que maneja objetos abstractos, objetos separados del espacio y el tiempo. Evidentemente, un filósofo no puede ser tan despreciativo con su objeto de estudio. Y desde la filosofía observa que matemática y metafísica se solapan por lo cual el filósofo, *qua* filósofo, ha de encargarse de dar respuesta a cuestiones como las de qué objetos maneja el matemático —si es que maneja algunos—, cómo los maneja, qué fundamentos tiene para ese manejo, y las respuestas deben enlazarse *no sólo* con la metafísica sino con la psicología, epistemología, semántica, sociología, historia, física, etc. Simons, retomando a Herbert, indicará que no estamos aquí de juerga, y si el matemático *qua* matemático se contenta con una visión platónica de lo que hace y habla, cabe preguntarle: pero ¿sabe de qué habla?

Desde mi posición, y frente a enfoques como los anteriores, creo que el matemático en general sí sabe de qué habla y, además, en su hacer, va formando conceptos y creando para ello nuevos tipos de definición, construyendo nuevos métodos demostrativos, estableciendo nuevos modos de concebir la *physis*. Por supuesto, va planteando nuevos problemas a la *razón* conceptual y es él, como matemático, quien pretende, además, responder a esas cuestiones. Y lo hace desde su interacción con cuestiones y problemas que se le plantean desde otras ciencias, desde otros campos epistémicos y tecnológicos y no sólo desde la pura praxis interna. Por ello, y orgullo de matemático, suele ver con desprecio los intentos que hacen, desde algunas posiciones, los filósofos para 'explicar' un hacer que, en general, desconocen.

Desconocimiento que ha conducido a una profunda escisión entre filosofía y matemática que si en poco beneficia a ambas, ha perjudicado más profundamente a la filosofía, convertida en ocasiones en mera ideología sustitutiva de un ámbito simbólico del que pareció desprenderse la razón conceptual en un primer momento, aquél en el que precisamente el hacer matemático se convirtió en clave para la puesta en marcha de esa *razón* conceptual, con sus características propias.

2. Limitados aquí a las relaciones entre ambas disciplinas —matemática, filosofía— podría hacerse una historia, larga historia, de tales relaciones y en el interior de cada uno de los ámbitos señalados, simbólico, conceptual y tecnológico.

a. Cabría considerar, por ejemplo, el papel que el hacer matemático tiene en la escuela pitagórica y, en particular, en Platón por las repercusiones que ha tenido a lo largo de la historia y las continuas llamadas al platonismo desde Cantor hasta el presente y que constituyen llamadas que quizá no hagan justicia al pensamiento de Platón al que se atribuye un realismo ontológico de formas puras, de objetos eidéticos matemáticos que quizá no se adecúen a lo que Platón mismo expone sino a un Platón leído e interpretado tras el paso de un monoteísmo religioso.

En Platón, respeto y admiración por la matemática que le lleva a diferenciarla de una mera técnica y a atacar a quienes sólo la enfocan como arte y hablan de cuadrar, medir, calcular y no ya del número y la figura, no del modo de razonar hipotético-deductivo propio del geómetra.

Hablar del mundo sensible y fenoménico, transitorio, se le muestra a Platón difícil si no imposible: aquello de lo que hablamos se hace otro mientras hablamos [*Cratilo* 439 d 8-10, *Teeteto* 182 a-e]. Y de aquí el empleo de la matemática para alcanzar una imagen verosímil de un mundo sensible que, a su vez, es imagen verosímil de formas inteligibles. Y la matemática, en este punto, posibilita alcanzar la estructura subyacente a ese mundo cambiante porque sólo la forma permite superar el caos. Forma que, en el proceso de autocreación del cosmos desde el caos, subtiende esta construcción. Y la matemática permite la comprensión de este proceso porque con ella se logra dar una imagen verosímil del mundo a través de las formas, aunque no pueda ir más lejos.

A la vez, la matemática es apoyatura para la metáfora, y es el círculo y la proporción y analogía con sus medias, clave para muchos temas platónicos, hasta para establecer una doctrina como la reminiscencia o una cosmología como la de *Timeo*. En *Timeo* es el ana-logon quien estructura tanto la arquitectura del mundo como la obra del demiurgo mediante la proporción, es decir, la igualdad de razones en el sentido de que entre tres o cuatro números puestos en razón, la razón sigue siendo la misma, lo que produce la homología o acuerdo entre los términos enlazados por la proporción geométrica. Metáfora que incide tanto en el manejo de figuras geométricas como la recta, el círculo y otras figuras geométricas en el discurso platónico como en la propia retórica de ese discurso que ha de ser proporcionado a partir de la simetría y la analogía [*Fedro* 264 c].

Pero la matemática es un hacer distinto al filosófico, al establecer Platón (ver, por ejemplo, *La República*, en especial Libro VI, *508 ss.*) la diferencia entre el pensar hipotético-deductivo del matemático, a partir de supuestos, y un hacer que pretende alcanzar los primeros principios no éticos. Haceres distintos, el matemático y el filosófico, porque los matemáticos han de apoyarse en las imágenes sensibles, perceptivas para, desde ellas, alcanzar las imágenes verosímiles primitivas, en un proceso constructivo que le conduce, incluso, a aceptar la existencia de nuevos objetos y conceptos por el intento de manejar formas puras. Por su lado, el filósofo, en su proceso dialéctico, solo va de conceptos a conceptos sin tener que pasar por esas figuras perceptivas. En la matemática hay un elemento constructivo, tanto analítico como sintético, mientras que en la filosofía la clave se centra en el método dialéctico, de síntesis.

A pesar de sus diferencias, la matemática en Platón se hace propedéutica imprescindible para el filosofar: materia obligada en la enseñanza del futuro gobernante, como un hacer de formas, como un hacer al que han de aproximarse los cuerpos de la *physis* y, con ello, obtener un conocimiento lo más aproximado de la misma, nunca exacto, nunca verdadero.

En Platón hay una distinción clave entre lo metodológico y lo ontológico. Por supuesto desde una perspectiva que se quiere conceptual y, por ello, separada si no opuesta, a lo opinable y a lo puramente manipulable empírico. La manipulación empírica —cuadrar, calcular, medir— supone un lenguaje ridículo porque no responde ni siquiera a una técnica, calculatoria o geométrica, sometida siempre a normas para que sea, auténticamente, técnica o arte. Y, desde lo conceptual, el geómetra ha de manejar un método de razonamiento, el hipotético–deductivo que puede, incluso, adoptarse como modelo para el propio razonar filosófico: 'Razonemos como los geómetras ...'. Lo cual no implica que los matemáticos alcancen el ser, la forma pura, sino que están abocados a un proceso constructivo permanente.

Quizá sea una lectura no tópica de Platón muy alejada de atribuirle un realismo ontológico objetual radical. Desde esta lectura quizá se pudiera pensar que Platón pretendiera independizar la razón conceptual de la razón simbólica y, por supuesto, de la mera práctica de lo cotidiano, práctica puramente doxástica y opinable, sin reglas o normas bien establecidas. Pero la matemática continúa siendo un arte, una técnica y no una disciplina estrictamente conceptual.

b. Y haciendo camino, cuando surge el hacer conceptual científico, lo que se ha calificado como ciencia nueva, el hacer matemático cobra un nuevo estatuto y va a apoyarse en la razón conceptual por modo exclusivo. Deja de tener, ya, su fundamento en el ámbito simbólico donde es Dios quien hace el cosmos conforme a número, peso y medida. Lo conceptual tiene que deslindarse de lo simbólico y para ello busca como apoyatura el hacer matemático, considerado como un saber absoluto, de verdades necesarias que no pueden modificarse, pero que son alcanzables por la sola razón.

Inmersos en un ámbito conceptual, se plantea la problemática de que ese hacer ha de tener una fuente única, y definitiva, que justifique tal valoración de saber absoluto, necesario, verdadero. De ser Dios quien soporta la verdad de las proposiciones matemáticas, según pretenden los primeros racionalistas, a ser la sola razón o el sujeto trascendente quien se haga responsable de dicho soporte, manifestada la razón en el papel que va a cobrar la demostración.

Basta recordar los ataques del arzobispo Berkeley al matemático en *El Analista o discurso dirigido al matemático infiel*, entre otras obras, matemático que, en el fondo, tiene 'más fe que el carbonero' y cree en los infinitesimales o diferenciales o en las fluxiones que no siendo, son; siendo, dejan de ser. Para Berkeley es el análisis el que carece, radicalmente, de fundamento.

Lo que refleja esta crítica no es otra cosa que la pugna entre lo conceptual y lo simbólico, una pugna en la que unos mantienen la pretensión de una fundamentación, de una metafísica del cálculo, de una fundamentación en el fondo de la propia razón conceptual en el ámbito de lo simbólico frente a quienes tratan de abandonar dicho ámbito considerándolo impropio de la razón conceptual.

Son las permanentes polémicas en cuanto a las pretensiones de una fundamentación definitiva y las respuestas de Carnot con la metafísica del cálculo, la erradicación de los infinitesimales desde un enfoque formal de series de Lagrange o la suprema ironía del agnóstico d'Alembert: 'seguid, la fe vendrá después'.

El triunfo de la ciencia nueva, apoyado el hacer físico, la filosofía natural en la matemática como una de sus componentes constitutivas, condujo a la filosofía a tratar de seguir, en ocasiones, el seguro camino de la ciencia, intentando adoptar, para ello, algunos elementos del hacer matemático. Fundamentalmente, lo que consideró como clave para ese éxito: el método. Es claro que no lo siguieron todos los filósofos y que algunos llegaron, incluso, a matizar tal empleo. Ya Pascal, por ejemplo, frente al racionalismo de su entorno, mantendrá la escisión entre las dos razones.

Esta escisión pascaliana refleja un hecho que considero fundamental: la matemática se manejó, desde la ciencia nueva y por parte de geómetras, físicos, filósofos, como instrumento clave para el triunfo del ámbito o Burbuja conceptual frente a la Burbuja o ámbito simbólico y la consolidación de una nueva visión del universo.

Descartes, por ejemplo, se apoyará en la matemática para establecer la autonomía de la razón conceptual, razón que ha de seguir sus métodos propios, al estilo matemático, de análisis y síntesis y no según procesos de simbolización y captación globales de la *physis*: método operacional por el que transforma la propia geometría en proceso algebraico mediante los conceptos-núcleo de composición en partes infinitesimales y de linealización. En paralelo, la *physis* puede y debe explicarse en función de la materia y el movimiento con sus correspondientes partes infinitesimales y, para esa explicación, se requiere de las verdades matemáticas. Se rechaza, de esta manera, el manejo de cualidades ocultas; se rechaza la racionalidad propia de la Burbuja o ámbito simbólico, apoyada en un proceso de captación global totalizador con su principio de correspondencia. Y se maneja la analogía y proporcionalidad para llevar adelante una tesis epistémica básica: los fenómenos infinitesimales pueden conocerse por analogía con los fenómenos perceptivos pero atendiendo siempre a la analogía y proporcionalidad: atendiendo a sólo materia y movimiento, a extensión o forma y a proporción.

El racionalista manejará la matemática como instrumento para consolidar una Burbuja como la conceptual y no como un hacer propio, en sí —bastaría recordar la 'pereza' cartesiana, los sucesivos abandonos del hacer matemático por parte de Pascal—. De ahí la importancia no ya de la matemática como tal —que, por supuesto, tuvo un desarrollo excepcional en la época— sino de su método para la constitución del ámbito conceptual en el que instalar un nuevo tipo de racionalidad con un nuevo tipo de sociedad. Un nuevo marco en el que ha de situarse la filosofía 'natural' frente a la dedicada, hasta ese momento, a justificar la teología, por ejemplo, o a desarrollar el método dialéctico para tratar de emplearlo como instrumento de conversión de infieles. Una filosofía 'revelada' subordinada al ámbito simbólico.

Olvidando o desconociendo quizá el papel anterior, o más bien situado ya en un ámbito conceptual que el papel de la matemática y de la Mecánica, el avance de la burguesía han hecho factibles, Kant pretenderá marcar diferencias de modo explícito: matemática y filosofía como disciplinas radicalmente diferentes por lo que utilizar el método matemático en filosofía, el filosófico en matemática no conduce más que a resultados 'nefastos' en cada uno de esos campos.

Sin embargo, como filósofo, Kant se inclina valorativamente hacia la filosofía, aunque ésta no ha de tomar nada de la matemática, que es conocimiento, es a la filosofía a quien corresponde develar los principios de la matemática, establecer las condiciones epistemológicas del saber matemático, lo mismo que es al filósofo a quien corresponde establecer los 'principios metafísicos', normativos y ya definitivos, de la filosofía natural, de la ciencia de la naturaleza, muy diferentes de los principios 'matemáticos' queridos por Newton que no dan el fundamento de la misma. La filosofía, ahora, toma el papel que tenía la filosofía 'revelada' en el ámbito simbólico respecto a las demás ciencias: establecer el último fundamento de las mismas.

Es línea mantenida desde entonces, y en general, por los filósofos, en el sentido de que, para ellos, el matemático, como profesional especializado, debe limitarse a resolver sus problemas, a realizar demostraciones, pero no debe entrar en campos filosóficos como los de discutir acerca de cómo se procede para tal resolución, qué es una demostración, cuáles son los principios de su hacer, cuál es la naturaleza de los objetos con los cuales trabaja. Temas propios del filósofo, temas para los cuales la filosofía establece los criterios adecuados con un tipo de saber que no maneja el matemático y que, por ello, cuando éste pretende entrar en los mismos no hace más que el ridículo porque no sabe 'filosofar'.

3 No voy a seguir por este camino. Sí observar que en estos encuentros y desencuentros entre el hacer matemático y el filosófico ha habido períodos de intensa especulación y otros de relativa calma. Así, a lo largo de este siglo, un primer tercio en el que el llamado problema de la crisis de los fundamentos originó duras polémicas entre los matemáticos —con sus fases asociadas de: crisis, triunfo del cantorismo, discusión entre un intuicionismo finitista y un intuicionismo formalista—.

De aquí se pasa, desde los años treinta, a un período de atonía especulativa pero de enorme aplicación del hacer matemático a otros campos. Así, el hacer matemático se convierte en elemento clave para los problemas pedagógicos con las reformas educativas asociadas que llevaron a la 'matemática moderna' y el consecuente 'fracaso escolar', o se convirtió en modelo explicativo para la antropología estructural centrada en las relaciones de parentesco y sus grupos subyacentes o para la psicología evolutiva piagetiana y la adopción de las estructuras-madre bourbakistas como elemento central en la evolución psicogenética de los individuos, entre otros, por no mencionar los éxitos rotundos de la matemática en las restantes disciplinas científicas.

Sólo desde los años setenta, en estos últimos veinte años, se ha vuelto a una fase en la cual el hacer matemático se ha enfocado como problemático y se ha tomado como campo especulativo, campo de batalla en el que, en muchos casos, se pretenden dirimir cuestiones un tanto ajenas a dicho hacer. Se han hecho renacer cuestiones metodológicas —papel de la formalización, del método axiomático, qué es una demostración y si tiene algún cometido especial—, epistemológicas —y la teoría causal del conocimiento se adopta como paradigma—, ontológicas —se vuelve a plantear la vieja problemática del realismo objetual matemático—, sociológicas —papel de las publicaciones, congresos, mafias internas, sociedades en las cuales trabaja y se encuentra el matemático—, antropológicas —y surge el concepto de etnomatemática y su papel, de lo que estimar cultura—, pedagógicas —si hay que desterrar la geometría euclídea de la enseñanza y qué la debe sustituir en cuanto al contenido, y si hay que dar o no un contenido y ser el alumno quien descubra Mediterráneos—

Y todas estas problemáticas se envuelven bajo la rúbrica filosofía de la matemática. Problemática con sus discusiones y tendencias que cabría agrupar en tres grandes líneas que no agotan, ciertamente, los diferentes matices que existen entre las mismas pero que posibilitan un sistema de coordenadas o cuadro referencial en el que situar las diferentes corrientes y, en ellas, los problemas centrales de las mismas.

1. Haciendo filosofía

El hacer matemático se adopta como campo en el que dirimir cuestiones intrínsecamente filosóficas, especialmente en sus aspectos epistemológico y ontológico, aunque pomposamente —o con sus segundas intenciones productivas y de promoción académica y profesional— se califique este trabajo como filosofía de la matemática con unos predicados: actual, nueva, nuevas tendencias. **Haciendo filosofía** sustantiva más que haciendo matemática o una auténtica filosofía de la matemática porque en ella se suelen manejar, por modo exclusivo, temas muy primarios del hacer matemático.

Filosofía adjetiva, parecería tener como objetivo resolver, discutir, disolver o confundir problemas típicos o característicos del hacer matemático. Al menos si se es consecuente con el nombre bajo el cual se engloban quienes se dedican a estos temas. Muy al contrario, bajo la rúbrica filosofía de, adjetiva, se mantiene el enfoque clásico, tratar de disolver, confundir o cuestionar los viejos, y siempre vivos, temas filosóficos: lo que se tiene es un intento de filosofía sustantiva. Lo que no hay, a pesar del nombre, es una auténtica filosofía de la matemática sino un manejo de la matemática como ejemplificación de los debates filosóficos. Aunque ello encierre sus consecuencias pragmáticas

En esta "nueva" filosofía de la matemática vuelven a surgir los temas clásicos ontológicos. Y la matemática se hace campo de batalla de doctrinas metafísicas clásicas como fundamentalmente las monistas, que se escinden en realistas, fisicalistas, nominalistas, semi-realistas, estructuralistas más o menos modalistas, etc., en cuanto a la existencia de los objetos matemáticos. Doctrinas monistas metafísicas que no constituyen otra cosa que el reflejo del idealismo subjetivo o mentalismo; el idealismo objetivo denominado platonismo; el materialismo o fisicalismo, el formalismo inscripcionista, entre otros. Doctrinas metafísicas que sostienen que lo que existe es el objeto mental; los estados y sucesos mentales o psíquicos; los objetos abstractos como universales trascendentes, base de todo lo real, de todo ser; el objeto material físico como único real; los procesos de pensamiento, respectivamente. Realismo material o realismo ideal objetivo que mostrarán, igualmente, sus matices y diferenciaciones consiguientes según el autor que lo mantenga pero que, desde lo ontológico, podrían encuadrarse en una misma sección.

Al hacerse problema la naturaleza del objeto abstracto no espacio-temporal, sea matemático o no, se hace campo de debate la problemática epistemológica de cómo alcanzar el conocimiento de tales universales. Y es un problema epistemológico intrínseco —y no sólo específico del hacer matemático— en el que caben muchas disciplinas diferentes para abordarlo.

Se hace auténtica *crux* el juego de los dos polos: epistemológico-ontológico, con vuelta y surgimiento de teorías causales o interaccionistas del conocimiento y de si lo abstracto es o no inerte para lo epistémico. Se vuelve a una problemática que afectó seriamente al empirismo ya que si se antepone el factor epistémico, las proposiciones matemáticas se convierten en una *crux* para el empirista: si el empirismo es correcto, ninguna proposición que posee contenido fáctico puede ser necesaria; si las proposiciones matemáticas "verdaderas" son necesarias entonces carecen de contenido fáctico y han de ser consideradas como proposiciones formales, pero entonces el empirista tiene que justificar por qué las proposiciones formales poseen un carácter instrumental tan fuerte; si no son necesarias y poseen contenido epistémico fáctico entonces hay que establecer cuál es su semántica adecuada, ya que las proposiciones matemáticas versan acerca de elementos objetuales como el infinito actual y los distintos cardinales u ordinales transfinitos.

El argumento de la indispensabilidad de la matemática para el conocimiento científico de Quine-Putnam busca salida a estas dificultades del empirista al admitir que las proposiciones matemáticas también pueden ser modificadas pero que, por encontrarse en el núcleo de las teorías, tal modificación, en el fondo, no se lleva a efecto nunca.

Es el juego de los dos polos, epistémico y ontológico, el que origina las dificultades. Anteponer el primero supone pasar los problemas al segundo y recíproco. Y ello porque obliga a realizar llamadas a intuiciones de carácter eidético que justifiquen cómo alcanzar el conocimiento de los universales. Y es el problema de a qué llamar intuición y sus diversos matices —la intuición de Brouwer, la de Gödel, Husserl, Maddy, Parsons, etc.— y si hay que diferenciar una intuición sensorial ordinaria y una intuición eidética.

En estas discusiones, y a partir del dilema planteado por Benacerraf en los setenta, y tratando de superarlo, han surgido distintas posiciones que se encierran bajo la etiqueta de 'nuevas' concepciones de la filosofía de la matemática y que poseen como objetivo alcanzar una epistemología naturalizada y, de paso, para algunos, lograr una radical eliminación de los objetos matemáticos, del realismo universal abstracto.

Son posiciones que cabe estimar consecuencia de la inflexión producida hacia los 70 por el agotamiento de un enfoque fundamentalista en el pensamiento en general motivado por el entrecruce de varios factores, entre los que menciono, básicamente, dos:

- en particular, el cambio producido en el hacer matemático donde cobra radical importancia el hacer computacional que condiciona un enfoque operacional de los restantes haceres y donde tanto el ordenador como el *WEB* pasan a tener un protagonismo que hace modificar la praxis y el modo de trabajo del matemático;
- en general, un cambio en lo económico-social con una modificación radical de los medios de producción y distribución con sus consecuentes desarrollos tecnológicos y que llevan a propiciar reformas y planes educativos que lleven a que Juancito no sepa sumar pero, al menos, maneje o consuma el ordenador y que han culminado con el derrumbe de aquellos sistemas políticos que mantenían un enfoque fundamentalista como sistema organizador socio-político y, consecuente, sin justificaciones de 'guerra fría' entre dos bloques, inexistente desde hacía tiempo pero que, ahora, conducen a lo que se califica de aldea global

El agotamiento del enfoque fundamentalista formal, considerado como mera herencia cartesiana a superar, encuentra una línea de apertura en los llamados intentos de epistemología naturalizada proclamada entre otros por Quine y que tiene en dos ensayos de Benacerraf su más claro expositor en cuanto a la filosofía interna de la matemática.

Para la literatura filosófica adjetiva de la matemática, los dilemas de Benacerraf se han estimado claves para la inflexión producida, olvidando elementos sustanciales como los dos que he mencionado antes. Una inflexión que provoca ir desde lo epistemológico y lo semántico a lo ontológico, con su camino de vuelta incorporado, con la idea de que la filosofía de la matemática a la que esa inflexión ha dado paso ha conseguido superar el clásico enfoque de un hacer de fundamentos.

Inflexión aparente, sin embargo, porque se siguen barajando las posiciones que cabe considerar 'clásicas'. Se siguen retomando los problemas y la terminología de Kant, Mill y Frege fundamentalmente. Y se intentan empirismos realistas o nominalismos donde el empirismo o el nominalismo radicales se hacen idealismos objetivos realistas o se pretenden fundamentos sin fundamentalismos a través de unos logicismos apoyados, ahora, en sistemas formales o lógicas de segundo orden con sus problemáticas asociadas a la ontologización producida por los cuantificadores.

En cualquier caso, y desde Quine, se ha generalizado el término de 'naturalizada' para la filosofía que se acoge a estos enfoques al igual que a los sociológicos y antropológicos de otras tendencias. Unos términos, 'natural', 'naturalizada' que todos manejan pero que nadie aclara en cuanto a su significado. Y no se sabe muy bien si ello equivale a decir que la filosofía de la matemática que se pretende desarrollar no es 'artificial' o 'artificiosa', mero juego de artificio, sino una auténtica filosofía de; o bien retoma la distinción entre filosofía 'natural' o física y filosofía 'revelada' que tanto juego tuvo en el surgimiento de la ciencia nueva, trasvasados ahora esos calificativos al hacer matemático y, con ello, quieren indicar que se contraponen a un hacer matemático revelado o divino —como si este hubiera existido alguna vez—, y se habla de una matemática natural identificada con las ciencias experimentales que manejan, por modo exclusivo, entidades 'naturales'. Esta última acepción es la que, en general, se acoge bajo el término 'matemática naturalizada'.

2. Piedra de toque

Si la filosofía pretende un hacer sistemático global, ha de dar cuenta de todos los campos cognoscitivos y, entre ellos, del hacer matemático. Pero entonces la matemática se convierte, le guste o no al filósofo o al matemático, en **piedra de toque** del sistema o teoría filosófica correspondiente.

No sólo piedra de toque, sino algo mas: base y elemento constitutivo de la propia filosofía, porque hace surgir nuevos campos de trabajo y, con ellos, nuevos interrogantes. Así, cabría considerar los debates en torno al *Ignoramus, ignorabimus* ... a consecuencia de las geometrías métricas no-euclídeas y el problema del espacio correspondiente; los problemas de la estabilidad de los sistemas dinámicos a través de su expresión en ecuaciones diferenciales no lineales y el paso a la distinción entre determinismo como concepto metafísico y predicción como concepto 'científico' y las actuales problemáticas en torno al determinismo no predictivo o caos, el formalismo y sus criterios de derivabilidad sintáctica con el problema de decidibilidad y la búsqueda de precisión de nociones como la de algoritmo y el replanteamiento de cuestiones como las de cerebro y máquina, cerebro y computabilidad.

Temas para la filosofía pero desde la matemática y que también formarían parte de lo que calificar filosofía de la matemática, aunque sea un punto muy poco trabajado quizá por la separación o ruptura que mencionara entre el hacer científico y el saber filosófico.

Es una coordenada que puede incluirse, en este panorama, en la anterior porque va íntimamente ligada a la misma: es obligar a pensar, desde el hacer matemático, cuestiones que pueden convertirse en básicas para ese pensamiento, para el filosofar.

3. Análisis crítico del factum 'matemática'

Hubo un momento, a finales del siglo pasado y primeros de este, en el que se pretendió fundamentar el hacer matemático no en el ámbito simbólico, sino en la propia razón conceptual y, con ello, no sólo orientar sino dirigir prescriptiva, normativamente dicho hacer. Posición ideológica centrada en buscar una base o roca firme, una fuente única, y ya definitiva, del hacer matemático en su globalidad.

Intento de fundamentación perseguido en dos grandes líneas: la de los matemáticos, convertido el objetivo fundamentante en un hacer focalizado en crear y desarrollar temas que serían englobados en el interior de la matemática y conducirían a la creación de sistemas formales como la lógica formal, la teoría de modelos, la de computabilidad, el estudio de características o propiedades como consistencia, completitud, compacticidad, etc. Una línea fundamentante en la cual se hace, realmente, matemática. Con ello, la idea de una fundamentación de esta praxis quedaba en un círculo como ya indicara Poincaré: la matemática se fundamentaba en sí misma porque en esa fundamentación se seguía haciendo matemática.

Una segunda línea fundamentalmente trataba de apoyar el hacer matemático bien en el lenguaje, bien en la fenomenología, en la empiria y sus procesos de abstracción e idealización correspondientes, bien en la epistemología evolutiva. En todas se aceptaba como definitivo aquello en lo cual apoyar el hacer matemático sin ver que podían mostrarse más conflictivos que lo que pretendían fundamentar. Se intentaba basar algo oscuro —si es que el hacer matemático lo era— en algo todavía más oscuro

Los fundamentalismos logicista —en sus dos versiones fregena o russelliana—, intuicionista o formalista —este último en cualquiera de sus versiones inscripcionista, finitista, de juegos, nominalista— han mostrado ser ismos muy alejados de la praxis de aquello que pretendían fundamentar. Y la conclusión que se obtuvo de estos proyectos es la expresada en el slogan, más o menos irónico, por el cual 'las ciencias no están fundadas sobre sus fundamentos' [sciences are not founded on their foundations], y que no refleja otra cosa que la convicción que se plasma en puntos como los siguientes:

a. Las matemáticas son más seguras que cualquier esquema fundacional establecido por filósofos o por los propios matemáticos para 'asegurarlo';

b. El análisis lógico de la matemática tiene poco que ver o, más bien, ninguna relación con la praxis matemática actual.

Dos puntos que reflejan la convicción del fracaso que han dado las visiones globales de fundamentos establecidas en los primeros años de este siglo acerca de la naturaleza de la matemática, defectuosas en elementos esenciales de la misma. Defectos que han conducido a su abandono, al menos programático, a partir de los treinta y que se mantiene en los momentos actuales. Abandono en cuanto a intento de fundamentación global, ya definitiva, de la praxis matemática pero no en cuanto a una búsqueda analítica de los procesos que se incardinan en dicha praxis y que se acoge, en algunos autores, bajo el calificativo de 'fundamentos'.

En esta línea hay que tener presente que lo que hoy cabe calificar de fundamentos posee una connotación diferente a la que tuvo en los primeros años de este siglo. Y puede hablarse de unas corrientes de búsqueda de fundamentos del hacer matemático pero en línea más modesta a la pretensión fundamentalista: partiendo del hecho en sí de la praxis matemática, de la praxis del hacer físico, y en proceso dialógico, analizar críticamente dichos haceres que se dan por construidos, pero como resultado de un proceso constructivo que puede obligar, incluso, a reelaborar el contenido clásico de la matemática.

A partir de aquí, analizar la 'irrazonable efectividad' del hacer matemático en la ciencia, el 'milagro' de la aplicabilidad de la matemática, la construcción de modelos posibles de lo real.

Manejo del hacer matemático, desde la matemática y la filosofía simultáneamente, sin pretensiones de establecer norma alguna sino análisis conceptual crítico siempre enriquecedor claro para ambos haceres.

Es una línea que supone, como programa, varias salidas:

a. Estudio de los haceres matemáticos, de sus estilos, métodos, tipos de demostración, entre otros. Es un estudio de carácter básicamente interior a la praxis matemática aunque presente dos versiones:

a.1. Descriptiva, apoyándose en el análisis crítico de lo que hay;

a.2. reconstructiva: reconstrucción del hacer matemático a partir del enfoque 'constructivo', a partir de otros enfoques.

En cualquiera de ellas, se acepta que cuestiones como la metodológica son centrales para la praxis matemática y no sólo las ontológicas o epistemológicas. Se plantea la cuestión metodológica de cómo manejar los objetos abstractos que se suponen existentes y qué papel tiene la demostración, si es que tiene alguno, de una proposición que ha de ser verdadera si refleja adecuadamente las propiedades del objeto con independencia a su demostración o, lo que es lo mismo, la cuestión de si la verdad de una proposición es igual o no a la demostración de la misma. Aún más, se plantea como problema la propia noción de demostración, sus vertientes sintáctica y semántica, sus variaciones, su contexto de aceptación social.

b. Estudio del hacer matemático como elemento constituivo para otros haceres. Aquí intervienen las polémicas en torno a la indispensabilidad o no de la matemática, el milagro de la misma para la elaboración de otras ciencias, del conocimiento en general, etc. Quiero decir, es un análisis crítico del hacer matemático como elemento constituivo y a la vez regulativo o no para otros haceres.

Ahora bien, si de modo clásico se ha quedado en estudio de sólo la relación matemática-física y, por generalización, en el manejo de la matemática en otras áreas, este punto se me presenta más amplio: no se trata de considerar sólo las aplicaciones y, con ellas, qué tipo de instrumental o qué métodos son los más operativos, sino que hay que analizar si el hacer matemático es, o no, elemento constitutivo para el pensamiento y la propia conceptualización, para una u otra visión del mundo. Y aquí habría que estudiar, por ejemplo, el papel que el empleo de las ecuaciones diferenciales y el concepto-núcleo de linealidad han podido tener para aceptar una causalidad donde el determinismo y la predicción se encuentran unidos y las repercusiones que estos elementos han tenido en el pensamiento en general

e. Estudio del hacer matemático como objeto cultural en sí. Y, entonces, cabe considerar este hacer en su relación con otras disciplinas como la historia, la sociología, la antropología. Se tiene la aceptación de que el hacer matemático es tanto una producción como un producto y que, al igual que una obra de arte, un teorema es un elemento cultural. Como tal, el hacer matemático muestra unos estilos que se pueden encontrar en el interior de unos haceres y unos ámbitos que hay que estudiar y caracterizar, al igual que la variación de esos estilos, su papel en la cultura, su dependencia respecto a la misma.

4. El cuadro anterior, en el que he tratado de especificar las relaciones, encuentros y desencuentros entre filosofía y matemática, permite situar los problemas en los que se concentra la filosofía de la matemática de los últimos veinte años además de constituir, en sí, un programa de trabajo. Cuadro o sistema referencial en el cual, de una forma u otra, voy a ir situando tanto dichos problemas como las figuras que pueden estimarse más representativas aunque, como panorama, es claro que prescindo de muchos matices, de entrar en alguna de las polémicas que se han originado, de algunos autores, a la vez que quizá no analice a otros con la extensión que quizá merezcan.

Con unas observaciones: haré referencia, en general, al tipo de hacer matemático al que, de uno u otro modo, responde cada una de tales posiciones. Por otro lado, trato de ser expositivo y, por ello, intento seguir lo más textualmente posible a los autores que considere, sin pretensiones de originalidad en las mismas. Lo cual no impide que, además de las posibles críticas a cada una de estas posiciones y autores, señale tanto los problemas en los que se han concentrado como los problemas que aún siguen en pie. De aquí que, más que simple panorama pueda estimarlo como programa de trabajo a ser completado, proseguido.

En tercer lugar no pueden dejar de mencionarse las grandes líneas que siguieron los intentos de fundamentación ya que siguen latentes en las 'nuevas' filosofías de la matemática aunque no sea más que para dejar constancia de que no se mantienen en las mismas, para dejar constancia de que algunos autores actuales parecen añorarlas y consideran que, en algunos casos, se han interpretado mal:

a. Constructivo, apoyada en el uso constructivo de la razón pura, y donde el término 'construcción' ya no quiere decir, como en Kant, de donde procede, o en el intuicionismo de Brouwer, imponer una forma y un sentido a la realidad sino que supone aceptar que son las entidades reales las que, al permanecer o transformarse, provocan el pensamiento y, al hacerlo, obligan a la construcción de formas y estructuras, al establecimiento de leyes conceptuales que tratan de captar, de alguna forma, los procesos reales; provocan la construcción de modelos posibles de lo real, que es uno de los objetivos del hacer matemático;

b. empirista, apoyada en procesos de abstracción e idealización de lo real; y se plantea la cuestión de cómo se alcanza el conocimiento y cómo se enlaza la matemática con lo real, enlace que se estima como algo más que un mero accidente;

c. logicista, apoyada en el proceso demostrativo a partir de unos contenidos de pensamiento puro, siempre veritativos, de las leyes lógico-formales del pensar; y se plantea la necesidad de unas conceptografías básicas, diferentes del lenguaje natural, para la expresión del hacer matemático y, con ello, el papel del lenguaje, el de los operadores del mismo así como la cuestión de los compromisos ontológicos que algunos ven enlazados con los cuantificadores.

Y son Kant, Mill, Frege los autores quizá más representativos de estas tres tendencias, los autores que supieron plasmar alguna de las cuestiones que en las mismas se albergan. A ellos hay que agregar la corriente formalista estrictamente matemática, apoyada en el poder del signo, de lo ideográfico, y que se plasma en los procesos algebraicos o en el análisis con los desarrollos de Euler y Lagrange, en los principios de permanencia de leyes formales, en el inscripcionismo sígnico de Heine o Thomae y culmina en el formalismo finitista de Hilbert ahora como intento de fundamentos.

Se tendrían, así, las grandes líneas de fundamentación, las que han sentado las bases para las posteriores discusiones, para la delimitación de unas u otras tendencias y autores, empeñados siempre en precisión de términos, en diferenciación respecto a los demás pero siempre en el interior de o en pugna con una de estas grandes tendencias fundamentalistas. Tendencias que, en el fondo, no hacen otra cosa que manifestar los muy diferentes aspectos que un hacer como la matemática plantea al pensamiento conceptual.

Tanto Kant como Mill y Frege parten de la matemática existente en su momento, la aceptan como hecho objetivo. Lo cual no implica que, en su intento de fundamentación, también traten de establecer criterios normativos para el hacer matemático.

Hay que observar aquí, en primer lugar que.

• Kant conoce la matemática de su época, un hacer matemático estrictamente figural y, aunque esté al tanto de los desarrollos del análisis, curiosamente margina el cálculo de sus consideraciones y se limita a la geometría métrica euclídea como la disciplina propia de las magnitudes extensivas: a la mecánica como la disciplina de lo temporal y a la aritmética elemental como propia de las magnitudes extensas cuantitativas, la que responde a las preguntas cuántos hay y en qué orden

• Mill, a mediados del siglo XIX, parece desconocer la matemática de su época. Se autolimita a la geometría métrica euclídea en su versión expositiva escolar y a la aritmética elemental. Y si cabe algún elemento justificador en Kant de marginarse al álgebra y al cálculo, es difícil atribuirlo a Mill. A pesar de ello hay que ser consciente de que a Mill tanto la lógica como la matemática le son materias laterales, ocupado más bien en un hacer político-ético, en un intento de mejora social por lo cual la discusión en los campos lógico y matemático la hace en función de una limpieza conceptual, en función de evitar desviaciones de lo que cabría considerar su línea de actuación consecuente: la dada por un empirismo que estima clave para la técnica y el desarrollo industrial del liberalismo británico de mediados de siglo pasado.

• Frege sí conoce la matemática de su época y sus trabajos de doctorado y habilitación se centran en temas geométricos y de análisis complejo. En su preocupación por los fundamentos va a centrarse por modo exclusivo en la aritmética, ahora 'superior', como base sustentante para la formulación de su conceptografía y, con ella, del total de la matemática. Pero el hacer matemático en el que se encuentra Frege es un hacer global y exige adoptar como elementos constitutivos los de función y argumento y, con ellos, dominio o campo de definición de la función, es decir, la noción de conjunto o clase. Serán los elementos centrales de su conceptografía, de su posterior filosofía del lenguaje. En este sentido Frege va a marginar la geometría y a rechazar, incluso, las geometrías métricas no-euclídeas que compara con la astrología o alquimia en sus pretensiones de conocimiento científico. La postura de Frege puede ser justificada dado el entorno en el que se forma y los problemas que el hacer global estaban planteando en dicho entorno.

En segundo lugar, los tres no tienen más remedio que enfrentarse con el hecho matemático. Kant para construir su sistema filosófico; Mill para contrastar y validar el suyo; Frege como matemático para dar cuenta del nuevo tipo de hacer que ha ido surgiendo a lo largo del siglo XIX y que algunos pretenden sustentar en el enfoque genético por el cual toda la praxis matemática acaba sustentándose en la aritmética y, de aquí, se tenga que buscar el fundamento de dicha aritmética.

Los tres señalarán distintos elementos como centrales: construcción de conceptos, manipulación de objetos, demostración lógico-formal; papel del método axiomático y de las nuevas definiciones en la formación de conceptos; de los ideogramas; relación entre lógica y matemática con su independencia mutua o su reduccionismo, etc., y unos cuadros ontológicos: conceptualismo, nominalismo, realismo. Los mismos tópicos que, de una u otra forma, irán apareciendo en las 'nuevas filosofías de la matemática'.

Curiosamente los tres parecen aceptar lo que calificar de proceso genético. Proceso genético que puede equipararse a la ideología evolucionista cargada con una valoración, además, de tipo de desarrollo continuo; es a partir de una primera noción —la fundamentante— como va evolucionando la matemática. Y esa primera noción se considera, en el siglo XIX, la aritmética. Cantor la apoya en la noción previa de conjunto, Frege en la de lógica formal, Russell en la forma lógica, otros posteriormente en la estructura. Y se acepta que a partir de esta noción primera se va desarrollando todo el hacer matemático.

Concepción ideológica que se mantiene en muchos de los filósofos actuales de la matemática que, en su discusión, permanecen anclados, precisamente, en nociones aritméticas elementales, en la noción de conjunto o en la de estructura y que impediría cualquier consideración de ruptura o corte epistemológico en el hacer matemático porque el proceso evolutivo se enfocará, implícitamente, como un proceso de acumulación progresiva de conocimiento.

B. Haciendo filosofía

1. Conocimiento causal *versus* verdad: el dilema de Benacerraf

1. En el sistema de coordenadas en el que he situado los problemas y tendencias de la actual filosofía de la matemática se presenta un tipo de filosofía adjetiva que, en el fondo, es sustantiva: una filosofía que, aun

acogiéndose bajo el adjetivo de 'matemática', lo que hace es intentar plantear, disolver, confundir viejos temas filosóficos. En particular, se centra en la problemática de la existencia de los objetos matemáticos, adoptando un punto de vista ontológico, por lo cual se hace problema la relación entre la ontología y la epistemología; en general, se dejan a un lado cuestiones como las metodológicas. Lo que se tiene, más que una filosofía de la matemática, es un hacer filosofía.

Y dos ensayos de Benacerraf van a ser los detonantes para el desarrollo de estas nuevas filosofías de la matemática, especialmente en el mundo anglosajón.

Lo que los números no pueden ser. En 1965 Benacerraf elaboró una crítica centrada en el problema del reduccionismo logicista y, consecuentemente, una crítica a la concepción fregeana de que los números son objetos. Con ello, y en el fondo, se tenía un ataque a la posición asociada con el ontologismo realista cantoriano, con el platonismo en su versión tópica. Benacerraf establece la posibilidad de muchas reducciones con lo cual muestra que la tesis de Frege de que los números son objetos es insostenible en la línea reduccionista de la aritmética a la lógica. Y ello porque si bien Frege consigue dos de los objetivos de toda reducción aritmética —dar un modelo de los axiomas de Peano y establecer los fundamentos para la teoría del contar— Benacerraf señalará que hay otras muchas reducciones que cumplen estas condiciones. Así, para lograr el objetivo reduccionista se parte de la teoría de conjuntos y, en ella, se aceptan como elementos primitivos cero, '0', y la función sucesor, '*S*'. Ambos han de satisfacer los axiomas

1. $\forall x\ (x \neq S0)$
2. $\forall x \forall y\ (Sx = Sy \Rightarrow x = y)$

Con estas nociones puede pasarse a definir la sucesión de los números naturales con las relaciones 'menor que' y 'equicardinalidad' y se desarrollan, de modo inmediato, los axiomas de Peano y la teoría de contar. Con lo cual todo intento reduccionista se centra en definir '0' y 'sucesor' de modo que se cumplan los dos axiomas mencionados. Y Benacerraf encuentra que en la formulación de Zermelo, por ejemplo, se pueden adoptar como definiciones de esos dos términos primitivos,

$$0 = \emptyset$$
$$Sx = \{x\}$$

mientras que en la de von Neumann se hace mediante

$$0 = \emptyset$$
$$Sx = x \cup \{x\}$$

Se tienen, así, desde lo teórico-conjuntista, dos posibles reducciones diferentes —diferentes porque la última, por ejemplo, no se sigue para conjuntos finitos—. Reducciones que dan paso a sucesiones, a progresiones distintas siendo cada una de ellas un candidato diferente para obtener la reducción pretendida.

Por otro lado, Frege mantenía que los números son clases por lo cual, si lo son, han de ser un tipo particular de clase. Y se puede hacer la pregunta ¿qué clase es el número 'dos'? Frege contestaría que es la clase de todos los pares, que en el modelo de Zermelo se podría identificar con {1} mientras que en el de von Neumann con {0,1}. Y no hay criterio matemático intrínseco ni epistémico para decidir cuál de estas dos clases puede identificarse con la clase de todos los pares. De aquí, concluye Benacerraf, y ante el hecho de que cualquier progresión permite completar la concepción fregeana de número, los números no son objetos.

La crítica de Benacerraf al reduccionismo logicista fregeano puede ser cuestionada. Pero, en cualquier caso, interesaría destacar que es una crítica lo suficientemente amplia como para afectar a cualquier otro tipo de reducción —como la de caracterizar los números reales mediante los racionales o los números ordinales mediante conjuntos o pares de conjuntos—. Un tipo de reducción que se maneja en la praxis matemática por lo cual es crítica que debe ser superada. Una de las líneas de superación se centra en justificar, precisamente, los procesos de reducción utilizando criterios de simplicidad teórica y economía ontológica, por ejemplo, o bien utilizando criterios de carácter metodológico.

Por otro lado, deja la puerta abierta a considerar que lo importante no es el concepto de número —sea o no objeto— sino el número en el interior de una estructura a la que pertenece y a cuestionar si las distintas progresiones o sucesiones, las distintas estructuras deben ser o no isomorfas. Se deja la puerta abierta a corrientes como la estructuralista, entre otras.

Verdad matemática. Es en 1973, hace ahora veinte años, cuando Benacerraf publica un ensayo en el que formula lo que se califica *dilema de Benacerraf* por antonomasia. Y que ha llevado a algunos a considerarlo como la inflexión básica de las nuevas tendencias de la filosofía de la matemática e, incluso, para Penelope Maddy, a estimar que ya, a partir de 1990, puede hablarse de que nos encontramos en la era post-benacerrafiana por la posible superación de este dilema. En este ensayo es en el que Benacerraf trata la relación entre lo epistemológico y lo ontológico. Relación que se le muestra imposible si, como hace, se aceptan las convicciones tradicionales respecto a lo que considerar epistemología y las consideraciones del 'hombre de la calle' de lo que estimar matemática. Imposibilidad establecida argumentalmente en forma de dilema que es al que ahora nos dedicaremos.

A qué llamar conocimiento. En el intento de exponer el dilema y alguna de sus consecuencias nos situamos en el terreno epistemológico y nada mejor que una vuelta a Platón. En *Teeteto* [202 c] Platón plantea, como resultado de un sueño o, quizá más adecuado, como resultado de haber oído a otros, la problemática de qué sea el conocer, el saber algo para un sujeto S. Por supuesto, y para Platón, el problema se centra en diferenciar la doxa, lo opinable y cambiante, del saber auténtico, del saber con razón de verdad acerca de algo.

Y Platón apunta que saber es adquirir, acerca de ese algo, una opinión verdadera pero acompañada de una explicación que el sujeto pueda dar o recibir de ese algo y de su creencia tanto en ese algo como en la verdad del mismo.

Aunque a la propuesta que realiza plantea una serie de dificultades —Platón nunca parece aseverar, dogmáticamente, nada: hace diálogo—, su respuesta, con leves variantes, va a quedar como la concepción clásica, la concepción tradicional del conocimiento —aunque algún epistemólogo actual llegue a atribuirla a un cierto atomismo lógico ligado a Wittgenstein—. Concepción que se puede enunciar en las palabras —en las que sigo a Chisholm, *teoría del conocimiento*, en cuanto a la formulación canónica—: que un sujeto *S* conozca que la proposición *p* es verdadera equivale a sostener tres condiciones:

a. Que *S* crea *p* (o acepte *p*)

b. Que esa creencia esté justificada (que *p* le sea evidente a *S*)

c. Que la creencia sea verdadera (que *p* sea verdadera).

La Paradoja de Gettier. En 1963 Edmund Gettier señaló que no bastan estas tres condiciones dado que es posible para una persona *S* aceptar una proposición *p* (evidente y verdadera) sin por ello conocer que esa proposición es verdadera. Gettier explicita una cuestión denominada desde ese momento 'el problema de Gettier', problema de la cuarta condición o paradoja de Gettier, porque parece obligado agregar una cuarta condición a las tres anteriores para completar la concepción clásica: las tres condiciones se muestran necesarias, pero no suficientes para el conocimiento que un sujeto pueda tener de una determinada proposición.

(Inmediato: una vez reconocido el problema, se observa que autores anteriores habían mostrado que la caracterización clásica era insuficiente o inadecuada. Autores como Meinong o Russell salen a relucir en cuanto a una serie de ejemplos o casos que mostraban dicha insuficiencia .. prescrita, pero no explicitada recordando las palabras de Galois).

La teoría causal del conocimiento. Una de las vías de solución —no la única, hay que precisar— se centra en agregar como cuarta condición la de que exista una relación causal en el sentido de que la proposición p esté conectada causalmente con la aceptación, por parte de S, de p. Agregada a las tres primeras es la propuesta esbozada por Alvin Goldman en 1967 y que, desde ese momento, va a denominarse con el título de su ensayo: 'teoría causal del conocimiento'. Goldman la formula en términos como (C) *S conoce que p ssi* se da el hecho de que *p* esté causalmente conectado de una manera 'apropiada' con la creencia de *S* de que *p*.

Dejando a un lado la dificultad que se encierra en unos términos como 'de manera 'apropiada' atribuida al proceso causal, hay que señalar que la conexión causal se tiene que entender, por supuesto, como material y no como la causa al viejo modo, como la idea de que la esencia de un objeto —dada por su definición, por ejemplo— determina causalmente las restantes propiedades no esenciales de dicho objeto; determinación causal formal por la cual esos objetos son necesarios. Ahora se trata de una conexión material, o de una cadena de conexiones materiales, entre el objeto a conocer y el sujeto cognoscente de tal manera que se percibe el objeto físico, concreto y específico como resultado de la interconexión causal material entre el objeto y los sentidos. Desde esta formulación la teoría causal del conocimiento viene establecida como una teoría epistémica en términos de relaciones causales.

El dilema de Benacerraf. En 1973, Paul Benacerraf, en *Mathematical truth*, y en paralelo al ensayo de Steiner *Platonism and the Causal Theory of Knowledge* del mismo año, aunque con conclusión opuesta, acepta la teoría causal del conocimiento y la toma como una de las premisas de un razonamiento dirigido contra el realismo platónico que recibe el nombre de *dilema de Benacerraf*.

Es un dilema que parte de la admisión de dos polos: uno es la concepción de lo que denominar epistemología del sentido común y que se apoya en la teoría causal que, por lo indicado, exige la interacción entre sujeto y objeto; y una concepción, también del sentido común, acerca de la matemática, centrada en considerar que sus objetos son entidades existentes y dadas de antemano. Admitidos los dos polos, uno epistemológico, el otro ontológico, el dilema va a tratar de mostrar su incompatibilidad mutua.

Por un lado, y en cuanto al plano ontológico, se admite que las proposiciones matemáticas —por ejemplo, y en particular, las que son aserciones sobre números— se vehiculan con la verdad. Pero las proposiciones matemáticas son verdaderas si significan, si los términos que comportan poseen referencia y ello porque la mejor caracterización de la verdad es la dada por Tarski y, en palabras de Benacerraf [1973, 667],

> su hecho esencial es definir la verdad en términos de referencia (o satisfacción) sobre la base de un tipo particular de análisis sintáctico-semántico del lenguaje, y así cualquier supuesto análisis de verdad matemática debe ser un análisis de un concepto que es un concepto de verdad al menos en el sentido de Tarski.

Con lo cual, si la proposición matemática es verdadera y la verdad exige referencia, entonces han de existir objetos matemáticos que constituyen los valores de las variables acotadas del cálculo.

A este razonamiento hay que agregar la condición de necesidad, permanentemente asociada con la verdad de las proposiciones matemáticas: si los números existen, existen en todo mundo posible, existen con necesidad.

Se tiene, así, que la verdad de las proposiciones matemáticas conlleva la existencia de objetos matemáticos. En otras palabras, parece que la mejor manera de dar cuenta de la verdad matemática es establecer las condiciones de verdad de las proposiciones matemáticas en función de entidades, de objetos matemáticos, que son los referentes de los términos que intervienen en dichas proposiciones.

Admitida la existencia de los objetos matemáticos como consecuencia de que las proposiciones matemáticas se consideran verdaderas y necesarias, hay que buscar candidatos que puedan cumplir la condición de ocupar el lugar de las variables acotadas en las proposiciones que se manejan —se admite aquí, de modo evidente, la tesis del lenguaje de primer orden, que tales proposiciones están formuladas en un sistema formal o lógica como L_1—. Y se tiene que si la matemática dice lo que parece decir —en particular, que existen infinitos números naturales— entonces los candidatos físicos que pueden tomar el lugar de los valores de las variables acotadas del cálculo son demasiado escasos, no hay suficientes partículas materiales en el universo físico. Y aunque las hubiera, las mismas no poseen el rango de necesidad que viene asociado a la existencia de los objetos matemáticos; de aquí que ningún objeto físico, ninguna partícula material pueda ocupar el lugar de los números.

Cabría tomar los estados mentales como alternativa y estimarlos como los objetos que cumplan la condición impuesta. Ahora bien, parece claro que los estados mentales son en menor número y más contingentes aún que las propias partículas materiales del universo.

Resultado de un análisis de este tipo: los objetos matemáticos no pueden ser estados mentales ni objetos empíricos, no pueden ser objetos concretos, singulares con su lugar espacio-temporal correspondiente.

Como la verdad en matemática exige que existan objetos tales como los números y en cantidad infinita y, por lo antes indicado, estos no pueden ser ni empíricos ni mentales y, en particular, no tienen localización espacial ni temporal, han de ser objetos abstractos. Y no sólo su existencia se muestra, así, necesaria, sino que los objetos abstractos, por otro lado, se muestran suficientes para la verdad de las proposiciones matemáticas. Aún más, la matemática se le presenta a Benacerraf como el mejor de los mundos de objetos abstractos.

Si se vuelve uno hacia el lado del conocimiento —a la concepción epistemológica— resulta que, para que éste se produzca, debe existir algún tipo de enlace entre quien conoce y lo conocido. Que un sujeto conozca que una proposición es verdadera, por las condiciones establecidas en la formulación canónica, a la que se agrega la condición de enlace causal, implica que exista una transacción de información entre el sujeto y el objeto, una transmisión de bits de información que interactúe causalmente entre ambos y vehicule el conocimiento. Como afirma Benacerraf [1973, 671]:

> Acepto una versión causal del conocimiento en la cual que X conozca que S es verdadero requiere mantener alguna relación causal entre X y el referente de nombres, predicados y cuantificadores de S. Yo creo además en una teoría causal de la *referencia*, lo que me permite señalar que mi conocimiento de S es *doblemente* causal.

Ahora bien, aquí se establece una tesis de claro carácter metafísico, ontológico: si los objetos matemáticos habitan un universo no-espacial-no-temporal, han de ser causalmente inertes: ni emiten ni absorben energía. De aquí que no puedan actuar causalmente con un sujeto que habita un mundo espacio-temporal, dado que la información a transmitir entre objeto y sujeto, entre el que conoce y el resto del mundo se obtiene gracias a una transmisión causal de bits de energía. De un ser inerte, pocos bits energéticos cabe esperar que emitan o absorban, por lo que ninguna información puede ser emitida desde los mismos, ninguna información cabe ser transmitida. No hay posibilidad, por ello, de adquirir conocimiento alguno de ese objeto

Tomando como premisas el que los objetos matemáticos existan como objetos abstractos —mera consecuencia de las condiciones de verdad de las proposiciones matemáticas— y la teoría causal del conocimiento, se llega al dilema de Benacerraf de modo inmediato:

> lo que parece necesario para la verdad en la matemática hace imposible el conocimiento de esa verdad; lo que haría posible el conocimiento matemático hace imposible la verdad del mismo.

Con lo cual, y en particular, si el platonismo es verdadero, no se tiene conocimiento de la matemática; si se supone que tenemos conocimiento de la matemática, el platonismo ha de ser falso.

En este dilema cabe una inflexión y de dilema epistemológico a dilema estrictamente referencial, semántico. Y ello porque al tratar de exponer el platonismo en cuanto a la verdad de las proposiciones matemáticas se han introducido elementos como los de significación o referencia, aunque sean las proposiciones las que vehiculen la verdad. Esa inflexión en cuanto a los temas semánticos reconduce a Frege en el que, en su teoría de la referencia, cabe destacar un aspecto central: el carácter descriptivo de la relación de referencia. Carácter descriptivo ampliamente discutido desde Russell y tema renovado, también hacia 1972, por Kripke.

No entro en detalles, sino únicamente menciono que se pasa a una diferenciación semántica entre referencias nominales y naturales. Distinción que, aplicada a los objetos matemáticos, conduce a lo que se ha venido en calificar como 'teoría causal de la referencia'.

Adoptada la misma como una de las premisas junto a la verdad platónica tomada como el otro cuerno se tiene el paralelo semántico del dilema epistemológico de Benacerraf: no se puede hacer referencia a los objetos matemáticos si estos objetos se encuentran en un mundo no-espacial, no-temporal. Referencia necesariamente excluida, imposibilitada por su inercia causal.

Cabe otra inflexión y ahora no sólo dilema epistemológico y semántico, sino modal. Jubien intenta sortear el dilema en sus aspectos anteriores asegurando que un conjunto de objetos abstractos no basta para asegurar la verdad de las proposiciones: no es suficiente afirmar que hay un conjunto de objetos abstractos sino que, para que los mismos puedan intervenir en el proceso cognoscitivo, hay que dar criterios que permitan distinguir unos objetos de otros; de lo contrario no habría la posibilidad de aislar modelo alguno de la teoría de números. Por otro lado, la definición ostensiva que posibilitaría ese aislamiento no parece válida para mostrar un conjunto abstracto de objetos abstractos, no localizado materialmente en un lugar espacio-temporal determinado.

Jubien, así, viene a indicar que lo que se está haciendo, en el fondo, es poner en el mismo plano conceptos como número natural, objeto abstracto, verdad matemática, entre otras, lo que no le parece muy consecuente.

Como salida, Jubien propone un esquema modal para la verdad matemática: varios bits de información matemática son actualmente verdaderos si es meramente posible que haya varias estructuras de objetos concretos. Es decir, asegurar que los axiomas de la teoría de números son verdaderos no es otra cosa que admitir la posibilidad idealizada de que siempre se pueden realizar acciones de correlación y de seriación.

Es apoyatura de lo veritativo en lo posible, en lo modal, que no escapa al correspondiente 'dilema modal de Benacerraf': si la matemática es materia de modalidad y si la verdad matemática es objetiva, entonces nos vemos empujados hacia una posibilidad no-actual, cuya existencia y naturaleza es independiente de cualquier objeto que actualmente podamos ver o agrupar en nuestros esquemas conceptuales. Pero la posibilidad no-actual se muestra tan causalmente inerte como los objetos abstractos. De aquí que no consiga aclarar muy bien el tipo de transacción de la información que se adquiere acerca de estructuras de otros mundos posibles.

Y si lo que se hace es intentar salvar la dificultad original mediante una hipótesis estipulativa —la existencia de mundos posibles no-actuales— entonces cabe preguntarse por la seguridad o certeza en cuanto a su objetividad. Y ello porque al reemplazar el abstracto actual por acciones posibles de correlaciones y seriaciones, no se asegura en absoluto que el conocimiento actual sea el mismo que el obtenido en el futuro. Y, en principio, se está convencido de que las aserciones aritméticas, si no eternas, al menos son atemporales en cuanto a su objetividad.

Además, esta posición epistémica hace muy difícil explicar el acceso al infinito, clave de los axiomas de la teoría de números y clave de la imposibilidad de que puedan tomarse objetos finitos materiales como los valores correspondientes para las variables que intervienen en las proposiciones matemáticas.

Uniendo los tres dilemas resulta que no sólo el matemático queda en un plano de estricta ignorancia sino, más aún, queda obligado al silencio absoluto, siempre que el realismo platónico sea aceptado como correcto. Como a Benacerraf, entre otros, le parece que los matemáticos hablan, aunque quizá no sepan la verdad de lo que hablan, y además lo que dicen se muestra indispensable para el conocimiento científico, obtiene la conclusión de que es el platonismo el que debe ser considerado como no correcto ya que acepta como correcto el enfoque epistemológico causal, interactivo, del que afirma ser 'el mejor medio que tenemos de cognición humana'.

Y los objetos matemáticos, así, si existentes, no pueden ser entidades abstractas y han de estar localizados espacio-temporalmente. Benacerraf, sin embargo, no parece llegar a la conclusión de que hay que revisar las concepciones que sobre la matemática se tienen, sino que aboga por una resolución del conflicto planteado por su dilema.

2. El dilema, en sus tres variantes, se quiere que ponga en toda su crudeza la ambivalencia mantenida por algunos autores: aquellos que prefieren asegurar la verdad del hacer matemático y aceptan el conjunto de objetos abstractos como dato primario —los considerados platónicos o realistas trascendentes— muestran dificultades en el plano epistemológico, como ocurre en Frege, en Gödel, quienes dejan en suspenso cómo se alcanza la verdad de las proposiciones matemáticas o acuden a una noción de intuición eidética y no sensorial con un contenido de vaguedad absoluto. Aquellos que prefieren asegurar el plano epistemológico, muestran sus dificultades para asegurar la verdad de las proposiciones matemáticas, como ocurre con los formalistas o los empiristas; además, y en particular, se hace problema la noción fundamental de infinito.

Los distintos dilemas, aparte de su pretendido ataque al realismo platónico, ponen de manifiesto la tensión propia del hacer matemático y no sólo de algunos autores como antes indicara. Tensión entre dos planos, ontológico y epistemológico.

En el análisis de las componentes de los tres dilemas, teorías causales del conocimiento, de la referencia, y la admisión o no del platonismo o del realismo, aparecen temas íntimamente ligados: necesidad y certeza de las proposiciones matemáticas con su llamada a elementos conceptuales y procesuales a priori, si únicamente analíticas con sus matices kantiano o fregeano o si cabe alguna otra versión con la admisión de la existencia de juicios necesarios a posteriori, papel de la percepción y la abstracción; paso del plano del conocer una proposición p al plano de la creencia en p y, con ello, al problema de ¿qué es creer una proposición general?

3. Algunas críticas. Querría señalar, aquí, varios puntos: En primer lugar, indicar algunas dificultades que se me muestran en la aceptación del polo epistemológico. La teoría causal del conocimiento —en el fondo un reduccionismo mecanicista fisiológico—, apoyatura de estos dilemas y base de prácticamente todo el debate posterior, ha sido ampliamente cuestionada, incluso por quien la propuso en primer lugar, Goldman, quien ya matizara en su ensayo de 1973 la aplicabilidad indiscriminada de la misma, insinuando que no era aplicable en el terreno matemático.

La teoría causal creo que se apoya en una creencia o prejuicio, originada con la ciencia nueva y el abandono de la Burbuja simbólica. la creencia en que los objetos físicos —la mesa sobre la que sostengo estos folios o estos mismos folios— son más reales en su singularidad concreta que las entidades conceptuales o de otro tipo —las variedades n-dimensionales de Riemann, las funciones continuas sin derivada en punto alguno de su dominio—.

Desde esta creencia se toma el objeto físico como la entidad canónica de la realidad y se adopta como creencia epistemológica la que puede calificarse del sentido común: la simple interacción material del receptor con el objeto, o a través de una cadena de conexiones causales materiales, produce conocimiento. En otras palabras, el conocimiento se adquiere a partir de los encuentros perceptivos con los objetos materiales, con aquellos que se encuentran localizados en el espacio-tiempo. Desde esta posición se postula que puede adquirirse conocimiento de objetos existentes no perceptivos como las moléculas, átomos, etc., a través de inferencias deductivas partiendo de las consecuencias observables que se obtienen tras la realización de experimentos que amplifican los efectos de dichas moléculas o átomos en efectos macroscópicos observables sensorialmente.

Es una acepción epistemológica basada en una hipóstasis de lo que se estima propio de las ciencias experimentales como si los experimentos tuvieran una autonomía incontaminada de recursos conceptuales y matemáticos previos, que son los que hay que explicar, precisamente. Concepción de interacción directa radicalmente acrítica, por otro lado, apoyada en la aceptación de una percepción sensorial tomada sin análisis previo. Y no voy a indicar que la mesa sobre la cual sostengo unos folios es 'una sombra de mesa' en el sentido de Eddington, por compuesto de vacío entre átomos o que los objetos de la física, por ejemplo, son inobservables y, por tanto, no interactúan con el físico, pero como tampoco interactúan los conceptos que también se manejan en el discurso diario.

Resulta que el dilema de Benacerraf contra el realismo platónico, aparentemente muy concluyente, se hace desde una concepción del proceso cognoscitivo muy simple: mera acción causal material de un objeto singular —material-físico— sobre un sujeto, lo que viene a reproducir el esquema de la abstracción apoyado en el proceso perceptivo, el más familiar, aparentemente, para la transmisión de los bits de información; conocer no es otra cosa que percibir, que recibir impresiones en los sentidos y, se supone, los correspondientes impulsos en el cerebro.

Esquema que muestra el proceso cognoscitivo como un proceso en el que no se tiene presente, por ejemplo, la acción constructiva del sujeto, por la cual el objeto a ser conocido no es algo estático, mero emisor de bits de información, sino que depende de una serie de elementos que lo convierten de percibido, en objeto a ser conocido. No se tiene presente, tampoco, el marco constitutivo propio de la disciplina cognoscitiva especial en la que se esté situado en el proceso y la acción cognoscitiva; marco que es el que dota de las cualidades ónticas requeridas a las entidades del mismo para convertirse en objeto a ser conocido y percibido de una determinada manera.

Por mera insistencia, y limitado al objeto físico, si bien la percepción nos proporciona información sobre la naturaleza del mundo físico —es la única fuente de tal información— resulta que las propiedades del objeto físico vienen determinadas por la terna: propiedades del objeto, propiedades del sistema neuronal del sujeto perceptor y marcos o sistemas mínimos para que se dé la percepción y su transformación correspondiente. Esta última componente es lo que no tiene en cuenta la teoría causal del conocimiento. No basta decir, percibir como conexión causal material para alcanzar el conocimiento de las propiedades o cualidades primarias de un objeto físico.

Sobre los sentidos actúa una enorme cantidad de bits pero sólo alguno de ellos —y no sólo los que superan los umbrales sensoriales— son percibidos. La percepción exige intencionalidad, volición y contexto socio-cultural para que sea, realmente, percepción. En particular, en la captación directa, inmediata, no se obtiene lo que se califican como cualidades primarias de los objetos físicos percibidos —la masa del objeto, si es o no radiactivo, percibir la rotación terrestre—. Cualidades primarias que sólo cabe admitir como percibidas gracias a una construcción conceptual —o simbólica si estamos inmersos en otro tipo de burbuja— porque dependen del cuadro en el que las mismas cobran su sentido. Así, desde la ciencia nueva, en particular desde Newton, la física obliga a percibir en los cuerpos la masa y la fuerza gravitatoria.

con lo cual la percepción aristotélica quedaba marginada; marginación que posteriormente cabe asignar a la propia percepción newtoniana ya que la teoría de la relatividad obligó a eliminar la percepción de la fuerza gravitatoria en beneficio de una captación de líneas geodésicas en el espacio tetradimensional.

Si hablar de la percepción de las cualidades primarias constituye un problema, también lo constituye la percepción ordinaria: ¿cómo asegurar que lo que se ve al entrar en una habitación es una mesa? Y no hablo de los posibles errores perceptivos o de las ilusiones más o menos ópticas sino, con Tait [1986], de los cánones de verificación que, como sujeto perceptivo, aplico. O, en otras palabras, del tipo de experiencias acerca de los objetos físicos que me llevan a afirmar que lo que veo es una mesa.

Sólo un cuadro conceptual previo posibilita transformar la percepción en percepción que produce conocimiento. Y si la percepción provoca información, ésta no alcanza la categoría de conocimiento si no aparece encuadrada en un marco establecido previamente y desde el cual tenga sentido que lo que se percibe o ve al entrar en una habitación sea una mesa y no un amasijo de tonalidades y formas. Cuadro en el que interviene el contexto socio-cultural y, en particular, el lenguaje y su dominio por parte del receptor.

Lo cual no implica, claramente, que esa información no sea necesaria sino que es, simplemente, insuficiente. El flogisto o el calórico fueron entidades físicas 'materiales' que interactuaron con los investigadores; pero terminaron por disolverse como tales entidades materiales. Y tampoco implica que las propiedades de los objetos no sean independientes de los sujetos cognoscentes y vengan establecidas por tal sujeto olvidando, entonces, la primera de las componentes de la terna mencionada. Los objetos físicos poseen sus propiedades independientemente de que haya un sujeto que las conozca, pero esas propiedades se convierten en cualidades cognoscitivas sólo tras el proceso cognoscitivo que es largo, complicado, falible.

En el otro lado del dilema se tiene como componente una concepción acrítica de la matemática. En principio, se admite que los elementos matemáticos poseen una estructura que no es tan clara como la de los objetos físicos. Los objetos matemáticos no son del tipo de esta mesa, de estos folios sobre esta mesa. Pero, en cualquier caso, el matemático:

i) descubre o construye verdades necesarias, no contingentes;

ii) procede por métodos a priori y no acude a la experiencia para justificar sus aseveraciones sino que parece poseer métodos propios, específicos centrados bien en intuiciones de tipo eidético, bien en demostraciones o derivaciones;

iii) realiza un tipo de trabajo en cierta manera distinto al físico, al químico;

iv) no trata con objetos como animales, plantas, cuerpos, sociedades, entre otros, ni lo hace con aceleradores de partículas, compuestos químicos, satélites.

Son concepciones tradicionales que conllevan la asunción implícita de que los objetos matemáticos, como los objetos físicos, han de ser objetos existentes, pero de un carácter difícil de aprehender por no pertenecer a lo espacio-temporal y no ser sensorialmente perceptibles. Aunque, como las moléculas y los átomos tampoco lo son, pero se les admite como entidades materiales por la nota inferencial de sus consecuencias experimentales, cabría considerar del mismo modo a los objetos matemáticos.

Las dos componentes entre las que se establece el dilema se muestran, realmente, como concepciones acríticas tanto de lo que considerar epistemología como de lo que considerar hacer matemático.

En segundo lugar, es una concepción que cae bajo el esquema clásico Objeto-Sujeto sin tener presente las críticas ya realizadas al mismo desde Frege, entre otros; desconocimiento del papel fundamentalmente funcional interactivo que se encuentra inherente al proceso cognoscitivo.

Se olvida que se está tratando del conocimiento de objetos y no de las sensaciones o percepciones del cognoscente. Con ello, se pasa a un psicologismo que deja a un lado la autonomía ontológica que poseen las entidades propias de cada disciplina. Autonomía ontológica por la cual los objetos vienen en términos de ese marco y, consecuente poseen todos un mismo grado de realidad.

En tercer lugar, y aquí sigo a Hale-Wright [1992], el dilema de Benacerraf se centra, realmente, en otro subyacente que depende del sentido en el que se tome la noción de demostración. Si no hay números, si se ha demostrado su no existencia, esta demostración puede enfocarse desde dos puntos de vista: o bien es demostración de imposibilidad conceptual —que es lo que parecería desprenderse de las palabras de Benacerraf y seguidores— o bien es demostración de contingencia fuerte en el sentido de que ni los elementos de la lógica ni los internos a la argumentación provocan impedimento alguno para la verdad de las proposiciones matemáticas asociadas a objetos como los números.

Y el dilema que cabe considerar como básico se plantearía, entonces, como sigue:

• Si no hay números por demostración de imposibilidad conceptual, entonces habrá que demostrar que es el concepto de número el autocontradictorio, y es algo que la demostración de Benacerraf no ha logrado;

• Si no hay números por demostración de contingencia fuerte resulta que tal negación de existencia sólo puede venir establecida por un hecho o elemento fáctico que no puede ser otro que la admisión de que la naturaleza es anumérica; y es algo que el dilema tampoco ha logrado demostrar.

En cuarto lugar, y frente al dilema, aún admitiendo una teoría causal del conocimiento, cabría argumentar que la dificultad se traslada al desconocimiento que todavía hoy se tiene de los órganos sensoriales y su funcionamiento. En esta línea cabría admitir, con Gödel, el papel de una intuición eidética pero no como una relación inmediata entre el sujeto cognoscente y el objeto a conocer, sino como un proceso no inmediato, diferente a lo que el sentido común nos indica como la relación existente entre un objeto y un sujeto. Se evitaría, así, el recurso a una teoría causal del conocimiento al aceptar la existencia de una intuición distinta a la de una facultad que procure conocimiento inmediato de los objetos. Intuición que permitiría representarse un aspecto de la realidad objetivo pero "como opuesta a nuestras sensaciones, su presencia en nosotros puede deberse a otra clase de relación entre nosotros y la realidad" [Gödel 1964, 484].

En quinto lugar, y dirigiéndome al otro de los polos aceptados por Benacerraf en el planteamiento del dilema, cabe discutir el papel que hace jugar a la concepción de verdad de Tarski. Siguiendo a Tait [1986] se puede afirmar que la convención *T* de Tarski no tiene mucho que ver con la referencia y sí con la satisfacción. Pero la satisfacción en la definición de Tarski se hace en términos de sistemas formales y no de lenguaje naturales. Lo que se tiene es un lenguaje formal *L*, un modelo *M* y una interpretación *I* de *L* en *M*. La interpretación *I* asigna valores correspondientes en el modelo *M* a las constantes de *L*, y aplica los signos de predicado de *L* en los de *M*. Si para una valoración en *M* de las variables independientes se satisface la fórmula de *L* en su correspondiente interpretación en *M*, se dirá que la fórmula de *L* queda satisfecha para esa valoración bajo la interpretación *I* dada. En particular, si queda satisfecha para toda valoración, entonces se dirá que es verdadera.

Todo esto viene a cuento para señalar que la noción de verdad de Tarski, que no se aplica a lenguajes naturales, tiene muy poco que ver con lo que le asocia Benacerraf. Por lo cual su posición queda un tanto en el aire, básicamente la exigencia de que las proposiciones matemáticas, al ser verdaderas, requieren referencia.

4. Dónde situar la objetividad matemática, o salidas al dilema. A pesar de puntos como los anteriores y que hacen que el dilema de Benacerraf y sus variantes queden, en el mejor de los casos, en el aire, sin carácter probatorio alguno, el ataque de Benacerraf al ontologismo realista platónico encontró terreno abonado y volvió a plantear el viejo problema de dónde situar el mundo de esos objetos abstractos de manera que se los pueda conocer y, a la vez, hablar con condición de verdad acerca de los mismos, de sus propiedades y de sus relaciones. Dónde situar el mundo de los objetos matemáticos de modo que la tensión epistemología-ontología se hiciera mínima, de modo que se pudiera asegurar la objetividad del hacer matemático, del conocimiento del mismo aun sin objetos matemáticos de los que hablar.

Objetividad asegurada, ciertamente, para el realista platónico ya que los objetos existen en un mundo eidético, el mismo para todos, que simplemente hay que descubrir —los problemas, entonces, son cómo y a qué llamar descubrimiento, así como clarificar la facultad con la que el mismo se obtiene—. Si se suprime ese mundo, la objetividad no podrá venir asegurada por lo subjetivo de lo que cada matemático piense. De aquí que la misma tenga que buscarse en alguna otra parte y no en el cerebro de cada matemático —línea aparentemente sostenida por un primer intuicionismo brouweriano—. Como candidatos, la comunidad matemática, la consideración de meras convenciones.

Ante la inseguridad de criterios como los anteriores cabría trasladar la objetividad del hacer matemático, su validez, a la derivación o demostración sintáctica, apoyada en unas reglas explícitamente establecidas que puedan, incluso, ser manipuladas por un ordenador. Es un criterio, en cierta manera, compartido desde logicistas a formalistas inscripcionistas. Sin embargo, teoremas como el de indecidibilidad o el de parada, muestran que no cabe seguir esta línea.

Si se pretende situar esa objetividad, como nuevo candidato, en el lenguaje —posición adoptada tras el giro lingüístico— no se tiene más que una especie de regresión ya que la pregunta se vuelve a repetir pero ahora en lugar de plantearla hacia la validez matemática se hace hacia la objetividad del lenguaje, dónde situarla: si en el dominio mental; si en el mundo empírico; si en un mundo abstracto en sí mismo, etc. Las tres opciones señaladas antes y que han tenido que ser desechadas.

Ante una situación de este tipo, y como salidas ante el dilema, caben dos posturas extremas: o admitir que hay enlace causal material con los objetos matemáticos y entonces hay que variar el estatuto ontológico de los mismos y convertirlos en objetos localizables espacio-temporalmente igual que los considerados objetos físicos, o eliminar los objetos matemáticos como no existentes y aceptar que puede hacerse una física sin números porque, sencillamente, los números no existen, meras convenciones lingüísticas.

En ambos casos, se aceptaría que lo único existente en el mundo es el objeto físico material por lo cual el matemático, en su praxis, realiza un trabajo análogo al físico, químico, biólogo, entre otros: manejar objetos materiales, naturales. Y el conocimiento de la matemática es, así, una Epistemología naturalizada. Como ya indiqué, un término, 'naturalizada', que aquí se pretende delimitar como contrapuesto al hacer que acepta la existencia de objetos eidéticos, abstractos, no-naturales.

Son posiciones que gozan de un matiz marcadamente pragmático —la matemática parece estar ahí—, y componen lo que cabe considerar como las 'nuevas' filosofías de la matemática.

Subyacente a estas posiciones es el compartir, por un lado, y en su totalidad, el manejo de la lógica de primero o segundo orden como instrumento axiomático-formal, con matiz claramente sintáctico, como base del análisis filosófico que realizan.

Por otro lado, compartir un realismo pragmático —y claramente *ad hoc*— por el que hay un compromiso con el realismo en su sentido semántico pero no en su acepción metafísica como si ello fuera factible desde un plano que se pretende de pensamiento filosófico *qua* filosófico. Quiero decir: algunos aceptan que, por ejemplo, se maneja el infinito actual y conceptos abstractos como si existieran pero sin dar el paso de aceptar, de hecho, su existencia ontológica o el paso de negar la misma. En otras palabras, no admitir, como principio, que lo posible se haga necesario. Es posible hablar del infinito actual, sin que por ello sea necesario aceptar que el mismo exista.

Es la escisión que Steiner explica al distinguir dos tipos de platonismo:

a) ontológico, por el cual se admite la existencia de entidades en un dominio no-espacial, no-temporal, causalmente inertes pero que permiten asegurar la verdad de las proposiciones matemáticas independientemente del sujeto cognoscente;

b) epistemológico, por el cual se admite la existencia de alguna facultad especial que permite la captación de esos objetos y, en particular, establecer las propiedades correspondientes.

Es claro que el platonismo ontológico posee una serie de ventajas pragmáticas, por lo que cabe aceptarlo desde este punto de vista, con lo que se tiene, realmente, un tercer tipo de platonismo, el *metodológico*, que se quiere que no implica compromiso con el ontológico. Mera aceptación metodológica, pragmática, considerada como inocua respecto a la praxis no comprometida del hacer matemático.

Pero, puestos a distinguos, cabe realizar la escisión entre dos realismos: trascendente e inmanente. El primero es el considerado platónico por excelencia y sostiene que las entidades matemáticas se encuentran en un dominio no ya independiente del sujeto cognoscente sino trascendente al mismo, dominio situado más allá del espacio y el tiempo. El realismo inmanente es el que viene caracterizado por considerar que los objetos matemáticos, independientes al sujeto cognoscente, pueden considerarse del mismo tipo que los objetos físicos, materiales, aceptando las demás caracterizaciones del trascendente.

Es decir, ambos consideran que las proposiciones matemáticas son verdaderas como resultado de las propiedades de los objetos matemáticos y no de las condiciones del lenguaje o de nuestro conocimiento; es decir, se mantienen en línea de objetividad a lo Frege. Además, es posible referirse a esos objetos matemáticos de manera unívoca aunque no sea posible captar todas las propiedades de los mismos como los teoremas de limitación han puesto de relieve. En cualquier caso, se mantiene la tesis de que el conocimiento de esas entidades es, siempre, posible.

Sin embargo, la distinción clave señalada entre realista trascendente e inmanente, centrada en la distinta naturaleza ontológica que atribuyen al objeto matemático —y no se entra en la posterior distinción entre realismo indirecto y directo según se admita o no un tercer elemento entre el objeto a percibir y el sujeto perceptor— hace que, desde la epistemología naturalizada, si el matemático admite el realismo inmanente, se convierta en un experimentador como el físico, el químico, el botánico y maneje el mismo tipo de entidades que éstos. No hay diferencias cualitativas entre la matemática y las restantes disciplinas científicas.

Consecuentemente, es mera ilusión la certeza y necesidad de sus proposiciones, auspiciada por la naturaleza más abstracta de las entidades que maneja, más abstractas respecto a las entidades como las que maneja el físico, por ejemplo. Y he tratado de resumir un programa como el naturalista que ha tratado de seguir el formulado por Quine.

El problema, para un realista inmanente, para el cual los objetos matemáticos ya no son inertes causalmente por encontrarse en la naturaleza, por ser entidades 'físicas', se centra en elaborar una epistemología coherente en la cual se produzca un enlace causal entre la entidad matemática naturalizada y el matemático.

5. Y las salidas. En un cuadro como el anterior cabría señalar distintos matices en los que se distribuyen los filósofos anglosajones de la actual filosofía de la matemática que se quiere, a la vez, no fundamentalista. Son versiones consecuencia de la teoría causal del conocimiento y del dilema de Benacerraf, que cabe condensar en cuatro grandes líneas, en las cuales se observa que, curiosamente, casi no se cuestiona la concepción epistemológica que he calificado del sentido común y sí se pretende una modificación de la concepción tradicional o tópica de la matemática de tal modo que la nueva visión se integre en una concepción del mundo aceptable y sin compromisos ontológicos previos, especialmente, los ontológicos de tipo realista. Una concepción en la cual no existan, por decirlo así, los números como objetos. Las grandes líneas podrían ser:

1) la de quienes modifican o rechazan la teoría causal del conocimiento para la matemática: consecuentemente se admite la posibilidad del conocimiento matemático aun cuando sus objetos sean causalmente inertes. En esta línea se tiene, por ejemplo, a Steiner y, por supuesto, a los 'recalcitrantes' platónicos;

2) la de quienes aceptan la teoría causal del conocimiento pero niegan que las entidades matemáticas sean causalmente inertes, lo que conduce a especificar que dichas entidades pueden no ser objetos, sino propiedades de conjuntos. Es línea mantenida por un realismo monista inmanente. Se abandona cualquier forma de platonismo en beneficio de un realismo naturalizado. Es línea en la cual se encuentran Maddy y Bigelow, entre otros;

3) alterar las componentes del debate introduciendo factores modales —como el modalismo o el modal-estructuralismo de Hellman— o procesos constructivos, o eliminar a los objetos matemáticos enfocados como posiciones en estructuras —y es la corriente estructuralista— indicando que no hace falta una restricción como la causal material entre objeto y sujeto cognoscente para que pueda producirse el conocimiento; bastan relaciones de carácter ontológico o de seguridad en las creencias;

4) y una cuarta línea se centra en aceptar una epistemología coherente pero con rechazo radical de toda referencia semántica y de cualquier tipo de compromiso ontológico. En otras palabras, que la matemática no proporciona conocimiento alguno. Es posición que da paso al nominalismo tanto en sus versiones formalistas como en su versión más radical a lo Field.

Son líneas, evidentemente, que no siempre se presentan puras. En mezcla, llegan a comprender el modalismo como nueva formulación del condicionalismo, estructuralismo, logicismo de segundo orden, monismo realista, nominalismo fisicalista, naturalismo empirista, finitismo intuicionista lingüístico, etc.

Un cuadro en el que se va, en lo ontológico, desde un platonismo o realismo trascendente hasta un nominalismo fisicalista pasando por un realismo inmanente y un estructuralismo de compromiso platónico; y en lo epistemológico, desde la aceptación de una intuición intelectual hasta admitir la capacidad perceptiva, material, de universales. En medio, tratando de alterar alguna de las componentes del debate, se introduce la modalidad y, en ella, sus matices asociados, que llevan hasta un estructuralismo-modal en el que, por supuesto, la matemática no tiene números.

2. Platonismo epistemológico naturalizado: Steiner

La teoría causal del conocimiento se plasmaba en su cuarta condición en la formulación que citara de Goldman '*S* conoce que *p* *ssi* se da el hecho de que *p* esté conectado causalmente en una forma 'apropiada' con la creencia de *S* de que *p*'. En su ensayo de 1973, coetáneo con el de Benacerraf, Steiner va a indicar que es formulación centrada, realmente, en relaciones causales al exigir la presencia de los objetos y su relación tanto entre sí como con el sujeto cognoscente. Y, en este punto, Steiner va a establecer una contribución interesante al tema al indicar que las condiciones que impone la teoría causal pueden enfocarse desde dos puntos de vista: en términos de *relaciones* causales —que es la interpretación manejada casi enteramente por Benacerraf y la mayoría de quienes le siguen— y en términos de *explicaciones* causales.

Diferencia clave porque la tesis de que las entidades abstractas sean inertes causalmente sólo es incompatible con la versión de relaciones causales pero no con la de explicaciones causales. Y esta no incompatibilidad es la que explota Steiner para aceptar la tesis metafísica de que las entidades abstractas son causalmente inertes, pero rechazar la tesis de que la teoría causal excluye el conocimiento de entidades abstractas.

Con ello, se puede sostener la posibilidad de un conocimiento no puramente intuitivo o perceptivo sensorial de objetos concretos, materiales a través de sólo unos bits de información, sino la de un conocimiento también inferencial. Conocimiento inferencial que, por otro lado, se ha venido sosteniendo como uno de los elementos básicos en el hacer matemático. No ya en el sentido constructivo de Poincaré, para quien la demostración constituye un proceso constructivo en sí, con su aumento de conocimiento, con su enriquecimiento epistémico, sino en el más formal en el que se sitúa Steiner, en aquél que pretende que todo el contenido de una teoría se encuentra en los axiomas de la misma y los teoremas no es que amplíen el conocimiento desde un plano lógico por estar ya contenidos en dichos axiomas, sino que lo amplían desde un plano psicológico exclusivamente. En cualquier caso, el conocimiento inferencial difícilmente puede ser aceptado desde cualquier enfoque de una epistemología naturalizada que exige el intercambio de bits informativos, la presencia directa, por así decir, del objeto del cual se está logrando el conocimiento.

En otras palabras, desde el enfoque que adopta la teoría causal del conocimiento en términos de relaciones causales, la ampliación cognoscitiva inferencial se encuentra ausente: el único tipo de conocimiento es el de carácter intuitivo de objetos concretos, singulares y, con él, la admisión del postulado no pueden existir procesos básicos psicológicos que generen creencias acerca de objetos causalmente inertes.

Steiner, y quizá por razones puramente pragmáticas, considera que el conocimiento matemático existe, y además la lógica indica el carácter inferencial del mismo, por lo que la formulación de Goldman la ve inapropiada para una teoría causal no relacional, para una teoría causal explicativa. De aquí la necesidad de su reformulación que, en términos de Steiner, queda como sigue

> (5) No se puede conocer que una proposición *p* es verdadera, salvo que pueda ser utilizada en una explicación causal del conocimiento que *S* tiene de que *p* es verdadera.

Con esta reformulación, y frente a los empiristas, Steiner va a señalar que la teoría causal del conocimiento no es incompatible con el realismo ontológico, con una posición realista que admita entidades abstractas como objetos matemáticos, aunque sea un realismo más bien metodológico porque tales entidades abstractas son, realmente, inertes causalmente. El argumento que maneja Steiner viene a ser el siguiente.

1. Supongamos que *S* cree uno de los axiomas del análisis o la teoría de números;

2. Existe una teoría que permite explicar causalmente la creencia de *S*;

3. Esta teoría, como otras, contendrá los axiomas del análisis y de la teoría de números;

4. En orden a que proporcione una explicación causal, la proposición ha de ser verdadera;

5. (Y aquí viene un punto importante). La convención-*T*, la teoría tarskiana de la verdad o satisfacción es la única interpretación conocida que garantiza la verdad de los axiomas;

6. De aquí que esos axiomas —que ahora tienen que estar siendo interpretados al modo platónico— tendrán que ser usados en cualquier explicación causal de las creencias de *S* en tales axiomas.

En resumen, la idea de Steiner es que las proposiciones que refieren a entidades abstractas pueden figurar en una explicación causal del conocimiento aun si las entidades a que se refieren no puedan mantener relaciones causales entre ellas y con el sujeto epistémico.

Ahora bien, como Casullo [1992] ha señalado, la reformulación de la teoría causal del conocimiento realizada por Steiner puede ser considerada como una condición necesaria para el conocimiento pero no es suficiente. Y ello porque cuando se ha introducido la teoría causal en las teorías del conocimiento, se ha introducido, en principio, con uno de estos dos objetivos: o bien distinguir entre creencias justificadas e injustificadas o bien distinguir entre conocimiento y creencia verdadera justificada. Y, según Casullo, el criterio de Steiner es excesivamente liberal en cuanto a ambos objetivos y, en ningún caso, establece las condiciones suficientes para una teoría adecuada del conocimiento.

En discusión crítica de las concepciones que entornan una visión tradicional del hacer matemático, Steiner, adoptando una posición de epistemología naturalizada compatible con la afirmación de la existencia posible de entidades abstractas matemáticas, revisa también alguna otra de las concepciones antes mencionadas. Así, en concreto, la referida a que el matemático procede por métodos a priori y no acude a la experiencia para justificar su trabajo.

Desde una epistemología naturalizada, un naturalista ha de negar la existencia de procesos cognitivos especiales y, en este punto, Steiner va a señalar que la noción de conocimiento a priori es una noción problemática porque la noción de a priori es excesivamente vaga. Noción en la que también se incardina la distinción, en el conocimiento matemático, entre conocimiento verdadero y creencia verdadera, viniendo sostenido el primero por la demostración. Es distinción en la que apoya Steiner, precisamente, su reformulación del principio de la teoría causal del conocimiento. Pero, entonces, se va a hacer problema el propio concepto de demostración matemática.

Steiner, en este punto, señalará que la demostración matemática no es lo que desde el enfoque estrictamente lógico se pretende que sea una demostración: mera derivación sintáctica apoyada en unas reglas de derivación previamente establecidas por lo que en la misma no hay aporte cognitivo alguno. Esas reglas derivativas también exigen, sin embargo, una captación cognitiva. Para Steiner la demostración supone, además de la derivación sintáctica, un elemento epistémico: demostrar es conocer.

3. Creencias empiristas

a. Armstrong

Había planteado una crítica a Steiner, que indiqué originaria de Casullo, centrada en la distinción entre conocimiento verdadero y creencia verdadera. Es crítica que se hace desde el paso implícito del 'conocer que p' a la 'creencia que p' y a la 'creencia en el conocimiento que p'. Es decir, se realiza desde el terreno de las creencias: conocer p es creer que p, pero entonces la problemática se centra en la justificación, en la seguridad de esas creencias.

De esta forma se plantea la pregunta ¿qué es creer una proposición matemática? O, más general, ¿qué es creer una proposición general? Pregunta, por supuesto, que parte de las tesis establecidas en la teoría causal del conocimiento y, consecuentes a una posible conclusión del dilema de Benacerraf, la que admite que los objetos matemáticos no son entidades abstractas sino que, de existir algo denominado objeto matemático, ha de estar localizado en el espacio y en el tiempo porque de otra manera, aun existente, se desconoce tal existencia y, por ello, cualquier tipo de propiedad que se le pudiera atribuir.

Se tiene, así, la pregunta ¿qué es creer la proposición $2 + 3 = 5$? Y es lo que se plantea, por ejemplo, Armstrong. Analizando una proposición p como la mencionada, como $2 + 3 = 5$, Armstrong llega a la conclusión de que creer esa proposición matemática no es otra cosa que creer la conjunción de las dos proposiciones generales siguientes:

1. Para todo x y todo y, si x es un conjunto que tiene 2 y sólo 2 objetos, y y es un conjunto diferente de x y tal que tiene 3 objetos y sólo tres objetos, entonces la unión de x y de y tiene 5 objetos.
2. Para todo z, si z es un conjunto que tiene 5 y sólo 5 elementos, entonces existen dos subconjuntos distintos de z, v y w tales que v tiene dos elementos y w tres elementos.

Naturalmente, x e y en la primera proposición, z, v y w en la segunda son variables que han de ser sustituidas por los términos correspondientes a manzanas, piedras, etc. Con la advertencia realizada por Armstrong de que no siempre, al reemplazar esas variables por objetos materiales, se tienen las proposiciones 1 y 2. Naturalmente, la condición a cumplir por los elementos que han de reemplazar a las variables es que sean localizables espacio-temporalmente, que no sean entidades eidéticas.

Se ha pasado de creer en una proposición matemática general a creer la conjunción de dos proposiciones generales —expresables, por supuesto, en L_1—. Y la pregunta sigue en pie, pero ahora cabe la respuesta: creer una proposición general es la disposición a creer y/o sostener causalmente ciertas creencias acerca de entidades singulares de hecho, fácticas.

Y ello porque, en el fondo, la proposición $2 + 3 = 5$, al venir sostenida por la conjunción de las dos proposiciones mencionadas, no hace otra cosa que fundamentarse en la creencia en agregados de objetos materiales singulares. La creencia en que $2 + 3$ es 5 termina siendo una creencia en términos de agregados de objetos físicos, localizables espacio-temporalmente, tales como manzanas o piedras, así como en las conexiones causales entre esas creencias.

Con esta apoyatura en agregados materiales de objetos singulares como manzanas, piedras, etc, Armstrong agregará, con respecto al conocimiento de las proposiciones matemáticas,

> A conoce que $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ si
> 1. A cree que $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$
> 2. Si esta creencia general queda manifestada, entonces $\forall x$ (si A conoce que Fx, entonces A conoce que Gx)

El conocimiento de proposiciones matemáticas generales se analiza en términos de conocimiento de agregados de objetos singulares, materiales y de sus relaciones causales. Además, en el caso particular de las proposiciones de la aritmética, el conocimiento de las proposiciones matemáticas correspondientes se analiza, en el fondo, en la transmisión del conocimiento: la creencia en el antecedente implica la creencia en el consecuente. Pero la creencia en el antecedente se apoya en la admisión de agregados de objetos físicos como manzanas y la transmisión también se realiza en torno a agregados físicos. Y como entre los agregados de objetos físicos pueden explicarse las relaciones causales y las conexiones de carácter legal con estados de creencia, el problema de Benacerraf queda resuelto y se tiene, así, una base para una epistemología naturalizada del conocimiento matemático.

Me he extendido algo en esta solución, en la línea argumentativa de Armstrong para agregar, únicamente, dos observaciones: por un lado, el concepto de número subyacente en esta solución, al igual que en las restantes de las nuevas tendencias, aparece ligado siempre, y en ocasiones sólo de modo implícito, con el de propiedad de conjuntos, en la línea iniciada desde el logicismo o desde lo teórico–conjuntista, que se pretenden identificadas con la visión global del hacer matemático: clases de agregados equinuméricos. Ahora bien, resulta que cuando se trata de ejemplificar, tal enlace desaparece, así en la proposición 2 + 3 = 5 no hay mención a conjuntos sino, en todo caso, a manzanas, o piedras; por otro lado, señalar que, salvo en la terminología y en los intentos de formular las proposiciones en una lógica de orden 1 o de orden 2, tanto el planteamiento como los intentos de solución, siguen siendo los aportados por Mill: no hay novedad alguna, salvo el paso al plano de la creencia, en lugar del conocimiento. Incluso los ejemplos siguen siendo los mismos: agregados de piedras, de manzanas, y en poca cantidad, por supuesto. No hay una proposición matemática, realmente, sino proposiciones que, en términos de Rey Pastor, caerían en las funciones del sastre y el tendero.

En cualquier caso, desde un análisis como el realizado desde esta posición, evidentemente, las proposiciones matemáticas abandonan su estatuto de verdades atemporales, pierden su estatuto de conocimiento a priori, necesario, como ya se hiciera notar en una posición como la de Mill.

b. Bigelow y la realidad de los números

El empirismo, aquí, tiene una nueva apoyatura y ello a pesar de las críticas que Frege realizara a Mill. Una de ellas, y que seguiría afectando a una posición como la de Armstrong, se apoyaba en que una cosa puede tener diferentes denominaciones numéricas según el enfoque que se tenga de la misma: un árbol tiene 1 tronco, pero también 93 ramas o 1993 hojas. Para sortear esta crítica, y en lugar de obtener como consecuencia que los números ni son propiedades de agregados físicos ni se originan en la predicación que puede hacerse de los conceptos, puede llegarse a la aseveración de que los números son manifestación de las relaciones entre objetos concretos. Los troncos tienen, entre sí, una relación especial que se manifiesta en 1; las ramas en 93.

Es la posición sostenida por Bigelow [1988], para quien el mundo está constituido de ciertos objetos físicos pero también de las relaciones que pueden existir entre los mismos. Los objetos físicos están determinados espacio-temporalmente, es decir, poseen una localización espacial y una temporalización. Pero Bigelow [1988, 9] sostiene que hay que ir más allá y hay que admitir que las relaciones entre esos objetos también existen aunque no se encuentren localizadas espacio-temporalmente. Relaciones que son universales ya que universales son "todas las propiedades físicas reales y las relaciones entre las cosas físicas". Y entre esos universales Bigelow [1988, 3] afirma que se encuentran las entidades matemáticas "Los números y los objetos matemáticos en general son universales". Con lo cual la matemática será una teoría general de universales:

> La teoría de universales será una colección sistemática de afirmaciones sobre las relaciones entre los universales. Y esto es lo que sostengo que son las matemáticas: un estudio de relaciones entre relaciones [1988, 16]

Universales que, frente al nominalismo, no son meras convenciones lingüísticas, sino auténticas entidades existentes. Propiedades entre las que se encuentran, precisamente, las calificadas desde la ciencia Nueva como cualidades primarias: la figura, el número, la extensión, etc.

Y lo que caracteriza al número de entre esos universales es la no-identidad: "Los números naturales son relaciones de mutua distinción entre objetos" [Bigelow 1988, 52]. Lo que quiere decir que 3, por ejemplo, no es más que la relación de agrupar tres objetos que son diferentes entre sí.

La dificultad de una posición realista de este tipo se centra en que los datos primarios de su ontología no son, precisamente, datos directos de la experiencia sino que, en el fondo, suponen un trabajo de conceptualización que lleva desde esos datos primarios, 'directos', a las relaciones entre los mismos. Y este llevar desde, condiciona el que se alcance uno u otro tipo de relaciones como universales. No encuentro criterio objetivo alguno que establezca qué tipo de universal es el adecuado en un determinado contexto.

Además, es claro que por no tener localización espacio-temporal el dilema de Benacerraf apoyado en la teoría causal interactiva del conocimiento no afecta a la posición de Bigelow, construida para escapar, precisamente, del dilema. Los universales no pueden actuar con el sujeto epistémico de modo directo. De aquí que, para su conocimiento, Bigelow, como Amstrong, tenga que recurrir a interacciones con instanciaciones concretas, físicas, de esos universales. Lo cual obliga a admitir que manejando esa instanciación se logra alcanzar, ahora por idealización, el universal del cual dicha instanciación lo es. Y el problema que cabría plantear es qué tipo de instanciación material representa un determinado universal. Y no acudo a instanciaciones de cardinales transfinitos, por ejemplo.

Esta última objeción va dirigida no sólo a la posición de Armstrong y Bigelow sino que es extensible a los restantes realismos fisicalistas como el de Maddy.

4. Realismo monista inmanente: Maddy

En la teoría causal he insistido en la afirmación de una tesis de carácter metafísico: la que sostenía que las entidades abstractas son causalmente inertes. En su análisis Steiner mantenía tal tesis aunque llegaba a conclusiones, por lo que indiqué, opuestas a las obtenidas por Benacerraf o Armstrong. Cabe atacar esta tesis, negarla, modificarla o matizarla.

Es lo que viene a hacer Maddy quien al rechazar la tesis matiza la teoría causal del conocimiento como no totalmente adecuada en el sentido de que el conocimiento matemático no se somete a las restricciones impuestas en esta teoría. En el conocimiento matemático, puede estimarse que más que existir enlace causal material entre objetos, el enlace es de carácter de seguridad, de confianza y esta se hará clave para sostener las creencias, más que la conexión causal o la ontológica.

De los dos polos que sustentan el dilema, la concepción tradicional de la matemática, la concepción del sentido común de la epistemología, Maddy va a reformular este último, aceptando que el hacer matemático es un hacer global cuya base es la conjuntista. Punto de partida, por ello, un reduccionismo radical que hace que todo el hacer matemático se reduzca a teoría de conjuntos y, de aquí, el posterior análisis de los axiomas conjuntistas, su evolución, su papel, realizado por Maddy. Como, por otro lado, Maddy mantiene la creencia de que sólo existe lo definible espacio-temporal, tiene que tratar de justificar la afirmación "todos los conjuntos tienen bases físicas y una localización espacio-temporal y todos los objetos físicos son conjuntos" [1990, 180].

Atacar una de las bases de la teoría causal entraña, implícito, atacar el dilema de Benacerraf, intentar superarlo. De aquí que Maddy mantenga que ha surgido una era post-Benacerrafiana en la filosofía de la matemática, ya que el dilema planteado por Benacerraf puede estimarse superado, por supuesto superado desde la posición que Maddy mantiene.

Y que la lleva a afirmar que la filosofía de la matemática, la actual, la que debe hacerse en los 90, debe contestar cuestiones centradas en la metodología axiomática ya que, como Gödel apuntara, la confirmación de los axiomas matemáticos es comparable con la confirmación de las teorías en ciencias naturales.

Y para ello debe analizar, en primer lugar, cuál de las distintas propuestas ontológicas es la mejor para disolver el dilema de Benacerraf, señalando Maddy que es una cuestión que pertenece íntegramente al terreno filosófico. Aunque Maddy indique que el dilema de Benacerraf funciona, posee sentido, porque todo matemático está convencido, en su interior, de que los objetos matemáticos son algo, tienen una realidad, aunque no logren dar cuenta del tipo que es tal realidad. Si el matemático estuviera hablando de Don Quijote, de María, no habría problemas: son creaciones literarias que 'carecen de aplicabilidad', dirá textualmente Maddy. Expresa con ello, de modo casi explícito, el pragmatismo que subyace en su pensamiento y en el de los 'nuevos' filósofos, aunque se justifique con una llamada a Frege cuando indicara que 'su aplicabilidad es la que eleva la aritmética de un juego al rango de ciencia', olvidando que esta cita está en el contexto crítico fregeano contra el inscripcionismo de Thomae y su metáfora del juego de ajedrez.

En segundo lugar, y quizá más importante desde el terreno matemático, Maddy insistirá en la necesidad de analizar y justificar los axiomas de la teoría de conjuntos, que considera base del hacer matemático. Análisis que, según Maddy, podría guiar el trabajo de los matemáticos en el momento actual.

En su intento de disolver el dilema de Benacerraf, pero admitiendo el cuadro de la teoría causal del conocimiento, resulta que para Maddy las únicas razones para mantener que las entidades abstractas son causalmente inertes se centran en que no parecen localizables en el espacio y el tiempo. Ahora bien, si todos los elementos de un conjunto tienen localización espacio-temporal, entonces cabe afirmar que el conjunto también posee localización espacio-temporal, la misma que la que tienen sus elementos. Es una de las tesis de Maddy [1990, 21] que, en el fondo, constituye un ataque a la concepción epistemológica del sentido común y, a la vez, la afirmación de una tesis ontológica. En sus palabras, "las matemáticas son el estudio científico de entidades matemáticas objetivamente existentes lo mismo que la física es el estudio de las entidades físicas".

La tesis la apoya en la ciencia cognitiva y, fundamentalmente, en los desarrollos neurofisiológicos y de aprendizaje del individuo. Piaget, entre otros, ha mostrado que la capacidad de ver objetos físicos en un medio es el resultado de un largo y complejo proceso de desarrollo pero, más en particular, Maddy va a seguir una línea propuesta por el neurologo Hebb. A lo largo de la evolución de la especie humana, el individuo va propiciando la aparición, por interacciones repetidas con los objetos físicos, de unos esquemas neuronales, un detector neuronal, a través de los cuales va formando sus creencias acerca de los objetos físicos. Una vez constituido el detector neuronal —en el caso matemático, conjuntista— se van estableciendo creencias perceptuales aceptables acerca de conjuntos 'impuros' según la estimulación sensorial adecuada. Estas creencias son prelingüísticas o intuitivo-sensoriales, aunque ulteriormente sean reafirmadas por el empleo del lenguaje.

Las creencias prelingüísticas acerca de conjuntos 'impuros' constituyen la base para una posterior elaboración y, en una fase todavía posterior, para la elección de los axiomas propios de las teorías de conjuntos, ahora ya no impuros.

De esta forma, para Maddy el concepto de 'conjunto' se adquiere como resultado de interacciones perceptivas con conjuntos impuros, desde las cuales se llega a alcanzar el estatuto de propiedades. Es decir, el concepto expresa la propiedad responsable de la propia formación de la noción conjunto. Pero a la vez, y esto es esencial, establece la creencia en la aceptabilidad de ese mismo concepto en virtud de la información que proporciona del mismo.

Como resultado, el matemático estudia hechos, pero unos hechos especiales: conjuntos que, por interactuar causalmente con el matemático, no son abstractos. El estudio se hace desde lo perceptivo sensorial, partiendo de las creencias prelingüísticas sobre los conjuntos 'impuros': creencias plausibles desde los cuales se van obteniendo unas consecuencias por métodos estrictamente matemáticos, aunque siempre de carácter de experimentación conceptual, que conlleva unas teorizaciones y el establecimiento de unas hipótesis. Y según se obtengan unas teorías más o menos justificadas, las primeras creencias pueden irse alterando, modificando.

En cualquier caso, el punto de partida son las creencias aceptables por plausibles que establece el detector neuronal sobre la base de unas interacciones causales con conjuntos 'impuros', localizados espacio-temporalmente. En el fondo, la existencia de una intuición matemática de base neurofisiológica es lo que hace posible el conocimiento matemático, que lo es de realidades físicas.

Naturalmente esta tesis hace surgir una serie de consecuencias nada plausibles. Por lo pronto, que haya infinitos elementos en el mismo lugar y en el mismo tiempo. Dificultad centrada en la existencia del conjunto potencia: porque si el conjunto X tiene una localización espacio-temporal determinada, también la tendrá el conjunto $\{X\}$, y el $\{\{X\}\}$.

Por otro lado, aun si se admitiera que el conjunto X estuviera localizado en el mismo lugar y en el mismo tiempo que sus elementos materiales componentes, resulta que no se ve muy bien cuál es la interacción causal entre el conjunto y el sujeto epistémico X ni, sobre todo, la del conjunto potencia de X. De hecho lo que se tiene es que hay infinitos conjuntos que poseen los mismos elementos materiales, y todos a la vez y en el mismo lugar y tiempo. De aquí que habría que establecer un criterio objetivo para indicar cuál de los conjuntos del conjunto potencia es el que interactúa con el sujeto cognoscente y, con ello, de paso a las creencias numéricas particulares. Tal criterio, por ahora, se muestra inexistente.

Además, consecuencia de la tesis de Maddy, cualquier creencia que S se forme para afirmar que hay n objetos en un conjunto —con $n > 0$— es verdadera, así como la afirmación de que la causa de la creencia es la de que hay un conjunto de n objetos en el conjunto dado. Pero entonces resulta que cualquier creencia que S se forme acerca del número de objetos del conjunto constituye un caso de conocimiento.

En cuanto al conjunto vacío, Maddy se enfrenta con un reto más: no se puede percibir. Por ello, Maddy tiene que recurrir a dar cuenta de por qué las creencias perceptivas de que un conjunto tenga cero elementos de manera diferente a la creencia perceptiva de que un conjunto tenga uno o varios elementos, que viene apoyada en la intuición sensorial directa del mismo. Lo cual supone, evidentemente, un recurso totalmente arbitrario, *ad hoc*, no muy consecuente.

A pesar de estas dificultades, Maddy llega a sostener lo que califica de realismo inmanente, platonismo comprometido o monismo realista, en la línea de epistemología naturalizada requerida por Quine, pero sosteniendo los aspectos de necesidad y verdad tradicionalmente asociados a las proposiciones matemáticas, negando que sean meras ilusiones. Necesidad y certeza que, para Maddy, poseen un carácter sustantivo, propio del hacer matemático que posee un contenido aunque ese contenido no es el clásico, el mantenido desde los tiempos de Platón y centrado en fórmulas o ecuaciones de curvas, figuras geométricas, números: ahora ese contenido viene dado precisamente por la teoría de conjuntos. Y la necesidad y certeza han de ser explicados, justificados y no considerados como meras ilusiones, como sería la posición normal desde una epistemología naturalizada.

Para ello, combina su tesis de que los conjuntos pueden ser considerados como localizables en el espacio y el tiempo, con la tesis ontológica de que los números no sean admitidos como objetos ni como conjuntos sino como propiedades de conjuntos. Frente a Quine, quien admitía que los números son clases, frente a los teóricos logicistas y conjuntistas, Maddy establece esta segunda tesis acerca de la naturaleza ontológica de los números naturales: ni objetos, ni conjuntos, sino propiedades de conjuntos.

De modo clásico, un número como 3 se identificaba con la clase de todos los conjuntos finitos hereditarios con tres miembros y, de aquí, se podía identificar con uno u otro representante de la clase, con diferentes conjuntos en tiempos diferentes. Posición clásica que caía bajo la crítica apuntada por Benacerraf en 1965 respecto a los reduccionismos, además de que hay que distinguir entre conjunto y clase.

Frente a esta línea, y consecuente con la crítica de Benacerraf, cabe estimar a los números no como clases sino como propiedades de clases. Así, la caracterización de los números naturales como clases por parte de von Neumann se convierte en el predicado 'equinumérico con la clase n'. Por ejemplo, para von Neumann el número 3 es la clase $\{0,\{0\},\{0,\{0\}\}\}$; pero para Maddy hay que interpretarlo como 'equinumérico con $\{0,\{0\},\{0,\{0\}\}\}$'.

Si en lugar de la caracterización de los naturales de von Neumann se adopta la caracterización de Zermelo, la lectura de la misma por parte de Maddy se hace en términos semejantes y, así, en lugar de considerar que 3 es el conjunto $\{0,\{0\},\{\{0\}\}\}$, hay que considerarlo como el predicado 'equinumérico con $\{0,\{0\},\{\{0\}\}\}$'.

Naturalmente viene la cuestión de que los dos predicados no son sinónimos, pero Maddy señalará que son coextensivos. Y si son coextensivos, como ya señalara Putnam, es que dichos predicados corresponden a una misma propiedad: en este caso, el número natural 3.

Dos cuestiones inmediatas. En primer lugar, la posible circularidad de la propuesta, dado que se admite que dos predicados son coextensivos cuando poseen la misma extensión, claramente conjuntista.

En segundo lugar, la dificultad de admitir el estatuto ontológico de estas propiedades como objetos naturales. Dificultad ligada, claramente, a la admisión de los conjuntos como objetos localizados en el espacio y el tiempo. En principio, son universales y si se rechaza explícitamente el nominalismo como hace Maddy, parece difícil establecer tales universales como entidades naturalizadas. Frente a esta afirmación, sólo cabe la de Maddy, la de que tales propiedades son objetos localizados espacial y temporalmente y, por ello, no son causalmente inertes: interacción causal, materialmente con otros objetos o sujetos cognoscentes.

Ello supone que se admita una interactuación causal externa, en cuanto al plano epistemológico, del objeto, como propiedad y no ya como conjunto, con el sujeto como actividad neuronal motivada por la percepción o la intuición sensorial. Admisión que posibilita el contacto perceptual de esa red neuronal con las propiedades matemáticas —con los números naturales— o con cualquier otro tipo de propiedades y relaciones de cosas físicas.

De esta manera resulta que es la estructura de la percepción del sujeto cognoscente del número —al igual que cuando se percibe un triángulo como triángulo— la que establece la certeza de los axiomas matemáticos a la vez que nuestras creencias en la certeza de los mismos. Certeza y seguridad en la misma que no se apoyan en el éxito o la predicibilidad de los axiomas matemáticos en las teorías físicas sino en la constitución en el individuo del detector neuronal.

Y toda la clave es tanto esa certeza como las creencias en dicha certeza porque, para Maddy [1991, 158],

> Para el propósito fundacional, los únicos axiomas de la matemática admisible aparecen en teoría de conjuntos. Los objetos característicos de otras ramas de la matemática son definidos oficialmente dentro de la teoría de conjuntos.

Punto de vista que, claramente, muestra sus dificultades: así, la filosofía de la matemática actual ha evolucionado intentando evitar cualquier matiz de fundamentación o, en todo caso, llega a realizar un estudio de fundamentos pero sin fundamentación. Además, no es la teoría de conjuntos, y la concentración en sus axiomas, la única misión de la filosofía de la matemática, entre otras cuestiones porque cabe discutir tanto el papel axiomático como el papel de la teoría de conjuntos como base de toda la matemática cuando no es más que el lenguaje de uso de los haceres de dicha matemática y cabría considerar que una teoría como la de categorías es aún más básica que la conjuntista porque desde ella puede establecerse la teoría de conjuntos.

Por otro lado, para Maddy la única matemática plausible es la teoría de conjuntos y la apoyada en dicha teoría. Lo cual hace surgir, al menos, cinco cuestiones:

1. existen diferentes teorías de conjuntos según los axiomas que se tomen como primarios y son teorías no ya alternativas —como podían serlo las geometrías métricas euclídeas y no euclídeas— sino incompatibles entre *sí*. Cómo se llega, desde un mismo detector neuronal, a teorías contrapuestas;
2. el hacer matemático no es única y exclusivamente un hacer conjuntista o global. Existen también haceres figural y computacional. El hacer global de base conjuntista surge a finales del siglo XIX por lo cual cabría asegurar, si la tesis de Maddy fuera aceptable, que lo anterior no es matemática. Ni siquiera el cálculo diferencial ni, básicamente, los procesos geométricos. Una consecuencia un tanto extraña que se tendría que, al menos, justificar;
3. si la evolución propicia el establecimiento de un detector neuronal por el cual el individuo llega a la noción de conjunto por interacción con los conjuntos impuros, se puede preguntar cómo es que sólo se ha dado este establecimiento en individuos de un cierto tipo de sociedad y en una época determinada; y tampoco en todos como ha mostrado el llamado 'fracaso escolar'. Es cuestión, ciertamente, no matemática sino planteable a la concepción evolutiva neurofisiológica en la cual se apoya Maddy para su teoría;
4. es difícil admitir que a partir de unas experiencias muy limitadas en número, y siempre con conjuntos finitos y muy finitos, se alcance, por una intuición sensorial apoyada en un hipotético detector-neuronal de conjuntos, las nociones de un hacer matemático como el contenido en el hacer global y que va más allá de la percepción de conjuntos finitos. Es lo que ocurre con un axioma como el de elección, por ejemplo, del cual no tenemos intuición perceptiva alguna, aunque Maddy asegure que lo que sí tenemos es "la evidencia intuitiva para elegir";
5. es difícil admitir que cuando estamos haciendo matemática, el detector neuronal nos haga percibir conjuntos y las propiedades relevantes que van ligadas a este concepto, pero no los haga percibir cuando estamos en química, en física o en otras disciplinas.

En cualquier caso, Maddy mantendrá que es la misma estructura de la percepción del sujeto cognoscente la que establece las creencias acerca tanto de los objetos físicos en su concreción singular como respecto a los conjuntos, que no son meras inducciones enumerativas sino lo que Maddy estima como un proceso de formación de conceptos generales. La matemática se muestra como una disciplina del mismo tipo que la física, la química, la biología, entre otras, con sus procesos perceptivos y experimentales, aunque sean propios y distintos como lo son, también, los métodos experimentales de cada una de las diferentes ciencias. Para Maddy, todas las ciencias vienen a estudiar el mundo, que se presenta como independiente al espíritu y al lenguaje, pero cada ciencia lo hace con un objeto y metodología propios.

La propuesta de Maddy, al menos su primera tesis —que podría remitirse a una interpretación psicologista de Kant— apoyada en la existencia de un detector neuronal producido en cada individuo por la evolución de la especie, queda en un terreno fáctico, el de la ciencia cognitiva y la neurofisiología, ciencias que podrán asegurar la existencia de esa especial estructura fisiológica del sujeto, estructura que le posibilita interactuar causal, sensorialmente con conjuntos de objetos singulares, materiales o, incluso, con propiedades de conjuntos y clases y no sólo con objetos singulares. También corresponderá a esas ciencias asegurar o no la certeza en la aceptabilidad de estas últimas propiedades.

Habiendo establecido estos dos planos, epistemológico y ontológico, y tratando de ir, en mero futurible porque hasta ahora no ha logrado su reformulación completa, más allá de los números naturales hasta los reales, enfocados como razones o proporciones entre magnitudes físicas, la aplicabilidad de la matemática a la naturaleza, para Maddy, inmediata: los últimos constituyentes de la naturaleza no son, en el fondo, ni matemáticos ni físicos, sino físico-matemáticos.

5. Estructuralismo: Resnik, Shapiro

La corriente estructuralista tiene entre sus máximos representantes a Resnik y Shapiro, pero quedan muy próximos filósofos como Parsons y el mismo Steiner e incluso puede indicarse que también lo es, en cierta manera, Benacerraf con el matiz de ser un estructuralista eliminativo en el sentido de que Benacerraf pretende suprimir la referencia a objetos concretos, a los objetos matemáticos, por lo cual la aritmética, por ejemplo, no concierne con objetos particulares —los números— sino que elabora la estructura abstracta que tienen todas las progresiones en común en virtud de ser progresiones.

Precisamente Benacerraf resaltó tres puntos que van a ser claves para la concepción estructuralista en cualquiera de sus matizaciones. Así, hay que reconocer que:

1. Los axiomas que caracterizan una teoría poseen infinitos modelos. Los axiomas de Peano para la aritmética, *PA*, tienen como modelo los números naturales, pero también cualquier otra sucesión es modelo de *PA*. Pero entonces parece que esa caracterización no es unívoca, no determina de manera única los elementos que parece caracterizar y, además, no hay motivos objetivos para elegir una u otra de tales sucesiones como canónicas, no hay motivos para privilegiar una de ellas;

2. los conceptos matemáticos pueden ser definidos de muchas maneras. Así, los números reales se pueden definir por al menos tres procesos diferentes: cortaduras de Dedekind, clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de racionales módulo sucesiones nulas, sucesiones de racionales de Weiertrass. O, por otro ejemplo, ya reiterado, el número 3 se puede caracterizar en la teoría de conjuntos de Zermelo y en la de von Neumann de maneras distintas. Surge, aquí, la pregunta, ¿esos conceptos son el mismo?;

3. si el matemático está manejando sistemas axiomáticos y modelos de tales sistemas, conceptos definidos de manera diferente en teorías axiomatizadas pero que son el mismo concepto, se plantea el problema de cómo ese matemático adquiere la creencia y seguridad matemática, el dominio de los procesos con los que actúa. Si a través de una intuición eidética o sensorial, de una interactuación causal material, si es que la misma existe, o de qué otra manera.

Los dos primeros puntos plantean un primer tema, ontológico, acerca de la naturaleza del objeto que maneja el matemático: si teorías, modelos, estructuras, conceptos, objetos, etc., y, sobre todo, si cabe hablar o no de niveles objetuales. Por su lado, el tercer punto plantea el problema epistémico y es el lugar donde se tiene la aceptación o rechazo de la teoría causal del conocimiento.

Una posición como la del estructuralismo adopta como punto de partida, realmente, los tres puntos anteriores; los acepta como hechos que posibilitan una justificación del hacer matemático. Pero en su intento de establecer tal justificación las soluciones estructuralistas se muestran llenas de dificultades en cuanto al primer punto, el ontológico y demasiado vagas en cuanto a lo epistémico.

Plano ontológico. En cuanto al estatuto de los objetos matemáticos podría esquematizarse la posición estructuralista como sostenedora de dos tesis como las siguientes:

a. La referencia a los objetos matemáticos se hace siempre en el contexto de alguna estructura subyacente;

b. Los objetos envueltos no tienen más propiedades que las que pueden ser expresadas en términos de las relaciones básicas de la estructura. Con palabras de Resnik [1981, 530]

> En matemáticas no tenemos objetos con composición interna situados en estructuras. Sólo tenemos estructuras. Los objetos de la matemática, es decir, las entidades que denotan nuestras constantes matemáticas y cuantificadores, son puntos carentes de estructuración o posiciones en estructuras. Como posiciones en estructuras, carecen de identidad o de rasgos distintivos fuera de una estructura.

Con otras palabras, el estructuralista mantiene que la matemática es una ciencia de *patterns*, estructuras y los elementos u objetos matemáticos aparecen como posiciones en tales estructuras y no como entidades en sí. Donde un *pattern*, para Resnik [1981, 532], es "una entidad compleja que consiste de uno o más objetos, las *posiciones*, situados en varias relaciones (y poseyendo distintas características, posiciones distinguidas y operaciones)". Es lo que ha llevado a Parsons a considerar que el estructuralismo es un enfoque eliminativo de los objetos matemáticos y, de ahí, el nombre que algunos han adoptado de estructuralismo eliminativo.

Pero ello no es más que la manifestación de una posición un tanto ambigua: por un lado parecen eliminarse los objetos matemáticos como tales objetos, como entidades singulares, con sus rasgos de identidad o individualidad pero, por otro lado, se admiten tales objetos y ello en dos aspectos: por un lado los objetos aparecen como posiciones en un *pattern*, pero por otro lado es el propio *pattern* el que surge como objeto en el que situarse, como posiciones, los objetos.

Lo que se tiene, realmente, es que los objetos matemáticos, existentes, no poseen una estructura interna propia, intrínseca, sino única y exclusivamente en relación a la posición que ocupan en un *pattern* dado: "Que 13 es un número primo no viene determinado por alguna propiedad interna de 13 sino más bien por su lugar en la estructura de los números naturales" [Parsons 1981, 529].

Una concepción que trata de aprehender el hecho de que los matemáticos manejan objetos de diferente nivel: un número real definido por cortaduras a lo Dedekind posee una estructura especial, ser una clase de equivalencia de pares de clases de números racionales, pero los números reales se manejan como objetos a-estructurados, como objetos en sí, si se les toma como los elementos base para definir los números complejos o definir un punto en el plano geométrico real o para dar el resultado de una medida. Es el contexto teórico o instrumental quien determina, en el fondo, cómo adoptar un objeto matemático en cuanto a su estructuración interna. Y para Resnik ese contexto es, precisamente, la estructura en la cual se da el objeto como posición de la misma.

Resnik, además, admitirá un realismo trascendente, un platonismo ontológico al afirmar su creencia en la existencia de los objetos matemáticos, existencia independiente del sujeto cognoscente y de su vida mental, causalmente inertes y sin estar naturalizados en parte alguna. Y la ambigüedad señalada antes parece superarse en el sentido de que, al igual que afirmara Maddy, esas entidades no son las entidades matemáticas clásicas, las figuras geométricas o los números naturales en su sentido tradicional, sino que son estructuras o *patterns*, que hasta ahora parecen carecer de identidad determinada.

Las posiciones no tienen más características que las establecidas por su papel en la estructura. De esta manera, cabe admitir que si bien parece que se eliminan los objetos matemáticos en cuanto a su consideración clásica, se admiten dichos objetos en cuanto a su consideración global. Y toda la cuestión se centra en el estatuto ontológico, precisamente, de los elementos que se manejan en el hacer global.

Evidentemente el lenguaje a manejar para la caracterización de las estructuras o *patterns* no puede ser el de la lógica de primer orden sino que ha de ser L_2. Manejando una lógica L_2 como lenguaje apropiado, resulta que, según he citado, las entidades que denotan las constantes matemáticas y los cuantificadores son puntos carentes de estructuración, son posiciones en estructuras.

Así, la aritmética, identificada con la aritmética de Peano, no ha de ser entendida como el estudio de una colección particular de objetos —los números naturales— sino como el estudio de la estructura de cualquier sistema hereditario, que tenga una sucesión infinita de objetos con uno inicial distinguido y con una operación como la de sucesor. Estructura ejemplificada en los numerales arábigos, en los ordinales finitos, en la sucesión infinita de palitos o rayas, en las expresiones del alfabeto romano en orden lexicográfico, etc., es decir, en cualquier sistema infinito hereditario y con primer elemento. Es decir, los números son 'lugares en una progresión cualquiera', y por ello

> conocer la sucesión de los números naturales implica saber que contiene una posición inicial (cero), que cada posición tiene un único sucesor, que la sucesión no tiene fin y que en ella se aplica la inducción completa. [Parsons 1988, 454]

Es lo que Benacerraf había considerado cuestionable en el reduccionismo logicista de la aritmética a la lógica o en el tratamiento conjuntista de la aritmética: no hay razones para privilegiar una sucesión de objetos lógicos cuando hay otras sucesiones posibles. Pero, de aquí, no puede obtenerse la conclusión de Benacerraf de que los números no son objetos, de que no hay tales cosas como los números, ya que las estructuras, en este caso las progresiones o sucesiones, son existentes en el mundo empírico. El estructuralismo trata de disolver el problema de Benacerraf al aceptar esta conclusión: no privilegiar una sucesión, sino estimar que cualquiera de ellas constituye el *pattern* que es un existente en el mundo físico.

Ahora bien, en este punto, Shapiro indicará: la estructura de los números naturales es la estructura común a esos sistemas. Lo que, en el fondo, no es otra cosa que afirmar un predicado establecido por una relación de equivalencia en la clase de todos los sistemas isomorfos entre sí. El paralelismo con la caracterización del objeto lógico conceptual 'número natural' dada por Frege es, así, absoluta, aunque no venga formalizada. Y esta caracterización va a tener, por ello, los mismos peligros que en la establecida por Frege.

El estructuralismo pretende evitar que el número natural aparezca, como en Frege, como un objeto lógico individual, autónomo. En todo caso, y por la construcción realizada, ese objeto sería la estructura. El número natural se quiere que aparezca como un lugar, como una posición en la sucesión que caracteriza la estructura del número natural.

Pero como tampoco se ha formalizado la construcción del *pattern*, resulta que este carece, también, de identidad determinada. Aparece como lo que tienen en común distintos sistemas pero ello obliga a precisar la distinción entre sistema y estructura. Así, y aquí sigo a Shapiro,

- *Sistema* es una colección o agregado de objetos relacionados entre sí de distintas maneras. Relaciones que pueden ser de varios tipos. Así, se puede tener una relación como la familiar y se tiene el sistema de personas con relación de filiación; o musical y se tiene el sistema de tonalidades; o de juego, como el ajedrez como sistema de piezas y relaciones para moverlas, etc.
- *Estructura* constituye la forma abstracta del sistema donde lo que importa son las interrelaciones entre los elementos de dicho sistema.

Claramente, diversos sistemas pueden tener una estructura común, que sería la estructura formal correspondiente a dichos sistemas —y es lo que he pretendido ejemplificar en el caso de *PA*— A su vez, distintas estructuras pueden ser equivalentes entre sí. Equivalencia que no es más que un tipo de las posibles relaciones que pueden establecerse entre las estructuras. Entre ellas y como relaciones básicas se distinguen dos: isomorfismo estructural (términos de Shapiro) o congruencia (término de Resnik), por el cual distintas estructuras pueden ser equivalentes, y la ocurrencia de una estructura en otra.

La caracterización de estas relaciones básicas se hace a través de la previa definición de esos conceptos entre sistemas. Así, se establecerá: los sistemas *A* y *B* son isomorfos *ssi* hay una aplicación biyectiva entre los objetos de *A* y los objetos de *B*, entre las relaciones en *A* y las relaciones en *B*, de tal manera que se preserven las relaciones correspondientes. Inmediato: dos estructuras α y β son isomorfas *ssi* cualquier sistema que ejemplifica α es isomorfo con cualquier sistema que ejemplifica β.

Y se dirá que las estructuras α y β son equivalentes ssi pueden ser encapsuladas como estructuras en una estructura más amplia, en una estructura de la que pueden originarse sin más que suprimir en ella alguna de sus relaciones (en términos más matemáticos, si aparecen como restricciones de una misma estructura dada).

Quizá para mayor claridad: Sean *P*, *Q* y *R* tres estructuras. Se dirá
1. *P* es una subestructura plena de *R ssi*,
   - *P* y *R* tienen las mismas posiciones;
   - toda relación de *P* lo es de *R*;
   - toda relación de *R* puede ser definida en términos de las relaciones de *P*.

2. *P* es equivalente a *Q* si hay una estructura *R* tal que tanto *P* como *Q* son isomorfas a todas las subestructuras plenas de *R*

En cuanto a la ocurrencia de una estructura en otra, comprende la instanciación por la cual una misma estructura puede tener distintas instanciaciones en otras estructuras o en ella misma. Cada ocurrencia que es instanciación es una subestructura, en el fondo, diferente, pero es una ocurrencia de la misma ocurrencia del mismo *pattern*, de la misma estructura. Así, la aritmética *PA* ocurre en la jerarquía iterativa de conjuntos *ZF* una infinidad de instanciaciones. Tal aritmética y tales infinitas instanciaciones no pueden identificarse entre sí sino que ponen de relieve la estructura o *pattern* común: la progresión simple infinita. Lo cual implica que hay que rechazar, por ejemplo, la identificación de los números con cualquiera de sus ocurrencias.

Aquí el estructuralismo recoge el hecho de que muchas estructuras matemáticas infinitas ocurren dentro de sí. El caso más difundido se tiene en los fractales, donde una misma estructura se reitera dentro de sí misma con la observación de que, en este caso, esa reiteración se produce con un cambio de escala, lo que no siempre tiene que suceder.

He pretendido, siguiendo lo más de cerca posible los términos bien de Resnik, bien de Shapiro, esbozar su posición ontológica, lo que estimar como claves en el aspecto tanto ontológico como metodológico del estructuralismo. Hay que pasar ahora a la afirmación de que todo ello entraña una serie, en lo estrictamente ontológico, de cuestiones y dificultades.

En primer lugar, la noción de congruencia o isomorfismo estructural viene caracterizada en términos de equivalencia definicional o sinonimia entre teorías, por lo que, como resalta Shapiro, es una noción que depende, esencialmente, del lenguaje, la lógica y la semántica que se maneja para expresar la teoría elegida. De tal manera que algunos pares de estructuras pueden ser equivalentes entre sí bajo una teoría expresada en L_2 pero no bajo una teoría expresada en en un lenguaje como L_1. Son los recursos expresivos los que van a determinar la naturaleza de las relaciones en una estructura. Pero entonces surge una dificultad en cuanto a objetos matemáticos como los números naturales: cuando se dice que 5 son los dedos de una mano ese 5 no es el mismo que cuando se dice que 5 es una posición en una progresión simple infinita.

En esta misma línea de dificultad se puede observar que la diferencia entre Sistema y Estructura no es absoluta. Desde una perspectiva, un sistema puede aparecer como una estructura, y recíprocamente. En matemática, muchas estructuras vienen ejemplificadas por sistemas cuyos 'objetos' están situados en otras estructuras. Aún más, resulta que cuando se habla de relaciones entre estructuras y, si el estructuralismo es consecuente, hay sistemas cuyos lugares, cuyas posiciones son estructuras. Con lo cual a la indefinición de objeto se ha de agregar la indefinición de estructura ya que aparece como objeto al no ser más que una posición en una estructura.

En segundo lugar, hay que precisar que el estructuralismo se pretende diferente a la concepción clásica del hacer matemático como un hacer de estructuras, como cabría enfocarse desde las reformas de la enseñanza de la matemática 'moderna' siguiendo los patrones de Bourbaki, por ejemplo. Desde el hacer matemático, una estructura consta de un dominio D de objetos, de ciertas funciones y relaciones entre los elementos de ese dominio; funciones y relaciones que, en algún caso particular, pueden tomarse como especiales, como las constantes. Así, la noción de grupo viene dada por $G = < D; *, e, ^{-1} >$. Naturalmente esta estructura posee numerosas ejemplificaciones o modelos. Y el lenguaje base que hay que manejar es el conjuntista porque se está en un hacer plenamente global donde el punto de partida es, claramente, el sistema, agregado o conjunto. Y ello puede indicarse afirmando que los objetos matemáticos, de distintos niveles —elemento del grupo, estructura grupo, grupo simple como componente del grupo, clase de modelos o ejemplificaciones, etc.— pueden venir caracterizados en términos conjuntistas.

Ahora bien, el estructuralismo de Resnik o de Shapiro no quiere, no pretende ser una filosofía de la matemática del hacer matemático estructuralista, donde se parte de la admisión explícita de la estructura como objeto. Ontológicamente prefieren manejar los términos de posiciones, incluso de *patterns*, más que de objetos y estructuras de objetos. Pero ello no implica otra cosa que mantenerse en una cierta indefinición.

Indefinición que, sobre todo, lleva al estructuralismo a enfrentarse con un dilema hasta ahora no resuelto a pesar de haber sido claramente reconocido: su circularidad. Aunque intente evitar la terminología conjuntista en inicio, como el estructuralismo ha de explicar y justificar la noción de conjunto desde su punto de partida, resulta que a partir de la noción de estructura se caracteriza una noción como la de conjunto, que es el dominio en el que se establecen las relaciones internas que caracterizan la noción de estructura.

Dilema que se refuerza al tener que mantener un lenguaje básico como L_2. La cuantificación en éste lenguaje se realiza, precisamente, sobre entidades que son conjuntos. Y, de aquí, que el dilema, lo contradictorio de la elaboración estructuralista, se reformule indicando que lo que se presupone es la noción de conjunto para decir lo que es un conjunto. Como una salida, en 1988, Resnik señalaría: 'Se puede indicar que justamente no podemos dar descripciones ni completas ni categóricas de las estructuras matemáticas más ricas'.

Lo cual, aunque honesto, implica la admisión de ciertas limitaciones en el enfoque estructuralista. En este sentido, la posición estructuralista tiene la esperanza de que si L_2 no tuviera el compromiso de manejar clases o conjuntos, si pudieran eliminarse éstos, entonces la contradicción quedaría suprimida y el estructuralista podría manejar la lógica de segundo orden para caracterizar las jerarquías teórico-conjuntistas sin caer en la circularidad. De aquí el interés que tanto Resnik como

Shapiro han mostrado por trabajos como los de Boolos en los terrenos del logicismo, pretendiendo suprimir el compromiso ontológico de la lógica L_2 en cuanto a las clases y conjuntos.

En tercer lugar, el estructuralista se enfrenta con la vieja cuestión de la identidad de los indiscernibles: es consecuencia de que ni las estructuras ni las posiciones tienen identidad determinada. Pero resulta que dentro de estructuras con simetrías internas, ciertas posiciones son indistinguibles entre sí, salvo numéricamente: en el triángulo equilátero cada lado es meramente distinto de los otros. Con ello se está rechazando el principio de identidad de los indiscernibles de Leibniz, que requiere distintos individuales para ser distinguibles no-trivialmente, es decir, respecto a predicados que están implicados por la mera distinción de los individuos. Pero la mera distinción lo que implica es la inaccesibilidad de ciertas identidades.

Y esta inaccesibilidad de identidades, propia del estructuralismo, conduce a ciertos problemas como, entre otros, el de la imposible identidad de estructuras. Como Resnik [1981, 538] afirma, "ni la identidad entre patterns ni entre posiciones de diferentes patterns está (en todas partes) definida". Sólo puede ser respondida la cuestión en términos de la diferencia o la identidad no en sí, sino en un contexto. Fuera de contexto, las cuestiones de identidad de estructuras o de posiciones carecen de sentido. Como sólo puede ser caracterizada la diferencia o la identidad de un *pattern* —de una posición— en un contexto, resulta que la aritmética *PA* se presenta en la jerarquía iterativa de conjuntos *ZF* pero de tal manera que no se identifica con ninguna de sus ocurrencias, por lo que ninguna de éstas es la aritmética.

Ligado con la dificultad anterior podría indicarse que el número tenía como objetivo responder a una pregunta tan elemental como la de ¿cuántos hay? Si se dice 3, es que en el sistema, conjunto o agregado, en la caja, hay tres objetos. Pero entonces el 3 no es una mera posición en una sucesión o en una estructura, sino la respuesta objetiva a un hecho concreto. Algo que, desde el estructuralismo, se muestra radicalmente difícil de conciliar porque no parece ser lo mismo el número como respuesta a una pregunta sobre magnitudes extensivas que la respuesta al número como posición en un *pattern*. Esta crítica se incardina en la aplicación de la aritmética, ciertamente. Pero el estructuralismo también ha de dar cuenta de esta aplicación que exige, evidentemente, la existencia de relaciones extra-estructurales.

Además, y como indicaría Parsons, los objetos matemáticos han de contrastarse con objetos concretos porque han de ser instanciados en lo material concreto. Así, la circunferencia o las figuras geométricas han de establecerse mediante marcas concretas, pero también los números mediante los numerales o cifras o palitos. Ahora bien, la visión estructuralista no parece apropiada para dar cuenta de estos objetos matemáticos ya que la relación de representación es algo adicional a las relaciones intra-estructurales y el estructuralismo sólo mantiene relaciones intra-estructurales, no extra-estructurales.

En este sentido también cabe indicar ciertas dificultades en cuanto a lo difuso de la noción de posición porque ¿cómo identificar la "posición" de manera única? La preservación del orden en algunas sucesiones —como en los reales— no es única y entonces puede preguntarse por la posición de un número como 0.333..., en la estructura de los números reales.

Evitando esas relaciones extra-estructurales, una objeción apuntada por Parsons al estructuralismo se centra en señalar que los sistemas de los cuales se habla y con los cuales se alcanza la estructura, existen. Es decir, hay que probar la existencia de las estructuras y no meramente indicar que es la propiedad común a una clase de sistemas.

Dificultades en cuanto a la base ontológica que se suma a las dificultades que el estructuralismo tiene para dar una interpretación suficientemente precisa de teorías matemáticas específicas. Hasta ahora no ha dado una traducción del discurso matemático en un lenguaje estructuralista específico, ni ha justificado, consecuentemente, tal representación. Queda, por ello, en mero proyecto, aunque sí pueda afirmarse su aceptación ontológica del platonismo trascendente.

Estatuto epistemológico. Dificultades que aumentan en el terreno epistemológico, en la respuesta a cómo adquirir conocimiento de las entidades como las estructuras y las posiciones en dichas estructuras que, por ser causalmente inertes, carecen de papel causal alguno en la generación de las creencias sobre las mismas.

Como Resnik apuntará, las creencias sobre las entidades matemáticas se obtienen de modo indirecto, a través del profesor en el aula y de la imaginación, mediante etapas inferenciales intermedias con procesos manipulativos que posibiliten la captación de las posiciones en los *patterns*.

Y ello porque no hay diferencia epistemológicamente significativa entre la matemática y las ciencias empíricas. De aquí la aceptación de un platonismo o realismo naturalizado, ahora de estructuras. Y Resnik [1988, 401] afirmará como consecuencia de esta no diferencia epistemológica en cuanto al método de trabajo del matemático respecto al científico en general "no hay distinción que no sea arbitraria de cuándo un científico actúa como matemático y cuándo actúa como científico', a pesar de lo cual, el matemático maneja métodos específicos. Así, cuando desarrolla sus teorías y utiliza sus axiomas, hace uso de criterios como los de categoricidad, consistencia, etc.

Es claro que, aquí, se presenta una dificultad: aunque aparentemente el matemático actúe como los demás científicos, resulta que si acepta unos axiomas existenciales como el de elección, el de conjunto potencia de cualquier conjunto dado o acepta unos u otros teoremas como el de compacticidad, no puede considerarlos como meras hipótesis que podrá alterar según el experimento o la falsación experimental en el laboratorio, que podrían ser los procesos de interacción causal en las ciencias experimentales. Hay, en la praxis matemática, un elemento que va más allá de estas concepciones.

En este terreno, el estructuralista plantea unos intentos no muy conformados y hasta ahora cuestionables, de una epistemología mínimamente coherente.

6. Logicismo renovado y deductivismo

Una de las grandes dificultades del estructuralismo surge al apoyarse en lo teórico conjuntista y, de ahí, su mirada puesta en una posible lectura de la lógica de segundo orden. Si conveniente, tal lectura evitaría la inconsistencia en la que se apoya el estructuralismo. Pero ello no sería otra cosa que transformar tal enfoque en una nueva forma de logicismo, en un logicismo renovado o actualizado, que es la posición que mantiene Boolos.

Hay que recordar que el programa logicista, tal como fue originalmente planteado por Frege, se encontró con la dificultad base de lo que calificar compromiso ontológico: la admisión de la extensión de los conceptos, base de su axioma V, que provocaba la aparición de antinomias. Dificultad que condujo a lo que se estimó como fracaso logicista.

En posteriores precisiones se tiene que la aritmetica no puede expresarse en una lógica elemental, en L_1, por lo cual se tiene que pasar, al menos, a una lógica de segundo orden. Ahora bien, en esta lógica se manejan clases y agregados, entre otros, como extensiones de los predicados que se cuantifican. Y es por lo que Quine vino a afirmar que la lógica de segundo orden no era más que 'una teoría de conjuntos con piel de cordero', no era otra cosa que matemática disfrazada. Y de aquí que, frente a la boutade de Russell de que no había línea separadora entre lógica y matemática, Quine y, con él, los lógicos posteriores, admitieran que la frontera entre ambas se centraba precisamente en la lógica de segundo orden. Por ello se mostraba difícil mantener la idea de que la matemática se redujera a la lógica, programa básico del logicismo.

El reduccionismo logicista se enfrentaba no ya con aceptar existencialmente los conjuntos, clases y relaciones como entidades ontológicas, sino con la cuestión estrictamente existencial material como advirtiera el propio Russell. Para desarrollar la matemática el logicista tenía que admitir la existencia de un conjunto infinito, tesis que por su carácter existencial fáctico no podía estimarse realmente como tesis lógica pura. Y si la consecuencia era el fallo del programa logicista también aparecía otra consecuencia que impedía el pretendido reduccionismo, era la lógica de segundo orden la que se identificaba, o reducía, a la teoría de conjuntos y, con ella, a la matemática.

Intentando superar la crítica de Quine, Boolos ha tratado de establecer una lógica de segundo orden en la que se pretende suprimir toda referencia a clases, agregados, conjuntos. De aquí que, de ser factible su empeño, se pueda afirmar que el programa fregeano se haría realidad mediante un logicismo renovado. Para ello Boolos argumenta en forma parecida a:

1. No se requiere establecer clases o colecciones para que las proposiciones de segundo orden sean inteligibles. Se pueden traducir, sin más, a un lenguaje ordinario manejando cuantificadores pero sin compromiso ontológico alguno. Así, para Boolos un principio como el del número mínimo, que de manera tradicional se leía como 'para cualquier *F*, si hay números tales que *F*, entonces hay uno mínimo', lectura con la cuantificación obligada sobre el predicado *F*, puede ser interpretado como 'es falso que haya algunos números tales que ninguno de ellos sea el mínimo', donde ya no hay cuantificación de segundo orden, no hay cuantificación sobre predicados.

2. El manejo de cuantificadores de predicado no nos compromete a nada de lo que no nos comprometan los cuantificadores de variables de individuo. Es decir, no hay compromiso, desde este manejo múltiple, con clases o conjuntos.

Consecuentemente, el uso de la lógica de segundo orden no nos compromete ontológicamente con la existencia de conjuntos. Por ello, Boolos puede afirmar que Quine estaba equivocado y que la lógica de segundo orden no es una teoría de conjuntos disfrazada. Y, al no serlo, se puede fundamentar en ella, perfectamente, la matemática. Ello implica, de modo evidente, que no hay posibilidad alguna de hablar de objetos matemáticos, porque no existen como tales. Como mantenía Frege, los números son objetos lógicos.

La posición de Boolos constituye, en el fondo, una relectura de la lógica de segundo orden de manera que en ella se suprima cualquier referencia a pluralidades. Sin embargo, y por atractivo que se ha mostrado este enfoque para algunos filósofos, como admiten Resnik o Shapiro, puede indicarse, en primer lugar, que dicha relectura no es del todo correcta, depende de las interpretaciones que se tengan del lenguaje ordinario. Es decir, que si bien cabe hacerla respecto a alguna de las proposiciones de segundo orden, no es factible en todas. Pero, entonces, la técnica aportada por Boolos, y que puede ser calificada como de traducción 'nominalizadora' de la lógica de segundo orden, técnica que supone una eliminación de entidades abstractas, aunque sea factible en importantes contextos, no lo es en su sentido general y, de aquí que pueda afirmarse, de entrada, que Boolos no ha logrado su objetivo, no ha conseguido resolver el problema ontológico central en la filosofía de la matemática, porque continúa haciéndose referencia a conjuntos y otros objetos abstractos.

En este sentido, y como indicaría Resnik [1988, 76], la técnica eliminativa nominalizadora va a depender de las intuiciones lógico-lingüísticas y, en este punto, "mis intuiciones lógico-lingüísticas difieren ampliamente de las de Boolos".

Hay proposiciones que hacen uso esencial de la cuantificación de predicados en lógica de segundo orden. Así, se ha señalado que un axioma como el de comprehensión requiere de una lectura donde la cuantificación sobre las clases se muestra esencial:

Una fórmula como

$$\exists F\ \forall x\ (Fx \Rightarrow \neg(x \in x))$$

hay que leerla, y no hay otra manera de hacerlo, como 'hay conjuntos tales que cada conjunto es uno de ellos *ssi* no es elemento de sí mismo', pero decir 'hay conjuntos' supone hablar de una pluralidad y de que la misma, en uno u otro sentido, existe. Y ello aunque Boolos indique que esa lectura o cualquiera que se haga de fórmulas de segundo orden monádicas no comportan compromiso ontológico alguno respecto a las entidades que puedan ser valores para las variables de predicado. Una afirmación que, de hecho, parece ir contra lo que exige el contexto: la fórmula en L_2 no hace otra cosa que reflejar la concepción intuitiva de que 'hay' pluralidades o clases. Y la fórmula dada es la que provocó los problemas antinómicos a Frege, a Russell precisamente por el carácter existencial ligado a la misma.

En segundo lugar, hay que indicar que si se mantiene el programa logicista, aun en su sentido renovado, desde el mismo hay que fundamentar la aritmética y, con ella, mecanismos como los inductivos o recursivos. Pero para la elaboración de la lógica de segundo orden, precisamente, se están manejando dichos principios. Es crítica ya realizada por Poincare a las primeras versiones de este programa y que, nuevamente, cabe realizar aquí. Y ello a pesar de que algunos estimen, como Parsons, que este ataque va dirigido más bien hacia el enfoque formalista de la lógica de segundo orden, al enfoque que la considera como un sistema formal a elaborar de manera puramente sintáctica. La crítica creo que es independiente del enfoque, formalista o logicista, de la elaboración del sistema L_2.

Una salida para las posibles críticas, también mantenida en cierta manera por Boolos, se centra en apoyarse en una versión del condicionalismo. Para ello Boolos indicará que

> hay una forma de asociar una verdad de la lógica de segundo orden con cada verdad de la aritmética [y] la existencia de esta asociación es la mejor manera que se tiene para apoyar al logicismo.

Ahora bien, la primera afirmación puede ser traducida, con Hanson, en la forma siguiente: Por un lado se tiene la aritmética informal N y, en ella, proposiciones como α; por otro lado se tiene la lógica formal L_2 con proposiciones de la forma S y con la aritmética formalizada mediante un conjunto de axiomas de segundo orden, PA^2. En este caso, la afirmación de Boolos se puede establecer como:

$$\alpha \text{ es verdadera } ssi\ PA^2 \Rightarrow S \text{ es válida}$$

Interpretación válida porque se muestra como consecuencia de la dos proposiciones siguientes [ver Hanson 1990]:

1. PA^2 es verdadera en todas las interpretaciones isomorfas con N, siendo N el modelo canónico de la aritmética;
2. α es verdadero *ssi* α es verdadera en N.

La llamada a N, a un modelo canónico de la sucesión de los números naturales, se muestra esencial y esta llamada es algo que va contra las críticas ya señaladas desde Benacerraf de no tener que elegir alguna sucesión como sucesión privilegiada. Ahora bien, un auténtico logicista no puede aceptar esa llamada, no puede aceptar la previa existencia de algún modelo canónico de la aritmética ya que los números, después de todo, se reducen a lógica y cada proposición aritmética puede considerarse como una proposición lógica del tipo

$$PA^2 \Rightarrow S \text{ es válida.}$$

Por otro lado, esta misma reducción muestra el papel del condicional: cada proposición aritmética puede considerarse como enmarcada por el mismo. Pero como es un condicional, siempre se tiene la posibilidad de que sea vacuamente verdadera, si el consecuente es falso, todo vale.

Vacuidad asociada al condicionalismo o deductivismo que había pretendido establecer, como programa, la matemática como un instrumento para obtener resultados en el interior de la lógica pura. Resultados o teoremas que podrían aparecer en una de estas dos formas

1. $Ax \Rightarrow \alpha$ es lógicamente válido, demostrable lógicamente;
2. α es consecuencia lógica de Ax,

donde Ax es un esquema cuantificacional que contiene los axiomas de la teoría matemática dada y α es un esquema cuantificacional de un teorema de la teoría.

La segunda forma es la más atractiva en el sentido de que se hace en términos de consecuencia lógica o derivabilidad, por lo que parece encajar más con los usos del matemático en su labor práctica ordinaria. Desde esta posición se quiere que el matemático estudie las propiedades de todas las estructuras que satisfacen ciertas condiciones de definición, las establecidas en los axiomas sin que, por ello, tenga que hacer la suposición de que las estructuras correspondientes existan, de una u otra manera.

Es una reformulación, en el fondo, apoyada en el plano metodológico demostrativo que se quiere, incluso, inspirado en el mecanismo hipotético-deductivo sugerido ya por Platón y que intentó el mismo Russell para hacer desaparecer al compromiso ontológico que suponía el axioma del infinito en el reduccionismo de la aritmética a la lógica en su formulación logicista.

Son evidentes las ventajas del deductivista en cuanto a que sólo se compromete en el aspecto metodológico, pero no en el ontológico y, respecto al problema epistemológico, lo traslada desde la matemática a la lógica, base y apoyatura de las reglas y el lenguaje en el que se han de realizar las demostraciones.

Por supuesto el deductivismo tiene su contrapartida y es que exige la demostración de la consistencia del sistema de axiomas. Y precisamente esta demostración es la cruz del deductivista porque toda teoría inconsistente carece de modelos por lo que las estructuras caracterizadas por una teoría inconsistente compondrían la clase vacía. Y el segundo teorema de Gödel cierra esta vía para la posición deductivista.

Junto al problema que la consistencia del sistema de axiomas plantea al deductivista se tiene, como indiqué, el de la vacuidad. Un condicional puede ser, siempre, verdadero. Y es una posición que posibilitaría fundamentar cualquier disciplina, científica o no, en la lógica o en cualquier otra disciplina. Bastaría expresarla como un condicional con un antecedente hábilmente elegido. De aquí que, a pesar de sus atractivos, el deductivismo quede, siempre, en un muy segundo plano, soterrado respecto a las demás filosofías de la matemática.

7. Modalismo e interpretación modal-estructural

Los obstáculos que encuentran el logicismo renovado y el deductivismo tienen una salida, un distinguo correspondiente. Así, la dificultad que se le presenta al logicista por tener que admitir la existencia previa de un modelo canónico —que, de superada, permitiría eliminar, de modo inmediato, la segunda dificultad asociada— puede ser sorteada de la manera siguiente:

No se necesita suponer la existencia actual de estructuras que satisfagan las condiciones que se desee, sino sólo que puedan existir.

Es una superación que no es otra cosa que una vuelta a los *posibilia* de Mill, considerando ahora que la matemática no trata con entidades matemáticas de algún tipo especial sino con entidades posibles que exhiben una estructura que es la que satisface los axiomas de la misma. De esta forma se pasa a un estructuralismo modal, que es la posición sostenida actualmente por Hellman.

Como Hellman reconoce de manera explícita, su punto de partida se apoya tanto en el *estructuralismo* que pretende retomar de Dedekind y, en espíritu, a muchos otros como Shapiro [1983], como en el *modalismo* iniciado por Putnam [1967] cuyo programa se centraba en eliminar los objetos matemáticos en favor de las modalidades. Es decir, en lugar de hablar de objetos o entidades matemáticas, reinterpretar toda la matemática en un lenguaje modal con la posibilidad lógica como único operador primitivo. Con la traducción de todo el hacer matemático a este lenguaje modal se conseguiría aseverar la tesis de Putnam: 'la matemática es una lógica modal' teniendo presente, siempre, que al hablar de modalidad se está hablando de una modalidad *de re*, no *de dicto*. Así, en teoría de conjuntos, cualquier proposición se puede considerar como si estuviera diciendo que su representación en lenguaje de primer orden se sigue en todo modelo canónico de rango adecuado. Modelo que, en general, se construiría como una *posible* estructura concreta.

Desde esta posición se intenta superar la crítica realizada al deductivismo —programa que había aceptado Putnam en un primer momento—, en cuanto al problema de la vacuidad. Y ello porque lo único que se exige es que una estructura —un sistema— simplemente infinito, como en el caso de la aritmética, sea posible, sin más explicación. Con ello el lenguaje de la matemática clásica se enfoca como si hiciera afirmaciones de lo que podría acontecer en cualquier realización concreta de un cierto tipo de isomorfimo, pero sin asegurar para nada la existencia actual de dicha realización. Precisamente los operadores modales los emplea Hellmann como medios para eliminar (o llevar al mínimo) cualquier referencia a objetos abstractos y, con ello, eliminar cualquier realismo platónico o eidético.

Ahora bien, en lógica modal el operador de posibilidad va ligado al de necesidad. Y se plantearía la pregunta de cómo realizar la interpretación de esos operadores modales:

i) si estrictamente lógicos, pero entonces se entra en las discusiones ordinarias de la modalidad: discusiones que no se limitan a conceptos puramente lógicos o matemáticos, sino también de semántica y lingüística —en línea, por ejemplo, a lo Kripke—;

ii) o con una componente de física natural en el sentido de que las estructuras matemáticas consideradas como posibles, sean posibles fácticos: lo que no parece muy razonable ya que en el caso de las teorías conjuntistas no parece haber candidatos materiales para esos posibles físicos, modelos de los posibles matemáticos.

Y si no hay tales candidatos se plantea, inmediata, la cuestión de la consistencia interna de esos posibilia, y sólo la demostración por mera consistencia sintáctica establecería la 'existencia posible'. Algo que, hasta ahora, no se ha logrado ni, por los teoremas de Gödel, se muestra factible.

En cualquier caso, el modalismo y su inflexión o interpretación modal-estructural, se mantienen más como programa que como un trabajo totalmente realizado, aunque Hellman ha avanzado en aritmética, teoría de conjuntos y pretende su elaboración en análisis.

Para llevar a cabo su programa modal-estructural, en el fondo traductor, Hellman hace dos pasos: En el primero, las proposiciones *S* de la matemática (de la aritmética en particular) las convierte en condicionales, por ejemplo, la expresión '*S* se sigue en cualquier Ω–sucesión' se convierte en 'Si *X* es una Ω-sucesión cualquiera, entonces

S se seguirá en X". Inmediato, un segundo paso: se traduce la expresión obtenida a lenguaje modal de segundo orden. La expresión anterior quedaría en la forma

> es necesario que para toda sucesión X, si X es una Ω-sucesión entonces S se sigue en X $\Box(\forall X)$(X es Ω-sucesión ⇒ S se sigue en X)

Al introducir la noción de posibilidad lógica como parte del lenguaje estructuralista

> será posible traducir las proposiciones ordinarias de la teoría de números (o del análisis) para que, en la interpretación, digan que *podría* ser el caso en cualquier estructura (arbitraria) del tipo apropiado sin cuantificación literal sobre ningún tipo de objetos [Hellman 1989, 15]

El esquema de traducción a términos condicionales supone, por ello, dos componentes: la expresión traducida que se denomina 'componente hipotética' y en la cual los cuantificadores quedan fuera del alcance del operador modal de necesidad, por lo que se puede asegurar que no hay cuantificación literal sobre objetos. Esta componente ha de ir junto a una 'componente categórica' que Hellmann considera crucial y por la cual debe ser asumido como un axioma que las estructuras del tipo apropiado son lógicamente posibles. La componente categórica se constituye en principio de existencia, existencia modal que Hellmann identifica con existencia matemática. La aceptación de esta segunda componente se hace para evitar la vacuidad que todo condicional entraña, vacuidad a la que hice referencia en el parágrafo sobre el Deductivismo.

La pregunta, nuevamente aquí y en particular, es: ¿cuál es la sucesión de los naturales?. Y la respuesta de Hellman [1990, 316] no es otra que: 'la posibilidad lógica de un modelo *canónico* de la aritmética, no un modelo arbitrario'.

En línea a lo Dedekind —a quien Hellman acude como inspirador del estructuralismo modal tras una sugerente interpretación por parte de Parsons de la figura de Dedekind, convertido en estructuralista eliminativo, interpretación muy discutible—, la respuesta es: un sistema simplemente infinito, teniendo presente que todos los sistemas simplemente infinitos son isomorfos entre sí.

De esta manera, para Hellman [1989, 6], así como para quienes pretenden elaborar una 'matemática sin números', "la matemática es la libre exploración de posibilidades estructurales, proseguidas por medios deductivos (más o menos) rigurosos". Y desde esta perspectiva, el estructuralismo modal se ve como una auténtica alternativa al platonismo realista, ya que "la referencia literal a objetos matemáticos está enteramente eliminada" [Hellman 1989, 8].

Alternativa que, evidentemente, no era factible desde el estructuralismo sólo. El estructuralismo modal, así, se enlaza con el logicismo y el modalismo en su objetivo de eliminar los objetos matemáticos, con la visión de que las entidades matemáticas no tienen que tomarse como primitivas. Trabajar sobre esas entidades se puede considerar que es lo mismo que trabajar sobre entidades lógicas o análogo a trabajar sobre ningún tipo de entidades, entidades eliminadas o evitadas por meras construcciones lógicas —como las modales—.

En este punto cabe señalar una dificultad, muy clásica. El discurso del matemático por un lado, y por otro el discurso del logicista o del lógico modal o del modal-estructural constituyen discursos muy diferentes. Si un matemático trabaja en teoría de números, por ejemplo, hace referencia a números, a objetos genuinos denominados números, aunque quizá no sepa muy bien, o con gran precisión, cuál es la naturaleza ontológica de tales objetos. No se está con meros *possibilia*. Es lo que un considerado formalista radical como el bourbakista Bourbaki señalaba cuando decía que los objetos matemáticos muestran una "realidad" más real, más fuerte que los objetos materiales que nos entornan.

Y, en la misma línea, cuando se hace una aserción, una proposición en aritmética informal, se hace acerca de números y no acerca de entidades posibles que pueden ser referidas para construir una estructura isomorfa a la estructura mostrada por los números y ello con cierta necesidad o posibilidad modal.

Son puntos que indican que las tendencias señaladas no parecen acoger muy bien la práctica del matemático.

Por otro lado, cuando se hace una formulación en términos modales, se tiene una presuposición existencial implícita, salvo que se afirme que las proposiciones de la matemática no pueden ser verdaderas porque, sencillamente, no se refieren a nada, son meras hipótesis posibles. Y, en este caso, se plantea el problema del milagro y de la indispensabilidad de la matemática para la física y, con ella, para el conocimiento de cualquier disciplina científica.

Presuposición existencial que cabe explicitar mediante la admisión de una ontología de mundos posibles. Y aunque tales mundos posibles se puedan interpretar como objetos no estrictamente matemáticos, pasar de la no existencia de objetos matemáticos a la existencia de mundos posibles no parece una ganancia ontológica apreciable.

Desde el terreno modal puede señalarse que la existencia de los mundos posibles no surge, realmente, de la lógica modal sino de la semántica que la acompaña: surge en el marco en el que la modalidad se toma como primitiva para manejar la cuantificación sobre tales mundos posibles y ello se hace imprescindible para manejar la teoría.

En cualquier caso, y además de las dificultades que se plantean en los terrenos ontológicos y, en particular, en cuanto a la reformulación en un discurso parecido al matemático, en una reformulación de las teorías matemáticas hasta ahora existentes, la posición logicista y la modal-estructuralista plantean sus dificultades en cuanto al plano epistemológico.

Por un lado, se origina el problema de cómo asegurar que una proposición sobre una posibilidad existencial sea verdadera. Cabría indicar que la verdad de la proposición podría depender de la suposición de que las teorías físicas describen posibilidades materiales, reales, coherentes y que las teorías matemáticas lo que hacen es captar, de manera directa o indirecta, tales cuadros físicos por lo que en dicha captación las proposiciones correspondientes se hacen verdaderas. Pero ya he indicado la no plausibilidad de considerar los operadores modales como referidos a una física natural. Por ello, sólo se tiene que la verdad queda bajo la mera coherencia interna de la posibilidad, lo cual no significa otra cosa que la consistencia formal.

Una salida sugerida por Putnam, se apoyaría en concebir una representación concreta que ejemplifique una estructura posible, en la cual la proposición en cuestión —su representación correspondiente— se hiciera verdadera. Pero una cosa es concebir una situación y otra muy diferente asegurar la posibilidad de la misma. De hecho se pueden concebir situaciones y proposiciones matemáticas sobre cardinalidades o sobre relaciones espacio-temporales que no tengan una posible realización concreta espacio-temporal fáctica. De aquí que ésta no sea una auténtica salida a la dificultad señalada.

Por otro lado, al no haber objetos matemáticos sino objetos lógicos, posiciones en estructuras, mundos posibles, etc, el acceso a los mismos no puede realizarse a través de la intuición sensible y, consecuente, no puede mantenerse una teoría como la causal para el conocimiento de la matemática. Ello obliga, mera consecuencia del dilema de Benacerraf, a revisar la concepción asociada al estatuto epistemológico de la matemática y, más aún, de cualquier tipo de conocimiento.

Es punto en el que parece guardarse un prudente silencio salvo mantener, aquí, el mismo tipo de posición epistémica que los estructuralistas: el acceso a la matemática, gracias a la enseñanza, la inferencia deductiva, la imaginación, el lenguaje, pero nunca por un intercambio causal. Y mantener que el matemático, en su trabajo, va en paralelo al trabajo del científico natural que es la tesis mantenida, en general, por todos los autores que se cobijan bajo el rótulo de epistemología naturalizada.

8. Field y su nominalismo fisicalista

En un plano de radical fisicalismo, donde la eliminación de los objetos matemáticos alcanza no sólo al hacer matemático sino a la física newtoniana elaborada sin números, se tiene una posición un tanto contradictoria como la que se acoge a un *nominalismo fisicalista* y que viene subtendida por Field.

Posición avalada, ciertamente, desde los argumentos de Benacerraf y Steiner —a los que Field se encomienda en varias ocasiones— acerca de la no existencia de los objetos matemáticos tras la aceptación de la teoría causal del conocimiento. Argumentos que han motivado un refuerzo para las posiciones de carácter nominalista en el hacer matemático como intento de superar las dificultades epistémicas que se encuentran en el platonismo a la vez que han enfatizado la búsqueda de unas justificaciones no solo del hacer matemático en sí, sino de explicaciones acordes con lo que denominar la mejor teoría del conocimiento científico con la que ese hacer matemático ha de ser consistente. Muy en esquema, resumido, esta posición asegura:

a. no hay entidades matemáticas;

b. las proposiciones matemáticas carecen de contenido.

Consecuentemente, en la matemática no hay problema epistémico alguno, causal o no causal, porque tampoco hay cuestión ontológica, no hay objetos matemáticos de los cuales reclamar tal conocimiento y, por ello, se disuelve la cuestión de si pueden o no interactuar con un sujeto cognoscente.

En cuanto a las proposiciones matemáticas, en cuanto a las proposiciones en las que se cuantifica sobre términos matemáticos, resulta que como los términos que en ellas se manejan carecen de referencial, pueden estimarse que, aunque útiles, en algunos casos aparecen como verdaderas o, en otros, como falsas. Así, una proposición como:

no existe un número primo mayor que 100,

es, siempre, verdadera ya que, de hecho, no existen los números, primos o no, mayores o menores que 100. Y ello a pesar de que los matemáticos opinen, en general, que una proposición como la citada es falsa e incluso pretendan mostrar la falsedad de la misma estableciendo números primos mayores que 100.

Pero una proposición como: Russell conoce que $3^3 = 27$; aunque generalmente se considere verdadera, ha de ser falsa y ello porque si es verdad que Russell conoce que $3^3 = 27$ entonces se ha de seguir, por la condición de la implicación o condicional —la tesis de que el conocimiento implica la verdad— que "$3^3 = 27$" es verdadera, lo que Field niega porque no hay referentes numéricos (Los ejemplos de Irvine [1990, xiii]).

La matemática, de esta manera, no constituye conocimiento alguno y ello porque no hay objetos matemáticos. Lo único que existe son objetos físicos, expresiones lingüísticas, sucesos mentales.

Pero aparece un problema para un nominalista tan radical como Field y es el de tratar de resolver el hecho de que el hacer matemático, que no es conocimiento, que carece de objetos como números, en el que sus proposiciones no hablan acerca de nada, se muestra con las repercusiones prácticas como las que tiene en la física y, a su través, en el conocimiento científico, en el conocimiento. Como Field [1980, 5] sostiene "hay uno y sólo un argumento serio para la existencia de las entidades matemáticas". Y este argumento es el de *indispensabilidad* elaborado por Quine y Putnam y que puede ser enunciado como sigue:

> no se puede describir y explicar adecuadamente el mundo sin manejar las teorías científicas y éstas hacen uso indispensable de las matemáticas. De aquí que, para que esas explicaciones y descripciones sean verdaderas, se requiere postular la existencia de entidades matemáticas que hagan que las proposiciones matemáticas sean verdaderas.

Por ello uno de los primeros objetivos de Field es mostrar que la física puede elaborarse sin números; que, en general, cualquier teoría física puede ser reformulada, en principio, sin referencia a (o sin cuantificación sobre) entidades abstractas.

El nominalismo fisicalista podría considerarse como una variante del nominalismo clásico, siempre antiplatónico, pero en el cual caben unas matizaciones. Así, pueden distinguirse, en el nominalismo, al menos, dos líneas:

i) La que cabe denominar tradicional, en la cual se admitía que la aparición de la referencia singular y de la cuantificación en el discurso matemático —formalizado en L_1— podían ser genuinos siempre que esa referencia y los cuantificadores sean concretos, pero inaceptable si se pretendía como referencia a clases, a cualquier tipo de entidad universal o abstracta;

ii). la de un nominalismo de carácter formalista, que rechaza la idea de que las proposiciones matemáticas tengan condiciones genuinas de verdad. Esas proposiciones poseen una sintaxis determinada que puede ser explotada en distintas direcciones mediante procesos de derivación sintáctica formal, pero siempre con la condición de que carezcan de interpretaciones semánticas. Es una posición que mantendría, por ejemplo, Abraham Robinson en la formulación de su formalismo y, aunque a veces se ha atribuido a Hilbert, es atribución que considero incorrecta.

Field no se encuadra en ninguna de estas dos posiciones y cabe considerarlo como un nominalista radical o, más bien, como sostenedor de un nominalismo de ficción. Y ello porque, en inflexión, ni siquiera la referencia a lo concreto es, ahora, aceptable. Pero como la matemática se muestra como instrumento básico para otras disciplinas, cabe aceptar que la matemática puede sostener una semántica platónica. Es decir, puede admitirse una semántica de carácter platónico como descriptivamente adecuado o correcta aunque siempre en el interior de un discurso nominalista.

De esta forma, una teoría de números puede soportar referencias singulares dentro de un dominio de objetos abstractos y, a la vez, soportar cuantificaciones sobre dicho dominio. Pero como Field sostiene que no hay tales objetos abstractos resulta que las condiciones veritativas de las proposiciones matemáticas han de ser sistemáticamente irrealizables, única manera de aceptarlas.

En otras palabras, una teoría matemática puede ser aceptable, aunque entre sus proposiciones haya condiciones veritativas platónicas, siempre que sea conservadora respecto al discurso nominalista, es decir, respecto a un discurso en el que las proposiciones componentes tengan condiciones veritativas que sólo hacen exigencias dentro de un dominio de lo aceptablemente concreto. Las teorías matemáticas se muestran como instrumentos para derivar, de modo nominalista, conclusiones aceptables desde premisas que, igualmente, se aceptan con carácter estrictamente nominalista.

Quiere decirse, con ello, que se acepta que se puede hablar de las entidades matemáticas como si existieran pero negando, a la vez, tal existencia. Lo cual equivale a considerar que la matemática que mantiene ese tipo de discurso es una ficción, pero ficción que es a la vez, y sorprendentemente, platónica.

La apoyatura para estas últimas consideraciones, para esta especie de ficcionalismo, la obtiene Field al adoptar una distinción de van

Fraasen en filosofía de la ciencia entre confirmar y aceptar una teoría como verdadera. Confirmar una teoría física no requiere más compromiso que el contrastar su adecuación empírica, su correción dentro de los límites de lo que es observable. Y, para Field, no se necesita para la confirmación de las teorías matemáticas nada más que su condición de conservación. Y una teoría es conservadora, en el sentido lógico, con respecto a un discurso nominalista cuando cualesquiera inferencias entre proposiciones de ese discurso pueden ser construidas, al menos en principio, de modo válido sin llamadas a la teoría. Con sus palabras,

> una teoría matemática *S* es conservadora si, para cualquier aserción nominalista *A* y cualquier cuerpo de tales aserciones *N*, *A* es consecuencia de *N* + *S* salvo que *A* sea consecuencia de *N* sola [Field 1989, 125].

Hay que observar que una teoría conservadora cae bajo lo modal. Y ello porque, en realidad, lo que se tiene es que una proposición es consecuencia de otras *ssi* no es posible, en un sentido modal primitivo, que sea falsa mientras que las restantes son verdaderas, y esa proposición es inconsistente con otras ssi su negación es consecuencia de ellas.

De aquí que, si cae bajo lo modal, bajo el operador de posibilidad, entonces quepa establecer el problema de contingencia. Y Field llegará a la afirmación: Si los objetos matemáticos son posibles, no necesarios, entonces son contingentes. Contingencia conceptual propia de la matemática que evita así las consideraciones asociadas a la misma de su necesidad. Consideraciones que forman la posición tradicional acerca de la naturaleza de la matemática y que, según Field, ha seguido un esquema contrario al adecuado. De modo tradicional se ha seguido un esquema argumentativo del tipo:

> Si suponemos que hay al menos un cuerpo de aserciones matemáticas puras que incluyen aserciones existenciales y que son verdaderas, estamos suponiendo que hay entidades matemáticas. [...] De aquí concluimos que hay algún cuerpo de hechos acerca de esas entidades y que no todos son relevantes como lo son los aplicables al mundo físico. [...] De aquí, pasamos a considerar problemas de coherencia, simplicidad, etc., de esos elementos y, finalmente, a su axiomatización.

Con lo cual, y siguiendo esta línea de pensamiento, el tradicional platónico llega a considerar que si la matemática es verdadera, lo es necesariamente y ello equivale a decir que lo es en todo mundo posible.

Field combate una argumentación de este tipo, al considerarla equivocada. Como la matemática no es conocimiento no puede admitirse la proposición antecedente del condicional en el razonamiento anterior, el que afirma que la matemática sea verdadera y, por ello, tampoco puede seguirse la conclusión 'necesariamente verdadera'. Además, las peticiones existenciales son puramente nominales, no reales. Para Field

> sería extremadamente sorprendente si llegara a descubrirse que la matemática canónica implicara que hay al menos 10^6 objetos no-matemáticos en el universo. Si este fuera el caso habría que revisar esa matemática. La buena matemática es conservadora, un descubrimiento que acepte una matemática no conservadora será un descubrimiento que no es bueno.

Y esta contingencia de lo conceptual es lo que permite que aún aquel que no cree en las entidades matemáticas sea libre para usar las aserciones existenciales, aunque siempre en un cierto contexto limitado. Uso libre para deducir consecuencias compatibles con el discurso nominalista. Uso factible no porque las cosas que intervienen en las premisas sean verdaderas, sino porque se sabe que se preserva la verdad entre las premisas establecidas de manera nominalista [Field 1980, 14].

En otras palabras, se admite el uso de la matemática para obtener consecuencias, pero se pueden aceptar los resultados sin tener que creer, por ello, que la matemática que se utiliza sea verdadera, de conocimiento.

Se puede intentar eliminar, incluso, este tipo de discurso matemático apoyándose exclusivamente en un logicismo de segundo orden. De esta forma Field empalma con el estructuralismo y el estructuralismo modalista, además de con el logicismo renovado. Y de aquí el interés que líneas como las que he indicado de Boolos tienen para Field quien llegaría a asegurar que el trabajo de Boolos le había convencido para el uso de la lógica de segundo orden para alcanzar una formulación nominalista de la física newtoniana en la cual la matemática platónica es conservadora. Aunque, en referencia de Resnik posterior [1988], Field sugiriera el abandono de esta lógica de segundo orden.

La ficción platónica en que consiste la matemática, y que Field empalma con su nominalismo viene expresada en palabras como,

> sobre la cuestión de por qué no hay números, mi punto de vista es que es del tipo de por qué no hay materia, o por qué no hay espíritus inmateriales, o por qué no hay Dios: simplemente no puede esperarse que haya una respuesta a tales cuestiones básicas de existencia y no-existencia

> ("básica" en el sentido de: aplicable a una "categoría ontológica" total) [Carta de 8 Set. 1990. En Hale y Wright 1992, 127].

En cuanto al término de fisicalismo simplemente menciono que es término que hace referencia al neopositivismo y, entre otros, a Carnap. Para Carnap el fisicalismo es la tesis de la reducibilidad de todas las ciencias al vocabulario de la física fundamental y ello porque ninguna disciplina científica es independiente a la física. Es claro que para Carnap la matemática queda marginada a cualquier tipo de fisicalismo, de este tipo especial de reduccionismo, por la escisión que se tiene entre ciencias formales y físicas perteneciendo la lógica y la matemática a las ciencias formales.

Por su parte, para Field el fisicalismo

> es la doctrina de que los hechos químicos, hechos biológicos, hechos psicológicos y hechos semánticos son explicables todos (en principio) en términos de hechos físicos. Funciona como una hipótesis empírica de alto nivel, una hipótesis que ningún pequeño número de experimentos puede forzarnos a establecer. Funciona, realmente, como funcionó la doctrina del mecanicismo (que todos los hechos son explicables en términos de hechos mecánicos)

Si el mecanicismo se vino abajo con la teoría del electromagnetismo de Maxwell que no se hacía explicable en términos mecánicos y, por ello, fue empíricamente refutado, el fisicalismo se le muestra a Field como su sucesor. Y si el mecanicismo constituía el marco adecuado para la elaboración de las ciencias hace cien años, el marco correspondiente en el momento actual no es otro que el fisicalista. Naturalmente la matemática, en este cuadro, no puede quedar reducida a esos hechos físicos y, de aquí, la necesidad de que se muestre, en el fondo, como una mera ficción aunque, eso sí, una ficción platónica.

Ficción en un sentido en el que Field trata de precisar el alcance del dilema de Benacerraf y la teoría causal del conocimiento, indicando que el problema no es rechazar el platonismo ontológico sino que el problema se centra en la epistemología platónica:

> Lo que origina problemas epistemológicos serios no es meramente el postulado de entidades causalmente inaccesibles; más bien es el postulado de entidades que son causalmente inaccesibles y que no pueden caer dentro de nuestro campo de acción y no comportan ninguna otra relación física con nosotros que pudiera explicar cómo podemos obtener información de ellos [1982, 69].

Palabras que recuerdan las conclusiones de las paradojas conjuntistas de indefinibilidad de König o de Richard de aceptar la existencia de un universo con una cardinalidad como la del continuo del que no puede decirse ni una palabra porque el lenguaje es numerable.

En este contexto, Field considera que las teorías matemáticas, aun instrumentales, son legítimas en cuanto a su empleo en otras disciplinas. Bien entendido que como mero instrumento nominalista sin compromiso ontológico, que puede ayudar, incluso, a hacer más intuitiva a esas disciplinas. Legitimidad y utilidad que no engendran ni apoyan referencia alguna a la verdad y, con ella, a entidades matemáticas existentes en un dominio más o menos eidético.

Como la física utiliza modelos matemáticos para representar los fenómenos naturales y este empleo se le presenta legítimo y útil, Field cree que se pueden elaborar esos modelos nominalísticamente, sin requerir entidades matemáticas. Y ello porque una teoría física *F* representa un orden real *R* para lo cual agrega términos teóricos que permiten explicar y con ello predecir, el comportamiento de los fenómenos en *R*; por su lado, una teoría física matematizada *M* no interpreta *F* sino que, según Field, es otra manera de decir lo mismo que *F*. En otras palabras, la teoría física *F* y la teoría física matematizada *M* son sistemas conceptuales distintos que dicen, sin embargo, lo mismo respecto a *R*; su diferencia se centra en que en *M* hay términos matemáticos con referencia a entidades matemáticas y en *F* no.

Por un ejemplo, en *M* hay proposiciones del tipo 'existe el número 21' mientras que en *F* las hay del tipo 'existen 21 *n*', por lo que son proposiciones con referencia espacio-temporal, lo que no ocurre con las propias de *M*.

De modo consecuente, si *F* y *M* son sistemas conceptuales diferentes pero expresan lo mismo, puede prescindirse de *M*, de aquella teoría matematizada en la que se tienen proposiciones existenciales sobre entidades matemáticas.

Field aplica esta estrategia para demostrar que una teoría como la mecánica gravitacional de Newton puede construirse de modo nominalista al estilo de una teoría física *F* y no como se hace de modo tradicional, como teoría física matematizada *M*.

La teoría newtoniana admite que un campo particular de fuerzas —la gravitatoria— se puede representar por un campo matemático —vectorial— sobre una variedad cuatridimensional que satisface unas ecuaciones en derivadas parciales determinadas. Los puntos de la variedad representan 'puntos espacio-temporales' que hacen referencia a puntos como entidades matemáticas. Para medir distancias en este espacio se recurre a dichos puntos que vienen dados por números reales. De aquí que cualquier medida que se haga en este espacio confirmaría a los números reales e implicaría su existencia. La teoría física así elaborada sería del tipo *M*.

La 'estrategia nominalista' la centra Field en desarrollar los elementos básicos del cálculo vectorial subyacente de modo que se tengan, por modo exclusivo, las relaciones de congruencia y paralelismo entre segmentos lineales con lo cual se evita la referencia a los puntos localizados espacio-temporalmente y, por inferencia, a los puntos reales matemáticos. De esta manera la maquinaria matemática acerca de métricas, campos y ecuaciones en derivadas parciales se convierte en mero auxiliar sin referencial. Ello supone, en cierta manera, ampliar la teoría física newtoniana, pero sin obtener nuevos resultados, por lo que la nueva teoría —del tipo *F*— es conservadora, cumple una de las condiciones básicas impuestas por Field.

Con esta estrategia se consigue mantener que una teoría nominalista *F* contiene un modelo matemático *M*, pero *M* no contiene ningún elemento interpretativo concreto de la realidad *R*.

Sin embargo, en la estrategia nominalista hay que emplear un lenguaje en el cual se hace uso de cuantificadores sobre regiones espacio-temporales. Y ello constituiría una violación de la estrategia en sí ya que impondría un enfoque realista, existencial, de entidades como dichas regiones o conjuntos. Field [1990, 34] señalará:

> Existen, con certeza, ciertos puntos de vista del espacio-tiempo de acuerdo con los cuales la cuantificación sobre los puntos espacio-tiempo o regiones espacio-tiempo serían realmente una violación al nominalismo. Hablo de puntos de vista *relacionistas* de espacio-tiempo, como opuestos a los puntos de vista *sustantivalistas*. [...] De acuerdo con el punto de vista *sustantivalista* que acepto, los puntos espacio-tiempo (y/o regiones espacio-tiempo) son entidades que existen en su propio derecho.

Con lo cual Field no niega el manejo de esos cuantificadores sobre 'regiones' —cuantificación sobre predicados, en el fondo— sino que agrega una afirmación, para poder justificar el mismo, un tanto sorprendente para un nominalista: aceptar la existencia de regiones como entidades y considerarlas agentes causales en el mismo sentido que los objetos físicos [1990, 114]. Ahora bien, en la teoría física tales entidades carecen de contenido masa-energía y, por tanto, no sufren cambio alguno. Y ello hace difícil identificar una región espacio-temporal existente y localizable físicamente en el mundo real —como esta mesa—

Aceptando que existe una diferencia entre los objetos físicos y los abstractos, Field no parece trazar una nítida separación entre ambos y, de ahí, identifique lo que puede considerarse teoría física matematizada —terreno abstracto, conceptual— con el mundo físico fáctico. Las regiones fácticas —como la mesa— son reales porque se puede tropezar uno con ellas, se interactúa causalmente con las mismas, lo que no ocurre con las regiones conceptuales. Pero es con éstas con las que se construye y maneja, precisamente, la teoría física, salvo volver al problema de buscar una instanciación de la teoría.

Field se ha centrado en eliminar las entidades matemáticas de sólo algunas teorías físicas, como la gravitacional newtoniana. Pero si uno lee con atención la obra de Field resulta que las matemáticas siguen allí y que no pueden ser eliminadas. El problema se agudizaría por el hecho de que hay teorías físicas en las cuales sus propios objetos son 'abstractos', con lo que habría que eliminar no sólo la referencia a las entidades matemáticas sino la de las propias entidades físicas.

Se puede considerar, además, que eliminar los términos teóricos no elimina la referencia a entidades inobservables. Y aunque se pudiera eliminar en el discurso esa referencia, no se tendría seguridad alguna de que esas entidades no existan, que carezcan de realidad. Field parece identificar el discurso sobre un sector fenoménico de lo real con el propio sector fenoménico y si en el discurso se elimina un término teórico entonces no existe referente del mismo en lo real. Parece un enfoque algo infantil: el niño que se tapa los ojos y, consecuente, el mundo que le rodea ya no existe. Entre otras cuestiones ello conduciría a afirmar que la versión nominalista de Field no logra su objetivo final.

Además de las críticas que pueden hacerse en el terreno nominalista —y que encuentran un terreno pleno en el libro fuente editado por Irvine [1990]—, y de la consideración de que la matemática es un instrumento que es algo más que mero proceso derivativo como parece ser interpretada en este nominalismo radical, en Field se tiene una dificultad añadida. Ha pretendido eliminar las entidades matemáticas no sólo de la matemática sino de cualquier aplicación de la matemática en las disciplinas científicas, pero no ha conseguido su objetivo. Y Field lo reconoce:

> hasta el presente no sabemos en detalle cómo eliminar entidades matemáticas de toda explicación científica que aceptamos; consecuentemente, pienso que hasta ahora nuestra metodología inductiva nos da alguna justificación para creer en las entidades matemáticas. [...] Pero la justificación no es todo lo que debemos hacer es establecer una apuesta sobre cuál es la mejor o la más satisfactoria visión del lugar de la matemática en el mundo.

Lo que Field no ha logrado, ni siquiera en su libro básico, es eliminar, insisto, la matemática de la física ni, por supuesto, del conocimiento.

9. Algunas conclusiones

Elaboraciones como las ejemplificadas en cuanto a las 'nuevas' filosofías de la matemática y que encuentran en la formulación del dilema de Benacerraf su punto de partida y, con él, se centran en la problemática de relacionar lo ontológico con lo epistemológico, encierran lo contenido en una advertencia realizada por uno de los críticos a la cuarta condición, la causal, del conocimiento. Hart, en 1977, en su crítica a Steiner 1973, afirmará, con una implícita referencia a Quine,

> es un crimen del intelecto intentar enmascarar el problema de naturalizar la epistemología de las matemáticas con juegos filosóficos el problema no es tanto acerca de la causalidad como acerca de la auténtica posibilidad del conocimiento natural de objetos abstractos [en Maddy 1990, 42].

Algo que, por su lado, reafirmará igualmente Casullo [1992, 558],

> aunque Benacerraf se centre exclusivamente en el caso del conocimiento matemático, su argumento puede ser extendido al conocimiento de cualquier proposición cuyas condiciones de verdad envuelvan entidades abstractas. De aquí que el problema general encarado por los proponentes de lo a priori sea reconciliar las restricciones plausibles causales del conocimiento a priori con el hecho de que tal conocimiento es de entidades causalmente inertes.

En otras palabras, lo que plantea Benacerraf y, tras él, quienes se dedican a lo que estiman filosofía de la matemática, especialmente en el ámbito anglosajón, es algo muy antiguo y no precisamente específico de la matemática. Lo que se plantea, lo que asumen quienes mantienen el debate, es un tema que ya recibió el nombre de *querella de los universales* en la cual se trataba de dilucidar el tipo de existencia, la clase de entidad atribuible a los mismos y, a partir de ese tipo de entidad cómo alcanzar el conocimiento de los mismos. Una cuestión ontológica, con ramificaciones en lógica, teoría del conocimiento, filosofía del lenguaje, teología, etc., con un haz de problemas como los de la verdad, el lenguaje, la noción de concepto, lo concreto y lo abstracto, relación causal o no entre el objeto y el concepto, causalidad material o formal, entre otras.

Temas, con motivo de la matemática, que son constantes de reflexión filosófica. En ello, se ha vuelto a la distinción entre conocimiento y creencia, entre saber que *p* y saber que '*p* es verdadero', pero con certeza o no; a distinguir entre verdad y certeza o entre atribuir creencia de que *p* y afirmar que *p*. Y, por supuesto, diferenciar estos problemas de la cuestión de la génesis del conocimiento en la cual puede atribuirse conocimiento de ficciones. En el plano ontológico, ha vuelto a plantearse el viejo problema de a qué denominar 'existir' y qué tipo de predicado, si es que es predicado, puede ser el de existencia.

En el caso concreto del hacer matemático, la epistemología naturalizada, con sus ontologismos realistas empiristas asociados, ha provocado una tendencia, implícita: discutir el hacer global, pretendidamente naturalizado. Y ello porque casi todos los autores parten en sus discusiones de este tipo de hacer, global y conjuntista, olvidando los elementos constitutivos del hacer figural, para intentar, en el fondo, su eliminación. Y ello supone un beneficio, implícito, para asumir o potenciar un hacer matemático de carácter finitista, algorítmico, pretendidamente manipulable como se cree que son los objetos denominados físicos.

Con una limitación propia de quienes adoptan los temas matemáticos para hacer filosofía: quedarse en la aritmética elemental, discutir el papel, naturaleza, estatuto del número natural, bien en sí, bien a partir de la noción de conjunto si se estima este como noción más fundamental. Pero ello implica que no se ve la riqueza del hacer matemático que va mucho más allá del número tres, del numeral 3, de las rayitas. No se ve la riqueza conceptual, metodológica, epistemológica que tiene un teorema como el de Weyl sobre los grupos finitos, y la genialidad de su demostración, tras los trabajos de Cartan y donde el hacer global muestra toda su potencia, inexplicada y quizá inexplicable si se sigue discutiendo del número 3. Genialidad de una demostración que no se puede enfocar banalizadoramente como prueba semi-empírica o como mera derivación sintáctica, sino como auténtica creación conceptual que en su simplicidad y belleza puede ser, luego, aceptada y enseñada a nivel elemental. Y un teorema como este, su formulación, su demostración, muestran la auténtica praxis del hacer matemático, de la potencia de la razón constructiva conceptual del hombre. Praxis que no queda justificada, explicada, por ninguna de las corrientes de la filosofía de la matemática que hacen filosofía.

La discusión no trata, en el fondo, sobre la conceptualización de los objetos matemáticos, sino que es mucho más compleja. Es el reflejo de las que se sostienen en otros campos considerados más vivos: así las planteadas en cuanto al estatuto ontológico de los valores, por ejemplo, con sus repercusiones en terrenos como la ética o la filosofía social y política, o las discusiones que se reflejan en la física en torno al realismo. Debates en torno a una 'nueva' epistemología, ahora naturalizada, y que tenga presente los avances del conocer científico plasmándose en una posible epistemología naturalizada, evolutiva, por la cual las distintas teorías —matemáticas o *no*— sean meras peticiones sobre aspectos actuales, o más bien posibles, de la realidad física —o de la práctica matemática—. Con lo cual se tiende a resaltar el papel de lo meramente experiencial sensible, de lo estrictamente manipulativo incluso en la formación del conocimiento matemático. Con la dificultad que ello encierra del paso de ese factor estrictamente manipulativo a un plano conceptual, abstracto.

En la querella actual, los objetos matemáticos se emplean como auxiliares para discutir una cuestión filosófica y muy antigua —y creo que, en el caso del dilema de Benacerraf, he comenzado citando a Platón—, pero de fuertes repercusiones en terrenos sociales. Querella en la cual, en lugar de utilizar los números naturales o unos rudimentos de teoría de conjuntos, cabría manejar términos como los colores de los quarks, los spins, las supercuerdas, etc., que son conceptualmente inertes en el sentido de que su definición implica que jamás podrán ser observables perceptivamente.

Al hacer esta elección se ataca, a la vez, a los matemáticos que han tendido a ser platónicos metodológicos y pretendidamente formalistas. Ya he mencionado que Bourbaki —que, como objeto abstracto, no se sabe bien cómo actúa causalmente sobre su entorno, porque según la teoría causal del conocimiento, según un análisis a lo Benacerraf, a lo Steiner, ha de ser un objeto inerte— llegó a escribir, parafraseando a Hermite, que los objetos matemáticos se le presentan al matemático con una realidad objetiva más fuerte aún que la realidad de los objetos materiales perceptivos: a los objetos materiales se los puede moldear, transformar o hasta destrozar o aniquilar, lo que no ocurre con los objetos matemáticos; objetos que, en muchos momentos, son los que imponen sus condiciones al trabajador matemático. Y el bourbakismo y el formalismo puramente abstracto han sido de los enfoques matemáticos más atacados desde los nuevos frentes.

No sólo ataque al matemático sino también al infinito matemático que se supone subyacente al platonismo —un dilema como el de Benacerraf sólo tiene sentido si los objetos matemáticos existen en número infinito—. Y es el caso de Dummett, apoyado en la consideración de que la filosofía del lenguaje es previa a la epistemología y a la metafísica, con un anti-realismo sostenido en la semántica de los lenguajes naturales. Antirealismo finitista que, aplicado a la matemática, hace que ésta se convierta en mera ficción nominalista, platónica o no, o sólo pueda venir caracterizada convenientemente por una especie de intuicionismo finitista, por ejemplo.

Intuicionismo finitista en el que se identifica la intuición sensorial con la llamada intuición matemática pero en el que no se ve que el problema no es tal identificación sino que, aun aceptada la misma, deba establecerse un criterio diferenciador, una diferencia específica, por el cual la intuición matemática se diferencie de la sensorial: ver '|||||' como una agrupación de rayitas, vale; pero ver esa agrupación como un número primo, el 5, o como el sucesor de otro número, es lo que hay que plasmar, diferenciar.

Y aquí hago referencia, concretamente, a la posición de Parsons [1993] quien admite la existencia de la intuición sensorial matemática como propia de la captación de los objetos 'abstractos' matemáticos, que entre los objetos que podemos intuir se encuentran algunos que forman un modelo de la aritmética y que nuestro conocimiento de los axiomas de la aritmética envuelven la intuición de esos objetos. Aun con la salvedad de que Parsons reconoce que la inducción completa no entra en este cuadro —y parece que es el principio básico en el que se apoya, precisamente la aritmética, con lo cual ya su propia teoría se reconoce como insatisfactoria— no hay criterio explícito alguno que diferencie lo que se denomina intuición sensorial de intuición matemática, también sensorial o material, no eidética; no hay mostración alguna de que el infinito pueda ser alcanzado desde esta perspectiva. Pero es búsqueda centrada en la misma línea fisicalista o naturalista con eliminación de las entidades abstractas y, con ellas, eliminación del infinito y, por añadidura, de lo conceptual.

Posiciones en las que, e insisto, aun avaladas por la etiqueta de filosofía de la matemática, reflejan una problemática más amplia por lo que no se plantean problemas realmente internos al hacer matemático sino que toman este hacer como mera ejemplificación de dicha problemática. Y si insisto en que es debate externo al hacer matemático es porque, de ser consecuentes quienes mantienen estas posiciones, deberían reconstruir el total de la matemática desde las mismas. Reconstrucción que queda, hasta ahora, en proyecto tanto en el estructuralismo como en el estructuralismo modal, que son dos de las posiciones que intentan aproximarse más a una praxis real del matemático. Constituyen, en el fondo, enfoques marginados a la praxis matemática y con nula repercusión sobre la misma.

Ahora bien, y mera insistencia, como ejemplificación y campo de debate no es inocuo. Porque lo que cabe observar es que estas posiciones, en el fondo y quizá sin un propósito o intención explícitos, van a colaborar para la aceptación de un nuevo tipo de enfoque en el hacer matemático, el hacer computacional, donde los objetos matemáticos no vienen ya caracterizados como en los haceres figural y global. Donde el infinito, por definición, no es factible: un ordenador sólo puede manejar algoritmos de carácter finitista.

Potenciar un hacer computacional que entraña, simultáneo, la eliminación de cualquier otro tipo de hacer matemático, lo que se viene observando en el paulatino abandono de disciplinas propias del hacer global como el análisis funcional o las inflexiones que se producen en otras materias, así en geometría algebraica o en ecuaciones diferenciales, buscando el apoyo del hacer computacional.

Un hacer computacional finitista que, en una de sus facetas, se muestra básico para la elaboración de algoritmos y, con ellos, para una inmediata aplicabilidad industrial y técnica.

Desde el hacer matemático, sin embargo, se puede observar que, y esta es la venganza del hacer global, cada algoritmo no lo es de *un* problema único, sino de una clase, en principio infinita, de tales problemas: el finitismo pretendido es el puramente operacional o combinatorio, lo que no es problemático ni desde su planteamiento.

Desde el hacer matemático, y esta no es venganza ni de lo figural ni de lo global sino mera constancia de que también hay otras corrientes de filosofía de la matemática, se continúan tratando de delimitar crítica, conceptualmente, las características internas de los distintos haceres, entre los cuales se encuentra el computacional, precisamente, con los límites inherentes al mismo establecidos desde los teoremas de indecidibilidad, de parada pero también sus desarrollos como los producidos en los campos de la complejidad o los de información algorítmica.

Una vez más el problema de las relaciones matemática-filosofía, donde la filosofía toma, para su campo de debate, temas y conceptos matemáticos y parece discutir en el interior de este hacer. Mera apariencia porque, de hecho, junto a sus problemas internos, ontológicos, epistemológicos, metodológicos, etc., la filosofía muestra su otra cara, la que ha llevado indisolublemente unida desde sus orígenes, aunque la pretenda ocultar, en muchas ocasiones, cuando realmente esa cara es su rostro más propio. Debatir cuestiones, con un trasfondo problemático, pero al servicio siempre de una organización social determinada —de la que constituye una envoltura aparentemente conceptual cuando en realidad viene supeditada por los elementos simbólicos condicionadores de esa organización—, aunque se enmascare afirmando que lo es de una organización realizable en un futuro más o menos lejano o utópico.

C. Analizando el factum matemático

Acabo de indicar que una de las primeras conclusiones que se pueden obtener de la 'nuevas' filosofías de la matemática es que, a pesar de constituir filosofías sustantivas —por los temas ontológicos y epistemológicos sobre los que versan, por el método de análisis utilizado, por el empleo de la lógica de segundo orden—, su ideología subyacente, revestida de una capa de epistemología naturalizada y fisicalismo, propicia una visión diferente de la clásica respecto al hacer matemático.

Desde el intento de suprimir cualquier tipo de entidad abstracta, matemática o no, lo que se propicia es una eliminación del hacer global y, con él, del concepto de infinito actual, en beneficio de una organización computable. La matemática resultante tendría un carácter marcadamente finitista. Y ello a pesar de las llamadas a posiciones en estructuras, a la captación perceptiva no sólo de objetos concretos físicos sino de conjuntos o clases o propiedades de conjuntos o de universales, al papel que pudieran tener los axiomas conjuntistas.

Desde un enfoque de epistemología naturalizada los agregados materiales que interactúan causalmente con el sujeto cognoscente son, siempre, agregados finitos de objetos y en cantidad muy pequeña. Y el gran problema de estos enfoques es que no han logrado dar cuenta de la total eliminación de las entidades matemáticos ni, sobre todo, de principios como el de inducción completa, de los mecanismos del hacer global donde las demostraciones básicas continúan siendo existenciales, sin mostrar el objeto del cual se hace la demostración de existencia o se postula la misma. Y recuerdo el axioma de elección, base del hacer global pero, lo que parecen olvidar quienes pretenden la eliminación de los objetos y demostraciones existenciales apoyándose en la lógica formal, base también de la elaboración de esa misma lógica: y ello por el teorema de compacticidad.

Han sido enfoques que encuadraba, en el sistema de referencia inicial, bajo el primer epígrafe, el de filosofías sustantivas y no adjetivas de la matemática o, más bien, de auténtica filosofía y, por ello, son posiciones que caen bajo lo que estimé como piedra de toque en la segunda de las coordenadas: al enfrentarse con el hacer matemático han de dar cuenta de la praxis del mismo. Y aunque todas estas posiciones hablen de la matemática, no explican ni justifican, precisamente, el hacer matemático.

Pero había señalado la posibilidad de situar en el sistema referencial, en el cuadro dado, aquellas posiciones que trataran de hacer una filosofía de la matemática que o bien tuvieran en cuenta el hecho en sí de la matemática o bien se enfrentaran a la misma buscando unas líneas de fundación internas a esa matemática. En este último caso, cabe la búsqueda de unos intentos de fundamentos pero sin el objetivo fundamentalista a través de un análisis crítico de la praxis matemática como los iniciados por Feferman o, desde unas posiciones conceptuales de partida intentar una reconstrucción del hacer matemático, haciendo matemática, como lo han intentado algunos matemáticos que pueden encuadrarse bajo el epígrafe de constructivistas. Un constructivismo en el sentido que ya indiqué no de imposición desde el sujeto epistémico de unas formas y estructuras sino aceptando la existencia de un *factum* que obliga a la elaboración de construcciones posibles que den cuenta del mismo.

1. Vías fundacionales

a. Teoría de Categorías

Creada en los años cuarenta por Eilenberg y Mac Lane la teoría de categorías se va a proponer, por parte de Lawvere en 1966, como una fundamentación de la praxis matemática. Fundamentación reduccionista en el sentido de reducir las nociones conjuntistas básicas a las nociones categóricas. Ello supone aceptar, claramente, la idea de que el único hacer matemático factible es el conjuntista, es decir, el hacer global y, consecuentemente, si este se reduce al categórico, es toda la matemática la que queda fundamentada en la teoría de categorías.

Desde esta posición, y para Lawvere, las propiedades clave de las entidades matemáticas se caracterizan, de modo exclusivo, en términos de estructuras abstractas y no en términos de propiedades que puedan tener esas estructuras pensadas en sí. Lo que permite derivar y justificar —y por ello fundamentar— el hacer matemático en su totalidad es, por modo exclusivo, la estructura. Pero Lawvere [1966, 1] quiere precisar qué entiende, ahora, por fundamentos:

> Aquí entendemos por "fundamento" un sistema único de axiomas de primer orden en el que se pueden definir todos los objetos usuales matemáticos y demostrar todas sus propiedades usuales.

Con lo cual ya no se tiene el objetivo de los fundamentalismos de los últimos años del siglo XIX y primeros de este. La praxis matemática parece más conveniente reducirla a la noción de estructura en lugar de mantener la más ambigua de conjunto. En ella basta manejar un lenguaje de primer orden, un sistema L_1 como mero vehículo instrumental y, por supuesto, se acepta el método axiomático como método primario, como instrumento caracterizador del campo de juego.

Si no se pretende una roca última y definitiva, cabe seguir el proceso. Y es lo ocurrido en teoría de categorías: en lugar de considerar como noción fundamentante la estructura abstracta, se puede adoptar la noción de topos o la de flechas, aunque en estos casos se mantiene que todos los conceptos matemáticos sean definibles o explicables en términos categóricos.

No entro en las dificultades que este reduccionismo ontológico entraña: básicamente en el hecho de que la noción de estructura exige la previa noción de conjunto base y operación interna entre los elementos de este conjunto para elaborar el concepto de estructura. Por lo cual el pretendido reduccionismo ontológico cabría considerarlo como circular o impredicativo.

Me limito a señalar que la teoría de categorías aparece como un hacer matemático inmerso, precisamente, en el hacer global, lo mismo que el conjuntista. De aquí que no cabe reducir uno a otro en el sentido ontológico aunque sí en el metodológico y manejar uno u otro hacer según el contexto requerido por la praxis matemática. Sí conviene señalar que la aparición de la teoría de categorías ha permitido aclarar y enfocar algunas nociones conjuntistas, por ejemplo, desde perspectivas enriquecedoras, desde un punto de vista que el teórico conjuntista no podía alcanzar a ver.

b. Feferman

Feferman va a manifestar su acuerdo con las críticas que se han realizado a las pretensiones de fundamentar la matemática, críticas por las cuales hay que admitir que la matemática no está fundamentada en sus fundamentos. Desde estas críticas se ha llegado a la conclusión de que el fracaso de los fundamentalismos invalida cualquier intento de estudiar los fundamentos que subyacen a la matemática tal como se encuentra hoy día. Feferman, aquí, realiza una distinción: el estudio en sí de fundamentos no es lo mismo que las pretensiones de carácter más bien ideológico de fundamentar.

En este sentido para Feferman constituirían campo propio de investigaciones fundacionales vías o caminos como los siguientes:
1. Clarificación conceptual: Es decir, cómo se alcanza un concepto a partir de nociones informales y cómo, una vez obtenido, permite definir otros conceptos. Así, cómo se han logrado caracterizar, más bien formalizar, nociones como límite, derivada, función continua, etc.; o, en otros terrenos, nociones como la de satisfacción o verdad por Tarski, función computable mecánicamente por Turing, entre otras. Es línea que tuvo su expresión más acabada en la afirmación de Gödel de que con la noción de función recursiva se había logrado establecer un concepto absoluto, el de algoritmo.
2. Reemplazamiento de unos conceptos y principios problemáticos por otros o bien por su eliminación total. El ejemplo clásico, la noción de infinitésimo, las pugnas contra el mismo desde el hacer global con su eliminación, su aparente recuperación por parte del análisis no-canónico desde Robinson.
3. Buscar las condiciones suficientes, aunque en general no necesarias, bajo las cuales se pueden utilizar unos u otros métodos o se obtienen unos u otros resultados.
4. La organización fundacional que, en general, ha tendido a identificarse con la axiomática y ésta con un hacer de fundamentos, cuando tal axiomática organizativa no es más que un estado más avanzado en el desarrollo de una teoría.

Son algunas de las vías o caminos fundacionales que propone Feferman como tema de la filosofía de la matemática enfocada como estudio de fundamentos no fundacionales, con un aspecto en el que no se pretende privilegiar un determinado punto de vista ideológico. En este sentido Feferman adopta, en realidad, una posición de claro carácter metodológico, marginándose a los problemas ontológicos y epistémicos, clave de las otras tendencias.

Enfoque metodológico que también comparten otros matemáticos —especialmente Friedman— preocupados por el hacer matemático tal como se ha desarrollado y que, en mi caso, plasmé en la noción de inversión epistemológica que algún matemático norteamericano ha concretado en una metodología local, calificada con el término de *reverse mathematics*.

En ella, en lugar de estudiar la demostración de un teorema se invierte y, desde el teorema, se buscan las condiciones que han hecho posible su formulación lo mismo que se estudian las condiciones —los conceptos, proposiciones, teorías, etc.— que posibilitan dicha demostración.

Desde esta inversión local se hace, evidentemente, matemática, no fundamentos ni filosofía. Por su lado, la posición de Feferman queda, en realidad, y hasta ahora, en programa de trabajo.

2. Constructivismo: Bishop

Desde un campo diferente, interno a la práctica estrictamente matemática, se han realizado intentos que, de un modo no casual, llegan al mismo objetivo que las corrientes filosóficas que había encuadrado bajo el rótulo de 'nuevas' tendencias: ahora se enfoca hacia la eliminación de las demostraciones existenciales, aunque acepten la tesis ontológica de la existencia del objeto matemático. Son corrientes que se encuadran bajo el término genérico de constructivismo; término muy amplio bajo el que se acogen tendencias a veces no muy congruentes entre sí.

Una de estas tendencias viene representada por Bishop quien en 1975 indicaría la existencia de lo que calificar como *crisis de la matemática contemporánea*, en el sentido de que, en la misma, se carece de contenido numérico concreto y se apoya en teoremas existenciales que no dan proceso efectivo alguno para alcanzar el elemento del cual se demuestra su existencia. En su crítica, Bishop acude a una posición como la de Brouwer cuando éste indicara que los conectivos lógicos, por ejemplo, deberían establecerse en términos de construcciones efectivas así como sus críticas al manejo de las totalidades infinitas en acto o a los procesos demostrativos por reducción al absurdo.

Bishop se une a las corrientes críticas frente a los formalismos y logicismos iniciada por Poincaré y los semi-intuicionistas franceses en los primeros años de este siglo y, básicamente, a las realizadas por Brouwer. Así, afirmará, 'nuestra motivación es el escándalo bien conocido, expuesto por Brouwer (y otros) con gran detalle, de que la matemática clásica es deficiente en significación numérica'.

Pero, a diferencia de autores como los mencionados, a diferencia de la corriente intuicionista que se quedó en mera ideología crítica sin realizar progresos considerables en cuanto al hacer matemático en sí, Bishop ha pretendido pasar a una posición en la que se exponga el contenido efectivo de la matemática reformulando, en particular, las demostraciones de la misma.

Bishop ha intentado el desarrollo, la reconstrucción de lo que considera el núcleo esencial la matemática, núcleo que para él no es la teoría de conjuntos sino el análisis matemático y, a su través, y en colaboración con una serie de discípulos, de otras ramas como el estudio de los espacios métricos, el análisis de variable compleja, la integración.

Y aunque Bishop mantenga que más que posición crítica de otras tendencias, el constructivismo que practica es un hacer matemático, ello no implica que ese hacer no esté subtendido por una muy clara motivación ideológica y, con ella, alcance unas muy claras consecuencias, igualmente. Para Bishop 'cuando una persona demuestra que existe un número, tiene que demostrar cómo hallarlo', lo que puede establecerse en lo que Mandelkern [1985, 273] califica de '*Tesis de Bishop*: todas las matemáticas han de tener un significado numérico'. Tesis que conlleva la consideración —también enunciada por Bishop— de que los procesos constructivos constituyen el único fundamento posible para la matemática. Con lo cual, este tipo de constructivismo se pretende, al viejo modo, en la línea de fundamentar la matemática, pero haciendo un tipo de matemática, fundamentándola en sí misma.

Desde la tesis ideológica las demostraciones de los teoremas que se encuentran en la matemática clásica, las demostraciones del hacer global, son incompletas. El ejemplo clásico, un teorema como el del valor intermedio: Toda función continua de variable real definida en un compacto $I = [a, b]$, si toma valores de distinto signo en los extremos de I, toma el valor cero en al menos un punto c intermedio de I. La demostración clásica es puramente existencial y no da proceso efectivo finito alguno para determinar cuál es ése punto, o esos puntos c, en los cuales el valor de la función se hace 0. Además, el tipo de demostración existencial suele hacer uso del método de reducción al absurdo apoyado en el principio del tercero excluido que no es, en absoluto, de carácter construtivo.

La versión constructiva de un teorema como el citado se centra en dividirlo en dos tras una labor de análisis conceptual previo en el que se intenta captar cuál es el contenido del teorema en cuestión. En el ejemplo, este contenido es de carácter geométrico esencialmente y lo que indica es que la curva correspondiente a la función atraviesa el eje por uno o varios puntos. Inmediato, y en primer lugar, la pregunta por la existencia de dicho punto intermedio. A continuación, asegurado que existe, se trata de buscar, constructivamente, dicho punto.

Naturalmente esta segunda parte exige una nueva traducción: no basta decir 'para toda función continua,' sino que hay que reformular la expresión, convertirla en una afirmación sobre una función determinada.

Es una exigencia clave del enfoque constructivista y no parecería ser más que una vuelta a las exigencias de Kronecker frente a matemáticos como Weiertrass, Heine, Cantor, entre otros: la de que no tiene sentido emplear términos como 'sea una función', sino que hay que dar 'la' función, su expresión a través de una fórmula explícita. Es exigencia, clara, de un hacer de carácter figural frente a la inversión conceptual que suponía el hacer global.

El constructivismo acepta esta exigencia pero va más allá, no se queda en el hacer figural clásico. El hacer matemático constructivo exige que esa función sea, en concreto, una función polinómica y plenamente determinada. Así cabe obtener el punto en el que esa función polinómica corta al eje, siempre con una aproximación de valor menor que un número previamente dado, que un valor ε, con ε > 0.

Evidentemente, la generalidad del teorema se ha perdido —a pesar de que algunos constructivistas sostengan que no hay tal pérdida de generalidad, que en el constructivismo no hay particularización alguna—, pero se ha ganado en cuanto a un aspecto constructivo, el de alcanzar, si no el punto exacto, al menos un punto lo más aproximado al mismo.

Aparentemente las demostraciones efectuadas al modo clásico no quedarían eliminadas ya que posibilitan contestar a la primera pregunta, a la cuestión existencial aunque no en sí, sino como mera heurística positiva que puede guiar la demostración constructiva en sus dos fases. Pero desde un enfoque constructivo puro tales demostraciones han de ser eliminadas incluso desde este aspecto heurístico ya que en ellas se utilizan métodos no constructivos. Métodos apoyados en la reducción al absurdo y, con ella, en principios como el de tercero excluido que, como ya indicara en sus críticas Brouwer, al manejar el infinito no son concluyentes, dan no ya demostraciones existenciales sino pseudo-existenciales. Principios que, por ello, deben ser excluidos del hacer matemático como pretendiera Brouwer aunque recuerdo la contestación dada por Hilbert ante estas exigencias, 'prohibir a un matemático hacer uso del principio de tercero excluido es como prohibir a un astrónomo usar el telescopio o a un boxeador los guantes de boxeo'.

Para la reconstrucción del análisis matemático en el sentido de dotarlo de un contenido numérico hay que definir, constructivamente, la base de dicho análisis y a partir de la misma se podrán ir definiendo los demás elementos. Esta base no es otra que el número real. En búsqueda de tal definición, lo primero que se hace es definir una sucesión de números racionales como regular:

$$\langle x_n \rangle \text{ es regular si } |x_m - x_n| \leq m^{-1} + n^{-1}$$

y, entonces, un número real no es otra cosa que una sucesión regular de números racionales.

Ahora bien, esto no es otra cosa que decir que un número real es una sucesión de Cauchy de racionales pero con una razón de convergencia previamente especificada. En el fondo, y desde una perspectiva clásica, no es otra cosa que un desarrollo decimal acotado. Con ello, la formulación del análisis constructivo no es más que una reformulación finitista del análisis clásico en su expresión estilo $\varepsilon - \delta$, en su expresión con valores acotados y previamente fijados.

En esta línea interpretativa ello implica que, por ejemplo, para demostrar un teorema como el de la cota superior —el de que cualquier sucesión acotada posee supremo e ínfimo— la demostración se convierta en una computación efectiva del supremo e ínfimo de la sucesión. Y si desde un enfoque clásico se puede argumentar que hay casos en los cuales aunque la sucesión sea computable no lo es su supremo, desde el enfoque constructivista, tal argumentación carece de sentido porque el cómputo siempre es realizable, naturalmente no del supremo en el sentido clásico, sino de un valor aproximado por uno previamente dado.

Todo ello supone una consecuencia muy clara: el enlace de la matemática constructiva con el enfoque de hacer computacional. Hacer computacional que también se ha ocupado de una reconstrucción del análisis clásico, convirtiéndolo en un análisis recursivo o computable. En él, cualquier entidad del análisis matemático —número real, función, sucesión etc.— es computable *sss* puede ser definido de modo apropiado en términos de funciones recursivas o, de modo equivalente, de máquinas Turing.

El análisis recursivo se ve abocado a dos líneas en su trabajo: rechazar las entidades no computables de su campo o enfocar la computabilidad como aplicable a todo el análisis pero, en este caso, su trabajo se centra en estudiar las condiciones en que se aplica esa computabilidad. Dos líneas consecuencia del teorema de que el conjunto de funciones recursivas es no numerable y, por ello, existe un mayor número de entidades no computables que computables. Y era uno de los teoremas de lo que califiqué como *venganza del hacer global*.

Aunque Bishop indique que su punto de partida es diferente al del análisis recursivo, dar contenido numérico al análisis no viene a ser otra cosa, en el fondo, que intentar transformar el continuo en lo discreto utilizando, para ello, mecanismos de acotación numéricos y procesos efectivos. Discretización efectiva que, tras los trabajos de Gödel, Herbrand, Turing y los matemáticos norteamericanos como

Kleene o Church, y aceptando la tesis Chruch-Turing, caen de pleno bajo los procesos algorítmicos o computables, bajo las funciones recursivas o máquinas Turing. Con la precisión, básica, de que esos procesos se exigen, desde el constructivismo de Bishop, decidibles y no como en el análisis recursivo o computable

Un programa como el elaborado por Bishop y sus seguidores se presenta como un programa radicalmente ideológico que pretende establecer de modo normativo, precriptivo, un tipo de hacer llamado constructivo y que conduce, en el fondo, al hacer computacional pretendidamente decidible.

Que se oculte esta ideología normativa bajo el hecho de una reconstrucción matemática —y no como mero programa sin logros reales, como en el caso de los filósofos de las 'nuevas' tendencias— no implica que esa ideología no exista y, con ella, se pueda terminar en una matemática finitista y, más aún, de programación de computador con pérdida de los restantes haceres matemáticos.

No hay que olvidar, en este punto, el hecho de manejar los números reales como aproximaciones, con error menor que un valor previamente dado. No es otra cosa que admitir que, en las aplicaciones matemáticas, no se emplean jamás números como los reales sino meramente aproximaciones con un número determinado de decimales. La pragmática tiene, aquí, un refuerzo. Pero esa pragmática no fué obstáculo para que, desde lo conceptual y no instrumental estricto, se llegara a la construcción clásica de los números reales.

A pesar de los esfuerzos de los matemáticos constructivistas, no todo el análisis clásico se ha conseguido transformar, hasta ahora, en análisis constructivo, por lo que disciplinas como la mecánica cuántica, por ejemplo, no pueden ser elaboradas desde el mismo. Y el problema es que hay teoremas que no pueden ser traducidos a la matemática constructiva y ello de manera esencial, y aquí me remito a los últimos ensayos de Hellman [1993, 1993a].

3. La matemática como cultura y producto social

Caben otras aproximaciones al hacer matemático que no quedan integradas en el interior de esa praxis aunque puedan actuar sobre la misma. Aproximaciones que enfocan el hacer matemático como producto ya acabado y, como tal, puede estudiarse como elemento cultural que puede manifestar sus papeles socio-políticos. Es una aproximación que admite, a su vez, múltiples líneas

a. Antropología cultural: Wilder

En su *Mathematical as a Cultural System* [1981], Wilder trata de sistematizar un modelo global de la matemática como cultura. La matemática se muestra como un producto cultural de la especie humana y, por ello, puede establecerse una evolución tanto de sus conceptos como de su total siempre en el interior de una cultura que abarca la subcultura matemática. Enfoque apoyado en previos modelos de antropología cultural.

Es la evolución de los conceptos o desarrollo de formas que se produce atendiendo a distintas necesidades la que propicia, para Wilder, la evolución de la matemática como un todo. La presión del contexto cultural lleva a que el matemático individual cree o formule un nuevo concepto, lo plasme en un símbolo adecuado, establezca la solución de un problema, sintetice en una noción o en un programa elementos que hasta ese momento aparecían difusos, etc.

Como resultado de la presión cultural la matemática se sitúa en el mismo plano que otras disciplinas científicas y, por ello, no tiene nada de misterioso, ni siquiera problemático, que la matemática tenga la aplicabilidad que tiene: responden a la misma presión del contexto cultural.

Pero Wilder no se conforma con una caracterización más o menos descriptiva de lo que considera matemática y su evolución, manejando para ello la historia tanto de alguno de sus conceptos centrales como de toda la matemática. Al ser un producto cultural la matemática puede estudiarse atendiendo a posibles regularidades que Wilder considera leyes. Wilder encuentra 23 leyes o principios reguladores que van desde la ley que da el origen de los conceptos hasta la que expresa el avance en el rigor y la aparición de nuevos métodos demostrativos.

b. Krieger

En línea parecida se puede considerar el trabajo de Krieger de 1991 en el que mantiene que la matemática es un instrumento y un oficio para dar sentido al mundo. Como tesis centrales Krieger establece las siguientes:

1. Los teoremas son objetos interpretables culturalmente lo mismo que las obras de arte, los oficios, el comercio. Como tales lo que hacen es reflejar los problemas básicos de la sociedad en la cual esos objetos se producen. Separados de tal contexto se convierten en fetichismo porque se los enfoca como algo abstracto y potente. Fetichismo que muestra dos posibles aspectos: por un lado, un teorema se convierte en algo emblemático de un sistema de valores y se invoca para reafirmar esos valores, por otro, se maneja la matemática como si fuera verdadera

formal y abstractamente y por ello provoca la sorpresa de que pueda aplicarse posteriormente para el estudio del entorno.

Al tomarse separados del contexto cultural, los teoremas se enfocan, según Krieger, de modo trascendente y se ven como analíticos o verdaderos por su ser, dada la verdad por la demostración que hace el matemático como el artista su obra; o sintéticos y se les admite como verdaderos por su correspondencia y su localización particular en la historia y el mundo.

2. La matemática es un instrumento y un oficio y es útil porque se adapta al material que encuentra, es decir, al mundo natural y a las ciencias. Pero, a la vez, ese material también se adapta para ponerse de acuerdo con las capacidades matemáticas. Un acuerdo nunca perfecto con lagunas entre ambos polos que obliga a realizar modificaciones en la matemática para ponerse de acuerdo con el material que la entorna; pero también el mundo, el material, tiene que modificarse para esa adaptación.

3. Como oficio, la enseñanza de la matemática contiene un ímpetu, lo que se califica de motivación, que no está escrito en parte alguna pero se transmite oralmente en la pizarra o el papel. Si se carece de esa motivación, cualquier tipo de formalismo carece de interés. La motivación es la que se encuentra llena de ejemplos, anécdotas históricas. Y estas motivaciones son de tipo más bien general y cultural aunque se utilice una jerga semitécnica de la subcultura propia del matemático.

4. La filosofía de la matemática hecha por filósofos se ha centrado en resolver problemas genuinamente filosóficos tomando, para ello, ejemplos de la matemática. Sólo hará avances importantes cuando esa filosofía se haga más técnica. Es entonces cuando el material concreto de un campo particular tendrá un papel más significativo que cualquier formalismo genérico referido a la matemática. Justamente ese material concreto revela el tipo de trabajo del matemático y las motivaciones que van más allá de cualquier formalismo.

Como ejemplo de estas tesis, Krieger toma el teorema fundamental del álgebra, el teorema central del límite de estadística y el del límite estadístico continuo. Son principios que conciernen a la invariancia de ciertos límites y que Krieger ve como justificaciones de las formas que se tienen de sumar el mundo. Y ello porque cada teorema es un medio de afirmar que el mundo puede ser sumado, aunque en el límite. Lo cual entraña una serie de suposiciones implícitas como las siguientes.

i) el modo de adición es independiente del orden en el que se efectúa o, lo que es lo mismo, es ahistórico, así como de las partes o individuales que se suman o, en otras palabras, es sostener el cartesianismo;

ii) el mundo está "bien estructurado", lo que equivale a afirmar que es uniforme, estadísticamente independiente,

iii) los detalles más particulares del mundo no entran en esas sumas sino sólo las propiedades de orden más inferior —como las derivadas o las invariancias.

Lo que se obtiene al explicitar estas suposiciones es un enfoque o visión del mundo opuesto al de muchas sociedades tradicionales donde los detalles y particularidades cuentan enormemente. En otras palabras, un teorema como el fundamental del cálculo es emblemático de nuestra fe en dar un sentido al mundo. Un mundo en el cual el cómo se ordenen las piezas carece de importancia en el límite por lo que la suma es ahistórica al no importar cómo se hagan las particiones particulares de los intervalos en las sumas de Riemann. Pero es un teorema que afirma el compromiso racionalista de que el todo está compuesto de partes apropiadas como lo está un cuerpo compuesto de partes mecánicas. Y, finalmente, afirma que el mundo es uniforme y conmensurable sin discontinuidades ni heterogeneidades.

Magnífico ensayo de tinte cultural que evidentemente exige dominar la matemática para poder apreciar, en todo su valor, una argumentación como la referida al teorema fundamental del cálculo y la previa caracterización de la integral en el sentido de Riemann. Y donde aparentemente se marginan, pero sólo aparentemente, las cuestiones ontológicas y epistemológicas, centrado el ensayo en lo metodológico demostrativo.

El valor de ensayos de este tipo se centra en poner de relieve un elemento que no aparece en quienes se dedican a hacer filosofía a costa de la matemática: la belleza y el placer estético, no sólo el cultural, que conlleva el hacer matemático en cualquiera de los ámbitos en los cuales se realiza. Un valor que sugiere su continuación en el estudio y análisis de otros teoremas tan fundamentales de la matemática como los mencionados por Krieger.

c. matemática naturalizada: Kitcher

Sin pretender fundamentar ni buscar caminos fundacionales, Kitcher se liga a una posición que considera la matemática como un hacer cognitivo naturalizado frente a la concepción tradicional que la enfoca como un conocimiento a priori. Y Kitcher realiza una crítica de la noción de conocimiento a priori. Parte, para ello, de la convicción de que todo conocimiento a priori es vulnerable ante experiencias futuras. Convicción que le conduce a sostener, como base, el principio de que, cuando conocemos, debemos tener creencia verdadera que es producida en nosotros de la manera correcta.

La producción en el sujeto de esa creencia verdadera producida de manera correcta sólo puede realizarse, según Kitcher, y en el conocimiento a priori, por procesos que la generen operando independientemente, pero de forma válida, de la experiencia. Procesos que, para Kitcher, sólo pueden ser de tres tipos: el proceso debe ser válido independientemenete de la experiencia, debe tener potencia justificadora independientemente de la experiencia y no debe operar nunca sin producir creencia verdadera.

Kitcher, tras analizar las distintas versiones de conocimiento a priori existentes, llega a la conclusión de que ninguna de ellas satisface los tres tipos de procesos que él impone para que un conocimiento sea, auténticamente, a priori.

En el punto de partida de Kitcher se tiene, como en el caso que ya citara de Steiner, la tesis que finalmente se quiere alcanzar y ello a partir de dar el salto del conocimiento a la creencia. Paso que, en el fondo, viene motivado por la aceptación de la teoría causal del conocimiento y que entraña la existencia de procesos experienciales que generen tal creencia. De aquí las condiciones que Kitcher impone a los procesos que generen la creencia verdadera, especialmente que posean potencia de justificación o explicación con independencia a cualquier tipo de experiencia en el caso de quien admita la existencia de conocimiento a priori.

No entro en discusiones, sino en señalar, únicamente, que estas condiciones parecen aceptar una identificación entre lo que se denomina conocimiento a priori y lo que se estima como estado de conocimiento. Y es el estado de conocimiento el que exige, ciertamente, el manejo de elementos experienciales. Sólo se adquiere un conocimiento que antes no se tenía tras un proceso experiencial de un tipo u otro. Pero ello ocurre en todo conocimiento e incluso en campos como el de la fe.

Desde esta confusión se puede estar de acuerdo con Kitcher en que la matemática aparece, evidentemente, como una disciplina cognoscitiva naturalizada, siempre a posteriori y dependiendo, claramente, de unos factores experienciales del sujeto matemático. Factores experienciales que han de llevarse a cabo mediante unas actividades propias de la praxis matemática, entre las que pueden mencionarse: responder a cuestiones, generar problemas, generalizar, sistematizar, etc. Actividades que permiten establecer, además, la racionalidad de la actividad humana.

Pero Kitcher no se detiene en sólo discutir las consecuencias de la teoría causal del conocimiento o matizarla. Va más allá y acude a la historia como un elemento que puede ser estimado como básico para una adecuada concepción de lo que entender por filosofía de la matemática, admitiendo que es un terreno que no goza de simpatías ni entre los matemáticos ni entre los historiadores de la matemática. Falta de simpatía, de aprecio debido, en particular, al hecho de que hasta ahora esa filosofía de la matemática ha tenido como objetivo fundamentar el hacer matemático con lo que ha desarrollado una visión apriorística del conocimiento matemático; a pesar de lo cual no ha logrado tal fundamentación. Y no lo ha logrado porque, de hecho, no hay conocimiento a priori. De aquí, sostendrá Kitcher, no hay motivos para ese enfoque fundamentalista. Y la filosofía de la matemática ha de seguir otros derroteros, en particular una línea de matemática naturalizada que permita explicar el progreso matemático y, a la vez, el hecho de un desarrollo en el conocimiento matemático a lo largo del tiempo y el papel e influencia de factores externos al mismo como pueden ser los factores sociales que, consecuentemente, se plasman en procesos como los educativos y, con ellos, reactúan en ese desarrollo de la matemática.

Desde este punto de partida, para Kitcher, el conocimiento matemático no está construido desde el comienzo, y a priori, en cada generación. En cada momento se aprende un cierto nivel matemático que puede ser y, de hecho lo es, permanentemente modificado. En ese desarrollo el conocimiento viene apoyado en una cierta práctica que, para Kitcher, posee varias componentes. En concreto, dichas componentes son:

- Un lenguaje;
- un conjunto de proposiciones aceptadas por la comunidad matemática en un tiempo determinado;
- un conjunto de cuestiones importantes, de problemas no resueltos;
- un conjunto de formas de razonamientos;
- un conjunto de visiones del hacer matemático, es decir, de cómo se hacen matemáticas, en qué orden se encuentran clasificadas;

Como ejemplo de un análisis de este tipo, Kitcher indicará que una comunidad como la matemática británica de los alrededores de 1700 aceptaba:

1. un lenguaje: el apoyado en términos como fluxión, serie, función, etc.;
2. una serie de propiedades sobre tangentes, áreas, movimientos de cuerpos, sumas de series infinitas, entre otras;
3. unos problemas: los de esas propiedades para una serie de curvas y funciones;
4. un tipo de justificación a base de propuestas geométricas y cinemáticas, de tal manera que solo en algunos casos se veían obligados a manejar infinitesimales;
5. una concepción global de la matemática, aquella que consideraba que la matemática se centraba en lo geométrico y, de aquí, el estilo expresivo geométrico como el más adecuado para la manifestación de esa visión; visión que obligaba a justificar el análisis infinitesimal, igualmente, desde lo geométrico.

Es evidente que, desde este enfoque, en el desarrollo del hacer matemático se producen cambios tanto internos como externos. Los primeros se centran en los que se producen en algunas componentes de la práctica matemática y provocan transiciones racionales internas. Se originan en problemas no resueltos que, en cuanto al trabajo que motivan en la búsqueda de su resolución, pueden llevar a un nuevo lenguaje, nuevas proposiciones, nuevas formas de razonamiento.

Los cambios externos vienen motivados por alguna experiencia que provoca un cambio radical en alguna de las áreas de investigación.

Kitcher, así, desde una posición de epistemología naturalizada, trata de alcanzar una comprensión del hacer matemático tal y como se ha ido produciendo y no se limita tan sólo a los problemas epistémicos y ontológicos producidos por la aparición y aceptación de una teoría como la cantoriana con sus dilemas incorporados; no considera que la filosofía de la matemática tenga que centrarse en las cuestiones de fundamentos aun cuando puedan trabajarse sin la antigua pretensión de lograr, con ellos, una fundamentación.

4. Metodología y reconstrucciones históricas

a. Lakatos

Enfrentado a la concepción heredada de la filosofía de la ciencia Lakatos va a adoptar, en el primer momento de su llegada a Gran Bretaña, la posición de Polya para quien la enseñanza de la matemática es un problema primario. Enseñanza en la cual hay que seguir una metodología activa, planteando cuestiones, enseñando a conjeturar y a realizar razonamientos plausibles, nunca definitivos. Bajo la dirección de Polya, Lakatos asume como uno de los rasgos centrales de su pensamiento acerca de la matemática el que esta es, básicamente, una actividad.

La matemática como actividad no procede, en general, siguiendo unas reglas lógicas previamente establecidas y admitidas. En ella el razonamiento es meramente plausible como exigía Polya. Pero esa plausibilidad tiene que ser regulada por algún elemento que impida su arbitrariedad. Y ese elemento es, precisamente, la prueba.

De esta forma, la primera posición de Lakatos parte de lo metodológico. Pero de una metodología que, completando a Polya, va a tener un tinte especial, el historicista que culmina en un programa calificado de 'pruebas y refutaciones'. Método de pruebas y refutaciones que consiste en:

i) enunciar una conjetura;

ii) elaborar una prueba que procure establecer la validez de dicha conjetura convirtiéndola en teorema, aunque con validez provisional,

iii) búsqueda de contraejemplos, refutaciones, que pueden ser parciales o globales:

iv) cada contraejemplo obtenido provoca la modificación, parcial o global, de la conjetura inicial convertida en teorema así como del propio mecanismo de prueba;

v) se tiene, así otra conjetura y se reinicia el proceso.

Ello implica que las proposiciones matemáticas no son infalibles, que el conocimiento matemático es siempre un conocimiento provisional en el cual los conceptos iniciales tienen que ir siendo redefinidos, precisados, modificados. Proceso que supone, a pesar de ello, un auténtico progreso tanto en el rigor —que va aumentando— como en el propio conocimiento. Progreso matemático que, en lo global, no puede darse por concluido nunca, aunque en algunos temas puntuales se cierre cuando se conjetura que ese tema local ya no tiene sentido prolongarlo (Lo cual no es muy consecuente: cerrar una cadena de conjeturas con otra conjetura).

Si el método de pruebas y refutaciones es el que refleja la praxis matemática ello supone que la propia noción de prueba de una proposición, de una conjetura, es revisable. Lo cual implica que la prueba matemática no puede tener el carácter que se le atribuye desde Frege, Hilbert, Tarski, ser una derivación formal con la cual el rigor que se obtiene es definitivo. La prueba matemática es, así, una demostración cuasi-empírica, en la cual la heurística posee un papel central.

Heurística metodológica en la cual los contraejemplos posibilitan mostrar los lemas ocultos, las nociones no explicitadas que rodean la conjetura o proposición que se quiere probar.

Realmente Lakatos no realiza una sistemática de su concepción en torno a la matemática como sí trató de hacer, en una segunda fase de su trabajo, en el terreno de la filosofía de la ciencia en general, donde elaboró su metodología de los programas de investigación científica. En *Pruebas y Refutaciones* articula su pensamiento en torno a la matemática a través de una reconstrucción historicista de un teorema concreto, el de la fórmula de Euler para los poliedros regulares. Reconstrucción 'racional' de la historia 'real' un tanto alejada de dicho proceso, pero que supone adoptar el marco histórico como trasfondo para diseñar —y también contrastar— unas determinadas concepciones previas.

Y algo más importante desde mi punto de vista, dar por aceptado que el conocimiento matemático, si falible, varía a lo largo del tiempo como resultado de la actividad de los matemáticos y, por ello, carece de sentido establecer unas líneas de fundamentalismos, de intentar la búsqueda de unos fundamentos últimos y ya definitivos para esa actividad. Se retoma la posición de Poincaré frente a los formalismos y logicismos que habían predominado hasta los setenta, como se retoma la posición de Poincaré respecto al carácter epistemológico de la demostración matemática.

Independientemente al valor intrínseco de sus aportaciones, Lakatos ha logrado poner de relieve el papel que la metodología y la historia tienen para la praxis matemática. Se suma, en su posición, al giro que va a sufrir la filosofía de la ciencia, en la pugna que algunos mantienen con la calificable concepción heredada y que va a dar paso a corrientes como la sociologista con sus diferentes matices, historicista, antropológica y demás.

b. La historia

Al enfocarse la matemática como un producto de la especie humana es claro que dicha matemática tiene unos determinados avatares, una historia.

En general, se ha aceptado una concepción de progreso continuado, acumulativo. Concepción que el propio Lakatos parece asumir en su primera época. Concepción de los filósofos más o menos fundamentalistas, y de los que se dedican a hacer filosofía sustantiva con los temas matemáticos, que asumen ese mismo progreso acumulativo al considerar que en la matemática se tiene un proceso genético que lleva desde la noción fundamentante hasta el resto, noción fundamentante que puede ser el número natural, el conjunto o la estructura. Y ello a pesar de que se pretenda que esa génesis cabe enfocarla como lógica y no histórica. Es claro que para quienes sostienen un realismo eidético absoluto, la historia sólo puede hacerse de los avatares del descubridor de unos continentes ya dados y que, por ello mismo, son ahistóricos.

Frente a la concepción de progreso acumulativo lineal puede pensarse que la matemática no sigue ese camino, sino que en ella se producen revoluciones, rupturas, avances y retrocesos, con la aparición de nuevos tipos de hacer, nuevos métodos, nuevos conceptos.

Concepciones enfrentadas y que han conducido a polémicas como las mantenidas durante los años setenta en Norteamérica por Crowe, para quien "Revolutions never occur in Mathematics" [1975], y Dauben para quien esas revoluciones sí existen. Igualmente intentar establecer tanto leyes del cambio matemático como de las ideas erróneas que se tienen acerca de la matemática y si es o no acumulativa, rigurosa [Crowe, 1988].

Pero no sólo se ha planteado la existencia o no de revoluciones o rupturas en la matemática o si es acumulativa o no, sino que se ha propiciado una vuelta a la historia, a intentar captar los conceptos y no sólo los contenidos de la matemática. Principalmente estudios del hacer matemático del siglo XIX y primeros de este, muy abandonados por las historias al uso porque ese estudio requiere, evidentemente, el dominio de la matemática. Estudios que no son meras reconstrucciones racionales de unos temas determinados.

Y ello ha propiciado nuevas discusiones en torno a quién es el que debe hacer la historia de la matemática y en torno al estatuto del concepto 'historia' y sus posibles papeles tanto para la filosofía de la matemática como para otras facetas del hacer matemático como el de su enseñanza.

Lo cual no ha sido obstáculo para que se estén revisando tanto los contenidos intrínsecos como los conceptos que los matemáticos han ido elaborando. Y se ha puesto de relieve, por ejemplo, la fineza en el análisis conceptual de algunos matemáticos como Cantor o Dedekind, las dificultades y matices en la aparición de las antinomias en Russell (ver, por ejemplo, Garciadiego [1992], Rodríguez-Consuegra [1991]).

Enfoque histórico que también ha propiciado el desarrollo de investigaciones en cuanto al papel que el contexto cultural y sociopolítico tienen en la praxis matemática. Contextos en los cuales interviene, con especial relieve, la institucionalización de la enseñanza producida en el siglo XIX.

c. La demostración como problema y el papel del ordenador

En el terreno metodológico vuelve a plantearse la noción de 'razonamiento matemático' como la calificó Poincaré y, con ella, la propia noción de demostración. Terreno que cobrará un especial relieve tras la demostración apoyada en el manejo del ordenador de la conjetura de los cuatro colores, que se pretende convertida en teorema.

Tema, la demostración, con sus papeles, sus enfoques sintáctico o semántico, la aceptación o no de la misma según el contexto en el que se produce, ha cobrado nuevo relieve, campo de discusión para algunas nuevas direcciones en la filosofía de la matemática como las calificara Tymocko.

Por su lado, es el ordenador, el intruso como lo calificara Steen, el que parece que ha hecho variar el ecosistema del matemático. Si este siempre ha conjeturado y ha tratado de probar sus conjeturas, ahora la rapidez de cálculo le permite contrastar con auténtica celeridad sus ideas, más o menos felices.

El hacer matemático cobra, así, un tinte de ciencia experimental aún más profundo. Puede, incluso, realizar las representaciones gráficas de las funciones que maneje, llegar hasta la representación del ciclo de Poincaré o del de Juliá en la pantalla del ordenador.

Y se plantea la cuestión no ya del ordenador, sino de la existencia de un nuevo tipo de hacer, el computacional o algorítmico en el cual los programas —que en el fondo, no son otra cosa que teoremas— adquieren un papel diferente al que tenían de ser mero vehículo del conocimiento. Ahora posibilita una acción que lleva a que ese conocimiento no tenga un valor en sí sino en cuanto aplicable, en cuanto a que, como programa, logre el resultado pragmático apetecido. La matemática no vehicula sólo la verdad y proporciona modelos cognoscitivos de la physis, sino que colabora en la transformación del medio.

5. La matemática como hacer: estilos, haceres

En un cuadro que considera la matemática como producto y producción humanos, el hacer matemático se me muestra como un elemento que depende del contexto en el cual se realiza pero que también condiciona ese contexto. Como hacer de una determinada especie, se me manifiesta según los ámbitos en que dicha especie se encuentra. Y el hacer matemático es una técnica o arte con unas reglas o normas especificadas; un conocimiento conceptual regulado por la demostración y que da modelos posibles de lo real; un proceso computacional constructor de algoritmos y programas que posibiliten una transformación de lo real.

Y una tarea posible es la de identificar los estilos que reflejan esas distintas manifestaciones (lo que plasmé en de Lorenzo 1971). Pero no basta enumerar estilos sino que hay que dar cuenta de cómo y por qué varían. En esta búsqueda me vi llevado a la noción de 'inversión epistemológica' [1974, 1977] que es la que provoca una ruptura con el hacer anterior a la misma y la aparición de nuevos tipos de hacer, con sus nuevos contenidos, formas demostrativas, metodologías y entidades diferentes. Inversión epistemológica a la que ya hice referencia al hablar de Feferman y que puede proceder tanto del interior de la praxis matemática como desde otras disciplinas.

Ello supone, evidentemente, que el conocimiento matemático no viene dado de una vez y por todas ni se puede fundamentar definitivamente. Es una construcción conceptual de una determinada especie humana, la occidental, que la ha adoptado como uno de sus medios de producción esenciales, constitutivos de la misma. Sociedad occidental que, desde su capitalismo, ahora ha impuesto su visión al resto de sociedades de la tierra. Construcción conceptual que carece de un comienzo absoluto porque toda construcción procede de una tradición. Construcción en la cual tiene un papel básico el ideograma y, como tal construcción conceptual, en ella se van creando conceptos, métodos de demostración, tipos de definición, etc.

Pero también es conocimiento que posee, a la vez, sus estilos y su belleza. Y que se convierte en elemento constitutivo y, a la vez, regulativo, para otros saberes como el de la *physis*, a la vez que proporciona modelos posibles de lo real y, con ello, induce nuevas concepciones del universo pero también nuevos instrumentos para su transformación.

Como elemento constitutivo para otras disciplinas, se convierte en marco en el cual se incardinan las cualidades primarias que se estiman propias del sector fenoménico de esa *physis* que se pretende estudiar desde cada una de las disciplinas. Sector fenoménico que implica que el conocimiento nunca es global sino sectorial y cambiante, condicionado y, a la vez, condicionador del contexto social en el que se construye.

D A modo de cierre, pero sin final

Creo que han quedado abiertos, en este panorama, muchos problemas. Y no sólo los mencionados. Cabría discutir, por ejemplo, las afirmaciones de Chaitin de que la matemática, además de incompleta, es aleatoria apoyándose en la definición de número aleatorio de Kolmogorov y en los teoremas de parada, que propician nuevas demostraciones del teorema de Gödel. O los análisis de Mac Lane para quien la matemática es forma y función. O el enlace de la matemática, en el momento actual, con la matemática computacional y el papel del Webb en su praxis.

Pero, como panorama, no es, no pretende ser exhaustivo. Me he centrado básicamente en autores que han publicado alguno de sus trabajos —los que quizá puedan considerarse más representativos de sus concepciones— entre 1971 y 1993. Es, en estos entornos, cuando veo resurgir con fuerza la preocupación por el hacer matemático, y lo intento reflejar en la bibliografía adjunta. Un resurgir que puede verse como problema a explicar —y algún apunte creo que he dado para ello—.

Es preocupación que se plasma en el intento de aprehender su estatuto, y desde enfoques muy diferentes. Y esta diferencia, pero a la vez esta preocupación común y sus interrelaciones entre los autores en muchos casos, permite que este panorama lo pretenda como sugerencia o programa de trabajo para ser proseguido, completado.

En cualquier caso, y a finales del siglo XX, puede constituir una visión de lo que algunos filósofos y matemáticos tienen del hacer matemático en estos últimos años y permitir unas líneas de trabajo para el futuro.

Javier de Lorenzo, licenciado en matemáticas y licenciado y doctor en filosofía por la Universidad Central de Madrid, es catedrático de lógica y filosofía de la ciencia en la Universidad de Valladolid. Sus campos de investigación se centran, básicamente, en la historia y filosofía de la matemática. Entre sus numerosas publicaciones cabe mencionar *El método axiomático y sus creencias* (Tecnos, Madrid, 1980), *Introducción al estilo matemático* (Tecnos, Madrid, 1982), *Experiencias de la razón* (Universidad de Valencia, 1991) y *Kant y las matemáticas* (Tecnos, Madrid, 1992).

Referencias

APPEL-Haken. 1977. "La solución del problema del mapa de cuatro colores". *Investigación y Ciencia*. Diciembre. 78-90.
ARMSTRONG, D. M. 1973. *Belief, Truth and Knowledge*. Cambridge.
ARMSTRONG, D. M. y FORREST, P. 1987. "The Nature of Number". *Philosophical Papers* 16: 165-186.
ASPRAY-KITCHER (eds.). 1988. *History and Philosophy of Modern Mathematics*. Minnesota Studies in the Philosophy of Science XI. Univ. of Minnesota Press. Minneapolis.
ASPRAY-KITCHER. 1988. "An Opinionated Introduction". En Aspray-Kitcher (eds.). 3-57.

BARKER, S.F. 1969. "Realism as a Philosophy of Mathematics". En: *Foundations of Mathematics. Symposium papers Commemorating the Sixtieth Birthday of K. Gödel*. Springer-Verlag: 1-9.

BEESON, M.J. 1988. "Computerizing Mathematics: Logic and Computation". En Herken (ed): 191-225.

BENACERRAF, P. 1965. "What numbers could not be". *Phil. Review* 74: 47-73. En Benacerraf-Putnam (eds.).

___________. 1973. "Mathematical truth". *Journal of Philosophy* 70: 661-679.

BENACERRAF, Paul y PUTNAM, Hilary (eds.). 1983. *Philosophy of Mathematics*. Cambridge Univ. Press.

BIGELOW, J. 1988. *The Reality of Numbers. A Physicalist's Philosophy of Mathematics*. Oxford Univ. Press.

___________. 1990. "Sets Are Universals". En: Irvine (ed.): 291-305.

BISHOP, E. 1967. *Foundations of Constructive Analysis*. McGraw-Hill, N.Y.

___________. 1975. "The Crisis in Contemporary Mathematics". *Historia Mathematica* 2: 507-517.

BISHOP, E. y BRIDGES, D. 1985. *Constructive Analysis*. Springer.

BOCHNER, S. 1966. *The Role of Mathematics in the Rise of Science*. Princeton Univ. Press. Trad. castellana de M. Martínez Pérez: *El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia*. Alianza Ed. M. 1991.

BOOLOS, G. 1971. "The Iterative Concept of Set". En: Benacerraf-Putnam (eds.).

___________. 1984. "To be is to be a value of a variable (or to be some values of some variables)". *Journal of Philosophy* 81: 430-449.

___________. 1985. "Nominalist Platonism". *The Philosophical Review* 94: 327-344.

BOURBAKI, N. 1948. "L'architecture des mathématiques". En: Le Lionnais (ed.): 35-47.

BOUTOT, A. 1990. "Mathématiques et ontologie: Les symétries en Physique". *Rev. Philosophique* 3: 481-519.

___________. 1991. "La Philosophie du chaos". *Rev. Philosophique*: 145-178.

BREGER, H. 1992. "Tacit Knowledge in Mathematical Theory". En: Echeverría-Ibarra-Mormann (eds.): 79-90.

BROCKHAUS, R.R. 1991. "Realism and Psychologism in 19th Century Logic". *Phil. and Phenomenological Research* 51, 3: 493-524.

BROUWER, L.E.J. 1912. Intuitionism and formalism. Disertación inaugural Univ. Amsterdam, 14-X-12. Trad. inglesa en Benacerraf-Putnam (eds.).

___________. 1927. "Intuitionistic reflections on formalism". Trad. ingl. en van Heijenoort (ed): 490-492.

BROWN, H.I. 1992. "Direct Realism, Indirect Realism and Epistemology". *Phil. and Phenomenological Research* 52, 2: 341-363.

BRUTER, C.P. 1973. *Sur la nature des mathématiques*. Gauthier-Villars. P.

CABA, A. 1992. "Nuevas perspectivas en filosofía de la matemática". *Philosophica Malacitana* V: 21-42.

CALDER, A. 1979. "Matemática constructivista". *Investigación y Ciencia*, Diciembre: 100-109.

CAÑÓN Loyes, C. 1985. "John Stuart Mill: Su concepción de la lógica". *Pensamiento* 163-46: 257-284.

CASULLO, A. 1992. "Causality, Reliabilism, and Mathematical Knowledge". *Phil. and Phenomenological Research* 52, 3: 557-584.

COCCHIARELLA, N.B. 1992. "Conceptual Realism versus Quine on Classes and Higher-Order Logic". *Synthese* 90: 379-436.

COHEN-WARTOFSKY (eds.). 1985. *Language, Logic and Method*. Dordrecht Reidel.

CORRY, L. 1992. "Nicolas Bourbaki and the Concept of Mathematical Structure". *Synthese* 92: 315-348.

COUTURE, J.-Lambek, J. 1991. "Philosophical Reflections on the Foundations of Mathematics". *Erkenntnis* 34: 187-209.

CROWE, M.J. 1975. "Ten 'Laws' Concerning Patterns of Change in the History of Mathematics". *Historia Mathematica* 2: 161-166.

______. 1988. "Ten Misconceptions about Mathematics". En: Aspray-Kitcher (eds.) 260-277.

CHAITIN, G.J. 1988. "Aritmética y azar". *Investigación y Ciencia*. Septiembre: 44-50.

CHAVARRI, E. 1979. "En el primer centenario de Begriffsschrift". *Estudios filosóficos* 28: 203-253.

______. 1981. "Incursiones de la lógica en la Crítica". *Estudios filosóficos* 30 Nº, 33-62.

CHIARA, Ch. 1989. "Tharp's Myth and Mathematics". *Synthese* 81: 153-165.

CHIHARA, C.S. 1990. *Constructibility and Mathematical Existence*. Oxford Clarendon Press.

CHISHOLM, R.M. 1977. *Theory of Knowledge*. Prentice-Hall, Inc.. Tradn. españ. V. Peris, *Teoría del conocimiento*. Ed Tecnos, M. 1982.

CHONG and Leong. 1986. "An interview with Jean-Pierre Serre". *Math. Intell.* 8-4: 8-13.

DAVIS - Hersh. 1982. *The Mathematical Experience*. Birkhäuser. Tradn. L. Bou, *Experiencia matemática*. Labor-MEC. 1988.

______. 1986. *Descartes' Dream*. Harcourt Brace Jovanovich. Trad. L. Bou. *El sueño de Descartes*. Labor-MEC, 1989.

De LORENZO, J. 1971. *Introducción al estilo matemático*. M. Tecnos. Reimpresión, Tecnos 1989.

______. 1974. *La filosofía de la matemática de Poincaré*. M. Tecnos.

______. 1977a. "Creencia y lógica en la matemática". *Rev. de Occidente*, 18, 2ª ép. 10-17.

______. 1977b. *La matemática y el problema de su historia*. Tecnos, M.

______. 1979a. "Frege". *Investigación y Ciencia* 36: 100-112.

______. 1979b. "Lógica y matemática en Gödel". *Estudios filosóficos* 79: 391-455.

______. 1980. *El método axiomático y sus creencias*. M. Tecnos.

______. 1983. "Matemática y Crítica". *Estudios filosóficos* XXX Nº, 63-95.

______. 1987. "De qué habla el matemático". *Lenguajes naturales y Lenguajes formales II*, B. 65-84.

______. 1988. "La matemática y el ámbito conceptual". *Rev. de filosofía*, I, 3ª ép. 43-53.

______. 1990. "De lógica y matemática o dónde situar el mundo matemático". *El Basilisco* 4: 19-30.

______. 1991. "Leibniz-Frege ¿utopías de la razón conceptual?" *Theoria* 14-15 93-113.

______. 1992a. "Racionalidad constructiva matemática". *Estudios filosóficos* 91 7-24.

______. 1992b. *Kant y la matemática. El uso constructivo de la razón pura*. Ed Tecnos, M.

______. 1992c. "Matemática y filosofía: sus 'nefastas' influencias mutuas. 'Nuevas' filosofías de la matemática". *El Basilisco* 2ª ép. 13: 3-13.

______. 1992d. *Experiencias de la razón*. Univ. Vall.

______. 1992e. "Dónde situar la matemática". *Mathesis* 8: 369-387.

______. 1993. "La razón constructiva y sus haceres". *Mathesis* 9: 129-153.

DETLEFSEN, M. 1986. *Hilbert's Program*. Dordrecht Reidel.

______. 1990. "Brouwerian Intuitionism". *Mind* 99, 501-534. Incluido en Detlefsen (ed.) b: 208-250.

______. 1992. "Poincaré against the Logicians". *Synthese* 90, 349-378.

______ (ed.). 1992a. *Proof, Logic and Formalization*. Routledge, N.Y.

______ (ed.). 1992b. *Proof and Knowledge in Mathematics*. Routledge, N.Y.

______. 1963. "The Justification of Deduction". En: *Truth and other enigmas*, Cap. XVII. Harvard Univ. Press.

__________. 1975. "Frege". *Teorema* V: 149-188. Levemente modificado como Cap. IX *La distinción fregeana entre el sentido y la referencia* en Dummett 1978.

__________. 1978. *Truth and other enigmas*. Duckworth & Co. Londres. Tradn. A. Herrera Patiño, *La verdad y otros enigmas*. Ed. FCE, Méx. 1990.

__________. 1991. *Frege. Philosophy of Mathematics*. Duckworth.

ECHEVERRÍA, J. 1992. "Observations, Problems and Conjectures in Number Theory (The History of the Prime Number Theorem)". *Intnal. Symposium on Structures of Mathematical Theories*. SS. Seb. En: Echeverría-Ibarra-Mormann (eds.): 230-252.

ECHEVERRÍA-Ibarra-Mormann (eds.). 1992. *The Space of Mathematics. Philosophical, Epistemological, and Historical Explorations*. Walter de Gruyter. Berlin.

EDWARDS, H.M. 1989. "Kronecker's Views on the Foundations of Mathematics". En Rowe-McCleary (eds.) vol I: 67-77.

FARWELL, R.-Knee, C. 1990. "The End of the Absolute: A Nineteenth-century Contribution to General Relativity". *Stud. Hist. Phil. Sc.* 21: 91-121.

FEFERMAN, S. 1979. "What Does Logic Have to Tell us About Mathematical Proofs?" *Mathem. Intelligencer* 2:1, 20-24.

__________. 1984. "Foundational Ways". *Perspectives in Mathematics*. ed. por Inger-Moser-Remmert. Birkhäuser Verlag: 147-158.

__________. 1985. "Working foundations". *Synthese* 62: 229-254.

FIELD, H. 1980. *Science without numbers*. Princeton Univ. Press.

__________. 1989. *Realism, Mathematics and Modality*. Blackwell.

__________. 1993. "The Conceptual Contingency of Mathematical Objects". *Mind* 102, 285-299.

FREGE, G. 1879. *Begriffschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Trad. inglesa en van Heijenoort (1967). Tradn. de H. Padilla, *Conceptografía*. UNAM. Méx. 1972.

__________. 1884. *Fundamentos de la Aritmética. Investigación lógico-matemática sobre el concepto de número*. Trdn. U. Moulines. Ed. Laia 1972.

FRIEDMAN, M. 1990. "Kant on Concepts and Intuitions in the Mathematical Sciences". *Synthese* 84: 213-257.

GARCIADIEGO Dantan, A. 1992. *Bertrand Russell and the origins of the set-theoretic 'paradoxes'*. Basel: Birkhäuser.

GARDIES, J.L. 1989. "La conception néo-platonicienne de l'abstraction chez Dedekind, Frege et Peano". *Rev. Philosophique* 1: 65-84.

GIEDYMIN, J. 1982. *Science and convention: essays on Henri Poincaré's philosophy of science and the conventionalist tradition*. Oxford Pergamon Press.

__________. 1991. "Geometrical and Physical Conventionalism of H. Poincaré in Epistemological Formulation". *Stud. Hist. Phil. Sc.* 22:1, 1-22.

GILLIES, D.A. 1982. *Frege, Dedekind and Peano on the Foundations of Arithmetic*. Van Gorcum. Assen. The Netherlands.

GLAS, E. 1989. "Testing the Philosophy of Mathematics in the History of Mathematics". *St. in History and Philos. of Sci.* 20, I: 115-131. II. 2: 157-174.

GÖDEL, K. *Collected Works*. Vol. 1. 1986. Vol. 2. 1990. Oxford Univ. Press. Clarendon Press.

GOLDFARB, W. 1979. "Logic in the Twenties: The Nature of Quantifiers". *Journal of Symbolic Logic* 44. 351-368.

__________. 1988. "Poincaré Against the Logicists". En Aspray-Kitcher (eds.)

GOODMAN, N.D. 1979. "Mathematics as an Objective Science". *American Mathematical Monthly* 86: 540-551.

__________. 1990. "Mathematics as Natural Science". *Journal of Symbolic Logic*. 55:1: 182-193.

__________. 1991. "Modernizing the Philosophy of Mathematics". *Synthese* 88: 119-126.

GRABINER, J. 1974. "Is Mathematical Truth Time-dependent?" *American Mathematical Monthly*. April 81: 354-365.

GRATTAN-GUINNESS, I. 1992. "Peano: entre la lógica y las matemáticas". *Mathesis* 8: 55-72.

GRIFFIN, N. 1991. "Non-Euclidean Geometry: Still some Problems for Kant". *Stud. Hist. Phil. Sc.* 22: 661-663.

HAAPARANTA-Hintikka (eds.). 1986. *Frege Synthesized*. Dordrecht-Reidel.

HALE, B. y Wright, Cr. 1992. "Nominalism and the Contingency of Abstract Objects". *The Journal of Philosophy* 92: 111-135.

HAND, M. 1989. "A number is the Exponent of an Operation". *Synthese* 81: 243-265.

________. 1993. "Negations in Conflict". *Erkenntnis* 38: 115-129.

HANSON, W.H. 1990. "Second Order Logic and Logicism". *Mind* 99: 91-99.

HELLMAN, G. 1989. *Mathematics without numbers*. Clarendon Press. Oxford.

________. 1990. "Modal-Structural Mathematics". En Irvine (ed.): 307-330.

________. 1992. "Gleason's Theorem is not Constructively Provable". *Journal of Philosophical Logic* 22: 193-203.

________. 1993 a. "Constructive Mathematics and Quantum Mechanics: Unbounded Operators and the Spectral Theorem". *Journal of Philosophical Logic* 22: 221-248.

HERKEN, R. (ed.). 1988. *The Universal Turing Machine*. Oxford Univ. Press.

HERSH, R. 1991. "Mathematics has a Front and a Back". *Synthese* 88: 127-134.

HEYTING, A. 1955. *Les fondements des mathématiques. Intuitionnisme. Théorie de la démonstration*. Gauthier-Villars, P. La 1ª ed., de 1934.

________. 1976. *Introducción al intuicionismo*. Tradn. Sánchez de Zavala. Ed. Tecnos, M.

HILBERT, D. 1899. *Fundamentos de la Geometría*. Tradn. F. Cebrián. CSIC, M.1953. Reproducción, con prefacio de Sánchez Ron. 1991.

________. 1900. *Sur les problèmes futurs des mathématiques*. Tradn. L. Laugel. 2º Congreso Intnal. de matemáticas. 6-12 Agosto París. Reimpresión Ed. J. Gabay, P. 1990.

________. 1904. "On the foundations of logic and arithmetic". Tradn. ingl. en van Heijenoort (ed.): 129-138.

________. 1926. "Über das Unendliche". La tradn. en la versión española de 1899, no recomendable. Tradn. inglesa en van Heijenoort (ed.): 367-92 y en Benacerraf-Putnam (eds.): 183-201.

________. 1928. "The Foundations of mathematics". Tradn. en van Heijenoort (1967): 464-79.

________. 1992. *Natur und mathematisches Erkennen*. Curso 1919-20, tomado por P. Bernays. Ed. de D. Rowe. Birkhäuser, Berlin.

HILBERT, D. y Cohn Vossen. 1932. *Geometry and Imagination*. Chelsea 1952. Tradn. al inglés de P. Nemenyi.

HINTIKKA, J. 1967. "Kant on the mathematical method". *The Monist* 51: 352-75.

HINTIKA - Niiniluoto - Saarinen (eds.). 1979. *Essays on Mathematical and Philosophical Logic*. Dordrecht Reidel.

HIRSCH, G. 1975. "Mathématisation et réalité". *Dialectica* 29, 1: 5-24.

HODES, H. 1984. "Logicism and the Ontological Commitments of Arithmetic". *Journal of Philosophy* 84: 123-149.

________. 1990. "Where do the natural numbers come from?" *Synthese* 84: 347-407.

HOLLAND, R.A. 1992. "Apriority and Applied Mathematics". *Synthese* 92: 349-370.

HUBER-Dyson, V. 1991. *Gödel's Theorems: a Workbook on Formalization*. Teubner. Stuttgart.

IRVINE, A.D. 1990. "Nominalism, Realism & Physicalism in Mathematics". En Irvine (ed.): IX-XXVI.

________. (ed.). 1990. *Physicalism in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, The Netherlands.

ISLES, D. 1992. "What Evidence is There That 2^{65536} is a Natural Number?" *Notre Dame Journal of Formal Logic* 33-4: 465-480.

JUBIEN, M. 1977. "Ontology and Mathematical Truth". *Nous* 11: 133-150.

KAC-Rota-Schwartz. 1986. *Discrete Thoughts: essays in mathematics, science and philosophy.* Birkhäuser, Boston.

KITCHER, P. 1975. "Kant and the Foundations of Mathematics". *The Philosophical Review* 84: 23-50.

______. 1983. *The nature of Mathematical Knowledge.* Oxford Univ. Press.

KITCHER, P. 1986. "Frege, Dedekind and the Philosophy of Mathematics". En: Haaparanta-Hintikka (eds.): 299-343.

______. 1988a. "Mathematical Naturalism". En: Aspray-Kitcher (eds.): 293-325.

______. 1988b. "Mathematical Progress". *Revue Internationale de Philosophie* 167: 518-540.

KLEENE, S.C. 1988. "Turing's Analysis of Computability, and Major Applications of It". En: Herken (ed.): 17-54.

KLEINER, I. 1991. "Rigor and Proof in Mathematics: A Historical Perspective". *Mathematics Magazine* 64: 291-314.

KREISEL, G. 1968. "La lógica matemática: ¿qué ha hecho por la filosofía de la matemática?" En: Schoenman (ed.): 281-384.

KRIEGER, M.H. 1991. "Theorems as Meaningful Cultural Artifacts: Making the World Additive". *Synthese* 88: 135-154.

LAKATOS, I. 1976. *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery.* Cambridge Univ. Press. Trad. C. Solís. *Pruebas y refutaciones.* Alianza Ed. M. 1978.

LARGEAULT, J. 1990. "Formalisme et intuitionnisme in philosophie des mathématiques". *Rev. Philosophique* 4: 531-546.

______. 1992. "Brève note sur l'intuitionnisme de Brouwer". *Revue philosophique* 3: 317-324.

______. 1993. "L'intuitionnisme des mathématiciens avant Brouwer". *Archives de Philosophie* 56: 53-64.

LAWVERE, W. 1966. "The Category of Categories as a Foundation for Mathematics". *Proceedings of La Jolla Conference on Categorical Algebra.* Springer, N.Y.: 1-20.

LEAVITT, F.J. 1991. "Kant's Schematism and his Philosophy of Geometry". *Stud. Hist. Phil. Sc.* 22: 647-659.

LEVIN, M. 1992. "Still a Horse-Race?". *History and Phil. of Logic* 13: 11-114.

LOI, M. (ed.). 1982. *Penser les mathématiques.* Ed. Seuil. P. Hay trad. cast.

LOLLI, G. 1991. *La máquina y las demostraciones.* Alianza Ed., M. Trad. J. Hernández de *La Macchina e le dimostrazioni matematica, logica e informatica.* 1987.

LUCE, L. 1988. "Frege on Cardinality". *Phil. and Phenomenological Research* 48: 415-34.

MAC Lane, S. 1981. "Mathematical Models: a Sketch for the Philosophy of Mathematics". *American Math. Monthly.* Ag.-Set. 88: 462-472.

______. 1986. *Mathematics, Form and Function.* Springer-Verlag, N.Y.

MADDY, P. 1980. "Perception and Intuition in Mathematics". *Philosophical Review* 89: 163-196.

______. 1988. "Believing the Axioms". *Journal of Symbolic Logic* 53: 481-511, 736-764.

______. 1990. *Realism in Mathematics.* Clarendon Press. Oxford.

______. 1991. "Philosophy of Mathematics: Prospects for the 90s". *Synthese* 88: 155-165.

MANDELKERN, M. 1985. "Constructive Mathematics". *Mathematics Magazine* 58: 272-280.

MANDERS, K. 1989. "Domain Extension and the Philosophy of Mathematics". *The Journal of Philosophy* 86: 553-562.

MANIN, Yu. I. 1977. *A Course on Mathematical Logic.* Springer-Verlag.

MITCHELL, S.W. 1990. "Dummett's Intuitionism is not Strict Finitism". *Synthese* 90: 437-458.

MOSTERÍN, J. 1984. *Conceptos y teorías en la ciencia.* Alianza Ed. M.

______ 1987. "La frontera entre lógica y teoría de conjuntos". En: *Simposium Quine*. Acero-Colen (eds.) Univ. Granada: 209-222.

______ 1991. "La filosofía de la matemática en Wittgenstein". En: Peralta-Bezerra (eds.), *Wittgenstein-Heidegger*: 111-121. Diputación Provincial de Badajoz. Ba.

MOSTOWSKI, A. 1965. *Thirty years of Foundational Studies*. Acta Philosophica Fennica.

NEUMANN, B.H. 1979. "Proofs". *The Mathem. Intelligencer* 2.1, 18-19.

NEWMANN, J.M. (ed.) 1956. *The World of Mathematics*. Trado. dirigida por M. Sacristán. Sigma. *El mundo de las matemáticas*. 6 vols. Ed. Grijalbo, B. 1968-59.

NINILUOTO, I. 1992. "Reality, Truth, and Confirmation in Mathematics. Reflections on the Quasi-Empiricist Programme". En: Echeverría-Ibarra-Mormann (eds.): 60-78.

NOWAK, G. 1989. "Riemann's *Habilitationsvortrag* And the Synthetic *A priori* Status of Geometry". En: Rowe-McCleary (eds.) vol. I: 16-46.

PAGE, J. 1993. "Parsons on Mathematical Intuition". *Mind* 102₄₀₆: 223-232.

PARSONS, C. 1964. "Infinity and Kant's Conception of the Possibility of Experience". *Philosophical Review* 73: 182-97. En: Parsons 1984.

______ 1969. "Kant's Philosophy of Arithmetic". En: Morgenbesser, Suppes, White (eds.), *Philosophy Science and Method: essays in Honor of Nagel*. New York: St. Martins. En: Parsons 1984.

______ 1984. *Mathematics in Philosophy*. Ithaca: Cornell Univ. Press.

______ 1990. "The Structuralist view of Mathematical objects". *Synthese* 84: 303-346.

______ 1992. "The Impredicativity of Induction". En: Detlefsen (ed.): 139-161.

______ 1993. "On Some Difficulties Concerning Intuition and Intuitive Knowledge". *Mind* 102₄₀₆: 233-246.

POSY, Carl J. (ed.) 1992. *Kant's Philosophy of Mathematics. Modern Essays*. Dordrecht: Reidel.

PURKERT, W. 1989. "Cantor's Views on the Foundations of Mathematics". En: Rowe-McCleary (eds.), vol. I: 49-64.

PUTNAM, H. 1967. "Mathematics Without Foundations". En: Putnam 1975, cap. 3: 43-59.

______ 1975. *Philosophical papers*. vol. 1. Cambridge Univ. Press.

______ 1980. "Models and Reality". *Journal of Symbolic Logic* 45: 464-482.

QUINE, W. V. 1992. "Structure and Nature". *The Journal of Philosophy* 92: 5-9.

RESNIK, M.D. 1980. *Frege and the Philosophy of Mathematics*. Ithaca, N.Y.: Cornell Univ. Press.

______ 1981. "Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference". *Nous* 15: 529-550.

______ 1982. "Mathematics as a Science of Patterns: Epistemology". *Nous* 16: 95-105.

______ 1988 a. "Mathematics from the Structural point of view". *Rev. Internat. de Philosophie* 167: 400-424.

RESNIK, M. 1988 b. "Second Order Logic Still Wild". *The Journal of Philosophy* 85: 75-87.

______. 1990. Beliefs about mathematical objects. En: Irvine (ed.): 41-71.

RICHMAN, F. 1981. *Constructive Mathematics*. Springer LNM 873.

______. 1987. "The Frog Replies". *The Mathematical Intelligencer* 9₃: 22-24, 25-26.

RISJÖRD, M. 1990. "The sensible foundations for mathematics: a defense of Kant's view". *Stud. Hist. Phil. Sc.* 21₁: 123-143.

ROBINSON, A. 1979. *Selected Papers*. Esp. vol. 2: "Formalism 64" (505-523); "Concerning Progress in the Philosophy of Mathematics" (556-567). North-Holland.

RODRIGUEZ Consuegra, F. 1991. *The Mathematical Philosophy of Bertrand Russell: Origins and Development*. Birkhäuser.

ROTA, G.C. 1991. "The Pernicious Influence of Mathematics Upon Philosophy". *Synthese* 88: 165-178.

ROWE - McCleary (eds.). 1989. *The History of Modern Mathematics*. 2 vols. Academic Press.

SACKS, G. 1975. "Remarks Against Foundational Activity". *Historia Math.* 2: 523-525.

SCHMIT, R. 1988. "Le constructivisme dans la Logique de Hintikka". *Archives de Philosophie* 51: 665-681.

SCHOENMAN, R. (ed.). 1968. *Homenaje a Bertrand Russell*. Trad. U. Moulines. Oikos-Tau. B.

SHAPIRO, S. 1983. "Mathematics and Reality". *Philosophy of Science* 50: 523-548.

__________. 1985. "Second Order Languages and Mathematical Practice". *Journal of Symbolic Logic*: 714-742.

__________. 1989. "Logic, Ontology, Mathematical Practice". *Synthese* 79: 13-50.

__________. 1990. "Second Order Logic, Foundations and Rules". *The Journal of Philosophy*: 234-261.

__________. 1992. *Foundations without Foundationalism. A Case for Second-order Logic*. Oxford.

SHAPIRO, S. (ed.). 1985. *Intensional Mathematics*. North-Holland.

SHERRY, D. 1991. "The Logic of Impossible Quantities". *Stud. Hist. Phil. Sci.* 22_1: 37-62.

SIEG, W. 1988. "Hilbert's Program Sixty Years Later". *Journal of Symbolic Logic* 53: 338-348.

SIMONS, P. 1990. "What Is Abstraction & What Is It Good For?" En: Irvine (ed.): 17-40.

STEEN, L.A. 1986. "Living with a New Mathematical Species". *The Mathem. Intelligencer* 8_2: 33-40.

STEIN, H. 1988. "Logos, Logic and Logistiké: Some philosophical Remarks on Nineteenth-Century Transformation of Mathematics". En: Aspray-Kitcher (ed.): 238-259.

STEINER, M. 1973. "Platonism and the Causal Theory of Knowledge". *The Journal of Philosophy* 70: 57-66.

__________. 1975. *Mathematical Knowledge*. Cornell Univ. Press. Ithaca N.Y.

__________. 1989. "The Applicability of Mathematics to Natural Science". *The Journal of Philosophy* 86: 449-480.

__________. 1992. "Mathematical Rigor in Physics". En: Detlefsen (ed.) b: 158-170.

STERNBERG, Shlomo. 1986. Recensión crítica de A. Miller *Imagery in Scientific Thought*, Birkhäuser 1984. *The Mathematical Intelligencer* 8_2: 65-74.

STEWART, I. 1986. "Frog and Mouse Revisited: A Review of ... Constructive Analysis by E. Bishop and D. Bridges (Springer 1985) and An Introduction to Non-Standard Real Analysis by Hurd and Loeb (Academic Press 1985)". *The Mathematical Intelligencer* 8_4: 78-82.

STEWART, I. 1987. "Is there a Mouse in the House?". *The Mathematical Intelligencer* 9_3: 24-25, 26.

STILLWELL, J. 1989. *Mathematics and Its History*. Springer-Verlag.

SULLIVAN, D. 1990. "Frege on the Statement of Number". *Phil. and Phenomenology Research* 50: 595-604.

SWART, E.R. 1980. "The Philosophical Implications of the Four color Problem". *Amer. Mathem. Monthly* Nov. 87: 697-708.

TAIT, W. W. 1986. "Truth and Proof: The Platonism of Mathematics". *Synthese* 69: 341-370.

__________. 1992. "Reflections on the Concept of a priori Truth and its Corruption by Kant". En: Detlefsen (ed.) b.: 33-64.

TIESZEN, R.L. 1989. *Mathematical Intuition*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

__________. 1992. "What is a Proof?" En: Detlefsen (ed.) a: 57-76.

TORRES, C. 1989. "La filosofía y el programa de Hilbert". *Mathesis* 5_1: 33-56.

TROELSTRA-Van Dalen. 1988. *Constructivism in Mathematics. An Introduction*. North-Holland.

TYMOCZKO, Th. 1979. "The Four-Color Problem and its Philosophical Significance". *Journal of Philosophy* 76: 57-83. En Tymoczko (ed.)

__________ 1986. "Making Room for Mathematicians in the Philosophy of Mathematics". *The Mathematical Intelligencer* 8: 44-50.

__________ 1991. "Mathematics, Science and Ontology". *Synthese* 88: 205-228.

__________ (ed.). 1986. *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Birkhauser, Boston.

VAN Bendegem, J.P. 1987. *Finite, Empirical Mathematics: Outline of a Model*. Gent.

VAN Heijenoort (ed.). 1971. *From Frege to Gödel*. Cambridge, Harvard Univ. Press.

VIZGUIN, V.P. 1992. "La conquista de la física por el espíritu de la matemática y su repercusión en la Literatura (Musil y Snow)". *LLull* 15: 429-441.

WEBB, J.C. 1983. "Gödel's Theorems and Church's thesis: A prologue to Mechanism". En Cohen-Wartofsky (eds.): 309-353.

WILDER, R.L. 1968. *Evolution of Mathematical Concepts*. Londres, Open Univ. Press.

__________. 1981. *Mathematics as a Cultural System*. Oxford Pergamon Press.

WRIGHT, C. 1988. "Why numbers can Believably: A reply to H. Field". *Rev. Intnal. de Philosophie* 167: 425-473.

YOURGRAU, P. 1989. "Review essay: Reflections on Kurt Gödel". *Phil. and Phenomenological Research* 50: 391-408.