Textos de procedimientos matemáticos de la antigua Babilonia. Una selección de problemas ‘algebraicos’ y relacionados con un análisis conciso

Old Babylonian mathematical procedure texts. A selection of ‘algebraic’ and related problems with concise analysis

Mathesis 13 (1997) 221-355
Impreso en México. Derechos reservados © 1997 por UNAM ISSN 0185-6200

Old Babylonian mathematical procedure texts. A selection of 'algebraic' and related problems with concise analysis.

Jens Egede Høyrup

Abstract

The so-called algebra of the Old Babylonian scribe school appears to have developed on the foundation of a lay surveyors recreational tradition making use of the quadratic completion and a geometrical cut-and-paste technique for solving a limited range of problems.

A number of characteristic texts will be analyzed, some of them illustrating the methods of the original tradition, others the innovations introduced in the scribe school for the treatment of determinate and indeterminate problems of the first degree, and the handling of certain higher-degree problems.

Preliminary observations

The following contains a selection of mathematical 'procedure texts' —*i.e.*, texts which first state a problem and then tell how to solve it— from the Old Babylonian period (2000 B.C. to 1600 B.C. —the mathematical texts belong to the second half of the period).

Most of the texts belong to the genre that is habitually regarded as *algebra* —as do indeed more than half of all Old Babylonian mathematical texts proper. One of the exceptions (VAT 8391 Nº 3) shows how a first-degree problem is solved by non-algebraic means; the other two (IM 55357 and VAT 8512) demonstrate that the geometric operations used in the algebraic texts are also employed in the treatment of genuinely geometric problems (to such an extent indeed that it may be inappropriate to distinguish the two genres).

Traditionally, and since its existence was discovered around 1930, Babylonian 'algebra' has been interpreted as a purely numerical tech-

Mathesis 13 (1997) 233-353.

Textos de procedimientos matemáticos de la antigua Babilonia. Una selección de problemas 'algebraicos' y relacionados con un análisis conciso.

Jens Egede Høyrup

Resumen

La llamada *álgebra* de la antigua escuela de escribas babilonios parece haber sido desarrollada sobre el fundamento de una tradición dejada por los agrimensores que hace uso de la complementación cuadrática y de una técnica geométrica de 'cortar y pegar' para resolver un rango limitado de problemas.

Se analizarán una serie de textos característicos, algunos ilustrando los métodos de la tradición original, otros las innovaciones introducidas en la escuela de escribas para el tratamiento de problemas determinados e indeterminados de primer grado, y el manejo de ciertos problemas de grado mayor.

Observaciones preliminares

El siguiente artículo contiene una selección de 'textos de procedimiento'[*] matemáticos —*i.e.*, textos que primero enuncian un problema y después dicen cómo resolverlo—, del periodo antiguo babilónico (de 2000 A.C. a 1600 A.C.; los textos matemáticos pertenecen a la segunda mitad del periodo).

La mayoría de los textos pertenecen al género que comúnmente se reconoce como *álgebra* —como sucede en más de la mitad de todos los textos de matemáticas babilónicas antiguas—. Una de las excepciones (VAT 8391 Nº 3) muestra cómo un problema de primer grado es resuelto por medios no-algebraicos; los otros dos (IM 55357 y VAT 8512) demuestran que las operaciones geométricas usadas en los textos algebraicos son también empleadas en el tratamiento de problemas verdaderamente geométricos (a tal grado, que puede ser incorrecto distinguir los dos géneros).

nique, in the likeness of the algebra of the modern era: its terminology, which (to the extent that it could be interpreted in ordinary language) suggested a geometrical reading, was taken to be a set of frozen metaphors (as is our "square" of a number). The detailed reasons underlying this received interpretation, as well as the arguments that it does not hold water, I have presented in a number of publications —in particular [Høyrup 1990a; Høyrup 1991]. The main point is that the numerical interpretation makes sense of (most of) the numbers that occur in the texts. However, it leaves many phrases and terms as inexplicable; moreover, it is unable to explain why the texts distinguish sharply between two different operations which arithmetically seen are one and the same 'addition', between two different 'subtraction' and between no less than four different 'multiplications'. Finally, it often makes it difficult to understand the order in which operations are performed.

The alternative is a reading which in as far as it is possible takes its bearings from the original wording, phrasing and ordering rather than from the patterns of thought of modern mathematics. This reading I shall present in the following, introducing and explaining the techniques and concepts as they occur in the texts.[1] For this purpose I shall use 'conformal', standard translations, *i.e.*, translations which render each single Babylonian term by the same English term (when possible with a roughly similar range of connotations), related terms by similarly related translations, and distinct terms by distinct translations; which, furthermore, follows the original grammar, word order and phrase structure unless the result becomes completely unreadable, and which in general tries to tell nothing beyond what is in the original text (evidently, definite and indefinite articles have to be inserted; on the other hand, the rich verbal system of Akkadian can only be rendered by means of circumlocutions and similar stratagems).

The texts were originally written in cuneiform on clay tablets. Their basic language is Babylonian, one of the two main dialects of Akkadian. To a varying degree, however, the texts contain terms of Sumerian origin. In some cases, these are to be understood as logograms (word signs), abbreviated writings for Akkadian words (thus ZI stands for a variety of conjugated forms of the Akkadian verb *nasāḫum*), in others,

1. For convenience, an appendix (p. 336) contains a recapitulation and the Akkadian and Sumerographic equivalents of all translated terms, while an index (p. 446) locates the passages where the single operations and terms are introduced and discussed. It should be emphasized that the explanations that accompany the texts do not present the full evidence for the interpretation. This requires contrastive comparison of a large number of texts, in many cases even analysis of all occurrences of a term within the complete corpus —see [Høyrup 1990a & 1993b].

Tradicionalmente y desde que su existencia fue descubierta alrededor de 1930, el 'álgebra' babilónica se ha interpretado como una técnica puramente numérica, acorde al álgebra de la época moderna, su terminología, que (hasta cierto punto podría ser interpretada en lenguaje ordinario) sugiere una interpretación geométrica, fue tomada como un conjunto de metáforas congeladas (como lo es nuestro 'cuadrado' de un número). Las razones detalladas que fundamentan esta interpretación ya aceptada, así como los argumentos, que en sí no tienen que ver con agua, los he presentado en [Høyrup 1990, 1991]. El punto principal es que la interpretación numérica tiene sentido para (la mayoría de) los números que aparecen en los textos. Sin embargo, esto deja muchas frases y términos sin explicación; además, es incapaz de explicar porque los textos distinguen con exactitud entre dos operaciones diferentes, que vistas aritméticamente son una sola y misma 'adición', entre dos diferentes 'sustracciones' —y entre no menos de cuatro diferentes 'multiplicaciones'—. Finalmente, con frecuencia es difícil entender el orden en que las operaciones son resueltas.

La alternativa es una lectura que, en la medida de lo posible, se apoye en la redacción, frases y orden original más que en los patrones de pensamiento de las matemáticas modernas. El trabajo que presentaré a continuación, introduce y explica las técnicas y conceptos como aparecen en los textos.[1] Para este propósito usaré una traducción convencional 'adaptada', *i.e.*, una traducción que interpreta a cada uno de los términos babilónicos por el correspondiente en inglés (cuando sea posible tener un rango aproximado de connotaciones similares), términos relativos mediante traducciones equivalentes y términos distintos con traducciones distintas; las cuales, además, siguen la gramática original, el orden de las palabras y las estructuras de las frases a menos que el resultado sea completamente ilegible, y que en general no trata de decir nada más allá de lo que hay en el texto original (es evidente que los artículos definidos e indefinidos se tienen que insertar; por otro lado, el rico sistema verbal de los akadianos sólo puede ser interpretado por medio de circunlocuciones y estratagemas similares).

1 Por conveniencia, un apéndice (p. 341) contiene una recapitulación y los equivalentes akadianos y sumerográficos de todos los términos traducidos, mientras que un índice (p. 349) localiza los pasajes donde las operaciones simples y los términos se introducen y discuten.

Debería enfatizarse que las explicaciones que acompañan a los textos no presentan la evidencia completa para la interpretación. Esto requiere de comparaciones que contrasten un gran número de textos y, en muchos casos, el análisis de todas las presentaciones de un término en su conjunto —ver [Høyrup 1990a, 1990b].

however, they were read in Sumerian (and eventually borrowed into Akkadian as loanwords). Logograms for Akkadian are translated as are the corresponding Akkadian terms (in the grammatical form which is to be expected from the context[2]); authentic Sumerian terms are given a translation of their own.[3]

Numbers were written in a floating-point place-value system with base 60; the number which we transliterate 4,46,40 may thus stand for $4\cdot60^2 + 46\cdot60 + 40$ as well as $4\cdot60 + 46 + 40\cdot60^{-1}$ or $4 + 46\cdot60^{-1}+40\cdot60^{-2}$ (etc.). In the translations, a generalized degree-minute-second system is used, in which ´, ´´, etc., indicate decreasing and `, ``, etc., increasing sexagesimal order of magnitude; 4`46°40´ thus stands for $4\cdot60 + 46 + 40\cdot60^{-1}$ (in some cases, this absolute order of magnitude can be determined from the calculations; in others, it is fixed arbitrarily or from the topic dealt with).[4] In certain cases, numbers are written as number words, in which case they are translated correspondingly. Similarly, the fractions 1/2, 1/3, and 2/3 possess their own signs, which are transliterated and translated as ordinary fractions.

Indications of damages to the text (etc.) are only given in the lines in original language, unless the formulation is not firmly established from parallel passages; in such cases, the conjectural restitution is indicated as '...'.

I. First-degree problems

TMS XVI, N° 1[5]

1. The 4th of the width from the length and the width to tear out, 45´. You, 45´
[*4-at* SAG *i-na*] UŠ *ù* SAG ZI 45 ZA.E 45

---

2. In a few texts, however, the Sumerograms are to be read as infinite lexical forms, not as the finite verbs that would fit grammatically.
3. In the lines containing the original text in transliteration, syllabic Akkadian is written in *italics*, whereas logograms, genuine Sumerian terms and signs of unidentified reading occur as SMALL CAPS.
4. This system —all-dominating in the mathematical texts and to all evidence originally introduced as a tool for intermediate technical calculations, similar to the equally floating-point-based slide rule— was not in general use in practical contexts, where the order of magnitude had to be made explicit; economic and similar texts use other notations that leave no doubt whether a debt is 300, 5 or 1/12 shekel. This should go by itself but is often forgotten when histories of mathematics present "the Babylonian numerals".
5. Transliteration [TMS, 91] (the translation and commentary of this edition are mistaken and highly misleading). Corrections, translation and analysis [Høyrup 1990a, 299-305].

Los textos fueron escritos originalmente en escritura cuneiforme sobre tabletas de arcilla. Su lenguaje básico es el babilónico, uno de los dos principales dialectos de los akadianos. Con un cierto grado de variación, los textos contienen términos de origen sumerio. En algunos casos, hay que entenderlos como logogramas (palabras signo), abreviaturas para palabras akadianas (de ahí que ZI signifique una variedad de formas conjugadas del verbo akadiano *nasāḫum*); otros fueron leídos en sumerio (y eventualmente adoptados por el akadiano como palabras prestadas). Para los akadianos los logogramas se traducen por sus correspondientes términos akadianos (en la forma gramatical del contexto);[2] a los auténticos términos sumerios se les da su propia traducción.[3]

Los números fueron escritos en un sistema posicional de punto flotante con base sesenta: el número que transcribimos como 4, 46, 40 significa $4 \cdot 60^2 + 46 \cdot 60 + 40$, así como también $4 \cdot 60 + 46 + 40 \cdot 60^{-1}$ o $4 + 46 \cdot 60^{-1} + 40 \cdot 60^{-2}$ (etc.). En las traducciones, se usa un sistema generalizado de grados-minutos-segundos, en donde ', '' etc., indican disminución y `, `` etc., incrementan el orden sexagesimal de magnitud; entonces 4`46°40' significa $4 \cdot 60 + 46 + 40 \cdot 60^{-1}$ (en algunos casos, este orden absoluto de magnitud puede ser determinado de los cálculos; en otros, es puesto arbitrariamente según el tópico que se trate).[4] En ciertos casos, los números son escritos con palabras, en cuyo caso son traducidos de igual forma. Similarmente, las fracciones 1/2, 1/3 y 2/3 poseen sus propios signos, los que son transcritos y traducidos como fracciones ordinarias.

Las indicaciones de daños en el texto (etc.) sólo se señalan en las líneas del lenguaje original, a menos que la formulación no esté firmemente establecida en pasajes paralelos; en tales casos, lo que se propone como reestructuración está indicado como ‹...›

2. En pocos textos, sin embargo, los sumerogramas se leeran como formas léxicas infinitas, y no como verbos finitos que ajusten gramaticalmente.
3. En las líneas que contienen la transcripción de los textos originales, las sílabas akadianas están escritas en letras itálicas, mientras que los logogramas, genuinos términos sumerios, y los signos de lectura no identificados se presentan en LETRAS VERSALITAS.
4. Este sistema —dominante en los textos matemáticos, así como para toda evidencia que se introdujo originalmente como una herramienta intermedia para realizar cálculos técnicos, de forma similar para la regla de cálculo basada en el punto flotante—, en general, no se usó en un contexto práctico donde el orden de la magnitud tenía que ser explícito, los textos económicos y otros similares usan notaciones que no nos deja duda sobre si una deuda es 300, 5 ó 1/12 *shekel*. Esto debe tenerse en cuenta por sí mismo, pero es constantemente olvidado cuando la historia de las matemáticas presenta a los numerales babilónicos.

2. to 4 raise, 3 you see. 3, what is that? 4 and 1 posit,
[*a-na* 4 *i-ši* 3 *ta*]-*mar* 3 *mi-nu šu-ú* 4 *ù* 1 GAR

3. 30' and 5', to tear out, posit. 5' to 4 raise, 1 width. 20' to 4 raise.
[30 *ù*] 5 ZI ⌈GAR⌉ 5 *a-na* 4 *i-ši* 1 SAG 20 *a-na* 4 *i-ši*

4. 1°20' you see, 4 widths. 30' to 4 raise, 2 you see, 4 lengths. 20', 1 width to tear out,
1,20 *ta-<mar>* 4 SAG 30 *a-na* 4 *i-ši* 2 *ta-<mar>* 4 UŠ 20 1 SAG ZI

5. from 1°20', 4 widths, tear out, 1 you see. 2, the lengths, and 1, 3 widths, accumulate, 3 you see
i-na 1,20 4 SAG ZI 1 *ta-mar* 2 UŠ *ù* 1 3 SAG UL.GAR 3 *ta-mar*

6. The IGI of 4 detach, 15' you see. 15' to 2, lengths, raise, 30' you see, 30' the length.
IGI 4 *pu*-[*ṭú-ú*]*r* 15 *ta-mar* 15 *a-na* 2 UŠ *i-ši* 3[0] *ta-<mar>* 30 UŠ

7. 15' to 1 raise, 15' the contribution of the width. 30' and 15' retain
15 *a-na* 1 *i-ši* [1]5 *ma-na-at* SAG 30 *ù* 15 *ki-il*

8. Since "The 4th of the width, to tear out", he has said, from 4, 1 tear out, 3 you see.
aš-šum 4-*at* SAG *na-sa-ḫu qa-bu-ku i-na* 4 1 ZI 3 *ta-mar*

9. The IGI of 4 detach, 15' you see. 15' to 3 raise, 45' you see, 45' as much as (there is) of widths.
IGI 4 *pu-<ṭú-úr>* 15 *ta-mar* 15 *a-na* 3 *i-ši* 45 *ta-<mar>* 45 *ki-ma* [SAG]

10. 1 as much as (there is) of lengths posit. 20, the true width take. 20 to 1' raise, 20' you see.
1 *ki-ma* UŠ GAR 20 GI.NA SAG *le-qé* 20 *a-na* 1 *i-ši* 20 *ta-mar*

11. 20' to 45' raise, 15' you see. 15' from 30'' tear out,
20 *a-na* 45 *i-ši* 15 *ta-mar* 15 *i-na* 30'' [ZI]

12. 30' you see, 30' the length.
30 *ta-mar* 30 UŠ

I. Problemas de primer grado

TMS XVI, Nº 1.[5]

1. El cuarto del ancho de la longitud y el ancho para quitar 45'. Usted. 45'
[4-*at* SAG *i-na*] UŠ *ù* SAG ZI 45 ZA.E 45

2. para 4 elevar, usted ve. 3, ¿qué es eso? 4 y 1 posicione.
[*a-na* 4 *i-ši* 3 *ta*]-*mar* 3 *mi-nu ša-ma* 4 *ù* 1 GAR

3. 50' y 5', para quitar, posicione. 5' para 4 elevar, 1 ancho. 20' para 4 elevar,
[50 *ù*] 5 ZI [GAR] 5 *a-na* 4 *i-ši* 1 SAG 20 *a-na* 4 *i-ši*

4. 1°20' ve usted. 4 anchos. 30' para 4 elevar, 2 ve usted, 4 largos. 20', 1 ancho para quitar.
1,20 *ta-mar* 4 SAG 30 *a-na* 4 *i-ši* 2 *ta-mar* 4 UŠ 20 1 SAG ZI

5. de 1°20', 4 anchos, quitar, 1 usted ve. 2, los largos, y 1, 3 anchos, acumule, 3 usted ve.
i-na 1,20 4 SAG ZI 1 *ta-mar* 2 UŠ *ù* 1 3 SAG UL.GAR 3 *ta-mar*

6. El IGI de 4 separar, 15' usted ve. 15' a 2, largos, eleve. 30' ve usted, 30' el largo.
IGI 4 *pu*-[*ṭú-ú*]*r* 15 *ta-mar* 15 *a-na* 2 UŠ *i-ši* 3[0] *ta-mar* 30 UŠ

7. 15' para 1 elevar. 15' la contribución del ancho. 30' y 15' retenga.
15 *a-na* 1 *i-ši* [1]5 *ma-na-at* SAG 30 *ù* 15 *ki-il*

8. Dado que 'el cuarto del ancho, quitar', él ha dicho, de 4, 1 quitar, 3 ve usted,
aš-šum 4-*at* SAG *na-sà-ḫu qá-bu-ku i-na* 4 1 ZI 3 *ta-mar*

9. El IGI de 4 separar. 15' usted ve, 15' para 3 elevar. 45' usted ve, tanto como (hay) de anchos
IGI 4 *pu-ṭú-úr* 15 *ta-mar* 15 *a-na* 3 *i-ši* 45 *ta-mar* 45 *ki-ma* [SAG]

10. 1 tanto como (hay) de largos posicione. 20, tome el verdadero ancho, 20 para 1' elevar, 20' usted ve
1 *ki-ma* UŠ GAR 20 *ki-i-na* SAG *la-qí* 20 *a-na* 1 *i-ši* 20 *ta-mar*

5. Transcripción (TMS, 91) (la traducción y comentarios de esta edición son mal interpretados). Correcciones, traducción y análisis [Høyrup 1990b, 299-305].

The present text is highly untypical *as a text*. It does not solve a problem but explains the meaning of the steps by which an equation is transformed, and thus makes explicit what is implicit in most of the material at our disposal. This character may have to do with the origin of the text: it was written in Susa, a peripheral area, toward the very end of the Old Babylonian period, and teachers from a peripheral school may have felt the need for written instructions where those from the core could rely on a more firmly established tradition of oral explanations. But there is no reason to believe that the written explanation of our Susa text deviates from the oral expositions given elsewhere.[6]

The problem (which is really *an equation*) deals with the length (l) and the width (w) of a rectangle; in the present case, however, this concrete meaning is relatively unimportant.

In line 1, we are told (in symbolic translation) that

$$(l + w) - \tfrac{1}{4}w = 45'.$$

Already here we encounter the problem of different 'additions' and different 'subtractions'. One additive operation 'accumulating' a and b, represented here by a mere 'and' is a real addition which absorbs the addends in a common sum (at times spoken of in the plural, as 'the things accumulated', at times in an apparent singular, 'the accumulation'); it may be used for the purely arithmetical addition of entities of different kinds (e.g., lengths and areas), provided that they possess a measuring number. The other 'appending' a to B —absent from the present text) is a concretely meaningful operation, in which B so to speak conserves its identity and (if the operation is geometrical) stays in place while increasing in size.

The subtraction of line 1 (to 'tear out' a from B) is also an 'identity-conserving' operation, and can only be used when a concrete removal of a portion of B is dealt with. The other subtractive operation, the observation that 'A goes d beyond B' allows us to find the difference d between magnitudes one of which cannot be considered part of the other, and where removal is thus excluded. This difference may be spoken of as 'so much as A goes beyond B' or simply as the 'going-beyond'.

Apart from what is translated into symbols, line 1 thus tells us that l and w are aggregated on an equal footing —along a common line, we may imagine (see Figure 1) —after which 1/4 of the width

6. The interpretation of a passage in TMS IX as evidence of specific Susian methods (underscored in the preface to the volume, and often quoted in the secondary literature) relies on a double misunderstanding —*cf.* [Høyrup 1990a: 326].

11. 20' para 45' eleve, 15' usted ve. 15' de 30'[15] quitar,
20 *a-na* 45 *i-il* 15 *ta-mar* 15 *i-na* 30'[15] [ZI]

12. 30' usted ve, 30' el largo.
30 *ta-mar* 30 UŠ

El presente texto no es convencional *como un texto*. No resuelve el problema pero explica el significado de los pasos por los que una ecuación se transforma, y hace explícito lo que está implícito en la mayoría del material a nuestra disposición. Esta característica tiene que ver con el origen del texto: fue escrito en Susa, una región periférica, a finales del periodo babilónico antiguo; los maestros de las escuela de los alrededores de la ciudad pudieron haber tenido la necesidad de poseer las instrucciones en forma escrita, mientras que los de la región central podían confiar en una tradición fuertemente establecida de explicaciones orales. Pero no hay razón para creer que la explicación escrita en nuestro texto de Susa se desvíe de las exposiciones orales dadas en algún otro lugar.[6]

El problema (que es realmente *una ecuación*) trata con el largo (l) y el ancho (w) de un rectángulo; sin embargo, en el presente caso, su significado concreto es relativamente poco importante.

En la línea 1 se dijo (en traducción simbólica) que

$$(l + w) + 1'4\ w = 45'$$

Aquí ya encontramos el problema de diferentes 'adiciones' y diferentes 'sustracciones'. Una operación aditiva ('acumulando' a y b, representada aquí por un simple 'y') es una adición real que absorbe los sumandos en una suma común (en unos momentos hablado en forma plural como 'las cosas acumuladas' y en otros en aparente singular, 'la acumulación'), que pudo haber sido usada para la adición aritmética pura de entidades de diferentes clases (*e.g.*, longitudes y áreas), demostrando que ellos poseían números para medir. La otra ('agregar' a a B, ausente del presente texto) es una operación concretamente significativa en la que B, por decirlo así, conserva su identidad y (si la operación es geométrica) se queda allí mientras incrementa su tamaño.

6 La interpretación de un pasaje en TMS IX como evidencia de métodos específicos susenos (subrayados en el prefacio del volumen, y constantemente citados en la literatura secundaria) se retransmiten con doble error — *cf.* [Høyrup 1990a, 326]

can really be *removed*; what remains equals 45′. We observe that the text, though dealing with geometrical line segment, regards these as *measurable* and indeed measured. This is a general characteristic of the

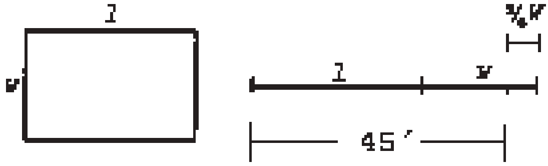

Figure 1

Old Babylonian 'algebra' texts —the geometrical entities they speak of are always thought of as possessing a measuring number, which is often used as an identifying name (occasionally even when this number is not considered as given, *cf.* p. 314-316).

The number 45′, the student is told (lines 1-2), is to be multiplied by 4. 'Raising', indeed, is one of the four 'multiplications'. Its original use will have been in the computation of volumes, where an area *A* provided with an implicit standard height 1 is 'raised' to the real height *h* (see [Høyrup 1992, 351*f*]). From there, the term was transferred to other cases where a computation involved some consideration of proportionality —ultimately we may think of it as 'computation of a concrete magnitude through multiplication'. This multiplication yields 3, the meaning of which is asked for

The explanation shows that the values of *l* (30′) and *w* (20′) are presupposed. At first one is to 'posit' 4 and 1 (for the multiplied and the original equation). 'Positing' appears to designate various kinds of material recording —'putting down' in a calculation scheme, writing the value of a length or an area into a drawing, etc. We may imagine something like Figure 2 (without believing too firmly in the exact details of

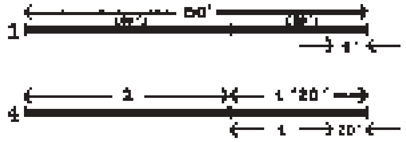

Figure 2

the representation). Next it is explained that 4·5′ yields 20′, one width, that 4·30′ yields 4 lengths, etc.

In line 6 we encounter a new operation. The IGI of the number *n* is its reciprocal as listed in the table of reciprocals, and 'to detach' it means to look it up in this table (originally probably to detach one

La sustracción de la línea 1 (para 'quitar' *a* de *B*) es también una operación que 'conserva-identidad', y sólo puede ser usada cuando se trate de remover concretamente una porción de *B*.

En la otra operación de sustracción, la observación que '*A* va hacia *d* más allá de *B*' permite encontrar la diferencia *d* entre magnitudes, una de las cuales no puede ser considerada parte de la otra, y en donde el remover es además excluido. Esta diferencia puede ser expresada como 'tanto como *A* va más allá de *B*' o simplemente como 'ir-más allá'.

Aparte de lo que se tradujo en símbolos, la línea 1 dice además que *l* y *w* son agregados sobre una medida igual —supondremos que a lo largo de una línea común (ver figura 1)— después de lo cual, 1/4 del ancho puede

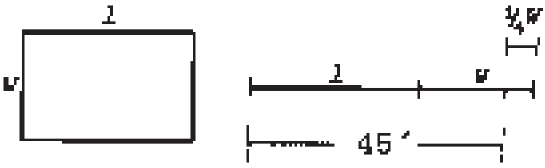

Figura 1

removerse, quedando un residuo igual a 45′. Observamos que el texto, aunque trata con segmentos de una línea geométrica, los ve como *medibles*, y en efecto son medidos. Esta es una característica general de los textos de 'álgebra' de los antiguos babilonios —las entidades geométricas de las que ellos hablan siempre son pensadas como poseedoras de un número que mide, el que a menudo se usa como un nombre identificador (aun cuando este número ocasionalmente no se considera dado *cf.*, p. 319).

Se le dijo al estudiante (línea 1-2) que el número 45′ es multiplicado por 4. 'Elevando', por ejemplo, es una de las cuatro 'multiplicaciones'. Originalmente, su uso habrá sido en el cálculo de volúmenes, donde una área *A* provista de una altura estándar 1 se 'eleva' a la altura real *h* (ver [Høyrup 1992, 351*f*]). De ahí, el término fue transferido a otros casos en donde los cálculos involucraban algunas consideraciones de proporcionalidad —finalmente se puede pensar esto como 'el cálculo de una magnitud concreta a través de la multiplicación'. Esta multiplicación da 3, y surge la pregunta acerca de su significado.

La explicación muestra que se han presupuesto los valores de *l* (30′) y de *w* (20′). Primero se 'posiciona' 4 y 1 (para la multiplicación y la ecuación original). 'Posicionar' parece designar varios tipos del material registrado —'poner' en un esquema de cálculo, asignando el valor de una longitud o de una área en un dibujo, etc.— Se puede imaginar algo como part from a bundle consisting of *n* parts). Line 6 thus multiplies the equation by 1/4 and now identifies the single contributions as multiples of *l* and *w*. Of particular interest is the explicit determination of the coefficients, 'as much as (there is)' of lengths and widths (1 and 45' = 3/4', respectively —the latter determined from an argument of the type 'single false position' in lines 8-9).

The distinction between 'width' and the 'true width' in line 10 probably means that an (imaginary) *real* rectangular field is *represented* by another rectangle —as suggested in the translation, the former *may* have had the dimensions 30×20 and the latter the more manipulable[7] dimensions 30'×20'.

All in all, as we see, the text is a highly pedagogical exposition, *moving* back and forth between the various levels so as to create full *understanding of their mutual connections; but no attempt is made to* achieve anything like a deductive structure.

TMS VII, N° 2[8]

17. The 4th of the width to the length I have appended, its 7th
4-at SAG *a-na* UŠ DAḪ *7-ti[-šu]*

18. until 11 I have gone, over the accumulation
a-di 11 *al-li-ku* UGU [UL.GAR]

19. of length and width 5' it goes beyond. You, 4 posit;
UŠ *ù* SAG 5 DIRIG ZA.E [4 GAR]

20. 7 posit; 11 posit; and 5' posit.
7 GAR 11 GAR *ù* 5 GAR

21. 5' to 7 raise, 35' you see.
5 *a-na* 7 *i-ši* 3[5 *ta-mar*]

22. 30' and 5' posit, 5' to 11 raise, 55' you see.
30 *ù* 5 GAR 5 *a-na* 1[1 *i-ši* 55 *ta-mar*]

7. The unit of horizontal measures is the NINDAN or 'rod', roughly equal to 6 m (whereas vertical distances are measured in KÙŠ or 'cubit', 12 KÙŠ = 1 NINDAN). A rectangle 30×20 is thus roughly 180 m by 120 m, much too large to be traced in the school yard (or whatever 'blackboard' was used).

8. Transliteration [TMS, 54f] (the translation and commentary of this edition are mistaken and highly misleading). Revised transliteration, translation, and analysis [Høyrup 1993a, 246-254].

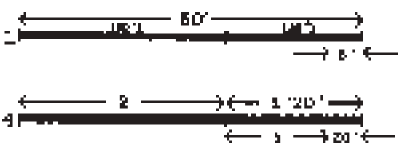

Figura 2

la figura 2 (sin esperar detalles exactos de la representación). Después se explica que 4·5' produce 20', un ancho, 4·30' da 4 largos, etc.

En la línea 6 encontramos una nueva operación. La igi del número *n* es su recíproco, tal como se enlistó en la tabla de recíprocos, y 'separar' significa buscar en esta tabla (es probable que, originalmente, separar una parte de un paquete que consiste de *n* partes). Además, la línea 6 multiplica la ecuación por 1/4, identificando ahora a las contribuciones simples como múltiplos de *l* y *w*. Es de particular interés la determinación explícita de los coeficientes, 'tanto como (hay)' de largos y anchos (1 y 45' = 3/4, respectivamente, el último determinado a partir de un argumento del tipo 'posición falsa única' en las líneas 8-9).

La distinción entre el 'ancho' y el 'ancho verdadero' en la línea 10 probablemente significa que un campo *real* rectangular (imaginario) es *representado* por otro rectángulo —como se sugiere en la traducción, el primero *pudo* haber tenido las dimensiones de 30×20 y el último con las dimensiones más manipulables[7] de 30'×20'.

En conjunto, como vemos, el texto es una exposición altamente pedagógica, va para atrás y para adelante entre varios niveles hasta tener un entendimiento completo de sus conexiones mutuas; pero no se ha hecho ningún intento para lograr algo como una estructura deductiva.

TMS VII, Nº 2[8]

17. El 4o. del ancho del largo yo he agregado, su 7º.
4-*at* SAG *a-na* UŠ DAH 7-*ti*[-*šu*]

---

7 La unidad para medir horizontalmente es el *nindan* o 'vara', que es aproximadamente igual a 6 m (mientras que las distancias verticales son medidas en *kùš* o 'codos', 12 *kùš* = 1 *nindan*). Un rectángulo 30×20 es por tanto aproximadamente 180 m por 120 m, demasiado largo para ser trazado en un jardín de escuela (o cualquier 'pizarrón' que pudiera ser usado).

8. Transcripción [TMS, 54f] (la traducción y los comentarios de esta edición son erróneos y altamente engañosos). Una transcripción revisada, traducción y análisis [Høyrup 1990a, 246–254].

23. 30', 20' and 5', to tear out, posit. 5' to 4
30 20 ù 5 ZI GAR 5 [*a-n*]*a* 4

24. raise, 20' you see. 20 the width. 30' to 4 raise,
i-ši 20 *ta-*<*mar*> 20 SAG 30 *a-na* 4 *i-ši-ma*

25. 2 you see, 2, lengths. 20' from 20' tear out.
2 *ta-mar* 2 UŠ 20 *i-na* 20 ZI

26. 30' from 2 tear out, 1°30' posit, and 5' to 1°50 the accumulations of length and width append!.
30 *i-na* 2 ZI 1,30 GAR ù 5 *a-!na* 1,50 UL.GAR UŠ ù SAG DAḪ!

27. 7 to 4, of the fourth, raise, 28 you see.
7 *a-na* 4 *re-*<*ba-ti*> *i-ši-ma* 28 *ta-mar*

28. 11, the accumulations, from 28 tear out, 17 you see.
11 UL.GAR *i-na* 28 ZI 17 *ta-mar*

29. From 4, of the fourth, 1 tear out, 3 you see.
i-na 4 *re-*<*ba-ti*> 1 ZI 3 [*ta*]*-mar*

30. The IGI of 3 detach, 20' you see. 20' to 17 raise.
IGI 3 *pu-ṭú-*<*ú*> 20 *ta-*<*mar*> 20 [*a-na*] 17 *i-*<*ši*>

31. 5°40' you see, 5°40', (for) the length. 20' to 5', the going-beyond, raise,
5,40 *ta-*<*mar*> 5,40 [U]Š 20 *a-na* 5 *dirig i-ši*

32. 1'40'' you see, 1'40'', the appending of the length. 5°40', (for) the length.
1,40 *ta-*<*mar*> 1,40 *wa-ṣi-ib* UŠ 5,40 UŠ

33. from 11, accumulations, tear out, 5°20' you see.
i-na 11 UL.GAR ZI 5,20 *ta-mar*

34. 1'40'' to 5', the going-beyond, append, 6'40'' you see.
1,40 *a-na* 5 DIRIG DAḪ 6,40 *ta-mar*

35. 6'40'', the tearing-out of the width, 5', the step,
6,40 *n*[*a*]*-sà-ḫu* SAG, 5 A.RÁ

18. hasta 11 yo he ido, sobre la acumulación
a-di 11 *al-li-ik* UGU [UL.GAR]

19. de largo y ancho 5' este va más allá. Usted, 4 posiciona:
UŠ *ù* SAG 5 DIRIG ZA.E [4 GAR]

20. 7 posiciona, 11 posiciona, y 5' posiciona
7 GAR 11 GAR *ù* 5 GAR

21. 5' para 7 elevar, 35' ve usted
5 *a-na* 7 *i-ši* 3[5 *ta-mar*]

22. 30' y 5' posiciona. 5' para 11 elevar. 55' ve usted.
30 *ù* 5 GAR 5 *a-na* 1[1 *i-ši* 55 *ta-mar*]

23. 30', 20' y 5', quitar, posiciona. 5' para 4
30 20 *ù* 5 ZI GAR 5 [*a-n*]*a* 4

24. elevar. 20' ve usted, 20 el ancho. 30' para 4 elevar,
i-ši 20 *ta-mar* 20 SAG 30 *a-na* 4 *i-ši-ma*

25. 2 ve usted, 2, largos. 20' de 20' quitar.
2 *ta-mar* 2 UŠ 20 *i-na* 20 ZI

26. 30' de 2 quitar. 1°30' posiciona, y 5' a '50 las acumulaciones del largo y ancho agrega
30 *i-na* 2 ZI 1,30 GAR *ù* 5 *a-na* '50 UL.GAR UŠ *ù* SAG DAḪ']

27. 7 para 4, del cuarto, elevar, 28 ve usted.
7 *a-na* 4 *re-<ba-i>* *i-ši-ma* 28 *ta-mar*

28. 11, las acumulaciones, de 28 quitar, 17 ve usted.
11 UL.GAR *i-na* 28 ZI 17 *ta-mar*

29. De 4, del cuarto, 1 quitar, 3 ve usted.
i-na 4 *re-<ba-i>* 1 ZI 3 [*ta*]-*mar*

30. El IGI de 3 separar, 20' ve usted. 20' a 17 elevar,
IGI 3 *pu-ṭú-ùr* 20 *ta-<mar>* 20 [*a-na*] 17 *i-<ši>*

36. to 5°40', lengths, raise, 28'20'' you see
u-na 5,40 ÚS *i-ši* 28,20 *ta-mar*

37. 1'40'', the appending of the length, to 28'20'' append,
1,40 *wa-ṣi-ib* ÚS *a-na* 28,20 [DAH]

38. 30' you see, 30' the length. 5' to 5'20'
30 *ta-mar* 30 ÚS 5 *a*-[*na* 5,20]

39. raise, 26'40'' you see, 6'40''.
i-ši-ma 26,40 *t*[*a-mar* 6,40]

40. the tearing-out of the width, from 26'40'' you tear out.
na-sí-ih SAG *i-na* [26,40 ZI]

41. 20' you see, 20' the width.
20 *ta-mar* 20 sa[g] (...?)

Once again, the text —even this one belonging to the Susa corpus— discusses a first-degree equation involving the length and width of a rectangle 30'×20': this time, however, it is *solved* —which means that we are confronted with an indeterminate problem.

The first problem of the tablet has already treated the homogeneous problem

$$1/7(l + 1/4w)\cdot 10 = l + w.$$

The present one, as we see, is inhomogeneous and can be translated

$$1/7(l + 1/4w)\cdot 11 = (l + w) - 5'.$$

It is probably significant that the addition of 1/4*w* is done by 'appending' as we shall see, the rectangular configuration is important this time.

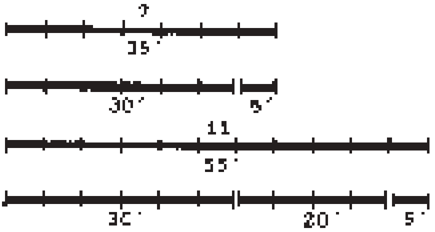

Figure 3

Lines 19 to 23 explain the situation as done in the previous text, corresponding somehow to Figure 3 —lines 19-21 to A, the first half of 22 to B, its second half to

31. 5°40' ve usted, 5°40', (para) el largo. 20' a 5', el ir-más allá, elevar,
5,40 *ta*-<mar> 5,40 [U]Š 20 *a-na* 5 *dirig i-ši*

32. 1'40'' ve usted. 1'40'', el agregado del largo. 5°40', (para) el largo.
1,40 *ta-mar* 1,40 *wa-si-ib* UŠ 5,40 UŠ

33. de 11, acumulaciones, quitar, 5°20' ve usted,
i-na 11 UL.GAR ZI 5,20 *ta-mar*

34. 1'40'' a 5', el ir-más allá, agregar, 6'40'' ve usted.
1,40 *a-na* 5 DIRIG DAḪ 6,40 *ta-mar*

35. 6'40'', quitando del ancho, 5', el paso,
6,40 *n*[*a*]*-si-iḫ* SAG 5 A.RÁ

36. para 5°40'', largos, elevar, 28'20'' ve usted.
a-na 5,40 UŠ *i-ši* 28,20 *ta-mar*

37. 1'40'', el agregado del largo, a 28'20'' agregar,
1,40 *wa-si-ib* UŠ *a-na* 28,20 [DAḪ]

38. 30' ve usted, 30' el largo, 5' a 5°20'
30 *ta-mar* 30 UŠ 5 *a-*[*na* 5,20]

39. elevar, 26'40'' ve usted. 6'40'',
i-ši-ma 26,40 *t*[*a-mar* 6,40]

40. lo quitado del ancho, de 26'40'' usted quita,
na-si-iḫ SAG *i-na* [26,40 ZI]

41. 20' ve usted, 20' el ancho
20 *ta-mar* 20 sa[g] (...?)

Nuevamente, el texto —aun éste que pertenece al conjunto de Susa— discute una ecuación de primer grado involucrando el largo y ancho de un rectángulo de 30'×20'; esta vez, sin embargo, está *resuelto* —lo que significa que nos encontramos con un problema indeterminado—.

El primer problema de la tabla trata un problema homogéneo

$$\frac{1}{7}\left(l + \frac{1}{4}w\right) \cdot 10 = l + w$$

C, and the first part of 23 to D. Then the meaning of a multiplication of $l + 1/4w$ by 4 is explained again as in TMS XVI. Lines 25-26 undertake a further transformation of the equation into one dealing with $l + w + 5'$ (later spoken of as 'the accumulation') and l.

$$1/7[(3l - l) - 5' + (w - w) + (l + w + 5')]\cdot 11 = 4\cdot(l + w + 5'),$$

or

$$1/7[3l - 5' + (l + w + 5')]\cdot 11 = 4\cdot(l + w + 5') ,$$

where we may notice that the result of the removal of w from w is regarded, literally, as *not worth speaking about*.[9]

In line 27, the procedure starts for good. In symbolic translation, we first get

$$11\cdot[3(l - 1/3\cdot 5')] + 11\cdot(l + w + 5') = 28\cdot(l + w + 5')$$

and next

(*) $$11\cdot(l - 1'40'') = 5°40'\cdot(l + w + 5').$$

In the first problem from the tablet, a solution to the indeterminate problem,

(**) $$10\cdot l = 6\cdot(l + w)$$

(viz $l = 6$, $l + w = 10$) has been found by what appears to be an identification of both sides of the equation with the same rectangle —*cf.* Figure 4. The same happens in line 31 —but this time, it is $\lambda = l - 1'40''$ that is identified as the 'length'. The entity 1'40'' is explicitly spoken of in a kind of gerundive, as "that which shall be appended to the length [λ] [*viz* in order to get the real length *l*]"— the 'appending of the length' of the translation (a Latinizing form would be 'the appendendum'). The term demonstrates that λ is really itself regarded as a length, since it is to λ, not to l, that 1'40'' is to be appended. Similarly, $l + w + 5'$ is

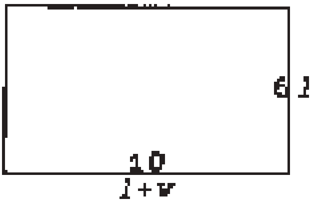

Figure 4

9 In the tablet VAT 7532, a similar non-numerical concept for a zero outcome of a subtraction by removal is expressed by the phrase 'it is missing' (see Muroi [1991]) —or, perhaps better, 'it has vanished'.

El siguiente, como vemos es no-homogéneo y puede ser traducido como

$$1/7(l + 1/4w)\cdot 11 = (l + w) - 5'.$$

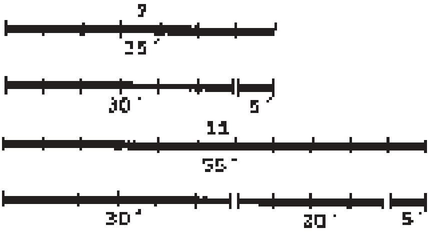

Figura 3

Puede resultar significativo que la adición de 1/4 w esté hecha mediante "agregados" —como veremos, la configuración rectangular es importante esta vez—.

Las líneas 19 a la 23 explican la problemática como se hizo en el texto anterior, que corresponde de alguna manera a la figura 3 —las líneas 19-21 a A, la primera mitad de 22 a B, su segunda mitad a C, y la primera parte de 23 a D. Entonces el significado de una multiplicación de l + 1/4 w por 4 es explicada como en TMS XVI. Las líneas 23-26 intentan más adelante una transformación de la ecuación en una de la forma $l+w+5'$ (llamada más tarde "la acumulación") y l,

$$1/7[(3l - l) - 5' + (w - w) + (l + w + 5')]\cdot 11 = 4\cdot(l + w + 5'),$$

o

$$1/7[3l - 5' + (l + w + 5')]\cdot 11 = 4\cdot(l + w + 5'),$$

donde podemos notar que el resultado de remover w de w se ve literalmente como poco digno de hablar sobre eso.[9]

En la línea 27, el procedimiento empieza bien. En traducción simbólica, primero obtenemos

$$11\cdot[3(l - 1/3\cdot 5')] + 11\cdot(l + w + 5') = 28\cdot(l + w + 5')$$

y después

$$(*) \qquad 11\cdot(l - 1'40'') = 5°40'\cdot(l + w + 5').$$

9 En la tablilla VAT 7537, un concepto similar no-numérico para el cero surge de una sustracción por eliminación, y es expresado por la frase "se perdió" (ver Muroi [1991]) —o, tal vez mejor, "ha desaparecido".

thought of as the sum $\lambda + \omega$ of λ and a modified width (ω) —from which follows that ($\omega = w + 5' + 1'40'' = w + 6'40''$, where $6'40''$ must then be ''that which shall be torn out from the width (ω) [in order to get the real width w]'' —the 'tearing out of the width' (lines 34-35).

A first solution to (*) is $\lambda = 5°40'$, $\lambda + \omega = 11$, whence $\omega = 11 - 5°40' = 5°20'$. Through multiplication by $5'$, the 'step' of Figure 3 and line 20, the text finds the intended solution [$\lambda =$] $28'20''$, [$\omega =$] $26'40''$. Appending what should be appended to the former and tearing out what should be torn out from the latter yields $l = 30'$, $w = 20'$.

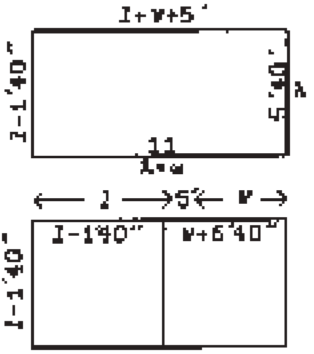

Figure 5

The solution may appear unnecessarily cumbersome, but follows from the combination of two simple principles: The homogeneous equation (**) is solved with reference to Figure 4 —and the inhomogeneous equation (*) is reduced to this homogeneous equation through a 'change of geometric variable', corresponding to Figure 5.

VAT 8391, N° 3[10]

Reverse I

3. If from 1 BUR of surface 4 GUR of grain I have collected,
šum-ma i-na BURGÁN A.[ŠA] 4 ŠE.GUR [*am-ku-us*]

4. from 1 BUR of surface 3 GUR of grain I have collected,
i-na BURGÁN A.ŠA 3 ŠE.GUR *am-*[*ku-us*]

5. now, 2 plots. Plot over plot 10' goes beyond.
i-na-an-na 2 GARIM GARIM UGU GARIM 10' *i-tir*

10 Transliteration [MKT I, 320 f], corrections [TMB, 110]. Translation and analysis [Høyrup 1990a, 295-299]

En el primer problema de la tabla, una solución al problema indeterminado

$$(**) \quad 10\,l = 6\,(l + w)$$

(*viz* $l = 6$, $l + w = 10$) se encontró por lo que parece ser una relación de ambos lados de la ecuación con el mismo rectángulo —*cf.* figura 4—. Lo mismo pasa en la línea 31; pero esta vez, es $\lambda = l$-1'40'' que es identificada como el 'largo'. Se habla explícitamente de la entidad 1'40'' en un tipo de gerundio, como ''aquello que será agregado al largo [λ] [*viz* para obtener el largo real l]'' —el 'agregado del largo' de la traducción que en forma latinizada sería 'el appendendum'—. El término demuestra que λ es verdaderamente ella misma vista como una longitud, dado que es a λ, y no a l, el que 1'40'' se agrege. Igualmente, $l + w = 5'$ es pensado como la suma $\lambda + \omega$ de λ y un ancho (ω) modificado —de lo cual se sigue que $\omega = w + 5' + 1'40'' = w + 6'40''$, donde 6'40'' debe entonces ser ''lo que será quitado del ancho [ω] [para obtener el ancho real w]'' —'lo quitado del ancho' (líneas 34-35)—.

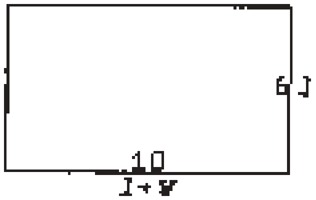

Figura 4

Una primera solución a (*) es $\lambda = 5°40'$, y $\lambda + \omega = 11$, en donde $\omega = 11-5°40' = 5°20'$. A través de la multiplicación por 5', del 'paso' de la figura 3 y de la línea 20, el texto encuentra el intento de solución [$\lambda =$] 28'20''. [$\omega =$] 26'40''. Agregando lo que se debe agregar al primero y quitando lo que se debe a lo último se obtiene $l = 30'$, $w = 20'$.

La solución puede parecer innecesariamente complicado, pero se obtiene de la combinación de dos principios simples: la ecuación homogénea (ω) que es resuelta con referencia a la figura 4; y la ecuación no homogénea (λ) que es reducida a esta ecuación homogénea a través de un 'cambio de variables geométricas', correspondientes a la figura 5.

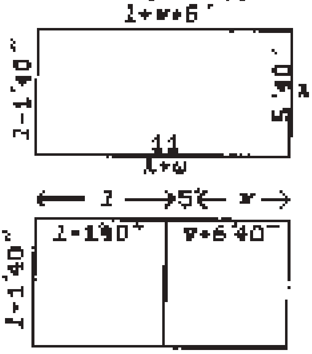

Figura 5

6. Their grain I have accumulated: 18'20.
še-a-ši-na GAR.GAR-*ma* 18,20

7. My plots what?
GARIM-*ia* EN.NAM

8. 30', the BUR, posit. 20', the grain which he has collected, posit
30 *bu-ra-am* GAR.RA 20 *še-am ša im-ku-sú* GAR.RA

9. 30', the second BUR, posit. 15', the grain which he has collected.
30 *bu-ra-am ša-ni-am* GAR.RA 15 *še-am ša im-ku-sú*

9a. posit.
GAR.RA

10. 10' which plot over plot goes beyond, posit.
1[0 *š*]*a* GARIM UGU GARIM *i-te-ru* GAR.RA

11. 18'20, the accumulation of the grain, posit
[18,20 *ku*-]*mur-ri še-im* GAR.RA

12. 1, projecting, posit.
[1 *wa-si*]-*am* GAR.RA-*ma*

13. The IGI of 30', the BUR, detach: 2; to the grain which he has collected
IGI 3[0 *bu-ri-im pu-ţur-ma*] 2 *a-na še-im ša im-ku-sú*

14. raise, 40', the false grain; to 10' which plot over plot goes beyond
ÍL 40 *še-am* L[UL *a-na* 1]0 *š*[*a* GARIM] U[GU GARIM *i-te-r*]*u*

15. raise, 6'40, from 18'20, the accumulation of the grain,
íl 6,40 *i-na* 18,20 *ku-mur-ri še-im*

16. tear out: 11'40 you leave.
ú-sú-uh-ma 11,40 *te-zi-ib*

17. 11'40 which you have left, may your head retain!
11,40 *ša te-zi-bu re-eš-ka li-ki-il*

VAT 8391, Nº 3[10]

Reverso I

3. Si de 1 BUR de superficie 4 GUR de grano he colectado,
šum-ma i-na BUR^{GAN} A.[ŠA] 4 ŠE.GUR [*am-ku-us*]

4. de 1 BUR de superficie 3 GUR de grano he colectado,
i-na BURGÁN A.ŠA 3 ŠE.GUR *am*[*ku-us*]

5. ahora 2 parcelas. Parcela sobre parcela 10' sale más allá.
i-na-an-na 2 GARIM GARIM U.GU GARIM 10' *i-ter*

6. Sus granos he acumulado: 18'20.
še-e-ši-na GAR.GAR-*ma* 18,20

7. ¿Mis parcelas qué?
GARIM-*ia* EN.NAM

8. 30', el BUR, posiciona. 20', el grano que él ha colectado, posiciona
30 *bu-ra-am* GAR.RA 20 *še-am ša im-ku-sú* GAR.RA

9. 30', el segundo BUR, posiciona. 15', el grano que él ha colectado,
30 *bu-ra-am ša-ni-am* GAR.RA 15 *še-am ša im-ku-sú*

9a. posiciona
GAR.RA

10. 10' el que parcela sobre parcela va más allá, posiciona.
1[0 *š*]*a* GARIM U.GU GARIM *i-te-ru* GAR.RA

11. 18'20, la acumulación del grano, posiciona.
[18,20 *ku-*]*mur-ri še-im* GAR.RA

12. 1, proyectando, posiciona
[1 *wa-si*]*-am* GAR.RA-*ma*

13. El IGI de 30', el BUR, separar: 2'; al grano que él ha colectado
IGI 3[0 *bu-ri-im pu-tur-ma*]*-a* 2 *a-na še-im ša im-ku-sú*

---

10. Transcripción [MKT I, 321*f*], correcciones [TMB, 110]. Traducción y análisis [Høyrup 1990a, 295-299]

18. 1, projecting, to two break: 30'.
1 *wa-ṣi-am a-na ši-na he-pí-ma* 30

19. 30' and 30' until twice posit:
30 *ù* 30 *a-di ši-ni-šu* GAR.RA.MA

20. The IGI of 30', the BUR, detach: 2''; to 20', the grain which he has collected.
IGI 30 *ba-ri-im pu-ṭur-ma* 2 *a-na* 20 *še-im ša im-ku-sú*

21. raise, 40', to 30' which until twice you have posited
ÍL 40 *a-na* 30 *ša a-di ši-ni-šu ta-aš-ku-nu*

22. raise, 20'; may your head retain.
ÍL 20 *re-eš-ka li-ki-il*

23. The IGI of 30', the second BUR, detach: 2''.
IGI 30 *ba-ri-im ša-ni-im pu-ṭur-ma* 2

24. 2'' to 15', the grain which he has collected,
2 *a-na* 15 *še-im ša im-ku-sú*

25. raise, 30'; to the second 30' which you have posited, raise, 15'.
ÍL 30 *a-na* 30 *ša-ni-[i]m ša ta-aš-ku-nu* ÍL 15

26. 15' and 20', which your head retains,
15 *ù* 20 *ša re-eš-ka ú-ka-lu*

27. acumulate: 35'; the IGI I know not.
GAR.GAR.MA 35 *i-gi-am ú-ul i-de*

28. What to 35' shall I posit
mi-nam a-na 35 *lu-uš-ku-un*

29. which 11'40 which your head retains gives me?
ša 11.40 *ša r[e-e]š-ka ú-ka-lu i-na-di-nam*

30. 20' posit, 20' to 35' raise, 11'40 it gives you
20 GAR.RA 20 *a-[na]* 35 ÍL 11.40 *i-na-di-kum*

14. elevar, 40', el falso grano; a 10' que parcela sobre parcela sale más allá
ÍL 40 *še-am* L[UL *a-na* 1]0 *š*[*a* GARIM] U[GU GARIM *i-te-r*]*u*

15. elevar, 6'40: de 18'20, la acumulación del grano.
il 6.40 *i-na* 18,20 *ka-mar-ri še-im*

16. quitar: 11'40 deja usted.
ú-sú-uḫ-ma 11,40 *te-zi-ib*

17. 11'40 el que usted ha dejado, ¡que su cabeza retenga!
11,40 *ša te-zi-bu re-eš-ka li-ki-il*

18. 1, proyectando, para dos romper: 30'
1 *wa-si-am a-na ši-na ḫi-pi-ma* 30

19. 30' y 30' hasta dos veces posiciona:
30 *ù* 30 *a-di ši-ni-šu* GAR.RA.MA

20. El IGI de 30', el BUR, separar: 2, para 20', el grano que él ha colectado.
IGI 30 *bu-ri-im pu-ṭur-ma* 2 *a-na* 20 *še-im ša im-ku-sú*

21. elevar, 40'; a 30' que hasta dos veces usted ha posicionado
ÍL 40 *a-na* 30 *ša a-di ši-ni-šu ta-aš-ku-nu*

22. elevar, 20'; que su cabeza retenga.
ÍL 20 *re-eš-ka li-ki-il*

23. El IGI de 30', el segundo BUR, separar: 2''.
IGI 30 *bu-ri-im ša-ni-im pu-ṭur-ma* 2

24. 2'' a 15', el grano que él ha colectado,
2 *a-na* 15 *še-im ša im-ku-sú*

25. elevar 30', al segundo 30' que usted ha posicionado, elevar, 15'.
ÍL 30 *a-na* 30 *ša-ni-*[*i*]*m ša ta-aš-ku-nu* ÍL 15

26. 15' y 20', lo cual retiene su cabeza.
15 *ù* 20 *ša re-eš-ka ú-ka-lu*

31. 20' which you have posited is the first plot:
20 *ša ta-aš-ku-[nu* A.]ŠÀ GARIM *iš-te-at*

32. from 20', the surface of the plot, 10' which surface over surface goes beyond,
i-na 20 A.ŠÀ GARIM 1[0 *ša*] GARIM UGU GARIM *i-t[e]-ru*

33. tear out, 10' the surface you leave.
i-sù-uh-ma 10 [A.ŠÀ *te-*]*zi-ib*
(Followed by a proof, Rev. II.1-9)

Even this problem is of the first degree, but on almost all other accounts it differs from the preceding examples. It belongs on one of two tablets containing a sequence of problems dealing with the same two plots of land (I and II in the following). The rent of I is told to be 4 GUR of grain per BUR of land, whereas that of II is 3 GUR per BUR.

These units are those of practical agriculture but not those used in mathematical computations, which reduce all hollow measures to SÌLA (1 SÌLA ≈ 1 litre) and all areas to SAR (1 SAR = 1 NINDAN², *cf.* note 7). 1 GUR is 5' SÌLA, but the calculator does not need to multiply in order to convert the 4 and 3 GUR —they can be looked up directly in a metrological table, as 20' and 15', respectively (lines 8 and 9), as can the value of the BUR (30' SAR). What cannot be found in a table but has to be calculated is the specific rent expressed in basic units (the 'false grain', the rent that would have to be paid if the plot had been only 1 SAR).

In the present problem, we are told the difference between the areas[11] (line 5, 10' SAR) and the total rent paid for the two plots (line 6, 18'20 SÌLA). (The "now") of line 5 is probably to be read, 'this time is given'. We start by 'positing' the various data —may be this time it simply means that we should write them down, perhaps that they are to be inserted in an adequate calculational scheme or device.[12] We also posit a number '1, projecting', to which we shall return.

11 The Babylonian term for area is the same as the word for 'field', with the only difference that the areas of mathematical problems are invariably written with the Sumerogram (A.ŠÀ), whereas 'real' fields may occur in syllabic writing. In order to keep this conceptual nexus in mind, I use the translation 'surface'.

12 The distinction between 'positing' and keeping in the head supports the latter possibilities: if 'positing' was simply 'writing down', why not write down everything that was to be remembered?

27. acumular: 35'; el IGI que yo no conozco.
GAR.GAR MA 35 *i-gi-am ú-ul i-di*

28. ¿Qué para 35' posicionaré yo?
mi-nam a-na 35 lu-uš-ku-un

29. ¿cuál 11'40 que su cabeza retiene me da?
ša 11,40 *ša r[e-e]š-ka u-ka-lu i-na-di-nam*

30. 20' posiciona. 20' a 35' elevar, 11'40 le da,
20 GAR.RA 20 *a-[na]* 35 ÍL 11,40 *it-ta-di-kum*

31. 20' que usted ha posicionado es la primera parcela;
20 *ša ta-aš-ku-[nu* A.]ŠÀ GARIM *iš-te-at*

32. de 20', la superficie de la parcela, 10' que [alisa] la superficie sobre la superficie va más allá,
i-na 20 A.ŠÀ GARIM 1[0 *ša*] GARIM U.GU GARIM *i-t[e]-ru*

33. quitar. 10' la superficie deja usted.
ú-sú-uh-ma 10 [A.ŠÀ *te-*]*zi-ib*

(Seguido por una prueba. Rev. II.1-9)

Este problema aún es de primer grado, pero en casi todos sus puntos difiere de los ejemplos anteriores. Este pertenece a una de las dos tablas que contienen una serie de problemas que tratan las mismas dos parcelas de tierra (I y II en lo siguiente). La renta de I se ha dicho que es 4 GUR de grano por cada BUR de tierra, en vista de que II es 3 GUR por BUR.

Estas unidades son para las que se usan en agricultura práctica, pero no son las usadas en cálculos matemáticos, las que reducen todas las medidas de capacidad a SILA (1 SILA ≈ 1 litro) y todas las áreas de SAR (1 SAR = 1 NINDAN², *cf.* nota 7). 1 GUR es 5' SILA, pero el que lo calcula no necesita multiplicar para convertir el 4 y 3 GUR —éstas pueden ser consultadas directamente en una tabla metrológica, como 20' y 30', respectivamente (líneas 8 y 9), como puede el valor de BUR (30' SAR). Lo que no pueda encontrarse en tablas y tiene que ser calculado es la renta específica expresada en unidades básicas (el 'grano falso', la renta que tendría que haber sido pagada si la parcela hubiera sido sólo 1 SAR).

Then, in lines 13-15 we find, first, the specific rent of I ([30']1°20' = 40' SILA/SAR), and second, the rent of the part of I by which it exceeds II (6`40 SILA). The remaining rent (11`40 SILA) must then come from an area (A) to which I and II contribute equally.

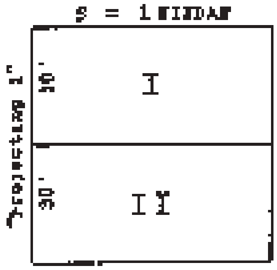

Figure 6

This is where the 'projecting 1' comes in. According to other texts it is the standard breadth 1 which transforms a line of length s [NINDAN] into a rectangle of area $1{\times}s = s$ [SAR]. In the present case, s is 1 NINDAN —and the 'breaking' (*i.e.*, bisection) of the projecting 1 means that this unit area, regarded as an *average* SAR, is split into equal component parts belonging to I and II —*cf.* Figure 6.

Lines 20 to 27 calculates the rent of this average area (repeating for pedagogical reasons the computation of the specific rent of I) as 35' SILA/SAR. A can thus be found as 11`40/35'.

35', however is irregular, *i.e.*, does not possess a finite sexagesimal reciprocal, and *a fortiori* not listed in the table of reciprocals. The text therefore has to ask for the number which, when raised to 35', gives 11`40 (lines 28-30). This is 20`.

At this point, a short-circuit occurs. Instead of bisecting this value, identifying one half with II and adding the other half to the excess in order to get I, it identifies the quotient directly with I, and finds II by subtracting the excess.

Such mistakes do not abound in the text material, but there are more of them (we shall meet another example in YBC 6504 N° 4). They reflect the fact that all problems were constructed backwards, and the result thus known in advance; in the present text, moreover, a copyist (who is more likely than an original author to have mixed up things) will have been familiar with the configuration from the first two problems of the tablet, and he may therefore have been tempted to 'improve' a text which he had only followed imperfectly while copying.

En el problema presente, se mostraron las diferencias entre las áreas[11] (línea 5, 10' SAR) y la renta total pagada por las *dos* parcelas (línea 6, 18'20 SILA). (El 'ahora' de la línea 5 es, probablemente, leído como 'esta vez se da'). Iniciamos posicionando varios datos —tal vez esto signifique que debamos anotarlos, quizá están para ser insertados en un esquema o dispositivo de cálculo adecuado—.[12] Nosotros también posicionamos un número '1, proyectando', a lo que regresaremos después.

Por consiguiente, en las líneas 13-15 encontramos, primero, la renta específica de I ($[30']^{-1}$ 20' = 40' SILA/SAR), y segundo, la renta de la parte de I que excede a II (6'40 SILA). El sobrante de renta (11'40 SILA) debe venir entonces de una área A en la que I y II contribuyen igualmente.

Aquí es donde se aplica 'proyectando 1'. De acuerdo con otros textos es el ancho estándar 1 que transforma una línea de longitud *x* [NINDAN] en un rectángulo de área 1×*x* = *x* [SAR]. En el caso presente *x* es 1 NINDAN —y la 'partición (*i.e.* bisección) de la proyección 1 significa que esta unidad de área, vista como un *promedio* SAR, se separa en partes iguales de componentes pertenecientes a I y II— *cf.* figura 6.

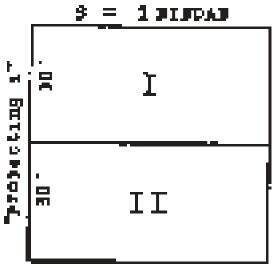

Figura 6

Las líneas 20 a 27 calculan la renta de esta área promedio (repitiendo por razones pedagógicas el cálculo de la renta específica de II como 35' SILA/SAR. A entonces puede encontrarse como 11'40/35'.

Sin embargo, 35' es irregular, *i.e.*, no posee un recíproco finito sexagesimal, y *a fortiori* no hay uno listado en la tabla de recíprocos. De ahí que el texto se pregunte por el número que cuando elevado a 35' da 11'40 (líneas 28-30). Obteniendo como resultado 20'

11. El término habitual para área es el mismo que para la palabra 'campo', con la única diferencia que las áreas de los problemas matemáticos están invariablemente escritas con el sumerograma (A-ŠÀ), donde los campos reales *pueden* estar en escritura silábica. Para tener este concepto en mente, uso la traducción 'superficie'.
12. La distinción entre 'posicionando' y manteniendo en la cabeza apoyan las posibilidades posteriores: si 'posicionar' fue simplemente 'anotar', ¿por qué no anotar todo lo que tenía que ser recordado?

II Basic second-degree techniques

BM 13901 N°1[13]

Obv. I

1. The surface and my confrontation I have accumulated. 45' is it. 1, the projection,
A.ŠÀ^{lam} ù mi-it-ḫar-ti ak-m[ur-m]a 45-e 1 wa-ṣi-tam

2. you posit. The moiety of 1 you break, 30' and 30' you make hold each other.
ta-ša-ka-an ba-ma-at 1 te-ḫe-pe [3]0 ù 30 tu-uš-ta-kal

3. 15' to 45' you append: 1 makes 1 equilateral. 30' which you have made hold
15 a-na 45 tu-ṣa-ab-ma 1-[e] 1 ÍB.SI₈ 30 ša tu-uš-ta-ki-lu

4. in the inside of 1 you tear out: 30' the confrontation.
lìb-ba 1 ta-na-sà-aḫ-ma 30 mi-it-ḫar-tum

This is, in modern terms, a normalized second-degree problem with one unknown. It deals with a square, the Babylonian concept of which requires some explanation. To us, *a square* is a 'figure', *i.e.*, an area contained by a border (in agreement with *Elements* I, definitions 14 and 22); it *is* its area (say, 9 m^2) and *has* a side (3 m). To the Babylonians, instead, the frame was the essential aspect of the configuration —the name of the square, the *mitḫartum*, translated, 'confrontation', is a verbal noun referring to a situation characterized by the confrontation of equals. To them, the square *is* its side (the 'confrontation' of 30' NINDAN) and *has* an area (15' SAR) —corresponding to that other Greek concept of a square, the much-discussed *dynamis*, *cf.* [Høyrup 1990b].

If s designates the side, the problem can thus be translated into

$$s^2 + s = 45',$$

and the numerical steps of the solution correspond exactly to those by which, we would solve this equation. The 'projection', 'breaking' and 'moiety' show, however, that the Babylonian calculator worked within a different —geometrical— framework —see Figure 2. The statement 'accumulates' the area and the side, *i.e.*, adds their measuring numbers

13 Transliteration [MKT III, 1]. Translation and analysis [Høyrup 1990a, 266-270].

En este momento ocurre un 'corto-circuito'. En lugar de bisectar estos valores, identificando una mitad con **II** y agregando la otra mitad al excedente para obtener **I**, se identifica el cociente directamente con **I**, y se encuentra **II** por la sustracción del excedente.

Tales errores no abundan en el material del texto, pero hay más de estos (nos encontraremos otro ejemplo en YBC 6504 Nº 4). Estos reflejan el hecho que todos los problemas fueron construidos al revés, y el resultado, por consiguiente, se conocía de antemano; más aún, en el presente texto un copista (quien es más fácil que revuelva las cosas que un autor original) ha estado familiarizado con la configuración de los dos primeros problemas de la tabla y, por tanto, pudo haber estado tentado a 'mejorar' un texto que él sólo había seguido imperfectamente mientras lo copiaba.

II. Técnicas básicas de segundo-grado

BM 13901 Nº 1[13]

Anv. I

1. La superficie y mi confrontación yo he acumulado: 45' es. 1, la proyección.
A.ŠÀ^{lam} *ù mi-it-ḫar-ti ak-m*[*ur-m*]*a* 45-E 1 *wa-ši-tam*

2. usted posiciona. La media de 1 parte usted, 30' y 30' usted puede sostener uno a otro.
ta-ša-ka-an ba-ma-at 1 *te-ḫe-pe* [3]0 *ù* 30 *tu-uš-ta-kal*

3. 15' a 45' usted agrega: 1 hace 1 equilátero. 30' que usted ha hecho sostener
15 *a-na* 45 *tu-sa-ab-ma* 1-[E] 1 ÍB.SI$_8$. 30 *ša tu-uš-ta-ki-lu*

4. dentro de 1 usted quita: 30' la confrontación.
lìb-ba 1 *ta-na-sà-aḫ-ma* 30 *mi-it-ḫar-tum*

Este es, en términos modernos, un problema normalizado de segundo-grado con una incógnita, que trata con un cuadrado, concepto babilónico que requiere cierta explicación. Para nosotros, un *cuadrado* es una 'figura', *i.e.*, un área contenida por un borde (de acuerdo con los *Elementos* I, definiciones 14 y 22) que en sí, *es* el área (digamos 9 m^2)

13 Transcripción [MKT III, 1]. Traducción y análisis (Høyrup 1990a, 266-270).

In order to make this concretely meaningful we conceptualize the side s as provided with a 'projection 1', we then know that the total area of the square $\square(s)$ together with the adjacent rectangle $\sqsubset\!\sqsupset(1,s)$ is $45'$.[14] Next we, 'break' the projection. 'Breaking' is a process which bisects into 'natural', or 'necessary' halves ('moieties' in the translation), halves which could not be (say) $29'$ and $31'$ times the entity in question. It finds the radius of the circle from the diameter, the average between opposite sides when we have to calculate the area of a trapezium, etc. Even in cases where only one of the moieties is used, 'breaking' is distinguished sharply from taking a merely incidental half through multiplication by $30'$ (thus for instance in AO 8862 N° 2, see below, p. 290).

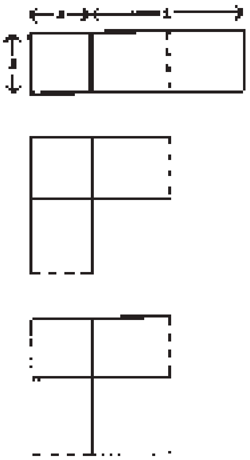

Figure 7

In the present case, the halves can indeed be nothing but halves, since the outer half of the rectangle has to be moved so as to 'hold' a square together with the part that remains in place.[15] This produces a gnomon of area $45'$, which is completed by the square $\square(30') = 15'$. The area of the completed square is thus $45'+15' = 1$, and it is told that "1 makes 1 equilateral" —*i.e.*, when (the first) 1 is laid out as a square, (the second) 1 will be the (equilateral) side. 'Tearing out' that part of the rectangle which was 'made hold', *i.e.*, which was moved, leaves the side of the square, as $1-30' = 30'$.

No attempt is made in the text to prove explicitly that the outcome of this geometrical cut-and-paste procedure is identical with the side

14. For convenience I shall henceforth use the symbol $\square(s)$ for the geometric square on s, and $\sqsubset\!\sqsupset(a,b)$ for the rectangle contained by a and b.

15. The literal meaning of the term (*šutakūlum*) has been subject to much discussion. It is a reciprocal causative, either of *akālum*, 'to eat', or from *kullum*, 'to hold'. Mostly the former derivation has been accepted, because of a Sumerographic writing by means of KÚ, 'to eat'. Often, however, the relative clause of line 3, "which you have made hold/eat", is replaced by a verbal noun that cannot derive from *akālum* (*cf.* p. 19, YBC 6967, rev. 1, where it is occurs as 'the made-held'), which excludes the habitual interpretation; the Sumerographic writing, on the other hand, is easily explained as a pun-like transfer, of which there are many in the cuneiform script.

que *tiene* un lado (3m). Para los Babilonios, sin embargo, el marco era el aspecto esencial de la configuración —el nombre del cuadrado, el *mithartum*, traducido como 'confrontación', es un sustantivo verbal que se refiere a una situación caracterizada por la confrontación de igualdades—. Para ellos, el cuadrado *es* su lado (la 'confrontación' de 30' NINDAN) y *tiene* un área (15' SAR) —correspondiendo a aquel otro concepto griego de un cuadrado, el muy discutido *dynamis*—, *cf.* [Høyrup 1990b].

Si s denota el lado, entonces el problema puede traducirse como

$$s^2 + s = 45',$$

y los pasos numéricos de la solución corresponden exactamente a aquellos con los que resolveríamos esta ecuación. Los términos 'proyección', 'partiendo' y 'media' muestran, sin embargo, que el calculador babilónico trabajó con una estructura —geométrica— diferente, ver figura 7. La declaración 'acumula' el área y el lado, *i.e.*, agrega sus medidas. Para hacer ésto concretamente significativo, conceptualizamos el lado s como provisto con una 'proyección 1'; entonces sabemos que el área total del cuadrado □(s) junto con el rectángulo adyacente ▭(1,s) es 45'.[14] Después 'partimos' la proyección. 'Partir' es un proceso que biseca en mitades, 'naturales' o 'necesarias' ('medias' en la traducción), aquellas que no pudieron ser (digamos) 29' y 31' veces la entidad en cuestión. Este encuentra el radio del círculo desde el diámetro, el promedio entre lados opuestos cuando tenemos que calcular el área de un trapecio, etc. Aún en los casos cuando solamente una de las medias se usa, 'partir' se distingue finalmente al tomar una mitad de forma incidental por medio de la multiplicación por 30' (por consiguiente, en AO 8862 Nº 2, ver parte inferior p. 293).

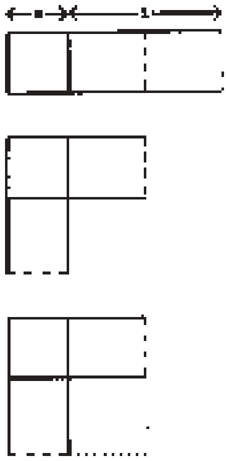

Figura 7

14. Por conveniencia usaré de aquí en adelante el símbolo □ (s) para el cuadrado geométrico en s y ▭(a,b) para el rectángulo contenido por a y b.

—but that it really is can be 'seen' immediately. The procedure is thus not blind, not the outcome of a trial-and-error play with numbers as sometimes assumed: but we may label it 'naive', in contrast to the 'critical' style of Euclid's *Elements*, where the explicit concern for proof is paramount. In this respect the Babylonian technique is akin to modern school algebra (at least as it looked before the new math movement): even here, the correctness of operations is mostly obvious but not subjected to explicit proof.

BM 13901 No 2[16]

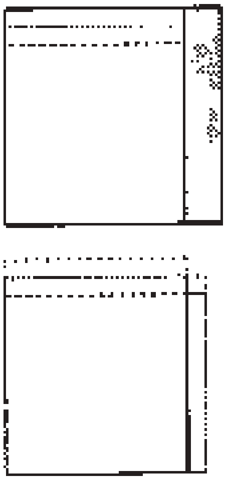

Figure 8

5. My confrontation inside the surface I have torn out: 14'30 is it. 1, the projection.
mi-it-ḫar-ti lìb-bi A.ŠÀ *[a]s-sú-uḫ-ma* 14.30-E 1 *wa-ṣí-tam*

6. you posit. The moiety of 1 you break. 30' and 30' you make hold each other,
ta-ša-ka-an ba-ma-at 1 *te-ḫe-pe* 30 *ù* 30 *tu-uš-ta-kal*

7. 15' to 14'30 you append: 14'30'15' makes 29'30' equilateral.
15 *a-na* 14.30 *tu-ṣa-[ab]-ma* 14.30.15-E 29,30 ÍB.SI$_8$

8. 30' which you have made hold to 29'30' you append: 30 the confrontation
30 *ša tu-uš-ta-ki-lu a-na* 29,30 *tu-ṣa-ab-ma* 30 *mi-it-ḫar-tum*

This problem follows directly after the previous one in a tablet containing in total 24 problems about squares. The question is equally simple:

$$\square(s) - s = 14'30,$$

and it is dealt with in a similar way: Removal of a side (provided once again with a 'projection', shaded in Figure 8) leaves us with a rectangle whose length exceeds its width by a known amount (*viz* 1, the

16. Transliteration [MKT III, 1], translation and analysis [Høyrup 1990a: 270]

En este caso, las mitades pueden ser sólo mitades, dado que la mitad externa del rectángulo tiene que ser movida hasta que 'sostenga' un cuadrado junto con la parte que sobra en el lugar.[15] Esto produce un gnomon de área 45', el que se completa por el cuadrado □(30') = 15'. El área del cuadrado completo es entonces 45'+15' = 1, y se dice que '1 hace 1 equilátero' —*i.e.*, cuando (el primero) 1 está dispuesto como un cuadrado, (el segundo) 1 será el lado (equilátero). 'Quitando' esa parte del rectángulo que fue 'para sostener', *i.e.*, la que fue removida, deja el lado del cuadrado, como 1-30' = 30'.

No se han hecho intentos en el texto para probar explícitamente que el resultado de este procedimiento geométrico de quitar y poner es idéntico con el lado —pero que éste realmente lo sea puede 'verse' inmediatamente. El procedimiento no es irracional, no es el resultado de un juego de ensayo-error con números como se piensa; pero podemos etiquetarlo de 'ingenuo', en contraste con el estilo 'crítico' de los *Elementos* de Euclides, donde el interés explícito para la prueba es fundamental. A este respecto, la técnica babilónica es semejante a la escuela del álgebra moderna (al menos como se veía antes del movimiento matemático moderno): aún aquí, la exactitud de las operaciones es mayor, aunque no está sujeta a una prueba explícita.

BM 13901 N° 2[16]

5. Mi confrontación dentro de la superficie he quitado: es 14°30. 1, la proyección.
mi-it-ḫar-ti li-ib-bi A.ŠÀ *[a]s-sú-uḫ-ma* 14.30-E 1 *wa-ṣi-tam*

6. Usted posiciona. La media de 1 usted parte, 30' y 30' usted hace sostener uno al otro,
ta-ša-ka-an ba-ma-at 1 *te-ḫe-pe* 30 ù 30 *tu-uš-ta-kal*

---

15 El significado literal del término (*šutākulum*/*šutakūlum*) ha sido objeto de discusión. Es un causativo recíproco de *akālum*, 'sustentar', o de *kullum* 'sostener'. En la mayoría de las veces la primera derivación se ha aceptado, por un escrito sumerográfico que significa KÚ, 'sustentar'. Con frecuencia, sin embargo, la cláusula relativa en la línea 5 'que usted ha hecho sostener/sustentar', es reemplazada por un sustantivo verbal que no puede derivarse de *akālum* [*cf.* p. 19, YBC 6967, rev. 1, donde ésto está como 'el hecho-sostener'], que excluye la interpretación 'sustentar'. Por otro lado, la escritura sumerográfica es fácilmente explicada como un juego de transferencias de palabras, que tiene bastante la escritura cuneiforme.

16 Transcripción [MKT III, 1]; traducción y análisis [Høyrup 1990a: 275f].

'projection', and whose area is known to be 14'30. This excess is broken, the outer half moved so as to make the two parts 'hold' a completing square □(1/2) = 15'. This is appended to the gnomon, which gives us an area of the completed square equal to 14'30°15' and a corresponding, 'equilateral' 29°30'. Putting back in place that half of the excess which was moved in order to 'hold' restores the side of the original square.

BM 13901 No 14[17]

Obv. II

44. The surfaces of my two confrontations I have accumulated: 25'25''.
A ŠÀ ši-ta mi-it-ḫa-ra-ti-ia ak-mur-ma [25.]25

45. The confrontation, two-third of the confrontation and 5' NINDAN
mi-it-ḫar-tum ši-ni-pa-at mi-it-ḫar-tim [ù 5 NINDA]N

46. 1 and 40' and 5' over-going 40' you inscribe
1 ù 40 ù 5 [e-le-nu 4]0 ta-la-pa-at

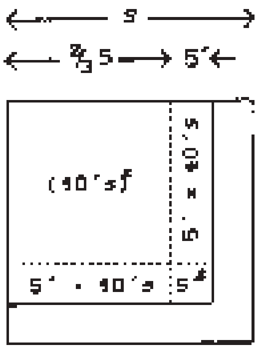

Figure 9

47. 5' and 5' you make hold each other, 25'' inside 25'25'' you tear out:
5 ù 5 [*tu-uš-ta-kal 25 lìb-bi 25,25 ta-na-sà-aḫ-ma*]

Rev. I

1. 25' you inscribe. 1 and 1 you make hold each other. 1. 40' and 40' you make hold each other,
[25 *ta-la-pa-at* 1 *ù* 1 *tu-uš-ta-kal* 1 40 *ù* 40 *tu-uš-ta-kal*]

17 Transliteration [MKT III, 2], translation and analysis [Høyrup 1990a: 306-309]. The text of the problem is rather damaged; due to the parallels in N°24, however, all restitutions apart perhaps from minute details seem certain.

7. 15' a 14'30 usted agrega: 14'30°15' hace 29°30' equilátero.
15 *a-na* 14,30 *tu-sa-[ab-ma* 14,30,15-E 29.30 íb-si$_8$

8. 30' que usted ha hecho sostener a 29°30' usted agrega: 30 la confrontación.
30 *ša tu-uš-ta-ki-lu a-na* 29.30 *tu-sa-ab-ma* 30 *mi-it-ḫar-tum*

Este problema sigue al anterior en una tableta que contiene en total veinticuatro problemas sobre cuadrados. La pregunta es igualmente simple:

□(*s*)−*s* = 14'30,

y se trata de una manera similar: eliminar un lado (que tiene nuevamente una 'proyección': sombreado en la figura 8) dejando así un rectángulo cuya longitud excede su ancho en una cantidad conocida (viz. 1 la 'proyección'), y cuya área es 14'30. Este excedente se parte, la mitad externa se traslada hasta tener las dos partes que 'forman' un cuadrado completado □(1/2) = 15'. Este es agregado al gnomon, que nos da el área del cuadrado completo igual a 14'30°15' y un 'equilátero' correspondiente 29°30'. Colocando en su lugar esa mitad de excedente que fue trasladada para 'formar' (el cuadrado) entonces se restaura el lado del cuadrado original.

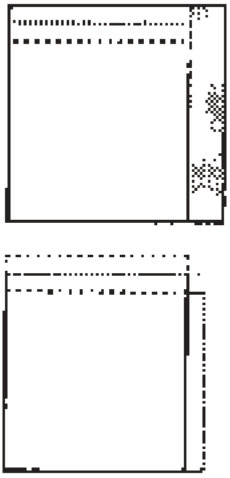
Figura 8

BM 13901 Nº 14[17]

Anv. II

44. La superficie de mis dos confrontaciones he acumulado: 25'25''
A.ŠÀ ši-ta mi-it-ḫa-ra-ti-ia ak-mur-ma [25,]25

45. La confrontación, dos-tercios de la confrontación y 5' NINDAN
mi-it-ḫar-tum ši-ni-pa-at mi-it-ḫar-tim [ù 5 NIND]AN

17. Transcripción [MKT III,3], traducción y análisis [Høyrup 1990a: 306-309]. El texto del problema está algo dañado, sin embargo, debido a las paralelas en el Nº 24, todas las restituciones, salvo algunos detalles menores, pueden ser ciertas.

2. 26'40'' to 1 you append: 1°26'40'' to 25' you raise:
[26.40 *a-na* 1 *tu-sa-ab-ma* 1,26.40 *a-na* 25 *ta-na-ši-ma*]

3. 36'6''40''' you inscribe. 5' to 40' you raise: 3'20''
[36.6,40 *ta-la-pa-at* 5 *a-na* 4]0 *t*[*a-na-ši-ma* 3.20]

4. and 3'20'' you make hold each other. 11''6'''40'''' to 36'6''40''' you append:
[ù 3,20 *tu-uš-ta-kal* 11,6,40] *a-na* 3[6,]6,40 [*tu-sa-ab-ma*]

5. 36'17''46'''40'''' makes 46'40'' equilateral. 3'20'' which you have made hold
[36.17.46.40-e 46.40 íb.si8. 3.]20 *ša tu-uš-ta-ki*[*-lu*]

6. inside 46'40'' you tear out: 43'20'' you inscribe
[*lìb-bi* 46.40 *ta-na-sà-aḫ-*]*ma* 43.20 *ta-la-pa-a*[*t*]

7. The IGI of 1°26'40'' is not detached. What to 1°26'40''
[IGI 1,26.40 *ú-la ip-pa-t*]*a-ar mi-nam a-na* 1.2[6.4]0

8. shall I posit which 43'20'' gives me? 30' its *bandûm*.
[*lu-uš-ku-un ša* 43.20 *i-n*]*a-di-nam* 30 *ba-an-da-šu*

9. 30' to 1 you raise: 30' the first confrontation
[30 *a-na* 1 *ta-na-ši-ma* 30] *mi-it-ḫar-tum iš-ti-a-at*

10. 30' to 40' you raise: 20', and 5' you append:
[30 *a-na* 40 *ta-na-ši-ma* 20] *ù* 5 *tu-sa-ab-ma*

11. 25' the second confrontation
[25 *mi-it-ḫar-t*]*um ša-ni-tum*

After a number of intermediate steps where the single techniques are introduced and trained, the same 'square' text comes to this problem about two squares:

$$\square(s_1) + \square(s_2) = 25'25'' \; , \; s_2 = \tfrac{2}{3}s_1 + 5'$$

Once again, the numerical steps run parallel to what we would do (if submitted to the constraints of the sexagesimal system). In order to express $\square(s_1)$ and $\square(s_2)$ in terms of a third square $\square(s)$ and its side s, it

46. 1 y 40' y 5' sobre-saliendo 40' usted inscribe.
1 à 40 ù 5 [*e-le-nu* 4]0 *ta-la-pa-at*

47. 5' y 5' usted hace sostener uno con otro. 25'' dentro 25'25'' usted quita:
5 ù 5 [*tu-uš-ta-kal* 25 *lìb-bi* 25,25 *ta-na-sà-ah-ma*]

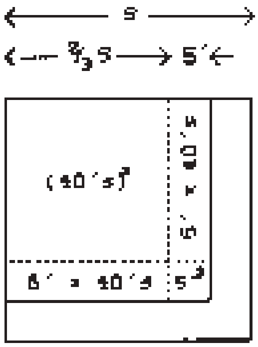

Figura 9

Rev. I

1. 25' usted inscribe. 1 y 1 usted hace sostener uno con otro. 1 40' y 40' usted hace sostener uno con otro.
[25 *ta-la-pa-at* 1 à 1 *tu-uš-ta-kal* 1,40 ù 40 *tu-uš-ta-kal*]

2. 26'40'' a 1 usted agrega: 1°26'40'' a 25' usted eleva:
[26,40 *a-na* 1 *tu-sa-ab-ma* 1,26,40 *a-na* 25 *ta-na-ši-ma*]

3. 36'6''40''' usted inscribe. 5' a 40' usted eleva: 3'20''
[36,6,40 *ta-la-pa-at* 5 *a-na* 4]0 *i*[*ta-na-ši-ma* 3,20]

4. y 3'20'' usted hace sostener uno con otro, 11''6'''40'''' a 36'6''40''' usted agrega
[à 3,20 *tu-uš-ta-kal* 11,6,40] *a-na* 3[6,]6,40 [*tu-sa-ab-ma*]

5. 36'17''46'''40'''' haga 46'40'' equilátero. 3'20'' que usted ha hecho sostener
[36,17,46,40-e 46,40 íb.si$_8$ 3,]20 *ša tu-uš-ta-ki*[*-lu*]

6. dentro 46'40'' usted quita: 43'20'' usted inscribe
[*lìb-bi* 46,40 *ta-na-sà-ah-*]*ma* 43,20 *ta-la-pa-a*[*t*]

7. El IGI de 1°26'40'' no está separado. ¿Qué a 1°26'40''?
[IGI 1,26,40 *ú-la ip-pa-t*]*a-ar mi-nam a-na* 1,2[6,4]0

8. posicionaré con 43'20'' me dá? 30' sus *bandum*.
[*lu-uš-ku-un ša* 43,20 *i-n*]*a-di-nam* 30 *ba-an-da-šu*

'inscribes' 1 ($s_1 = 1\ s$), 2/3 = 40' and 5'($s_2 = 40'\cdot s + 5'$) in line 46. As seen in Figure 9, $\square(s_2)$ decomposes into $\square(40's)$, $2\sqsubset\!\sqsupset(5',40's)$ and $\square(5')$, which the text identifies without difficulty with $\square(40')$ (treated as the number $40'^2 = 26'40''$) times $\square(s)$, 2 times $\sqsubset\!\sqsupset(40'\cdot5',s)$[18] and 25''. $\square(s_1)$, of course, is $\square(1) = 1$ times $\square(s)$.

The problem is thus reduced to

$$1°26'40''\square(s) + 2\sqsubset\!\sqsupset(3'20''\cdot s) = 25'25'' - 25'' = 25'.$$

This problem cannot be normalized in the way we would normally do it, since 1°26'40'' does not divide 25'. That is at least one reason why the text chooses a different path. In general, the Babylonians would solve problems

$$\alpha\square(s) + \beta s = \eta$$

and

$$\sqsubset\!\sqsupset(\alpha s,s) + \beta s = \eta$$

by a change of variable, reducing them to

$$\square(\alpha s) + \beta(\alpha s) = \alpha\cdot\eta .$$

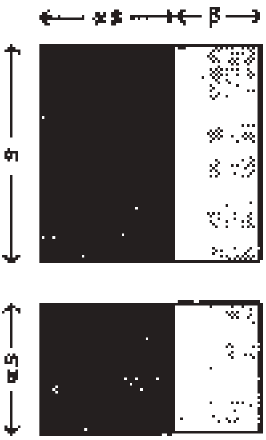

Figure 10

Geometrically, this corresponds to a change of scale in one direction, by which the rectangle $\sqsubset\!\sqsupset(\alpha s,s)$ is transformed into a square (this trick we shall encounter time and again in the following) —see Figure 10. We observe that the scaling transforms the β sides of $\square(s)$ into β sides of $\square(\alpha s)$.

$\alpha\eta$ is found in (Rev. I) line 2. Since β is already known to be twice 3'20'', no bisection is needed in order to produce the sides of the completing square, but apart from that everything runs as in problem N° 1 until line 6, where αs is found to be 43'20''. s itself is found to be 30' through division by the irregular number α = 1°26'40'' (the term *bandûm*, apparently a Sumerian loanword, evidently designates 'what shall be put alongside the divisor', which may indeed be the Sumerian etymology). Line 9 shows that the text really operates in

18 That this, and not $2\cdot\sqsubset\!\sqsupset(5'\cdot40')$ times $\square(s)$ is meant follows from the use of 'raising' instead of 'making hold'.

9. 30' a 1 usted eleva: 30' la primera confrontación
[30 *a-na* 1 *ta-na-ši-ma* 30] *mi-it-har-tum iš-ti-a-at*

10. 30' a 40' usted eleva: 20', y 5' usted agrega:
[30 *a-na* 40 *ta-na-ši-ma* 20] ù 5 *ta-ṣa-ab-ma*

11. 25' la segunda confrontación
[25 *mi-it-har-t*]*um ša-ni-tum*

Después de una serie de pasos intermedios en donde las técnicas únicas se introducen y se practican, el mismo texto del 'cuadrado' se aplica ahora a este problema sobre dos cuadrados

$$\square(s_1) + \square(s_2) = 25'25'',\ s_2 = \tfrac{2}{3}s_1 + 5'$$

Nuevamente el proceso numérico es paralelo a lo que haríamos (si son sometidos a las restricciones de un sistema sexagesimal). Para expresar $\square(s_1)$ y $\square(s_2)$ en términos de un tercer cuadrado $\square(s)$ y de su lado s, éste 'inscribe' 1($s_1 = 1\cdot s$), 2/3 = 40' y 5'($s_2 = 40'\cdot s+5'$) en la línea 46. Como se ve en la Figura 9, $\square(s_2)$ se descompone en $\square(40'\cdot s)$, $2\,\sqsubset(5', 40'\cdot s)$ y $\square(5')$, que en el texto identifica su dificultad con $\square(40')$ (tratado como el número $40'^2 = 26'40''$) veces $\square(s)$, 2 veces $\sqsubset(40'\cdot 5', s)$,[18] y 25''. $\square(s_1)$, por supuesto, es $\square(1) = 1$ veces $\square(s)$.

El problema entonces se reduce a

$$1°26'40''\square(s) - 2\cdot\sqsubset(3'20'', s) = 25'25''-25'' = 25'$$

Este problema no puede ser normalizado en la forma en la que generalmente lo haríamos, ya que 1°26'40'' no divide a 25'. Esta es al menos una razón de porque el texto toma una dirección diferente. En general, los babilonios resolvían problemas de la clase

$$\alpha\square(s) - \beta s = q$$

y

$$\sqsubset(\alpha s, s) + \beta s = q$$

por un cambio de variable se reducen a

18. El que esto, y no 2·(3'20'') veces $\sqsubset(1, s)$ se concluye del uso de 'elevando' en lugar de 'haciendo sostener'.

terms of a new s and not in terms of s_1 since s_1 is found as 1-s. Lines 10-11 finally find s_2.

Beyond the secure hand demonstrated by the text, its most important feature is how it dispenses with the doubling of 3'20'' and the ensuing bisection. This illustrates that the Babylonians calculators did not operate with fixed standard algorithms (as claimed in much of the secondary literature). Theirs was a flexible understanding, allowing them to make shortcuts when these were allowed by a particular situation.

YBC 6967[18]

Obverse

1. The *igibûm* over the *igûm* 7 goes beyond
[IGI.BI]*e-li* IGI 7 *i-ter*

2. *igûm* and *igibûm* what?
[IGI] *ù* IGI.BI *mi-nu-um*

3. You, 7 which the *igibûm*
a[t-t]a 7 *ša* IGI.BI

4. over the *igûm* goes beyond
UGU IGI *i-te-ru*

5. to two break: 3°30';
a-na ši-na hi-pi-ma 3.30

6. 3°30' together with 3°30'
3.30 *it-ti* 3.30

7. make hold each other: 12°15'.
šu-ta-ki-il-ma 12.15

8. To 12°15' which comes up for you
a-na 12.15 *ša i-li-a-ak-kum*

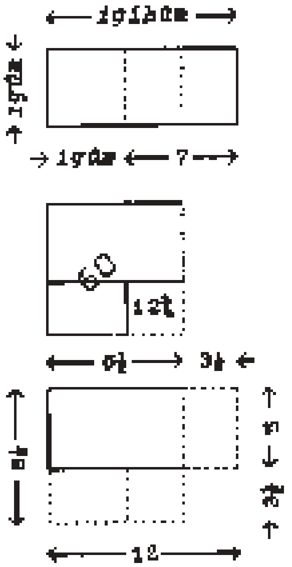

Figure 11

18. Transliteration [MCT, 129]. Translation and analysis in [Høyrup 1990a, 262-266].

$$\square(\alpha s) + \beta(\alpha s) = \alpha Q$$

Geométricamente, esto corresponde a un cambio de escala en una dirección, por lo que el rectángulo $\sqsubset(\alpha s, s)$ es transformado en un cuadrado (esta estrategia la encontramos en esta ocasión y en otra posterior); ver figura 10. Observamos que la transformación de escala del lados β del $\square(s)$ en el lados β de $\square(\alpha s)$.

αQ se encuentra en (Rev.I) la línea 2. Dado que β es conocida como el doble de 3°20'', entonces no es necesaria una bisección para generar los lados del cuadrado completo, fuera de eso, todo lo demás va como en el problema N° 1 hasta la línea 6, en donde αs es 43°20''. s es 30' lo cual se encuentra por

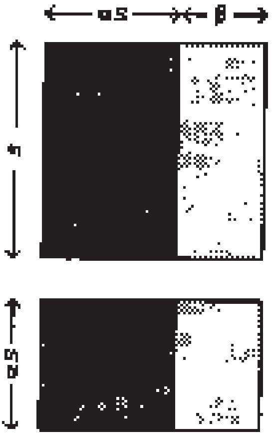

Figura 10

la división del número irregular α = 1°26'40'' (el término *bandûm*, aparentemente una palabra sumeria adoptada, evidentemente significa 'lo que debería ser puesto a lo largo del divisor', que puede ser de etimología sumeria). La línea 9 muestra que el texto realmente opera en términos de una nueva s y no en términos de s_1, ya que s_1 es encontrada como 1·s. Y, por último, en las líneas 10-11 se encuentra s_2

Más allá de la seguridad demostrada por el texto, su característica más importante es como ignora al doble de 30'20'' y la bisección que le sigue. Esto ilustra que los calculadores babilónicos no operaban con algoritmos estándar fijos (como se afirma en numerosa literatura secundaria). El suyo fue un entendimiento flexible, dejándoles hacer pequeños cortes cuando lo permitiera una situación particular.

9. To the surface append: 1'12°15'.
[A.ŠA]-*lam* *ṣi-ib-ma* 1,12,15

10. The equilateral of 1'12°15' what? 8°30'.
[ÍB.SI₈ 1],12,15 *mi-nu-um* 8,30

11. 8°30' and 8°30', its counterpart, lay down.
[8,30 ù] 8,30 *me-he-er-ša i-di-ma*

Reverse

1. 3°30', the made-hold,
3,30 *ta-ki-il-tam*

2. from one tear out,
i-na iš-te-en ú-su-uh

3. to the other append.
a-na iš-te-en ṣi-ib

4. The first is 12, the second is 5.
iš-te-en 12 *ša-na-um* 5

5. 12 is the *igibûm*, 5 is the *igûm*
12 IGI.BI 5 *i-gu-um*

More common than 'square problems' in the Babylonian corpus are 'rectangle problem'. Very often, complex problems reduce to the simpler cases of finding the sides of a rectangle of which the area and either the sum of the two sides or their difference is known.

The present problem is itself of the latter type, apart from the fact that it does not deal with geometry but with two numbers belonging together in the table of reciprocals —*i.e.*, two numbers whose product is 1 or (in the actual case) 60. They are spoken *igûm* and *igibûm*, Akkadian pronunciations of IGI and IGI.BI, 'the reciprocal and its reciprocal'.

If the latter is x and the former y (these symbols, which we habitually see as unknown *numbers*, are adequate in the present case), the problem is

$$x - y = 7, \quad xy = 60.$$

YBC 6967[19]

Anverso

1. El *igibûm* sobre el *igûm* 7 va más allá
[IGI.BU]M *e-li* IGI 7 *i-ter*

2. ¿*igûm* e *igibûm* qué?
[IGI] ù IGI.BI *mi-nu-um*

3. Usted, 7 con el *igibûm*
at-t[*a*] 7 *ša* IGI.BI

4. sobre el *igûm* sale más allá
UGU IGI *i-te-ru*

5. en dos partir: 3°30';
a-na ši-na ḫi-pí-ma 3,30

6. 3°30' junto con 3°30'
3.30 *it-ti* 3,30

7. hace sostener uno con otro: 12°15'.
šu-ta-ki-il-ma 12,15

8. Para 12°15' que alcanza para usted
a-na 12,15 *ša i-li-ka-a-kum*

9. 1' la superficie agregar. 1'12°15'.
[1 A.ŠÀ]*lam* *ṣí-ib-ma* 1,12,15

10. El equilátero de 1'12°15' ¿qué? 8°30'.
[ÍB.SI₈ 1],12,15 *mi-nu-um* 8,30

11. 8°30' y 8°30', su contraparte, horizontal.
[8.30 ù] 8,30 *me-he-er-ša i-di-ma*

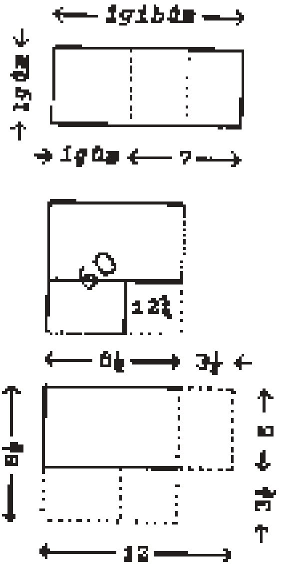

Figura 11

19 Transcripción [MCT, 129]. Traducción y análisis [Høyrup 1990b, 262-266]

Whereas we are accustomed to represent (e.g.) the length and width of a rectangle by unknown numbers, the Babylonian calculator represents his unknown numbers by his standard instruments —measurable line segments— and speaks in line 9 of the product as a 'surface'. The procedure is already familiar (see Figure 11, and compare with Figure 7 and Figure 8): We know that the length (*igûm* = *x*) of the rectangle exceeds its width (*igibûm* = *y*) by 7. This excess is bisected and the rectangle transformed into a gnomon, still of area 60, which is appended to the completing square □(7/2) = 12 1/4.[20] The side of the completed square —its 'equilateral'— must then be 8 1/2, which is 'laid down' together with 'its counterpart' (etymologically related to the 'confrontation'), as two sides of the completed square. 'Tearing out' that part 'the made-hold' of the excess which was moved in order to 'hold' the complement we get the *igûm*; putting it back to its original position we restore the *igibûm*.

The text illustrates that the Babylonian operation with lines and areas was really *an algebra*, if this is understood as analytic procedures in which unknown quantities are *represented* by functionally abstract entities —numbers in our algebra, measurable line segments and areas in the Babylonian technique.

TMS IX, Parts A and B[21]

Part A

1. The surface and 1 length accumulated, 40'. ˹30, the length, 20'˺ the width.
A.ŠÀ ù 1 UŠ UL.GAR 40 ˹30 UŠ˺ 20 SAG

2. As 1 length to 10' the surface, has been appended,
i-na-ma 1 UŠ *a-na* 10 ˹A˺.ŠÀ DAḪ]

3. or 1 (as) base to 20', the width, has been appended.
ù-lu 1 KI.GUB.GUB *a-na* 20 [SAG DAḪ]

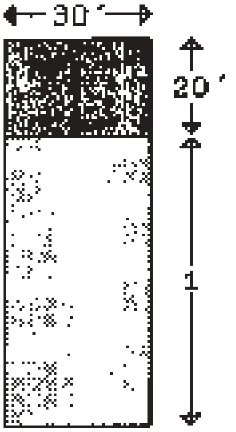

Figure 12

20. Normally, it is the completing square that is appended; but since both alcoves are already in place, one order is just as good as the other.

21. Transliteration [TMS, 63], corrections, translation and analysis [Høyrup 1990a: 320–327]

Reverso

1. 3°30', el hace-sostener,
3.30 *ša-ki-il-tum*

2. de uno sacar,
i-na iš-te-en i-na-sa-ah

3. al otro agregar.
a-na iš-te-en ṣí-ib

4. El primero es 12, el segundo es 5.
iš-te-en 12 ša-nu-um 5

5. 12 es el *igibûm*. 5 es el *igûm*
12 IGI.BI 5 *i-gu-um*

Más común que los 'problemas cuadrados' en el conjunto babilónico están los 'problemas rectangulares'. Es frecuente que los problemas complejos se reduzcan a casos más simples como encontrar los lados de un rectángulo, en donde el área y cualquiera de las sumas, o sus diferencias, de los dos lados es conocida.

El presente problema es, en sí mismo, del último tipo, fuera del hecho de que no trata de geometría sino de dos números pertenecientes a la tabla de recíprocos —*i.e.*, dos números cuyo producto es 1 o (en el caso actual) 60. Se habla de ellos como *igûm* y *igibûm*, pronunciaciones akadianas de IGI e IGI.BI, "el recíproco y su recíproco".

Si el último es x y el primero y (símbolos que habitualmente vemos como *números* desconocidos y que se adecúan en el presente caso), el problema equivale a

$$x-y = 7, \quad xy = 60.$$

En donde *nosotros* estamos acostumbrados a representar (*e.g.*) el largo y ancho de un rectángulo por números desconocidos, el calculador babilónico representaba los números desconocidos por sus instrumentos comunes —segmentos de línea medibles— y habla en la línea 9 del producto como una 'superficie'. El procedimiento es ya familiar (ver figura 11, y compare con las figuras 7 y 8): sabemos que el largo (*igûm* = x) del rectángulo excede su ancho (*igibûm* = y) en 7. Este exceso es

4. or 1°20' 'is posited' to the width which together with the length 'holds' 40'
ša-al 1.20 *a-na* SAG *ša* 40 *it-ti* UŠ ⌈NIGIN GAR⌉]

5. or 1°20' together with 30' the length holds, 40' is its name.
ša-al 1.20 *it-ti* 30 UŠ NIG[IN] 40 *šum-*[*ša*]

6. Since so, to 20' the width, which is said to you.
aš-šum ki-a-am a-na 20 SAG *ša qa-bu-ku*

7. I append: 1°20' you see. Out from here
1 DA[H]-*ma* 1.20 *ta-mar iš-tu an-ni-ki-a-am*

8. you ask. 40' the surface, 1°20' the width, the length what?
ta-ša-al 40 A.ŠÀ 1.20 SAG UŠ *mi-nu*

9. 30' the length. So the having-been-made.
[30 UŠ *k*]*i-a-am ne-pé-šum*

Part B.

10. Surface, length and width accumulated, 1. By the Akkadian (method).
[A.ŠÀ UŠ *ù* SAG UL.GAR 1 *i-na ak-ka-di-i*

11. 1 to the length append. 1 to the width append. Since 1 to the length is appended.
[1 *a-na* UŠ DAH] 1 *a-na* SAG DAH *aš-šum* 1 *a-na* UŠ DAH

12. 1 to the width is appended. 1 and 1 make hold, 1 you see.
[1 *a-na* SAG D]AH 1 *ù* 1 NIGIN 1 *ta-mar*

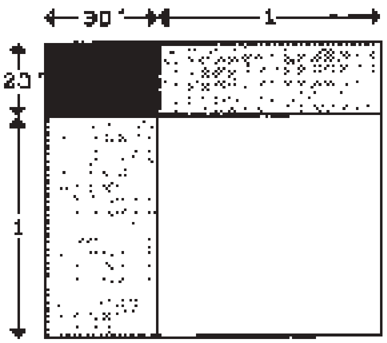

Figure 13

13. 1 to the accumulation of length, width and surface append. 2 you see.
[1 *a-na* UL.GAR UŠ] SAG *ù* A.ŠÀ DAH 2 *ta-mar*

bisectado y el rectángulo es transformado en un gnomon de área 60, que es añadido al cuadrado completado □(7/2) = 121/4.[20] El lado del cuadrado completado —su 'equilátero'— debe entonces ser 81/2, el cual está 'recostado' junto con 'su contraparte' (etimológicamente relacionado con la 'confrontación'), como dos lados del cuadrado completado. 'Quitando' esa parte ('el hacer sostener') del exceso que fue movido con el objeto de 'sostener' el complemento, obtenemos el *igûm*; poniéndolo de regreso en su posición original restituimos el *igibûm*.

El texto ilustra que la operación babilónica con líneas y áreas fue realmente un *álgebra*, si esto es entendido como procedimientos analíticos en los cuales cantidades desconocidas están *representadas* por entidades funcionalmente abstractas —números en nuestra álgebra, segmentos de líneas medibles y áreas en la técnica babilónica—

TMS IX, Partes A y B[21]

Parte A

1. La superficie y 1 largo acumulado, 40'. ˚30, la longitud', 20' el ancho.
A.ŠÀ ù 1 UŠ UL.GAR 4[0 ˚30 UŠ' 20 SAG]

2. Como 1 largo para 10' la superficie, ha sido agregada,
i-na-na 1 UŠ *a-na* 10' A.ŠÀ DAḪ]

3. o 1 (como) base de 20' el ancho, ha sido agregado,
ù-sí 1 KI.GUB.GUB *a-na* 20 [SAG DAḪ]

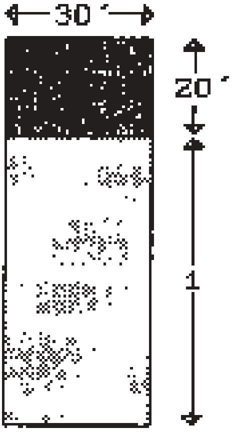

Figura 12

4. o 1°20' 'es posicionado' para el ancho que junto con el largo 'sostiene' 40'
ù-sí 1,20 *a-na* SAG *ša* 40 *a-ṣí* UŠ ... GAR']

20 Normalmente, es el cuadrado completado el que es agregado; pero dado que ambos agregados están ya en el lugar, un orden es tan bueno como el otro.
21 Transcripción [TMS, 63], correcciones traducción y análisis [Høyrup 1990a, 320-327].

14. To 20′ the width, 1 append. 1°20′. To 30′ the length, 1 append. 1°30′.
[*a-na* 20 SAG 1 DA]H 1,20 *a-na* 30 UŠ 1 DAH 1,30

15. ⌈Since⌉ a surface, that of 1°20′ the width, that of 1°30′ the length,
[*aš-šum*⌉ A.Š]À *ša* 1,20 SAG *ša* 1,30 UŠ

16. ⌈the length together with⌉ the width, are made hold, what is its name?
[UŠ *it-ti*⌉ SA[G *ta-ra-ku-su mi-nu šum-šu*

17. 2 the surface.
2 A.ŠÀ

18. So the Akkadian (method)
ki-a-am ak-ka-du-ú

This text (once again from Susa) belongs to the same didactically explicit genre as the first-degree texts TMS XVI and TMS VII, both discussed above. This one, however, explains some of the basic second-degree techniques in Parts A and B, before applying these to a complex problem in Part C.

All three parts deal with the same rectangle $\square(30',20')$. The tablet is damaged, but Part A clearly presupposes in its explanation that these dimensions are known, as is the area (10′). It discusses what to do when the sum of area and length is known, $\square(l,w) + l = 40'$. It is immediately taken for granted ['since ...'] that this means that the width is prolonged by 1 (*cf.* Figure 12). Then follow a sequence of reformulations ('or ..., or ... or ...', much in the vein of modern mathematical parlance). All in all, the total area 40′ is seen to be the rectangle held by the length and the width prolonged by the 'base' 1. In the end it is told how, if the width 20′ and the total area 40′ are known, the length can be found to be 30′.

Part B still presupposes the known values of l and w in its explanations but now treats the situation where $\square(l,w) + l - w = 1$, and tells us how to apply 'the Akkadian method'. As shown in Figure 13, this implies that both length and width are prolonged by 1, and hence also that a completing square $\square(1,1)$ be appended to the area. This 'surface 2' has the length 1°30′ and the width 1°20′.

5. o 1°20' junto con 30' el largo sostiene, 40' es su nombre.
i-na 1,20 *it-ti* 30 UŠ NIG[IN] 40 *šum-[šu]*

6. Dado que para 20' el ancho, que es dicho a usted,
aš-šum ki-a-am a-na 20 SAG *qá-bu-ku*

7. 1 agrega: 1°20' usted ve. Fuera desde aquí
1 DAḪ-*ma* 1,20 *ta-mar iš-tu an-ni-ki-a-am*

8. usted pregunta, ¿40' la superficie, 1°20' el ancho, el largo qué?
ta-ša-al 40 A.ŠÀ 1,20 SAG UŠ *mi-nu*

9. 30' el largo. Entonces el que ha tenido que ser hecho
[30 UŠ *k*]*i-a-am ne-pé-šum*

Parte B

10. Superficie, largo y ancho acumulado, 1. Por el akadiano (método).
[A.ŠÀ UŠ *ù* SAG UL]-GAR 1 *i-na ak-ka-di-i*

11. 1 al largo agregar. 1 al ancho agregar. Dado que 1 al largo es agregado,
[1 *a-na* UŠ DAḪ] 1 *a-na* SAG DAḪ *aš-šum* 1 *a-na* UŠ DAḪ

12. 1 es agregado al ancho. 1 y 1 hace sostener, 1 usted ve.
[1 *a-na* SAG D]AḪ 1 *ù* 1 NIGIN 1 *ta-mar*

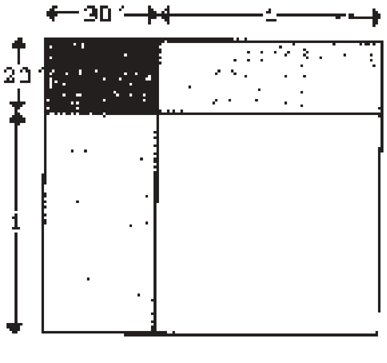

Figura 13

13. 1 para la acumulación del largo, ancho y superficie agregar, 2 usted ve.
[1 *a-na* UL.GAR UŠ] SAG *ù* A.ŠÀ DAḪ 2 *ta-mar*

14. Para 20' el ancho, 1 agregar, 1°20'. Para 30' el largo, 1 agregar, 1°30'.
[*a-na* 20 SAG 1 DA]Ḫ 1,20 *a-na* 30 UŠ 1 DAḪ 1,30

Since the feature which distinguishes this part most clearly from the preceding one is the quadratic completion, we may safely assume that this trick is what earned the name 'the Akkadian [method]'.

III. Complex second-degree problems

TMS IX, Part C [22]

19. Surface, length and width accumulated, 1 the surface. 3 lengths, 4 widths accumulated.
A.ŠÀ UŠ ù SAG UL.GAR 1 A.ŠÀ 3 UŠ 4 SAG UL.GAR

20. its 17th to the width appended, 30'.
[17]-*ti-šu a-na* SAG DAḪ 30

21. You, 30' to 17 go: 8°30' you see
[ZA.]E 30 *a-na* 17 *a-li-ik-ma* 8,30 [*t*]*a-mar*

22. To 17 widths 4 widths append, 21 you see.
[*a-na* 17 SAG] 4 SAG DAḪ-*ma* 21 *ta-mar*

23. 21 as much as of widths posit 3, of three of lengths.
[21 *ki-*]*ma* SAG GAR 3 *ša-la-aš-ti* UŠ

24. 3, as much as lengths posit. 8°30', what is its name?
[3 *ki*]-*ma* UŠ GAR 8,30 *mi-nu šum-šu*

25. 3 lengths and 21 widths accumulated.
[3] UŠ ù 2[1 SA]G UL.GAR

26. 8°30' you see
8,30 *ta-mar*

27. 3 lengths and 21 widths accumulated.
[3] UŠ ù 21 SAG UL.[GAR]

28. Since 1 to the length is appended and 1 to the width is appended, make hold.
[*aš-šum* 1 *a-na*] UŠ DAḪ [ù 1 *a*]-*na* SAG DAḪ NIGIN-*ma*

22 Transliteration [TMS, 64f], corrections, translation and analysis [Høyrup 1990a: 321-325, 327f].

15. 'Dado que' una superficie, que de 1°20' el ancho, que de 1°30' el largo,
[*šumma*'] A.Š[A *ša* 1,20 SAG *ša* 1,30 UŠ

16. 'el largo junto con' el ancho son hechos sostener, ¿cuál es su nombre?
[UŠ *it-ti*' SA]G *šu-ta-ku-la mi-na šum-šu*

17. 2 la superficie.
2 A.ŠÀ

18. Así el akadiano (método).
ki-a-am ak-ka-du-ú

Este texto (otra vez de Susa) pertenece al mismo género didáctico explícito como lo son los textos de primer-grado TMS XVI y TMS VII, discutidos anteriormente. Éste, sin embargo, explica en las partes A y B algunas de las técnicas básicas de segundo-grado antes de aplicarlas a un problema complejo en la parte C.

Las tres partes tratan con el mismo rectángulo $\sqsubset(30', 20')$. La tableta está dañada, pero la parte A claramente presupone en su explicación que estas dimensiones son conocidas, como lo es el área 10'. Ésta discute qué hacer cuando la suma del área y el largo es conocida, $\sqsubset(l, w)+l = 40'$. Esto se toma inmediatamente como conocido ("dado que ..."), y significa que el ancho es prolongado por 1 (*cf.* figura 12). Entonces continúa una secuencia de reformulaciones ("o ...o ...o ...", en el sentido del lenguaje de las matemáticas modernas). En conjunto, el área total 40' es vista como el rectángulo sostenido por el largo y el ancho prolongado por la 'base' 1. Al final se dice como si el ancho 20' y el área total 40' son conocidos, entonces el largo puede ser 30'.

La parte B sigue presuponiendo los números conocidos de l y w en sus explicaciones pero ahora trata el caso donde $\sqsubset(l, w)+l-w = 1$, y nos dice como aplicar 'el método Akadiano'. Como se muestra en la figura 13, esto implica que tanto el ancho como el largo son prolongados por 1, y en consecuencia el cuadrado que se genera $\square(1, 1)$ es agregado al área. Esta 'superficie 2' por consiguiente tiene el largo de 1°30' y el ancho 1°20'.

29. 1 to the accumulation of surface, length and width append, 2 you see.
1 *a-na* UL.GAR A.ŠÀ UŠ ù SAG DAḪ 2 *ta-mar*

30. 2 the surface. Since the length and the width of 2 the surface.
[2 A.]ŠÀ *iš-tum* UŠ ù SAG *ša* 2 A.ŠÀ

31. 1°30', the length, together with 1°20', the width, are made hold.
[1,30 UŠ *it*]-*ti* 1,20 SAG, *šu-ta-ku-lu*

32. 1 the appended of the length and 1 the appended of the width,
[1 *wa-ṣi*-]*bi* UŠ ù 1 *wa-ṣi-bi* SAG

33. make hold 4 you see 1 and 1, the various things, accumulate, 2 you see
[NIGIN 4 *ta-mar* 1 ù 1 ...]ḪI.A UL.GAR 2 *ta-mar*

34. 3 (...), 21 (...) and 8°30' accumulate, 32°30' you see:
[3 ... 21 ... ù 8,30 UL.GAR] 32,30 *ta-mar*

35. so you ask
[*ki-a*]-*am ta-ša-al*

36. ... of widths, to 21, accumulation:
[...] ...SAG *a-na* 21 UL.GAR-*ma*

37.... to 3, lengths, raise,
[...] *a-na* 3 UŠ *i-ši*

38. 1°3' you see. 1°3' to 2, the surface, raise.
[1,3 *ta-mar* 1,3 *a*]-*na* 2 A.ŠÀ *i-ši-ma*

39. 2°6' you see, (2°6' the surface). 32°30' the accumulation break. 16°15' you see
[2,6 *ta-mar* (2,6 A.ŠÀ)] 32,30 UL.GAR *ḫi-pí* 16,15 *ta-mar*

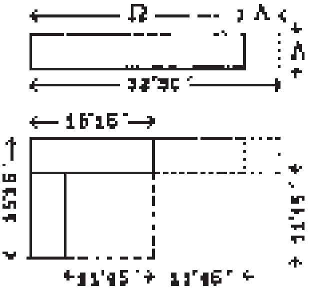

Figure 14

Dado que la característica que distingue esta parte más claramente de la anterior es la terminación cuadrática, entonces nosotros podemos suponer con seguridad que esta estrategia es el que llevaba el nombre 'el [método] Akadiano'.

III. Problemas complejos de segundo-grado

TMS IX, Parte C[22]

19. Superficie, largo y ancho acumulado, 1 la superficie. 3 largos, 4 anchos acumulados,
A.ŠÀ UŠ ù SAG UL.GAR 1 A.ŠÀ 3 UŠ 4 SAG UL.GAR

20. su 17o al ancho agregado, 30'.
[17]-*ti-šu a-na* SAG DAḪ 30

21. Usted, 30' a 17 subir: 8°30' ve usted
[ZA.]E 30 *a-na* 17 *a-ši-ik-ma* 8,30 [*t*]*a-mar*

22. A 17 anchos 4 anchos agregar, 21 ve usted.
[*a-na* 17 SAG] 4 SAG DAḪ-*ma* 21 *ta-mar*

23. 21 tanto como de anchos posiciona. 3, de tres de largos,
[21 *ki-*]*ma* SAG GAR 3 *ša-la-aš-ti* UŠ

24. 3, tanto como de largos posiciona. 8°30', ¿cuál es su nombre?
[3 *ki*]-*ma* UŠ GAR 8,30 *mi-na šum-šu*

25. 3 largos y 21 anchos acumulados.
[3] UŠ ù 2[1 SA]G UL.GAR

26. 8°30' ve usted
8,30 *ta-mar*

27. 3 largos y 21 anchos acumulados.
[3] UŠ ù 21 SAG UL.[GAR]

---

22 Transcripción [TMS, 63f], correcciones, traducción y análisis [Høyrup 1990a, 321-325, 327f].

40. 16°15' the counterpart posit, make hold,
{16,15 *ta-mar*} 16,15 GABA.GAR NIGIN

41. 4°24'3'45'' you see. 2°6'
4,[24,]3,45 *ta-mar* 2,6 [erasure]

42. from 4°24'3'45'' tear out, 2°18'3'45'' you see.
i-na 4,[2]4,3,45 ZI 2,18,3,45 *ta-mar*

43. What is made equilateral? 11°45' is made equilateral, 11°45' to 16°15' append.
mi-na [ÍB.SI] 11,45 ÍB.SI 11,45 *a-na* 16,15 DAḪ

44. 28 you see. From the 2nd tear out, 4°30' you see,
28 *ta-mar i-na* 2-KAM ZI 4,30 *ta-mar*

45. The IGI of 3, the lengths, detach, 20' you see. 20' to 4°30'
IGI 3-*ti* UŠ *pu-ṭú-ùr* 20 *ta-mar* 20 *a-na* 4,[30]

46. raise: 1°30' you see,
{20 *a-na* 4,30} *i-ší-ma* 1,30 *ta-mar*

47. 1°30' the length of 2 the surface. What to 21, the widths, shall I posit
1,30 UŠ *ša* 2 A.ŠÀ [*mi-na*] *a-na* 21 SAG [*lu-uš-ku-un*]

48. which 28 gives me? 1°20' posit. 1°20' the width
ša 28 *i-na-di*[*-na*] 1,20 G[AR] 1,20 SAG

49. of 2 the surface. Turn back. 1 from 1°30' tear out.
ša 2 A.ŠÀ *tu-úr* 1 *i-na* 1,[30 ZI]

50. 30' you see. 1 from 1°20' tear out,
30 *ta-mar* 1 *i-na* 1,20 Z[I]

51. 20' you see.
20 *ta-mar*

Part C of the same didactical tablet combines the equation of Part B with an abstruse linear condition

$$\square(l,w) + l + w = 1, \quad \frac{1}{17}(3l + 4w) + w = 30'$$

28. Dado que 1 al largo es agregado y 1 al ancho es agregado, haga sostener.
[*aš-šum* 1 *a-na*] UŠ DAH [*ù* 1 *a*]-*na* SAG DAH NIGIN-*ma*

29. 1 para la acumulación de superficie, largo y ancho agregar. 2 ve usted.
1 *a-na* UL.GAR A.ŠA UŠ *ù* SAG DAH 2 *ta-mar*

30. 2 la superficie. Ya que el largo y el ancho de 2 la superficie,
[2 A.]ŠA *aš-šum* UŠ *ù* SAG *ša* 2 A.ŠA

31. 1°30', el largo, junto con 1°20', el ancho, son hechos sostener,
[1,30 UŠ *it*]-*ti* 1,20 SAG, *šu-ta-ku-lu*

32. 1 el agregado del largo y 1 el agregado del ancho,
[1 *wa-sú*-]*bi* UŠ *ù* 1 *wa-sú-bi* SAG

33. haga sostener ¿(...) usted ve? 1 y 1, las varias cosas, acumular, 2 ve usted.
[NIGIN (...) *ta-mar* 1 *ù* 1 (...)] ḪI.A UL.GAR 2 *ta-mar*

34. 3 (...), 21 (...) y 8°30' acumular, 32°30' ve usted;
[3 (...) 21 (...) *ù* 8,30 UL.GAR] 32,30 *ta-mar*

35. así usted pregunta.
[*ki-a*]-*am ta-ša-al*

36. ... de anchos, a 21, acumulación:
[...] TI SAG *a-na* 21 UL.GAR-*ma*

37. ... a 3, largos, elevar,
[...] *a-na* 3 UŠ *i-ši*

38. 1°3 ve usted. 1°3 a 2, la superficie, elevar:
[1,3 *ta-mar* 1,3 *a*]-*na* 2 A.ŠA *i-ši-ma*

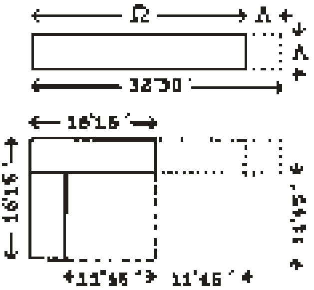

Figura 14

At first it transforms the latter equation by means of the techniques taught in TMS XVI: multiplying by 17, finding the total coefficients of l and w. As summed up in line 26f,

$$3l + 2w = 8°30'$$

Next it repeats the trick of Part B, showing that a 'surface 2', with length 1°30' and width 1°20', presupposes that 1 is appended to both length and width putting $\lambda = l + 1$, $\omega = w + 1$, we get $\sqsubset\!\sqsupset(\lambda,\omega) = 2$. Moreover (the damages to lines 33 and 34 prevents us from knowing the exact formulation), $3\lambda + 2\omega = 32°30$. Finally, if $\Lambda = 3\lambda$, $\Omega = 2\omega$) (Λ and Ω, in contrast to λ 'the length of 2 the area' and ω 'the width of 2 the area', carry no name of their own in the text, whereas their sum is spoken of in line 39 as 'the accumulation'

$$\Lambda + \Omega = 32°30,\ \sqsubset\!\sqsupset(\Lambda,\Omega) = (3\cdot 21)\cdot 2 = 2`6.$$

This standard form of the problem is obtained in line 39, after which a normal cut-and-paste procedure starts (*cf.* Figure 14): the sum of length and width is bisected and the counterpart of the moiety posited so as to hold a completed square, whose area must be $\square(16°15') = 4`24°3'45''$. From this is torn out the area of the rectangle, transformed into a gnomon, leaving for the completing square an area 2`18°3'45''. This makes 11°45' 'equilateral', which is appended to the first side of the completed square (horizontal in Figure 14) and torn out from its vertical counterpart. This order differs from the one of YBC 6967 (and, in general, from the one which we find when the difference between length and width is known). The reason is straightforward. In YBC 6967, what we tear out and append is *the same* entity, that half of the difference which was 'made hold': evidently, this cannot be appended before it has been made available by being torn out. In the present case, what we append and tear out are the sides of the newly produced completing square, of which we can dispose freely; in this situation, the Babylonians obey the same psychological 'law' that make us prefer expressions $a+b$ to the alternative $a+b$ when the choice is free, and which made the author of BM 13901 treat the question $\square(s)+s = 45'$ before the question

$$\square(s) - s = 14`30.$$

39. 2'6 ve usted. ¿2'6 la superficie? 32°30' la acumulación parte 16°15' ve usted
[2,6 *ta-mar* '2,6 A.ŠÀ'] 32,30 UL.GAR *hi-pi* 16,15 *ta-<mar>*

40. 16°15' la contraparte posiciona, hace sostener.
{16,15 *ta-mar*} 16,15 GABA GAR NIGIN

41. 4'24°3'45'' ve usted. 2'6
4,[24,]3,45 *ta-mar* 2,6 [¿dañado?]

42. de 4'24°3'45'' quitar, 2'18°3'45'' ve usted
i-na 4,[2]4,3,45 ZI 2,18,3,45 *ta-mar*

43. ¿Qué es hecho equilátero? 11°45' es hecho equilátero, 11°45' a 16°15' agregar.
mi-nu ÍB.SI 11,45 ÍB.SI 11,45 *a-na* 16,15 DAH

44. 28 ve usted. Del 2o. quitar, 4°30' ve usted.
28 *ta-mar i-na* 2-KAM ZI 4,30 *ta-mar*

45. El igi de 3, los largos, separa, 20' ve usted. 20' a 4°30'
IGI 3-ta UŠ *pu-tùr* 20 *ta-mar* 20 *a-na* 4,[30]

46. elevar. 1°30' ve usted.
{20 *a-na* 4,30} *i-ši-ma* 1,30 *ta-mar*

47. 1°30' el largo de 2 la superficie. Que para 21, los anchos, posicionaré
1,30 UŠ *šà* 2 A.Š[A *ma-na*] *a-na* 21 SAG [*lu-uš-ku-un*]

48. ¿cuáles 28 me da? 1°20' posiciona. 1°20' el ancho
šà 28 *i-na-di*[*-na*] 1,20 G[AR] 1,20 SAG

49. de 2 la superficie. Regresa. 1 de 1°30' quitar.
šà 2 A.ŠA *tu-úr* 1 *i-na* 1,[30 ZI]

50. 30' ve usted. 1 de 1°20' quitar.
30 *ta-mar* 1 *i-na* 1,20 Z[I]

51. 20' ve usted.
20 *ta-mar*

Appending and tearing out gives the values of Λ (= 4°30') and Ω (= 28), from which λ = 1°30' and ω = 1°20' follow. Finally we "turn back" to the original rectangle by tearing out 1 from each

AO 8862 N° 2[23]

I

30. Length, width. Length and width
UŠ SAG UŠ *ù* SAG

31. I have made hold each other. A surface I have built.
uš-ta-ki-il₅-ma A.ŠA*lam ab-ni*

32. I went around (it). The half of the length
a-sà-hi-ir mi-ši-il₅ UŠ

33. and the third of the width
ù ša-lu-uš-ti SAG

34. to the inside of my surface
a-na li-bi A.ŠA-*ia*

35. I have appended: 15.
[*ù*-]*si-ib-ma* 15

36. I turned back. Length and width
[*a-t*]*u-ur* UŠ *ù* SAG

37. I have accumulated: 7.
[*ak*-]*mu-ur-ma* 7

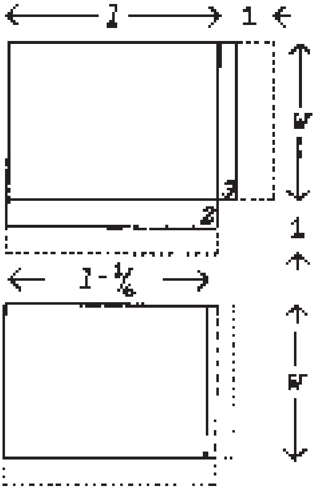

Figure 15

II

1. Length and width what?
UŠ *ù* SAG *mi-nu-um*

23. Transliteration [MKT I, 108]. Translation and analysis [Høyrup 1990a, 311-317].

La parte C de la misma tablilla didáctica combina la ecuación de la parte B con una condición lineal abiursa:

$$\square(l, w) + l - w = l, \quad 1/17(3l + 4w) + w = 30'.$$

Al principio se transforma la última ecuación mediante las técnicas enseñadas en TMS XVI multiplicando por 17 y encontrando los coeficientes totales de l y w. Como se suman en la línea 26*f*,

$$3l+21w = 8°30'.$$

Después repite el procedimiento de la parte B, mostrando que una 'superficie 2', con largo 1°30' y un ancho de 1°20', presupone que 1 es agregado tanto al largo como al ancho —poniendo $\lambda = l+1$, $\omega = w+1$, obtenemos $\square(\lambda, \omega) = 2$. Más aún (los daños a las líneas 33 y 34 nos impide conocer la formulación exacta), $3\lambda + 21\omega = 32°30$. Finalmente si $\Lambda = 3\lambda$, $\Omega = 21\omega$ (Λ y Ω, en contraste con λ 'el largo de 2 el área' y ω 'el ancho de 2 el área', no tiene en sí nombre en el texto, mientras que se habla de su suma en la línea 34 como 'la acumulación') [entonces]

$$\Lambda + \Omega = 32°30, \quad \square(\Lambda, \Omega) = (3 \cdot 21) \cdot 2 = 2'6.$$

Esta forma estandar del problema es obtenida en la línea 39, después de empezar un procedimiento de cortar y pegar (*cf.* figura 14): la suma del largo y el ancho es bisectada y la contraparte de la media es posicionada de tal manera que forme un cuadrado completo, cuya área debe ser $\square(16°15') = 4'24°3'45''$. De ésto se obtiene el área del rectángulo, transformada en un gnomon, dejando del cuadrado completado una área de $2'18°3'45''$. Esto hace $11°45'$ 'equilátero'. Et que es agregado al primer lado del cuadrado completado (horizontal en la figura 14) y sale de su contraparte vertical. Este orden difiere de aquel de YBC 6967 (y, en general, de aquel que encontramos cuando la diferencia entre el largo y el ancho es conocida). La razón es directa. En YBC 6967, lo que sacamos y agregamos es *la misma* parte, la mitad de la diferencia que fue 'hecha para sostener'; evidentemente, ésta no puede ser agregada antes de que esté disponible por haber sido quitada. En el presente caso, lo que agregamos y quitamos son los lados del cuadrado completado recientemente, del que podemos disponer libremente: en esta situación, los babilonios obedecen la misma 'ley' psicológica que nos hace preferir expresiones como $a \pm b$, que a la alternativa $a \mp b$ cuando la

2. You, by your making,
at-ta i-na e-pe-ši-i-ka

3. 2 (as) inscription of the half
[2 *ú*]*-ṣú-ul-p*[*á*]*-ar-ti mi-iš-li-im*

4. and 3 (as) inscription
[*ù*] 3 *ú-ṣú-ul-pa-at*

5. of the third you inscribe:
[*ša-*]*lu-uš-ti ta-ṣ*[*a*]*-pa-ar-ma*

6. The IGI of 2, 30', you detach:
IGI 2-BI 30 *ta-pa-ṭar*-ma

7. 30' steps of 7, 3°30'; to 7,
30 A.RÁ 7 3,30 *a-na* 7

8. the things accumulated. length and width,
ki-im-ra-tim UŠ *ù* SAG

9. I bring:
ub-ba-al-ma

10. 3°30' from 15, my things accumulated,
3,30 *i-na* 15 *ki-i*[*m*]*-ra-ti-ia*

11. cut off
ḫu-ru-us-ma

12. 11°30' the remainder.
11,30 *ša-pi-ik-tum*

13. Go not beyond. 2 and 3 make hold each other:
l[*a*] *wa-t*[*ar*] 2 *ù* 3 *uš-ta-kal-ma*

14. 3 steps of 2, 6.
3 A.RÁ 2 6

15. The IGI of 6, 10' it gives you.
IGI 6 GÁL 10 *i-na-di-kum*

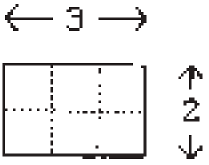

Figure 16

elección es libre, y que hace que el autor de BM 13901 trate con la ecuación $\square(s)+s = 45'$ antes que con $\square(s)-s = 14'30$.

Agregando y quitando da los valores de Λ (= 4°30') y Ω (= 28), de donde le siguen λ = 1°30' y ω = 1°20'. Finalmente 'regresamos' al rectángulo original quitando 1 de cada uno.

AO 8862 Nº 2[23]

I

30. Largo, ancho. Largo y ancho
UŠ SAG UŠ ù SAG

31. Yo he hecho sostener uno a otro. Yo he construido una superficie
uš-ta-ki-il₅-ma A.ŠÀ^{lam} *ab-ni*

32. Yo fui alrededor (éste). La mitad del largo
a-sà-ḫi-ir mi-ši-il₅ UŠ

33. y el tercio del ancho
ù ša-la-aš-ti SAG

34. Al interior de mi superficie
a-na li-bi A.ŠÀ-*ia*

35. yo he agregado: 15.
[*ú-*]*si-ib-ma* 15

36. yo regresé. Largo y ancho
[*ú-t*]*e-er* UŠ *ù* SAG

37. yo he acumulado: 7
[*ak-*]*mu-ur-ma* 7

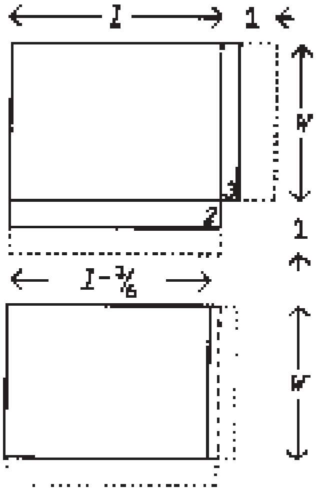

Figura 15

II

1. Largo y ancho ¿qué?
UŠ *ù* SAG *mi-nu-um*

23. Transcripción [MKT I, 108]. Traducción y análisis [Høyrup 1990a, 311-312]

16. 10' from 7, your things accumulated,
10 *i-na* 7 *ki-im-ra-ti-ka*

17. length and width, I tear out:
UŠ ù SAG *a-na-sà-ah-ma*

18. 6°50' the remainder.
6,50 *ša-pi-il5-tum*

19. Its moiety, that of 6°50', I break:
BA.A-š[a] *ša* 6,50 *e-he-pe-e-ma*

20. 3°25' it gives you.
3,25 *i-na-di-ka*

21. 3°25' until twice
3,25 *a-di ši-ni-šu*

22. you inscribe; 3°25' steps of 3°25',
ta-la-pa-at-ma 3,25 A.RÁ 3,25

23. 11°40'25''; from the inside
11,40,[25] *i-na li-bi*

24. 11°30' I tear out:
11,30 *a-na-sà-ah-ma*

25. 10'25'' the remainder. <10'25'' makes 25' equilateral>.
10,25 *ša-pi-il5-tum* <10,25-E 25 ÍB.SI8>

26. To the first 3°25'
a-na 3,25 *iš-te-en*

27. 25' you append: 3°50',
25 *tu-sa-am-ma* 3,50

28. and (that) which from the things accumulated of
ù ša i-na ki-im-ra-at

2. Usted, haciéndolo usted,
at-ta i-na e-pe-ši-i-ka

3. 2 (como) inscripción de la mitad
[2 *ṣ*]*a-al-p*[*a*]*-at mi-iš-li-im*

4. y 3 (como) inscripción
[*ù*] 3 *ṣa-al-pa-at*

5. del tercio usted inscribe:
[*ša-*]*lu-uš-ti ta-ṣ*[*a*]*-pa-ar-ma*

6. El IGI de 2, 30', usted separa:
IGI 7-BI 30 *ta-pa-ṭar-ma*

7. 30' pasos de 7, 3°30': para 7
30 A.RA 7 3,30 *a-na* 7

8. las cosas acumuladas, largo y ancho,
ki-im-ra-tim UŠ *ù* SAG

9. yo traigo
ub-ba-al-ma

10. 3°30' de 15, mis cosas acumuladas,
3,30 *i-na* 15 *ki-i*[*m*]*-ra-ti-i-a*

11. cortar.
ha-ra-aṣ-ma

12. 11°30' el sobrante
11,30 *ša-pi-il-tum*

13. No ir más allá. 2 y 3 hacen sostener uno con otro:
l[*a*] *wa-ṣ*[*ar*] 2 *ù* 3 *uš-ta-kal-ma*

14. 3 pasos de 2, 6
3 A.RA 2 6

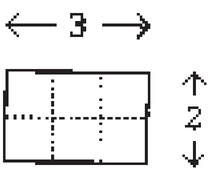

Figura 16

29. length and width I have torn out
UŠ *ù* SAG *a[s]-sà-aḫ-ma*

30. to 5°50' you append:
a-na 5,50 *ta-ṣa-am-ma*

31. 4 the length. From the second 3°25'
4 UŠ *i-na* 3,25 *ša-ni-im*

32. 25' I tear out: 3 the width.
25 *a-na-sà-aḫ-ma* 3 SAG

32a. 7 the things accumulated.
7 *ki-im-ra-tu-ú*

32b. 4, the length 12, the surface
3, the width
4 UŠ 12 A.ŠÀ
3 SAG

The problem deals with a field which is determined by *one* length and *one* width: that is, within the universe of Babylonian mathematics, a rectangular field. Its format is close to a surveyors' riddle —"I have laid out a field. I have gone around it, ...". The underlying problem, however,

$$\square(l,w) + 1/2\,l + 1/3\,w = 15, \quad l + w = 7,$$

is close to the preceding text, and the solution *might* have followed the same pattern:

$$\square(\lambda,\omega) = 15 + \square(1/2, 1/3) = 15°10', \quad \lambda + \omega = 7 + 1/3 - 1/2 = 7°50',$$

$\lambda = l + 1/3$, $\omega = w - 1/2$. This, however, is not what happens. The length and the width are imagined with the standard breadth 1 in their natural location, which explains why something can be 'brought' to them in lines 8-9, and which fits the use of the plural ('the things accumulated') when their sum is spoken of —indeed, they remain separate.

2 and 3 are 'inscribed' as denotations of the half and the third (something like the italicized numbers of Figure 15 is a possible interpretation). In the next step, half of the accumulation of length and

15. UŠ IGI de 6, 10' le da.
IGI 6 GAL 10 *i-na-di-kum*

16. 10' de 7, sus cosas acumuladas,
10 *i-na* 7 *ki-im-ra-ti-i-ka*

17. largo y ancho, yo quito.
UŠ *ù* SAG *a-na-sà-ah-ma*

18. 6°50' el sobrante.
6,50 *ša-pi-il-tum*

19. Su media, que de 6°50', yo parto:
BA.A-t[a] *ša* 6,50 *e-he-pe-e-ma*

20. 3°25' le da
3,25 *i-na-di-ku*

21. 3°25' hasta dos veces
3,25 *a-di ši-ni-šu*

22. usted inscribe, 3°25' pasos de 3°25',
ta-la-pa-at-ma 3,25 A.RÁ 3,25

23. 11°40'25''; del interior
11,40,[25] *i-na li-bi*

24. 11°30' yo quito.
11,30 *a-na-sà-ah-ma*

25. 10'25'' el sobrante. 25'' hace 25' equilátero.
10,25 *ša-pi-il-tum* 10,25-e 25 ib.si8-e

26. Para el primero 3°25'
a-na 3,25 *iš-te-en*

27. 25' usted agrega: 3°50',
25 *ta-sa-am-ma* 3,50

28. y (que) de las cosas acumuladas de
ù ša i-na ki-im-ra-at

width is found —*not* the moiety, we notice, but the same half as in line I.32; found, moreover, as '30′ steps of 7' (a multiplication to which we shall return presently) and not through 'breaking'. This is 'brought to' the location of the sides and then removed,[24] leaving 11°30′; the trick eliminates the half of the length, but more than the third of the width. *How much more* could be found by standard procedures —the tables that tell 1/2 to be 30′ also translate 1/3 into 20′. Instead, the text refers to the visual procedure of Figure 16, where a 3×2-rectangle is constructed (possibly to be situated in the lower right corner of Figure 15, where the numbers appear already to be 'inscribed'). 1/2 of this rectangle is seen without further argument to exceed 1/3 by 1 square of 6; removal of 1/2 width thus leaves us with a rectangle ⊏(l - 10′,w), the sum of whose sides must be 7 - 10′ = 6°50′ (line 18), whereas its area was already known to be 11°30′. The rest goes exactly as Figure 14, apart from the fact that the construction of the completed square is not spoken of as 'holding' but as 'inscription twice', and from the explicit separation of this construction from the computation of the numerical product of 3°25′ and 3°25′ —'*a* steps of *b*' is the expression used in the tables of multiplication, the term for the product of number by number (the same explicit separation of the two processes recurs elsewhere in the tablet, for instance in lines II.13-14 of the present problem).

As in TMS IX, Part C, the addition precedes the subtraction, as we should expect. The length of the reduced rectangle is found to be 3°50′, and the original length l thus 3°50′ + 10′ = 4; w is 3. Finally come a control and a tabulation of the result.

TMS XIII[25]

1. 2 GUR 2 PI 5 BÁN of oil I have bought. From the buying of 1 *šekel* of silver,
2(GUR) 2(PI) 5 BÁN Ì.GIŠ ŠÁM *i-na* ŠÁM 1 GÍN KÙ.BABBAR

2. 4 SÌLA of oil each (*šekel*) I have cut away.
4 SÌLA$^{\mathrm{TA.ÀM}}$ Ì.GIŠ *ak-ši-it-ma*

24. The term used for this removal, 'cutting off', is grossly synonymous with 'tearing out' when used as a mathematical term (see [Høyrup 1993b] for deeper analysis).
25. Transliteration [TMS, 82]. Corrections, together with a translation and analysis based on the arithmetical interpretation in [Gundlach & von Soden 1963, 260-263].

29. largo y ancho. yo he quitado
UŠ ù SAG *a[s]-sà-ah-ma*

30. de 3°50' usted agrega:
a-na 3,50 *tu-ṣa-am-ma*

31. 4 el largo. Del segundo 3°25'
4 UŠ *i-na* 3,25 *ša-ni-im*

32. 25' yo quito: 3 el ancho.
25 *a-na-sà-ah-ma* 3 SAG

32a. 7 las cosas acumuladas.
7 *ki-im-ra-tu-ú*

32b. 4, el largo

3, el ancho 12, la suplicie
4 UŠ 12 A.ŠÀ
3 SAG

El problema se refiere a un campo que está determinado por *un* largo y *un* ancho: esto es, dentro del universo de las matemáticas babilónicas, un campo rectangular. Su formato es cercano a un acertijo para el agrimensor —"yo he dispuesto un campo, yo he salido alrededor de él, ..."—. El problema fundamental, sin embargo,

$$\Box(l, w) + 1/2l + 1/3w = 15, \quad l + w = 7$$

está cerca al texto que le precede, y la solución *pudo* haber seguido el mismo patrón.

$\Box(\lambda, \omega) = 15 + \Box(1/2, 1/3) = 15°10'$, $\lambda + \omega = 7 + 1/3 + 1/2 = 7°50'$,
$\lambda = l + 1/3$, $\omega = w + 1/2$.

Sin embargo, esto no es lo que sucede. El largo y el ancho son imaginados con la anchura estandar 1 en su lugar natural, lo que explica porque algo puede ser 'traído' a ellos en las líneas 8-9, y las que encajan en el uso del plural ("las cosas acumuladas") cuando se habla de su suma —en efecto, éstos permanecen separados—.

2 y 3 están 'inscritos' denotando a la mitad y al tercio (como los números en cursiva de la figura 15 son una posible interpretación)

3. 2/3 *mina* of silver as profit I have seen. Corresponding to what
20 *ma-na* (20 ŠE) KÙ.BABBAR *ne-me-la a-mu-ur ki ma-ṣi*

4. have I bought and corresponding to what have I sold?
a-ša-am ù ki ma-ṣi ap-šu-ur

5. You, 4 SÌLA of oil posit and 40, (of the order of the) *mina*, the profit posit
ZA.E 4 SÌLA Ì.GIŠ GAR ù 40 *ma-na ne-me-la* GAR

6. The IGI of 40 detach, 1`30`` you see, 1`30`` to 4 raise, 6` you see.
IGI 40 *pu-ṭur* 1,30 *ta-mar* 1,30 *a-na* 4 *i-ši* 6 *ta-mar*

7. 6` to 12`50 raise, 1`17 you see.
6 *a-na* 12,50 ÍL.GIŠ *i-ši-ma* 1,17 *ta-mar*

8. 1/2 of 4 break, 2 you see, make hold, 4 you see.
1/2 4 *ḫe-pé* 2 *ta-mar* 2 NIGIN 4 *ta-mar*

9. 4 to 1`17 append, 1`21 you see. What is made equilateral? 9 is made equilateral
4 *a-na* 1,17 DAḪ 1,21 *ta-mar mi-na* ÍB.SI 9 ÍB.SI

10. 9 the counterpart posit. 1/2 of 4 which you have cut away break, 2 you see
9 GABA GAR 1/2 4 *ša ta-ak-ši-tù ḫi-pí* 2 *ta-mar*

11. 2 to the 1st 9 append, 11 you see; from the 2nd tear out,
2 *a-na* 9 1-KAM DAḪ 11 *ta-mar i-na* 9 2-KAM ZI

12. 7 you see. 11 SÌLA each (*bought*) you have bought, 7 SÌLA you have sold.
7 *ta-mar* 11 SÌLA *ta-àm ta-ša-am* 7 SÌLA *ta-ap-šu-ur*

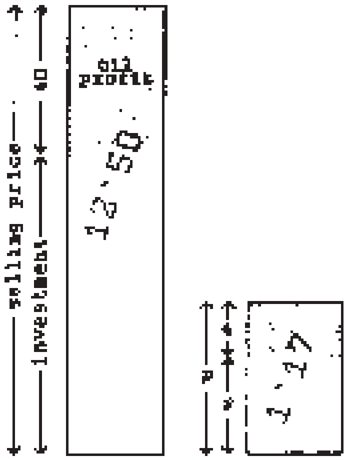

Figure 17

En el siguiente paso, se encuentra la mitad de la acumulación del largo y el ancho —*no* la media—, pero sí la misma mitad, como en la línea I.32; siendo, además, encontrada como "30' pasos de 7'' (una multiplicación que tendremos presente) y no a través de una 'partición'. Ésta es 'traída' a donde están los lados y después removidos,[24] dejando 11°30'; la técnica elimina la mitad del largo pero más del tercio del ancho. *Cuánto más* se podría encontrar mediante procedimientos estándar —las tablas que dicen que 1/2 es 30' también traducen que 1/3 es 20'—. En cambio, el texto se refiere al procedimiento visual de la figura 16, donde un rectángulo de 3×2 es construido (posiblemente para ser situado en la esquina derecha inferior de la figura 15, donde los números parecen ya estar 'inscritos'). 1/2 de este rectángulo no tiene posibles elementos para exceder 1/3 de 1 cuadrado de [área] 6; moviendo 1/2 del ancho, entonces, nos deja con un rectángulo ⊏⊐(l-10',w), la suma de los lados debe ser 7-10' = 6°50' (línea 18) donde su área era ya conocida como 11°30'. El resto va exactamente como en la figura 14, considerando el hecho de que no se habla de la construcción del cuadrado completado como 'sosteniendo' sino como 'inscripción doble', y de la separación explícita de la construcción del cálculo del producto numérico de 3°25' y 3°25' —'*a* pasos de *b*' es la expresión usada en las tablas de multiplicar—, el término para el producto de número por número (la misma separación explícita de los procesos ocurre en otros lugares de la tableta, por ejemplo, en las líneas II.13-14 del presente problema).

Como en TMS IX, parte C, la adición precede a la sustracción, como es de esperar. Se encuentra que el largo del rectángulo reducido es 3°50', y el largo original l por consiguiente 3°50'+10' = 4 y, w es 3. Finalmente viene un control y una tabulación del resultado.

TMS XIII[25]

1. 2 GUR 2 PI 5 BÁN de aceite yo he traído. De la compra de 1 *šekel* de plata.
2(GUR) 2(PI) 5 BÁN IA.GIŠ ŠAM *i-na* ŠAM 1 GIN KÙ.BABBAR

2. 4 SILA de aceite cada una (*šekel*) yo he separado.
4 SILA[TA.ÀM] IA.GIŠ *ak-ši-iṭ-ma*

---

24. El término usado para este movimiento 'cortando', es un lejano sinónimo de 'quitando' cuando se usa como un término matemático (ver [Høyrup 1993b] para un análisis más profundo).
25. Transcripción [TMS, 83]. Correcciones, junto con una traducción y análisis basadas en la interpretación aritmética en [Gundlach y von Soden 1963, 260-263].

13. Silver corresponding to what? What shall I posit to 11 SILA?
KÙ.BABBAR *ki ma-ṣí mi-na a-na* 11 [SILA? *lu-uš-ku*]*-un*

14. which 12'50 of oil gives me? Posit 1.10, 1 *mina* 10 *šekel* of silver.
ša 12,50 Ì.GIŠ *i-na-ad-di-na* 1,[10 GAR 1 *m*]*a-na* 10 GIN K[Ù.BABBAR]

15. By 7 SILA each *(šekel)* which you sell of oil.
i-na 7 SILA.TA.ÀM *ša ta-pa-aš-*[*ša-ru* Ì.GIŠ]

16. that of 40 of silver corresponding to what? 40 to 7 raise,
ša 40 KÙ.BABBAR *ki ma-ṣí* 40 *a-na* 7 [*i-ši*]

17. 4'40 you see. 4'40 of oil.
4,40 *ta-mar* 4,40 Ì.GIŠ

This is another Susa text, but it certainly does not belong to the didactical genre. The problem itself recurs in less complete texts from the Babylonian core area.[26]

An extra reason that the problem is perplexing is that it refers to commercial practices which are rather different from ours. A merchant has bought 2 GUR 2 PI 5 BAN of fine vegetable oil, which later occurs as $M = 12'50$ [SILA] (as we remember, 1 SILA is the standard unit of hollow measure, *cf.* p. 12), at a rate of (say) p SILA per *šekel*. Selling at the rate of $s = p - 4$ SILA per *šekel* he realizes a profit of 2/3 *mina* or $\Pi = 40$ [*šekel*] of silver.

Lines 7-12 find p and s from what must have been the relations

$$p - s = 4 \ , \ p{\cdot}s = 1'17 ,$$

where $1'17 = 4/\Pi{\cdot}M$. That $p{\cdot}s = 4/\Pi{\cdot}M$ follows easily from the equation $M/s - M/p = \Pi$ if we allow ourselves some algebraic manipulation (multiplication by ps). This was hardly the argument from which the Babylonian calculators derived their equation, however. Firstly, this kind of symbolic manipulation was not available to them; secondly, even if they were able to master it mentally, it would not lead to the order of operations actually found in the text but to the sequence $(M{\cdot}4)/\Pi$.

26 A strictly parallel problem is YBC 4698 N° 9 (transliteration [MKT III, 42], *cf.* [Friberg 1982, 57]), which however does not tell the procedure. Related is MLC 1842 [MCT, 106], in which identical quantities of grain are bought at two different rates, and the sum of the rates and the total investment are revealed. The tablet is heavily damaged but still allows us to see that the same method was used *mutatis mutandis* as in the Susa text.

3. 2/3 *mina* de plata como ganancia yo he visto. Correspondiendo a lo que
2/3 *ma-na* (20 ŠE) KU.BABBAR *ne-me-la a-mu-ur ki ma-şi*

4. he traído y correspondiendo a lo que ¿he vendido?
ub-lá-am ù ki ma-şi ap-šu-ur

5. Usted 4 SILA de aceite posiciona y 40, (del orden de) *mina*, la ganancia posiciona.
ZA.E 4 SILA Ì.GIŠ GAR ù 40 *ma-na ne-me-la* GAR

6. El IGI de 40 separado 1`30`` usted ve. 1`30`` para 4 eleva. 6` usted ve.
IGI 40 *pu-ţur* 1,30 *ta-mar* 1,30 *a-na* 4 *i-ši* 6 *ta-mar*

7. 6` a 12`50 eleva, 1`17 ve usted
6 *a-na* 12,50 ÍA.GIŠ *i-ši-ma* 1,17 *ta-mar*

8. 1/2 de 4 parte, 2 ve usted, haga sostener 4 ve usted.
1/2 4 *ḫi-pi* 2 *ta-mar* 2 NIGIN 4 *ta-mar*

9. 4 a 1`17 agregar, 1`21 usted ve. ¿Qué es hecho equilátero? 9 es hecho equilátero.
4 *a-na* 1,17 DAḪ 1,21 *ta-mar mi-na* ÍB.SI 9 ÍB.SI

10. 9 la contraparte posiciona. 1/2 de 4 que usted ha partido y separado, 2 ve usted.
9 GABA GAR 1/2 4 *šá ta-aḫ-şi-pu ḫi-pi* 2 *ta-mar*

11. 2 al primero, 9 agregar, 11 ve usted; del segundo quitar.
2 *a-na* 9 1-KAM DAḪ 11 *ta-mar i-na* 9 2-KAM ZI

12. 7 ve usted. 11 SILA cada (*šekel*) usted ha traído, 7 SILA usted ha vendido.
7 *ta-mar* 11 SILA *ta-àm ta-šá-am* 7 SILA *ta-ap-šu-ur*

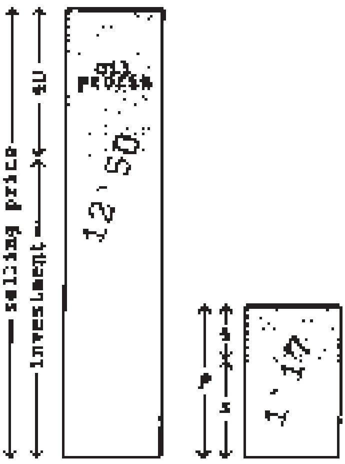

Figura 17

Most likely, some geometric argument is in play: from line 7 onward, the procedure is geometric, and no jump or change of style is visible between line 6 and line 7. Moreover, since the original investment and the profit in oil are calculated in the final section of the text without having been asked for, these entities must be presumed to have played a role. This leads to the following considerations:

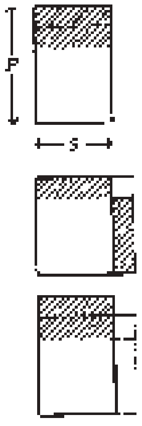

Figure 18

The total quantity of oil is the product of the selling price Σ (original investment plus profit) and the selling rate *s* (the number of SILA sold per *šekel*). This product we may represent by a rectangle ⊏⊐(Σ, *s*) as done in Figure 17, whose total area is 12'50 [SILA], and of which the part representing the profit makes up the same fraction as 4 SILA of the rate of purchase *p* —indeed, from what is bought for each *šekel* (i.e., *p*), 4 SILA is cut away as profit. A scaling operation along the vertical dimension which reduces the 40 [*šekel*] to 4 [SILA] will hence reduce the selling price to *p*, thus changing ⊏⊐(Σ,*s*) into ⊏⊐(*p*,*s*). The scaling factor will have to be $4 \cdot 40^{-1} = 6'$, as found in line 6, which reduces the area of the rectangle from 12'50 to 1'17 and the original investment to *s*.

We have thus produced the starting point for the transformations of Figure 18, a rectangle with unknown sides *p* and *s* but with given area and given excess of *p* over *s*. The rest of the solution goes by the usual cut-and-paste operations. The only deviation from norms (which may have to do with the use of geometry as representation for oil and prices, but may also have other explanations) is the duplication of the breaking process in line 10 —which by the way allows the addition to precede the subtraction.

BM 85194 rev. II.7-21[27]

7. Of dirt, 1``30' (SAR). A city inimical to Marduk I shall seize.
i-na SAḪAR.ḪI.A 1,30 IKU URU.KI *na-ki-ir* [^{d}MAR]DUK *a-sa-ba-at*

27. Transliteration [MKT I, 149].

13. ¿Plata correspondiendo a qué? Que posicionaré a 11 SILA
KÙ.BABBAR *ki ma-ṣi lu-uš-ku-un a-na* 11 [sìla *lu-uš-k*]*u-un*

14. ¿Qué 12`50 de aceite me da? Posicione 1, 10, 1 *mina* 10 *šekel* de plata.
ša 12,50 Ì.GIŠ *i-na-ad-di-na* 1,[10 GAR 1 *m*]*a-na* 10 GÍN K[Ù.BABBAR]

15. Para 7 SILA cada (*šekel*) que vende usted de aceite,
i-na 7 SILA[TA.ÀM] *ša ta-pa-aš-*[*ša-ru* IA.GIŠ]

16. ¿qué de 40 de plata correspondiendo a qué? 40 a 7 elevar,
ša 40 KÙ.BABBAR *ki ma-ṣi* 40 *a-na* 7 [*i-ši*]

17. 4`40 ve usted 4`40 de aceite.
4,40 *ta-mar* 4,40 Ì.GIŠ

Éste es otro texto de Susa, pero con seguridad no pertenece al género didáctico. El problema en sí mismo recurre a menos textos completos de la región babilónica central.[26]

Una razón adicional por la que el problema es confuso es que éste se refiere a prácticas comerciales diferentes a las nuestras. Un comerciante ha traído 2 GUR 2 PI 5 BÁN de fino aceite vegetal, el que después se presenta como M = 12`50 [SILA] (como recordamos, un SILA es la unidad estándar de medida de capacidad, *cf.* p. 12), a una proporción de (digamos) *p* SILA por *šekel*. Vendiendo la proporción de *s* = *p*-4 SILA por *šekel* él obtiene una ganancia de 2/3 *mina* o Π = 40[*šekel*] de plata.

En las líneas 7-12 se encuentran *p* y *s*, lo que debieron haber sido las relaciones

$$p\text{-}s = 4, \; p\cdot s = 1`17,$$

donde 1`17 = (4/Π)·*M*. Donde *p*·*s* = (4/Π)·*M* se sigue fácilmente de la ecuación *M/s*-*M/p* = Π, que podemos obtener si seguimos cierta manipulación algebraica (multiplicación por *ps*). Sin embargo, éste fue difícilmente el elemento por el cual los calculadores babilonios obtuvieron sus ecuaciones. En primer lugar, este tipo de manipulación simbólica no estaba disponible para ellos; en segundo lugar, aunque hubieran sido

26 Un problema estrictamente paralelo es YBC 4698 Nº 9 (transcripción [MKT III, 42], *cf.* [Friberg 1982, 57]), quien, sin embargo, no dice el procedimiento. Está relacionado con MLC 1842 [MCT, 106], en el que cantidades idénticas de granos son compradas a dos precios diferentes, y la suma de los precios y el total invertido se revelan. La tablilla está muy dañada pero aún nos permite ver que el mismo método fue usado (*mutatis mutandis*) como en el texto de Susa.

8. 6 (nindan) the (breadth of the) fundament of the dirt 8 (NINDAN) should still be made firm before the city wall is reached.
6 UŠ SAḪAR.ḪI.A *ú-ki-in* [8 *a-n*]*a* BAD *la ṣa-na-qim*

9. 36 (kùš) the peak (so far attained) of the dirt. How great a length
36 *zi-iq-*[*pu-um ša*
SAḪ]AR.ḪI.A *ki ma-ṣí* UŠ

10. must I stamp in order to seize the city? And the length behind
lu-uk-b[*u-uš* URU.KI]
lu-uṣ-ba-at ù UŠ EGIR

11. the *ḫurḫurum* (the vertical back front reached so far?) is what? You, the IGI of 6, the fundament of the dirt, detach —10' you see. 10' to
ḫur-ḫ[*u-ri* EN.NAM ZA.E IGI] 6 SUḪUŠ SAḪAR.ḪI.A DUḪ.A 10 *ta-mar* 10 *a-na*

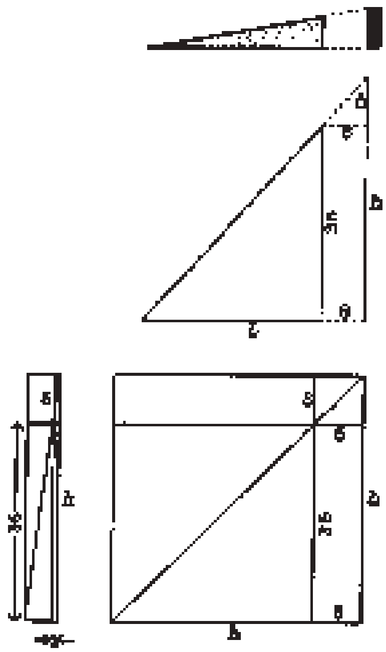

Figure 19

12. 1°30' the dirt, raise —15' you see. The IGI of 8 detach —7'30'' you see.
[1,30 SAḪAR.ḪI.A *i-ši* 15] *ta-mar* IGI 8 DUḪ.A 7,30 *ta-mar*

13. 7'30'' to 15' raise —1''52'''30'''' you see. 1''52'''30'''' repeat—
[7,30 *a-na* 15 *i-ši*]*-ma* 1,52,30 *ta-mar* 1,52,30 TAB.BA

14. 3''45''' you see. 3''45''' to 36 raise —2'15'' you see. 1°52'30''
[3,45 *ta-mar*] 3,44 <+1> *a-na* 36 *i-ši* 2,15 *ta-mar* 1,52,20 <+10>

15. make hold —3°30'56''15''' you see. 2'15'' from 3°30'56''15'''
[NIGIN 3,30,]56,15 *ta-mar* 2,15 *i-na* 3,30,56,15

capaces de manejarlo mentalmente, esto no hubiera llevado al orden de operaciones encontradas en el texto, pero sí a la secuencia $(M\cdot 4)\cdot \Pi^{-1}$.

Lo más probable es que esté en juego algún argumento geométrico: de la línea 7 hacia adelante el procedimiento es geométrico, y no se ve brinco o cambio de estilo entre la líneas 6 y 7. Además, dado que la inversión original y la ganancia del aceite son calculados en la sección final del texto sin haberlo pedido, estos puntos deben presumiblemente haber tenido cierto papel. Esto lleva a las consideraciones siguientes:

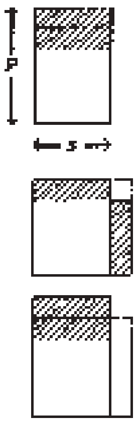

Figura 18

La cantidad total de aceite es el producto con precio de venta Σ (inversión original más ganancia) y el valor de venta s (el número de SILA vendido por *šekel*). Este producto lo podemos representar por un rectángulo $\square(\Sigma, s)$ como se hace en la figura 17, cuya área total es 12'50 [SILA], y de la que la parte representando la ganancia hace la misma fracción como 4 SILA de la proporción de la compra p —en efecto, de lo que se compra por cada *šekel* (*i.e.*, p), 4 SILA son separados como ganancia. Una operación escala a lo largo de la dimensión vertical que reduce el 40 [*šekel*] a 4 [SILA] reducirá, por tanto, el precio de venta de p, cambiando $\square(\Sigma, s)$ en $\square(p, s)$. El factor de escala tendrá que ser $4\cdot 40^{-1} = 6'$, como se encuentra en la línea 6, que reduce el área del rectángulo de 12'50 a 1'17 y la inversión original a s.

En consecuencia, se ha producido el punto inicial para las transformaciones de la figura 18, un rectángulo con lados desconocidos p y s pero con áreas y excedentes dados de p sobre s. El resto de la solución se hace por medio de las operaciones usuales de cortar y pegar. La única desviación de las reglas (que tienen que ver con el uso de la geometría como representación para el aceite y los precios, también puede tener otras representaciones) es la duplicación del proceso de partición en la línea 10 —que permite a la adición preceder a la sustracción—.

16. tear out – 1``15`56°15'. What is made equilateral? 1°7°30' you see.
[BA.ZI 1,1]5,56,14 ... EN.NAM ÍB.SI$_8$ 1,7,30 *ta-mar*

17. 1°7°30' from 1°52°30' tear out —45 you see, the elevation of the city wall.
[1,7,30 *i-na*] 1,52,30 BA.ZI 45 *ta-mar* SUKUD BÀD

18. 1/2 of 45 break —22°30' you see. The IGI of 22:30 detach —2'40''.
[1/2 45 *ḫi-pi* 2]2,[30] *ta-[mar]* IGI 22,30 DUḪ.A 2,40

19. 15' to 2'40'' raise —40, the length. Turn back, see 1``30`, the dirt. 22°30'.
[15 *a-na*] 2,40 *i-ši* 40 UŠ NIGIN.NA 1,30 SAḪAR.ḪI.A *a-mar* 22,30

20. 1/2 of the elevation, to 40, the length, raise —15' you see. 15' to 6 raise—
[1/2 SUKU]D *a-na* 40 UŠ *i-ši* 15 *ta-mar* 15 *a-na* 6 *i-ši*

21. 1``30` you see, 1``30` is the dirt. The having-been-made.
1,30 *ta-mar* 1,30 SAḪAR.ḪI.A *ne-pé-šum*

The problem is a highly artificial piece of fortification computation. A siege ramp is going to contain 1``30` [SAR] of dirt. So far, a height of 36 [KÙŠ] has been attained, and 8 [NINDAN] still have to be completed before the city-wall is attained. The width is 6 [NINDAN]. The units call for a commentary. As we remember (see note 7), the basic measure for horizontal distance was the NINDAN (≈ 6 m), whereas that for vertical distance was the KÙŠ (= 1/12 NINDAN) or cubit. Areas were measured in SAR, *i.e.*, NINDAN^2, and so were volumes —for which purpose the area 1 SAR was understood as provided with a standard height 1 KÙŠ. In modern terms, the volume measure 1 SAR is thus 1 NINDAN^2·KÙŠ.

The text begins by eliminating the width, multiplying the volume with its reciprocal. This leads us to the two-dimensional problem shown in Figure 19 and since the present text as well as a couple of related problems do not take into account the difference between vertical and horizontal units (as we shall see, a rectangle 1[KÙŠ]×1[NINDAN] is treated as if it were a square) we may pass immediately from the real cross-section (above) to the second diagram.

Line 12 thus finds the area of the triangle with sides *L* and *h* to be 15' —and then the procedure becomes opaque. So much is im-

BM 85194 rev. II,7-21[27]

7. De terreno, 1°30' (SAR). Una ciudad perjudicial a Marduk yo mediré
i-na SAḪAR.ḪI.A 1,30 IKU URU.KI *na-ki-ir* [^d^MAR]DUK *a-ša-ba-at*

8. 6 (nindan) la (anchura del) fundamento de la tierra. 8 (NINDAN) debería seguir siendo hecho firme antes de que la pared de la ciudad sea alcanzada.
6 UR SAḪAR.ḪI.A *ši-ki-in* [8 *a-n*]*a* BÀD *la ša-na-qám*

9. 36 (kùš) la cima (hasta ahora lograda) de la tierra. Qué tan grande un largo
36 *ze-ug-*[*pa-am ša*
SAḪAR.ḪI.A *ki ma-ṣi* UŠ

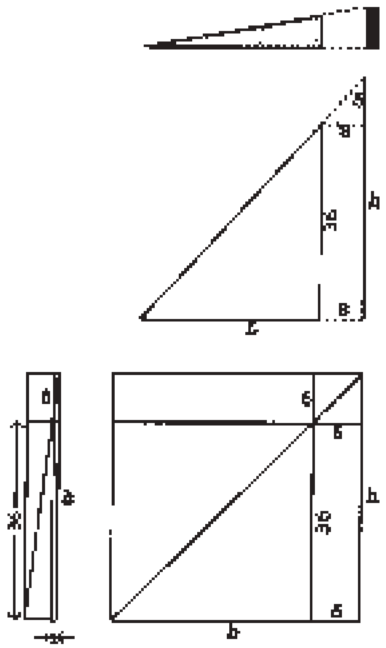

Figure 19

10. ¿debo marcar en orden para medir la ciudad? Y el largo detrás
lu-uk-b[*u-us* URU.K]*I lu-uṣ-ba-at* ù UŠ EGIR

11. ¿El *ḫurḫurum* (¿el frente vertical de atrás alcanzado hasta ahora?) qué es? Usted, el igi de 6, el fundamento de la tierra, desprende —10' usted ve. 10' a
ḫur-ḫ[*u-ri*] EN.NAM ZA.E IGI 6 UŠ SAḪAR.ḪI.A DU₈.A 10 *ta-mar* 10 *a-na*

12. 1°30' la tierra eleva —15' usted ve. El igi de 8 separa —7'30'' ve usted—.
[1,30 SAḪAR.ḪI.A i-ši 15] *ta-mar* IGI 8 DU₈.A 7,30 *ta-mar*

13. 7'30'' para 15' elevar —1'52°30' ve usted—. 1'52°30' repetir
[7,30 *a-na* 15 *i-ši*] 1,52,30 *ta-mar* 1,52,30 TAB.BA

27 Transcripción [MKT I, 149]

mediately clear, however, that the division by 8 in lines 12-13 finds the area of the triangle when submitted to a scaling which reduces the still missing length from 8 to 1, and that the 'repetition' in line 13 completes this triangle as a rectangle. repetition —the last of the four 'multiplications'— is indeed a concrete operation which provides a copy (or, if 'repetition until [a small integer] n' is spoken of, $n - 1$ copies) of an entity and joins it/them to the original; it occurs time and again in the corpus when a right triangle is completed as a rectangle.

Happily, however, two simpler problems dealing with exactly the same configuration (one found elsewhere in the present tablet, rev. II.22-23, one in BM 85210, obv. II.15-27) indicate which techniques were used. These are, firstly, a scaling which transforms the rectangle into a square with side h (actually, a pseudo-square h[KÙŠ]×h[NINDAN]), and secondly, a comparison of areas made possible by this scaling.

The difficulty in the present case is that the scaling factor involves the unknown. This is why a preliminary scaling by a factor 1/8, is performed —really an independent operation, since it precedes the 'repetition'. The resulting area (of the rectangle $\sqsubset\!\sqsupset(1/8,h)$) is 3'45 (line 14). A supplementary scaling by a factor $\delta = h \cdot 36$ will transform this rectangle into a square $\square(h)$; at the same time, it will change the area 3'45 into an area 3'45·(h · 36). All in all we have thus found that

$$\square(h) = 3'45h - 3'45 \cdot 36$$

This is the equation that is solved by standard methods in lines 14 to 19 (*cf.* Figure 14). At first 3'45·36 is calculated (2'' 15'). The bisection of the coefficient of h is omitted, since 3'45 is remembered to have resulted from a doubling (the 'repetition'; not just a 'multiplication by 2' — 'breaking' and 'repetition [until 2]' are really inverse operations).

The equation is of the type that possesses two (positive) solutions —the text uses $h = 40$, the other possibility is $h = 3''$. However, this ambiguity does not present itself to the calculator, since it is decided already when the figure is laid out whether h has to be larger or smaller than 3'45/2 —and this decision did not present itself as one in the Babylonian context, since all problems were constructed backwards from known solutions.

We should hence not wonder that the Babylonians were not aware of the double solution of this kind of equation.[28] They may well have

28 Which is anyhow quite rare in the corpus, but occurs in one tablet in undisguised form: TMS V, section III, transliteration [TMS, 40]. Of course, the corresponding

14. 3°45 ve usted—. 3°45 a 36 elevar —2°°15' ve usted. 1'52°30'
[3,45 *ta-mar*] 3,45 <+1> *a-na* 36 *i-ši* 2,15 *ta-mar* 1,52,30 <+10>

15. haga sostener —3°°30'56°15' ve usted— 2°°15' de 3°°30'56°15'
[NIGIN 3,30,]56,15 *ta-mar* 2,15 *i-na* 3,30,56,15

16. quitar —1°°15'56°15'— ¿Qué se hace equilátero? 1'7°30' ve usted.
[BA.ZI 1,1]5,56,14 <+1> EN.NAM ÍB.SI 1,7,30 *ta-mar*

17. 1'7°30' de un 1'52°30' quitar —45 ve usted, la elevación de la pared de la ciudad.
[1,7,30 *i-na*] 1,52,30 BA.ZI 45 *ta-mar* SUKUD BÀD

18. 1/2 de 45 partir —22°30' ve usted— El igi de 22; 30 separar —2'40''—.
[1/2 45 *he-pé* 2]2, [30] *ta-[ma]r* IGI 22,30 DU.A 2,40

19. 15' a 2'40'' elevar —40, el largo—. Regresar, ver 1°°30', la tierra. 22°30'.
[15 *a-na*] 2,40 *i-ši* 40 UŠ NIGIN.NA 1,30 SAḪAR ḪI.A *a-mar* 22,30

20. 1/2 de la elevación, para 40, el largo, elevar —15' ve usted— 15' a 6 elevar
[1/2 SUKU]D *a-na* 40 UŠ *i-ši* 15 *ta-mar* 15 *a-na* 6 *i-ši*

21. 1°°30' ve usted, 1°°30' es la tierra. El que ha-sido-hecho
1,30 *ta-mar* 1,30 SAḪAR.ḪI.A *ne-pé-šum*

El problema es una pieza altamente artificial de cálculo consolidado. Una cerca va a delimitar 1°°30' [SAR] de tierra. Se ha logrado una altura de 36 [KUŠ] y 8 [NINDAN] antes de que la pared de la ciudad sea realizada. El ancho es 6 [NINDAN]. Las unidades dan lugar a un comentario. Como recordamos (ver nota 7), la medida básica para la distancia horizontal fue el NINDAN (≈ 6m), mientras que para la distancia vertical fue el KUŠ (= 1/12 NINDAN) o 'codo'. Las áreas eran medidas en SAR, *i.e.*, NINDAN^2, y así fueron los volúmenes —para este propósito del área 1 SAR se entenderá como provista con una altura estándar de 1 KÙŠ. En términos modernos la medida de volúmen 1 SAR es por consiguiente 1 NINDAN^2·KÙŠ been, but their methods and habits would always lead them unambiguously to one of the two.

TMS VIII No 1[29]

1. The surface 10'. The 4th of the width to the width I have appended, to 3 I have gone ... over
[A.ŠÀ 10 *4-at* SAG *a-na* SAG DAḪ] *a-na 3 a-li-ik* .... [UGU]

2. the length 5' goes beyond. You, 4, of the fourth, as much as width posit. The fourth of 4 take, 1 you see.
[UŠ 5 DIR]IG ZA.E [4 *r*]*e-ba-ti ki-ma* SAG GAR *re-b*[*a-at 4 le-qé* 1 *ta-mar*]

3. 1 to 3 go, 3 you see. 4 fourths of the width to 3 append, 7 you see.
[1 *a-na*] 3 *a-li-ik* 3 *ta-mar* 4 *re-ba-at* SAG *a-na* 3 D[AḪ] 7 *ta-mar*]

4. 7 as much as length posit. 5' the going-beyond to the tearing-out of the length posit. 7, of the length, to 4 raise,
[7] *ki-ma* UŠ GAR 5 dirig *a-na na-sí-iḫ* UŠ GAR 7 UŠ *a-na* 4 [*i-ši*]

5. 28 you see. 28 the surfaces. 28 to 10' the surface raise. 4°40' you see.
28 *ta-mar* 28 A.ŠÀ 28 *a-na* 10 A.ŠÀ *i-ši* 4,40 *ta-mar*

6. 5', the tearing-out of the length to four, of the width, raise. 20' you see. 1/2 break. 10' you see. Make hold.
[5] *na-sí-iḫ* UŠ *a-na* 4 SAG *i-ši* 20 *ta-mar* 1/2 *ḫe-pe* 10 *ta-mar* NIGIN

7. 1'40'' you see. 1'40'' to 4°40' append. 4°41'40'' you see. What is made equilateral? 2°10' you see.
[1,40] *ta-mar* 1,40 *a-na* 4,40 DAḪ 4,41,40 *ta-mar mi-na* íb.si 2,10 *ta-ma*[*r*]

rectangular problem, $\ell \cdot w = A$, $\ell - w = B$ is quite common (see for instance above, TMS IX and AO 8862 N° 2) —but here, also as a matter of course, the existence of two solutions (one value for ℓ and one for w) was recognized. TMS IX, moreover, by choosing for the modified length Λ the smaller number (4°30') and for the modified width Ω the larger (28), shows awareness of the arbitrariness of the assignment of values to unknowns (Ω = 4°30' would indeed give rise to an irregular ω and, if that were accepted, to a negative ω).

29 Transliteration [TMS, 57f]. Corrections, translation and discussion [Høyrup 1990a, 254-259].

El texto empieza eliminando el ancho y multiplicando el volumen con su recíproco. Esto nos lleva al problema bidimensional —mostrado en la figura 19— y dado que el presente texto así como dos problemas relacionados no toman en cuenta la diferencia entre las unidades vertical y horizontal (como veremos, un rectángulo de 1[KÙŠ]×1[NINDAN] es tratado como si fuera un cuadrado) podemos pasar inmediatamente de la sección-cruzada real (anterior) al segundo diagrama.

En la línea 12 se encuentra que el área del triángulo con los lados *L* y *h* es 15'—aquí el procedimiento es poco claro—. Inmediatamente se aclara, sin embargo, que la división por 8, en las líneas 12-13 encuentra el área del triángulo cuando es sometida a una escala que reduce el largo aún desconocido de 8 a 1, y que la 'repetición' en la línea 13 completa este triángulo como un rectángulo: la repetición —la última de las cuatro 'multiplicaciones'— es en efecto una operación concreta que nos ofrece una copia (o, si se habla de una 'repetición hasta [uno pequeño entero] *n*' de, *n*-1 copias) de una entidad y la/las une al original: esto ocurre una y otra vez en el cuerpo cuando un triángulo rectángulo es completado como un rectángulo.

Sin embargo es grato saber que dos problemas simples tratados exactamente con la misma configuración (uno se encuentra en otro lugar de la tabla presente, rev. II.22-23, otro en BM 85210, anv. II.15-27) indican que técnicas se usaron. En primer lugar, una escala que transforme el rectángulo en un cuadrado con lado *h* (en realidad, un pseudo-cuadrado *h* [KÙŠ]×*h*[NINDAN]), y en segundo lugar, una comparación de áreas hecha posible por esta escala.

La dificultad en el caso presente es que el factor escala involucra lo desconocido. Esto se debe a que es realizada una escala preliminar por un factor 1/8 —realmente una operación independiente, ya que esta precede la 'repetición'. El área resultante (del rectángulo $\square(L/8, h)$) es 3'45 (línea 14). Una escala suplementaria con un factor $\delta = h$-36 transformará este rectángulo en un cuadrado $\square(h)$; al mismo tiempo esto cambiará el área de 3'45 en una de 3'45·(h-36). Por lo anterior, hemos encontrado que

$$\square(h) = 3'45\delta = 3'45\cdot 36.$$

Esta es la ecuación que se resuelve por métodos estándar en las líneas 14 a 19 (*cf.* figura 14). Al principio 3'45·36 se calcula como (2'15'). La bisección del coeficiente de *h* es omitida, dado que 3'45 se recuerda de haber resultado de una duplicación (la 'repetición' no sólo una

8. 10' the equal (?) to 2°10' append, 2°20' you see. What to 28, of the surfaces, shall I posit which 2°20' gives me?
[10 *-s*]Á.ŠÀ *a-na* 2,10 DAḪ 2,20 *ta-mar mi-na a-na* 28 A.ŠÀ GAR *ša* 2,20 *i-na-[di-n]a*

9. 5' posit. 5' to 7 raise, 35' you see. 5', the tearing-out of the length from 35' tear out,
[5 GAR] 5 *a-na* 7 *i-ši* 35 *ta-mar* 5 *na-si-iḫ* UŠ *i-na* 35 ZI

10. 30' you see. 30' the length. 5' the length[30] to 4 of the width raise, 20' you see, 20 the length (mistake for width).
[30 *ta-*]*mar* 30 UŠ 5 UŠ *a-na* 4 SAG
i-ši 20 *ta-mar* 20 [UŠ] <SAG>

This Susa text brings us halfway back to the didactical genre, and demonstrates another way to solve a problem similar to that of TMS IX/C, *viz* via reduction to a problem with one unknown.

The topic is the standard rectangle $\sqsubset(30',20')$. Lines 1-2 tell that

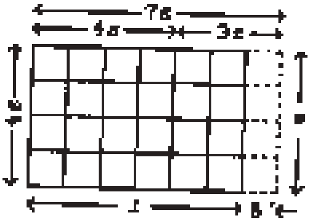

Figure 20

$$\sqsubset(l,w) = 10', \quad w + \tfrac{3}{4}w = l + 5',$$

after which we are instructed to 'posit' 4 and 7 'as much as' length and width, respectively. What takes place is a sub-division into smaller squares —see Figure 20[31]; 4 and 7, then, are not coefficients of the original length and width, as on p. 236, but the 'coefficients' to the (side of the) small square which *produce* the length and the width. The total number of such squares is found by 'raising' one of these 'coefficients' to the other, which shows that we are really supposed *to compute* the number of small squares, not to construct a rectangle $\sqsubset(7,4)$ (in which case we should have made 4 and 7 'hold

30. This probably refers to the 'length' of the square $\square(l-w)$. Several other mathematical Susa texts (N[os] V and VII, indeed, speak about the 'length' of a square.
31. Such subdivisions are also made in a number of other texts though not with precisely the present use. BM 8390 ([MKT I, 335-337], *cf.* [Høyrup 1990a, 281-285]), BM 13901 N[os] 10 and 11 ([MKT III, 2]. *cf.* [Høyrup 1990a, 278-280]).

'multiplicación por 2' —'partiendo' y 'repetición [hasta 2]' son realmente operaciones inversas)—.

La ecuación es de las que poseen dos soluciones (positivas) —el texto usa $h = 40$, y la otra posibilidad es $h = 3''$. Sin embargo, esta ambigüedad no está presente en el que hace los cálculos, por que estaba ya determinada cuando la figura está dispuesta si h tiene que ser más grande o más pequeña que 3'45/2 —y esta decisión no estaba presente ella misma como una en el contexto babilonio, ya que todos los problemas fueron construidos al revés a partir de soluciones conocidas—.

Por lo tanto no deberíamos asombrarnos de que los babilonios no fueran concientes de que este tipo de ecuación tienen solución doble.[28] Ellos pudieron haberlo estado, pero sus métodos y costumbres siempre los guiarían sin ambigüedades a uno de los dos.

TMS VIII, Nº 1[29]

1. La superficie 10'. El 4o. del ancho para el ancho he agregado, para 3 yo he ido ... encima

[A.ŠÀ 10 4-*at* SAG *a-na* SAG DAḪ] *a-na* 3 *a-li-ik* . . .[*ugu*]

2. el largo 5' va más allá. Usted, 4, del cuarto, tanto como ancho posiciona. El cuarto de 4 toma, 1 ve usted.

[UŠ 5 DIR] KI.ZA.E [4 *r*]*e-ba-a ki-ma* SAG GAR *re-b*[*a*]*-at* 4 *le-qé* 1 *ta-mar*]

3. 1 para 3 sale, 3 ve usted. 4 cuartos del ancho para 3 agregar, 7 ve usted.

[1 *a-na*] 3 *a-li-ik* 3 *ta-mar* 4 *re-ba-at* SAG *a-na* 3 D[AḪ] 7 *ta-mar*]

4. 7 tanto como largo posiciona. 5' el ir más allá a lo quitado del largo posiciona. 7 del largo a 4 elevar,

[7] *ki-ma* UŠ GAR 5 diri *a-na na-si-iḫ* UŠ GAR 7 UŠ *a-na* 4 [*i-ši*]

---

28 Lo que es, de alguna manera, bastante raro en el conjunto, pero ocurre abiertamente en una tableta: TMS V, sección Ih, transcripción [TMS, 44]. Por supuesto, el problema correspondiente rectangular, $l \cdot w = A$, $l + w = B$, es totalmente común (ver por ejemplo antes, TMS IX, y AO 8862 Nº 2) —pero aquí, también por rutina, fue reconocida la existencia de dos soluciones (un valor de l y uno de w). TMS IX, más aún, escogiendo para la longitud modificada Λ el número más pequeño (4'30) y por el ancho modificado Ω el más largo (25), muestra conciencia de la arbitrariedad de la asignación de valores a los desconocidos (Ω = 4'30 en efecto daría el surgimiento a una ω y, si eso fuera aceptado, a una ω negativa).

29 Transcripción [TMS, 52] correcciones, traducción y discusión de [Høyrup 1993, 254-259].

each other"). If z designates the side of the small square we thus know that

$$28\Box(z) - n{\cdot}z = 10',$$

where $n{\cdot}z$ represents the excess of the 28 squares over the original rectangle (the rectangle contained by the "tearing-out of the length"[32] and the width) expressed in terms of the side of the small square. Only line 5 is going to compute $n = 4{\cdot}5' = 20'$,[33] in the meantime the equation is normalized through a multiplication by 28, whence

$$\Box(28z){-}n{\cdot}(28z) = 28{\cdot}10' = 4°40'.$$

This equation is solved by the standard procedure corresponding to Figure 8, the only deviation being the term used for "that which you have made hold" or "the made-hold" (as the entity was designated in other texts). Then z is found from $28z$ as usually done when the divisor is irregular (lines 8-9), and finally l and w from the initial conditions, $l = 7z - 5'$, $w = 4z$.

BM 13901 #12[34]

27. The surfaces of my two confrontations I have accumulated: 21'40''.
A.ŠA šī-ta mi-it-ḫa-ra-ti-ia
ak-mur-ma 21,40

28. My confrontations I have made hold each other: 10'.
mi-it-ḫa-ra-ti-ia uš-ta-ki-il-ma 10

29. The moiety of 21'40'' you break: 10'50'' and 10'50'' you make hold each other,
ba-ma-at 21,40 *te-ḫe-pe-ma* 10,50 *ù* 10,50 *tu-uš-ta-kal*

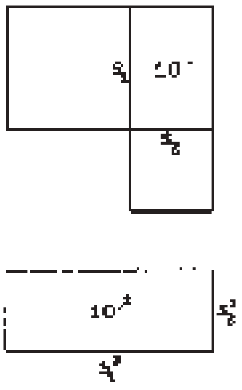

Figure 21

32 This entity occurred already in TMS VII, we remember – cf. p. 236. Once again we may observe that the use of the term for "that which should be torn out from 7z in order to produce the (real) length" implies that 7z is itself regarded as a *length*.
33 This delayed computation of the first-degree "coefficient" is habitual, cf. BM 13901 N° 14, rev. I.2-3.
34 Transliteration [MKT III, 3].

'multiplicación por 2' —'partiendo' y 'repetición [hasta 2]' son realmente operaciones inversas)—.

La ecuación es de las que poseen dos soluciones (positivas) —el texto usa $h = 40$, y la otra posibilidad es $h = 3''$. Sin embargo, esta ambigüedad no está presente en el que hace los cálculos, por que estaba ya determinada cuando la figura está dispuesta si h tiene que ser más grande o más pequeña que 3'45/2 —y esta decisión no estaba presente ella misma como una en el contexto babilonio, ya que todos los problemas fueron construidos al revés a partir de soluciones conocidas—.

Por lo tanto no deberíamos asombrarnos de que los babilonios no fueran concientes de que este tipo de ecuación tienen solución doble.[28] Ellos pudieron haberlo estado, pero sus métodos y costumbres siempre los guiarían sin ambigüedades a uno de los dos

TMS VIII, Nº 1[29]

1. La superficie 10'. El 4o. del ancho para el ancho he agregado, para 3 yo he ido ... encima
[A.ŠÀ 10 4-*at* SAG *a-na* SAG DAḪ] *a-na* 3 *a-li-ik* . . . . [ugu]

2. el largo 5' va más allá. Usted, 4, del cuarto, tanto como ancho posiciona. El cuarto de 4 toma, 1 ve usted.
[UŠ 5 DIR]IG ZA.E [4 *r*]*e-ba-ti ki-ma* SAG GAR *re-b*[*a-at* 4 *le-qé* 1 *ta-mar*]

3. 1 para 3 sale, 3 ve usted. 4 cuartos del ancho para 3 agregar, 7 ve usted
[1 *a-na*] 3 *a-li-ik* 3 *ta-mar* 4 *re-ba-at* SAG *a-na* 3 D[AḪ 7 *ta-mar*]

4. 7 tanto como largo posiciona. 5' el ir más allá a lo quitado del largo posiciona. 7 del largo a 4 elevar.
[7 *ki-ma* UŠ GAR 5 dirig *a-na na-si-iḫ* UŠ GAR 7 UŠ *a-na* 4 [*e-li*]

---

28 La que es, de alguna manera, bastante rara en el conjunto, pero ocurre aisladamente en una tablilla —TMS V, sección IIb, transcripción [TMS, 44]. Por supuesto, el problema correspondiente rectangular, $\square(l,w) = A$, $l - w = B$, es totalmente común (ver por ejemplo antes, TMS IX, y AO 8862 Nº 2) —pero aquí, también por rutina, fue reconocida la existencia de dos soluciones (un valor de l y uno de w). TMS IX, más aún, escogiendo para la longitud modificada Λ el número más pequeño (4°30) y por el ancho modificado Ω el más largo (28), muestra conciencia de la arbitrariedad de la asignación de valores a los desconocidos (Ω = 4°30 en efecto daría el surgimiento a un w, si eso fuera aceptado, a uno negativo).

29. Transcripción [TMS, 52] correcciones, traducción y discusión de [Høyrup 1990a, 254-259].

each other"). If z designates the side of the small square we thus know that

$$28\square(z) - n\cdot z = 10',$$

where $n\cdot z$ represents the excess of the 28 squares over the original rectangle (the rectangle contained by the "tearing-out of the length"[32] and the width) expressed in terms of the side of the small square. Only line 5 is going to compute $n = 4\cdot 5' = 20'$;[33] in the meantime the equation is normalized through a multiplication by 28, whence

$$\square(28z) - n\cdot(28z) = 28\cdot 10' = 4°40'.$$

This equation is solved by the standard procedure corresponding to Figure 8, the only deviation being the term used for "that which you have made hold" or "the made-hold" (as the entity was designated in other texts). Then z is found from $28z$ as usually done when the divisor is irregular (lines 8-9), and finally l and w from the initial conditions, $l = 7z - 5'$, $w = 4z$.

BM 13901 #12[34]

27. The surfaces of my two confrontations I have accumulated: 21'40''.
a.šà ši-ta mi-it-ḫa-ra-ti-ia
ak-mur-ma 21,40

28. My confrontations I have made hold each other: 10'.
mi-it-ḫa-ra-ti-ia uš-ta-ki-il-ma 10

29. The moiety of 21'40'' you break: 10'50'' and 10'50'' you make hold each other,
ba-ma-at 21,40 te-ḫe-pe-ma 10,50 *ù* 10,50 *tu-uš-ta-kal*

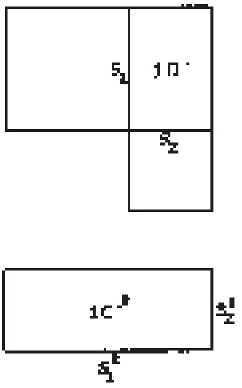

Figure 21

32. This entity occurred already in TMS VII, we remember — *cf.* p. 206. Once again we may observe that the use of the term for "that which should be torn out from 7z in order to produce the (real) length" implies that 7z is itself regarded as a length.
33. This delayed computation of the first-degree "coefficient" is habitual, *cf.* BM 13901 Nº 14, rev. I 2-3.
34. Transliteration [MKT III, 3.

5. 28 ve usted, 28 las superficies. 28 para 10' la superficie eleva, 4°40' ve usted
28 *ta-mar* 28 A.ŠÀ 28 *a-na* 10 A.ŠÀ *i-ši* 4,40 *ta-mar*

6. 5', lo quitado del largo para cuatro, del ancho, eleva, 20' ve usted. 1/2 parte, 10' ve usted. Haga sostener,
[5], *na-si-ih* UŠ *a-na* 4 SAG *i-ši* 20 *ta-mar* 1/2 *he-pe* 10 *ta-mar* NIGIN

7. 1'40'' ve usted. 1'40'' a 4°40' agregar, 4°41'40'' ve usted. ¿Qué se hace equilátero? 2°10' ve usted.
[1,40] *ta-mar* 1,40 *a-na* 4,40 DAH 4,41,40 *ta-mar mi-na* ÍB.SI 2,10 *ta-ma*[*r*]

8. 10' el igual (¿?) a 2°10' agregar, 2°20' ve usted. ¿Qué para 28, de las superficies, yo posicionaré cuando me de 2°20'?
[10 ŠÀ]A.ŠÀ *a-na* 2,10 DAH 2,20 *ta-mar mi-na a-na* 28 A.ŠÀ GAR *ša* 2,20 *i-na-*[*di-n*]*a*

9. 5' posiciona. 5' para 7 elevar, 35' ve usted. 5', lo quitado del largo de 35' quitar,
[5 GAR] 5 *a-na* 7 *i-ši* 35 *ta-mar* 5 *na-si-ih* UŠ *i-na* 35 ZI

10. 30' ve usted. 30' el largo. 5' el largo[30] para 4 del ancho elevar, 20' ve usted, 20 el largo (error para el ancho).
[30 *ta-*]*mar* 30 UŠ 5 UŠ *a-na* 4 SAG *i-ši* 20 *ta-mar* 20 {UŠ} <SAG>

Este texto de Susa nos regresa medio camino dentro del género didáctico, y demuestra otra manera de resolver un problema similar a aquel de TMS IX/C, *viz* a través de la reducción de un problema con una incógnita.

El tema es el rectángulo estándar $\square(30', 20')$. Las líneas 1-2 dicen que

$$\square(l, w) = 10', \quad w + 3\cdot uaw = l - 5',$$

después se dan instrucciones para 'posicionar' 4 y 7 'tanto como' el largo y ancho respectivamente. Lo que se lleva a cabo es una

30 Esto probablemente se refiere al largo del cuadrado $\square(\gamma/4)$. Muchos otros textos matemáticos Susa (Nos. V y VII, en efecto, hablan sobre el "largo" de un cuadrado.

30. 1°57''21'''40'''' is it. 10' and 10' you make hold each other, 1°40''
1,57,21{+25},40[35]-E 10 *ù* 10 *tu-uš-ta-kil* 1,40

31. inside 1°57''21'''40'''' you tear out: 17''21'''40'''' makes 4°10'' equilateral.
lìb-bi 1,57,21{+25},40 *ta-na-sà-aḫ-ma* 17,21{+25},40[36] -E 4,10[37] íb.si₈

32. 4°10'' to one 10°50'' you append: 15' makes 30' equilateral.
4,10 *a-na* 10,50 *iš-te-en tu-ṣa-ab-ma* 15-E 30 íb.si₈

33. 30' the first confrontation.
30 *mi-it-ḫar-tum iš-ti-a-at*

34. 4°10'' inside the second 10°50'' you tear out: 6°40'' makes 20' equilateral.
4,10 *lìb-bi* 10,50 *ša-ni-im* *ta-na-sà-aḫ-ma* 6,40-E 20 íb.si₈

35. 20' the second confrontation.
20 *mi-it-ḫar-tum ša-ni-tum*

This problem comes from the collection of 'square problems' which already supplied us with three illustrations of the basic second-degree techniques. Even in the present case basic techniques are drawn upon, but in a surprising way.

The problem is alluringly simple. Two squares $\square(s_1)$ and $\square(s_2)$ are involved, and we know the sum of their areas and the rectangle held by their sides:

$\square(s_1) + \square(s_2) = 21'40''$, $\sqsubset\!\!\sqsupset(s_1,s_2) = 10'$

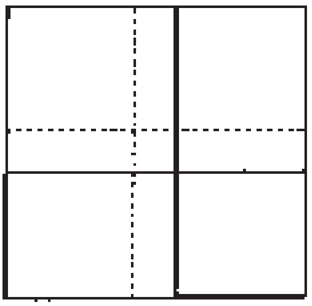

Figure 22

35. Erroneous for 1,57,21,40.
36. Erroneous for 17,21,40 — a consequence of the previous error.
37. This number is correct but not the square-root of 17,44,40.

subdivisión en cuadrados más pequeños —ver figura 20[31]—; entonces, 4 y 7 no son los coeficientes originales del largo y ancho, como en p.237, pero sí los 'coeficientes' para el (lado del) cuadrado pequeño que *produce* el largo y el ancho. El número total de dichos cuadrados se encuentra 'elevando' uno de estos 'coeficientes' al otro, lo que muestra que realmente suponemos *calcular* el número de

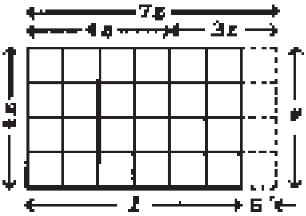

Figura 20

cuadrados pequeños, no el construir un rectángulo □(7, 4) (en tal caso debimos haber hecho 4 y 7 'sostenerse uno de otro'). Si z designa el lado del cuadrado pequeño, entonces sabemos que

$$28\square(z)-n\cdot z = 10'.$$

donde $n\cdot z$ representan el excedente de 28 cuadrados sobre el rectángulo original (el rectángulo formado por lo 'quitado al largo'[32] y el ancho) expresado en términos del lado del cuadrado pequeño. Sólo en la línea 5 se calcula $n = 4\cdot 5' - 20'$,[33] mientras que la ecuación es normalizada mediante la multiplicación por 28, de donde

$$\square(28z)-n\cdot(28z) = 28\cdot 10' = 4°40'.$$

Esta ecuación se resuelve mediante el procedimiento estandar correspondiente a la figura 8, teniendo como la única desviación el término usado para 'el cual usted ha hecho sostener' o 'el hecho sostener' (como fue designada la entidad en otros textos). Entonces z se encontró a partir de $28z$ como se hace comúnmente cuando el divisor es

31. Tales subdivisiones son también hechas en un número de otros textos aunque no precisamente con el uso presente: BM 8390 ([MKT I, 335-337], *cf.* [Høyrup 1990b, 281-285]); BM 13901 Nº 10 y 11 ([MKT III, 2f], *cf.* [Høyrup 1990a, 227f-280]).
32. Recordemos que esta entidad ocurre ya en TMS VIII. —*cf.* p. 237. Otra vez podemos observar que el uso del término para "el que debemos sacar de 7z para producir el largo (real)" implica que 7z es visto como un *largo*.
33. Este rastro de cálculo del primer "coeficiente" de primer grado es habitual. *cf.* BM 13901 Nº 14, rev. I 2-3.

This could have been solved by means of the diagram of Figure 22, which appears already to have served in the solution of N° 8 of the same tablet,

$$\square(s_1) + \square(s_2) = 21'40'', s_1 + s_2 = 50'.$$

All that is needed is to add twice the rectangle $\sqsubset\!\sqsupset(s_1,s_2)$ to the sum of the square areas, which would reduce the problem to the second step of the solution of N° 8. The actual reduction is quite different, and quite sophisticated (see Figure 21): it *represents* the areas $\square(s_1)$ and $\square(s_2)$ by the sides of a rectangle, whose area must then be $\square(\square(s_1),\square(s_2))$, computed as $\square(\sqsubset\!\sqsupset(s_1,s_2)) = 10'\cdot10'$. Thereby the two-square problem is reduced to one of the basic rectangular problems —one which we have already encountered in TMS IX and AO 8862 N° 2. As in these, addition is seen to precede substraction.

According to palaeographic and other internal criteria, the tablet is one of the earliest Old Babylonian mathematical text. This makes the present problem the very first surviving instance of indubitable algebraic representation. Modest as it seems, it bears witness to an utterly consequential leap in mathematical thinking —even (given the basic importance of mathematical representation in the modern technical and scientific civilization) of one of the major moments in human intellectual history.

YBC 6504 N° 4[38]

11. So much as length over width goes beyond, encountered, from inside the surface I have torn out:
ma-la UŠ U[GU S]AG SI.LI DU-*ma* A.ŠA BA.Z[I-*ma*]

12. 8'20''. 20' the width, its length what?
8,20 20 SAG UŠ.BI EN.NAM

13. 20' encountered: 6'40'' you posit.
20 DU DU-*ma* 6,40 IN.GAR

14. 6'40'' to 8'20'' you append: 15' you posit.
6,40 *a-na* 8,20 BI.DAH-*ma* 15 IN.GAR

38. Transliteration [MKT III, 23], analysis [Høyrup 1989, 30f]

irregular (líneas 8-9) y, finalmente, l y w de las condiciones iniciales. l = 7z-5', w = 4z

BM 13901 Nº 12[34]

27. Las superficies de mis dos confrontaciones yo he acumulado: 21'40''.
A.ŠÀ ši-ta mi-it-ḫa-ra-ti-ia
ú ak-mur-ma 21,40

28. Mis confrontaciones yo he hecho sostener cada una: 10'.
mi-it-ḫa-ra-ti-ia uš-ta-ki-il-ma 10

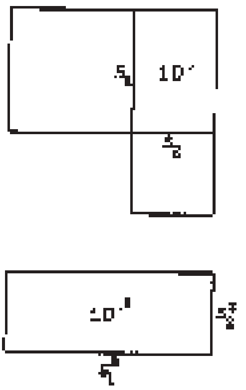

Figure 21

29. La media de 21'40'' usted parte: 10'50'' y 10'50'' usted hace sostener cada una.
ba-ma-at 21,40 *te-ḫe-pe-ma* 10,50 *ù* 10,50 *tu-uš-ta-kal*

30. 1°57''21'''40'''' es. 10' y 10' usted hace sostener cada uno, 1'40''
1,57,21(+25),40[35] ← 10 *ù* 10 *tu-uš-ta-kal* 1,40

31. dentro 1°57''21'''40'''' usted quita 17''21'''40'''' hace 4'10'' equilátero.
lìb-bi 1,57,21(−25),40 *ta-na-sà-aḫ-ma* 17,21(+25),40[36] —: 4,10[37] íb.si₈

32. 4'10'' para uno 10'50'' usted agrega 15' hace 30'' equilátero.
4,10 *a-na* 10,50 *iš-te-en tu-ṣa-ab-ma* 15-E 30 íb.si₈

33. 30' la primera confrontación.
30 *mi-it-ḫar-tum iš-ti-a-at*

34. 4'10'' dentro el segundo 10'50'' usted quita 6'40'' hace 20' equilátero.

34. Transcripción [MKT III, 3]
35. Erróneo de 1, 57, 21, 40
36. Erróneo de 17, 21, 40 —una consecuencia del error previo—
37. Este número es correcto pero no la raíz-cuadrada de 17, 46, 40.

15. 15´ makes 30´ equilateral. 30´ as length you posit
15-e 30 íb-si₈, 30 UŠ IN.GAR

So far we have seen how effectively the Babylonian calculators were able to use their cut-and-paste and scaling techniques; apart from a few writing errors, the only mistake we have encountered so far was the short-circuit in the end of VAT 8391 Nº 3.

The first three problems of the present tablet are solved just as correctly, and only differ in style from what we have seen so far by a heavy use of Sumerograms and by a slightly deviating terminology: even the end result is 'posited'; and the construction of a square is not spoken of as a confrontation of equals but with a comparable metaphor (referring to an encounter in battle).

The solution of problem 4, however, is mistaken though numerically correct, and probably the outcome of too rash reliance on the visually obvious. Figure 23 shows what has probably been the manoeuvre —above in distorted proportions, where the fallacy is obvious, below in correct measures, which masks the mistake and thus makes it understandable:

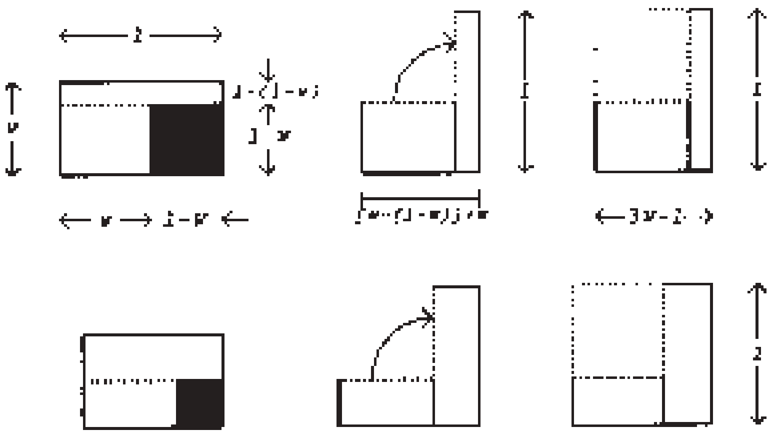
Figure 23

From a rectangle, the square on the excess of the length over width is removed; the remaining area is told, as is the width itself:

$$\sqsupset(l,w) - \square(l-w) = 8´20´´, \quad w = 20´.$$

4,10 *lib-bi* 10,50 *ka-ri-im tu-na-sà-ah-ma* 6,40 e 20 IB.SI₈

35. 20' la segunda confrontación.
20 *mi-it-ḫar-tum ka-ra-tum*

Este problema es de la colección de "problemas de cuadrados" que nos proporciona tres ilustraciones de las técnicas básicas de segundo-grado. También en el presente caso las técnicas básicas son ilustradas, pero de una manera sorpresiva.

El problema es tentadoramente simple. Están involucrados dos cuadrados $\square(s_1)$ y $\square(s_2)$ y conocemos la suma de sus áreas y el rectángulo sostenido por sus lados.

$$\square(s_1) + \square(s_2) = 21'40'', \sqcap(s_1, s_2) = 10'$$

Este pudo haber sido resuelto por medio del diagrama de la figura 22, el cual parece haber servido ya en la solución del número 8 de la misma tableta.

$\square(s_1) + \square(s_2) = 21'40'', s_1+s_2 = 50'.$

Lo que se necesita es agregar dos veces el rectángulo $\sqcap(s_1, s_2)$ a la suma de las áreas del cuadrado, lo que reducirá el problema al segundo paso de la solución del número 8. La reducción actual es muy diferente, y muy sofisticada (ver figura 21): ésta *representa* las áreas mediante $\square(s_1)$ y $\square(s_2)$ los lados de un rectán- gulo, cuya áreas debe ser entonces $\sqcap(\square(s_1), \square(s_2))$, calculada como $\square(\sqcap(s_1, s_2)) = 10' \cdot 10'$. De esta manera, el problema de dos cuadrados se reduce a uno de los problemas básicos

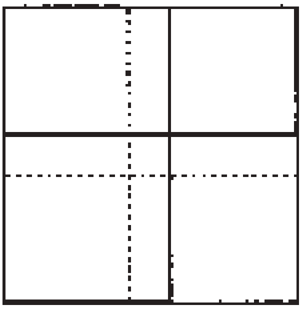

Figura 22

rectangulares —uno de ellos encontrado ya en TMS IX y AO 8862 Nº 2—. Como se vió ahí, la adición precede a la sustracción.

De acuerdo con la paleografía y otros criterios internos, la tableta es uno de los primeros textos matemáticos de la antigua Babilonia. Esto hace que el presente problema sea indiscutiblemente el primer vestigio sobreviviente de una indudable representación algebraica. A

The rectangle seems to be opened so as to allow the completion by $\square(w)$, and the completed rectangle is taken to be a square with side l. Actually, it is a rectangle $\square(l,3w-l)$, and only because $l = 3/2w$ do the two coincide.

Several texts betray that the oral exposition will often have identified unknown entities by their actual numerical value even when this value was not given in the statement (nor used for the solution —*cf.* [Høyrup 1992, 354f]). It was thus normal that teacher as well as student knew the answer in advance. Besides, as we have seen, rectangle problems almost invariably dealt with $\square(30',20')$ or $\square(30,20)$; teaching will have aimed very explicitly, not at finding the solution but at showing *how* to derive it. Normally, however, the texts are able distinguish between values that are *given* and numbers that are simply used as names; mistakes of the present kind, induced by the possession of knowledge beyond what is supposed to be given, are quite rare. If we think of how heavily *we* rely on algebraic formalism when we try to locate the errors (*e.g.*, what is written into Figure 23), the normally skilful distinction between what is given and what is merely known is quite impressive.

IV. 'Algebra'—related geometry

We shall close this presentation of Old Babylonian 'algebra' by looking at a few texts which do not belong to the genre proper but use some of the techniques that we have come to know.

IM 55357[19]

1. A triangle. 1' the length, 1'15 the long length, 45 the upper width
SAG.DU 1 UŠ 1,15 UŠ GÍD 45 SAG.KI AN.TA

2. 22'30 the complete surface. From 22'30 the complete surface, 8'6 the upper surface.
22,30 A.ŠÀ TIL. *i-na* 22,30 A.ŠÀ TIL. 8,6 A.ŠÀ AN.TA

19 Transliteration [Baqir 1950].

pesar de lo modesto que parezca, es completamente un salto de consecuencias en el pensamiento matemático —es más (dando la importancia básica de la representación matemática en la técnica moderna y de la civilización científica), uno de los principales momentos en la historia intelectual humana.

YBC 6504 N° 4[58]

11. Tanto como largo sobre ancho va más allá, encontrado, desde dentro de la superficie yo he quitado:
ma-la UŠ U[.GI]Ì. SAG SI L.L.LI. *i-na* A.ŠÀ BA.Z[I-*ma*]

12. 8'20''. 20' el ancho, ¿su largo qué?
8,20 20 SAG UŠ.BI EN.NAM

13. 20' encontrado: 6'40'' usted posiciona
20 UL.ÚL-*ma* 6,40 IN.GAR

14. 6'40'' a 8'20'' usted agrega: 15' usted posiciona.
6,40 *a-na* 8,20 BI.DAḪ-*ma* 15 IN.GAR

15. 15' hacer 30' equilátero. 30' como el largo usted posiciona
15-e 30 ib-si₈ 30 UŠ IN.GAR

Hasta aquí hemos visto que tan capaces eran los calculadores babilonios al usar sus técnicas de cortar, pegar y hacer escalas: fuera de pocos errores escritos, el único error que hemos encontrado hasta ahora fue la contradicción al final de VAT 8391 N° 3.

Los primeros tres problemas de la presente tabla están resueltos correctamente, y sólo se diferencian en el estilo de lo que hasta ahora hemos visto como el uso importante de sumerogramas y, por una terminología ligeramente diferente: a pesar de esto el resultado final es 'posicionado'; y la construcción de un cuadrado no es referida como una confrontación de iguales, pero si una metáfora comparable (refiriéndose a un enfrentamiento en batalla).

La solución del problema 4, sin embargo, es errónea aunque numéricamente correcta, y probablemente fue resultado de una precipitada confianza en lo visualmente obvio. La figura 23 muestra lo que

58. Transcripción [MKT III, 23]. Análisis [Høyrup 1989, 30[illegible]].

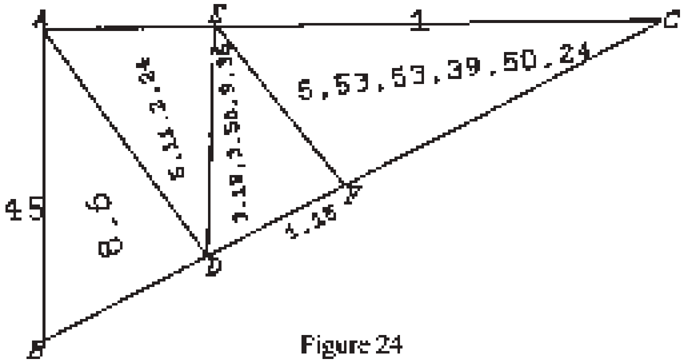

Figure 24

3. 5`11°2'24" the adjacent surface, 3`19°3'56"9'''36'''' the 3d surface
5.11,2.24 A.ŠÀ TA 3,19.3.56.9,36 A.ŠÀ 3-KAM

4. 5`53°53'39"50'''24'''' the lower surface.
5.53,53,39,50.24 A.ŠÀ KI.TA

5. The upper length, the shoulder length, the lower length and the descendant what?
ÚŠ AN.TA ÚŠ.MURGU ÚŠ.KI.TA ù *mu-tar-ri-it-tum mi-nu-um*

6. You, in order to know the making, the IGI of 1` the length detach, to 45 raise,
ZA.E AK.TA ZU.UN.DÈ IGI 1 ÚŠ DUḪ.A *a-na* 45 ÍL

7. 45' you see. 45' to 2 raise, 1°30' you see, to 8'6 the upper surface
45 IGI.DÙ 45 NAM 2 ÍL 1,30 IGI.DÙ 1.30 NAM 8.6 A.ŠÀ AN.TA

8. raise, 12'9 you see. 12'9 makes what equilateral? 27 the equilateral.
ÍL 12,9 IGI.DÙ 12.9 A.NA.AM ÍB.SI₈ 27 ÍB.SI₈

9. 27 the width. 27 break, 13°30' you see. The IGI of 13°30' detach.
27 SAG '(erasure)' 27 *ḫe-pé* 13.30 IGI.DÙ IGI 13,30 DUḪ.A

10. to 8'6 the upper surface raise, 36 you see, the length (which is) counterpart of the length 45, the width
NAM 8.6 [A.Š]A AN.TA ÍL 36 IGI.DÙ ÚŠ GABA ÚŠ 45 SAG KI

probablemente fue la estrategia —arriba en una proyección distorcionada, donde el error es obvio, abajo con medidas correctas, las que cubren el error y por consiguiente lo hacen entendible—.

En un rectángulo, el cuadrado que es el excedente del largo sobre el ancho es removido; el área sobrante es puesta como si fuera el mismo ancho:

$$\square(l, w) - \square(l-w) = 8'20'', \quad w = 20'$$

El rectángulo parece estar abierto para permitir la complementación por $\square(w)$, y el rectángulo completado es tomado como un cuadrado con lado l. En realidad, es un rectángulo $\square(l, 3w-l)$, y sólo porque $l = 3/2\, w$ hace a los dos coincidir.

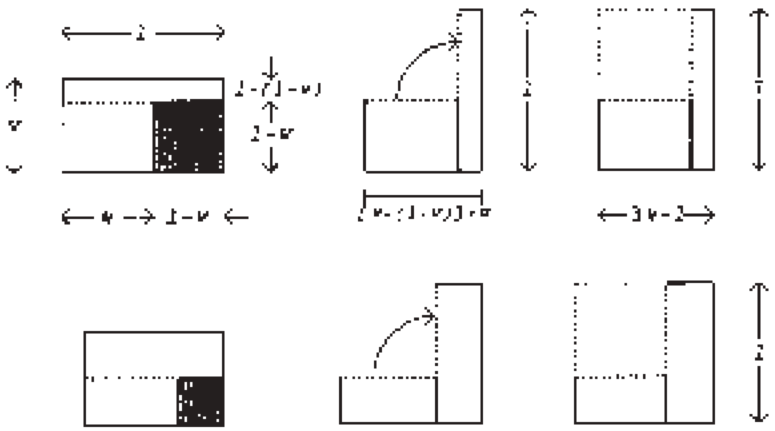

Figura 23

Diversos textos traicionan la exposición oral que, frecuentemente, tiene identificadas situaciones desconocidas por su valor numérico real aún cuando este valor no fuera dado en la declaración (ni usado para la solución —*cf.* [Høyrup 1992, 354f]). Entonces era normal que tanto maestros como estudiantes supieran la respuesta con anterioridad. Además, como hemos visto los problemas de los rectángulos invariablemente tratan con $\square(30', 20')$ o $\square(30', 20')$, enseñar tendría un objetivo muy explícito, no para encontrar la solución sino para mostrar cómo generarla. Sin embargo, es normal que los textos sean capaces de distinguir entre valores que son *dados* y números que son simplemente usados como nombres; errores de este tipo, inducidos por la posesión de un conocimiento más adelantado del que se supone, son muy raros. Si

11. Turn around. The length 27, of the upper triangle, from 1°15 tear out,
tu-ur-ru-ma UŠ 27 SAG.DU AN.TA *i-na* 1,15 BA.ZI

12. 48 leave. The IGI of 48 detach, 1°15'' you see. 1°15'' to 36 raise,
48 ÍB.TAK.A IGI 48 DU.A 1,15 IGI.DU 1,15 NAM 36 ÍL

13. 45' you see. 45' to 2 raise, 1°30' you see, to 5'11°2'24'' raise,
45 IGI.DU 45 NAM 2 ÍL 1,30 IGI.DU 1,30 NAM 5,11,2,24 ÍL

14. 7'46°33'36'' you see. 7'46°33'36'' makes what equilateral?
7,46,33,36 IGI.DU 7,46,33,36 A.NA A.NA ÍB.SI

15. 21°36' the equilateral, the width of the 2nd triangle.
21,36 ÍB.SI 21,36 SAG.KI ŠA SAG.DU 2-KAM

16. The moiety of 21°36' break, 10°48' you see. The IGI of 10°48' detach.
BA 21,36 *<he>-pé* 10,48 IGI.DU IGI 10,48 DU.A

17. to <...>
NAM

The diagram in *Figure 24* reproduces the features of a drawing on the tablet as faithfully as possible, including the location and orientation of numbers (the letters are evidently added). The numbers show that ΔABC is right, and that the others are cut off by successive heights. All triangles are thus right, and all are similar to the 3-4-5 triangle.

This explanation probably goes beyond what the Babylonian calculators would have told. They appear to have possessed no concept of quantified angle, and so to speak to have distinguished a 'right' from a 'wrong' angle —just as the present text distinguishes the length *simpliciter*, *i.e.*, the genuine length, the length that serves when the area is computed, from the 'long length', the hypotenuse BC. The way the successive triangles are named and the successive steps of the solution suggests an intuitive idea that cutting off a triangle at a 'good' angle would give you a new triangle 'of the same kind' as the original one, *i.e.*, with the same ratio between the sides ('similar' even in our technical sense). We are not informed about how the successive areas of the statement were computed, but from what we know about scaling in one and two dimensions and from the computations that follow later pensamos en lo fuerte que *nos* apoyamos en el formalismo algebraico cuando tratamos de localizar los errores (*e.g.* lo que está escrito en la figura 23), es muy impresionante que un experto normalmente distinga entre lo que se da y lo que se conoce.

IV. 'Algebra' - geometría relacionada

Cerraremos esta presentación del 'álgebra' de la antigua Babilonia revisando algunos textos que no pertenecen propiamente a este genero pero usan algunas de las técnicas que hemos venido conociendo.

IM 55357[39]

1. Un triángulo. 1° el largo, 1°15 la longitud larga, 45 el ancho superior.
SAG.DÙ 1 UŠ 1,15 UŠ GÍD 45 SAG.KI AN.TA

2. 22'30 la superficie completa. De 22'30 la superficie completa, 8'6 la superficie superior.
22,30 A.ŠÀ TIL *i-na* 22,30 A.ŠÀ TIL 8,6 A.ŠÀ AN.TA

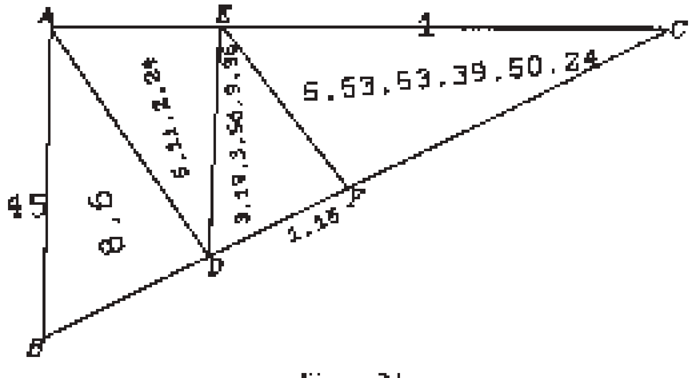

Figura 24

3. 5'11''2'''24'''' la superficie adyacente, 3'19''3'''56''''9'''''36'''''' la superficie 3d.
5,11,2,24 A.ŠÀ TA 3,19,3,56,9,36 A.ŠÀ 3-KAM

39. Transcripción [Baqir 1950]

in the text it is most likely that the 'upper surface' ΔABD was computed as $(3/5)^2$ times the 'complete surface' ΔABC —the 'adjacent surface' ΔADE as $(3/5)^2$ times the area ΔADC (itself found by subtraction of ΔABD from ΔABC)— the 'third surface' $AEDF$ through another repetition of this subtraction followed by a multiplication by $(3/5)^2$ —and the 'lower surface' finally by subtraction alone. It is also possible though not in harmony with the steps of the subsequent procedure that ΔADE was found as $(4/5)^2$ times ΔABD, etc. Unlikely, on the other hand, is a direct computation of the successive heights (those asked for in the text) and the corresponding bases —but even this possibility cannot be fully ruled out since only the numbers are there.

Equally undecidable in principle is the identification of the 'upper length', the 'shoulder length', the 'lower length' and the 'descendant' —but it would be strange if the lengths were not the lengths (*simplicites*) of the corresponding partial triangles (AD, DE and EF), and the 'descendant' the segment FC.

The solution makes use of that doubling of a right triangle into a rectangle which we encountered in connection with the siege ramp, and of the scaling in one dimension which transforms a rectangle into a square. At first, indeed, the text calculates the ratio between the length and the width of ΔABC (and clearly presupposes it to hold for ΔABD). Multiplying the area 8'6 by twice this ratio gives us the area of the square on the width BD, from which BD itself is found in line 8.[40] The height AD is then found (line 10) from the area and the moiety of BD.

Line 11 finds DC as 1°15·BD = 48, and uses this to find the scaling ratio which transforms the doubled ΔADC (and, it is obviously assumed, the doubled ΔADE) into a square on its width. Continuing as before, AE is found in line 15 to be 21°36'. The text breaks off before DE is found, but it is obvious how the computation would have to go on

VAT 8512[41]

Obverse

1. A triangle. 30 the width. In the inside two plots,
[ᵍⁱšSAG.DU 30 SAG i-na li-ib-bi ši-it-ta A.]ŠÀ ša-tum

40. Since it is the ratio that is multiplied and not the area, 'raising' is used instead of 'repetition'. The latter operation could only come in play if the area were multiplied *first* by 4°, thus producing an isosceles rectangle.
41. Transliteration [MKT I, 341 f]; cf. [TMH, 101-104] and [von Soden 1939, 148].

4. 5°53'53''39'''50''''24''''' la superficie menor.
5,53,53,39,50,24 A.ŠÀ KI.TA

5. ¿El largo superior, la longitud de la cima, el largo inferior y el descendente qué?
UŠ AN.TA UŠ.MURUB₄ UŠ.KI.TA *ù ma-ṭar-ri-it-tum mi-nu-um*

6. Usted, para conocer lo hecho, el IGI de 1° el largo separar, a 45 elevar.
ZA.E AK.TA.ZU.UN.DÈ IGI 1 UŠ DU₈.A *a-na* 45 ÍL

7. 45' ve usted. 45' para 2 elevar, 1°30' ve usted, a 8°6 la superficie superior
45 IGI.DU 45 NAM 2 ÍL 1,30 IGI.DU 1,30 NAM 8,6 A.ŠÀ AN.TA

8. elevar. 12°9 ve usted ¿12°9 a qué hace equilátero? 27 el equilátero.
ÍL 12,9 IGI.DU 12,9 A.BA.AM ÍB.SI₈ 27 ÍB.SI₈

9. 27 el ancho 27 parte, 13°30' ve usted. El igi de 13°30' separar,
27 SAG (borrado) 27 *ḫi-pí* 13,30 IGI.DU IGI 13,30 DU₈.A

10. para 8°6 la superficie superior elevar, 36 ve usted. el largo (que es) contraparte del largo 45, el ancho.
NAM 8,6 [A.Š]À AN.TA ÍL 36 IGI.DU UŠ GABA UŠ 45 SAG.KI

11. Dar vuelta. El largo 27, del triángulo superior de 1°15 quitar,
ma-ar-ḫi-ir UŠ 27 SAG.DU AN.TA *i-na* 1,15 BA.ZI

12. 48 dejar. El IGI de 48 separar, 1°15'' ve usted, 1°15'' para 36 elevar,
48 ÍB.TAG₄ IGI 48 DU₈.A 1,15 IGI.DU 1,15 NAM 36 ÍL.

13. 45' ve usted. 45' a 2 elevar, 1°30' ve usted. a 5°11°2'24'' elevar.
45 IGI.DU 45 NAM 2 ÍL 1,30 IGI.DU 1,30 NAM 5,11,2,24 ÍL.

14. 7°46°33'36'' ve usted. ¿7°46°33'36'' a qué hace equilátero?
7,46,33,36 IGI.DU 7,46,33,36 A.BA.AM ÍB.SI₈

15. 21°36' el equilátero, el ancho del 2o. triángulo
21,36 ÍB.SI₈ 21,36 SAG.KI AG DÙ 2-KAM

16. La mitad de 21°36' partir, 10°48' ve usted. El IGI de 10°48' separar.
BA 21,36 *ḫe-pe ḫi-pí* 10,48 IGI.DU IGI 10,48 DU₈.A

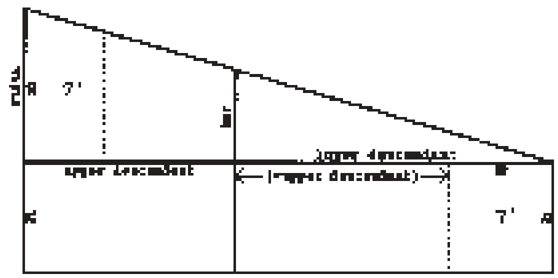

Figure 25

2. the upper surface over the lower surface 7' goes beyond.
[...] A.ŠÀ AN.TA UGU A.ŠÀ] KI.TA 7 *i-ter*

3. The lower descendant over the upper descendant 20 goes beyond.
m[u-tar-ri-tum KI.TA UGU *mu-tar-ri-tim*] AN.TA 20 *i-ter*

4. The descendants and the bar what?
mu-tar-ri-d[a]-tum ù pi-i[r]-ka-nu mi-nu-u[m]

5. And the surfaces of the two plots what?
ù a-š[a] ši-it[-ti eq-la-ti]-im mi-nu-u[m]

6. You, 30 the width posit, 7' which the upper surface over the lower surface goes beyond posit,
at-ta 30 SAG GAR.RA 7 *ša* A.ŠÀ AN.TA UGU A.ŠÀ KI.TA *i-te-ru* GAR.RA

7. and 20 which the lower descendant over the upper descendant goes beyond posit.
ù 20 *ša mu-tar-ri-t[um* K]I.TA UGU *mu-tar-ri-tim* AN.TA *i-te-ru* G[AR.R]A

8. The igi of 20 which the lower descendant over the upper descendant goes beyond
igi 20 *ša mu-tar-ri-tum* KI.TA UGU *mu-tar-ri-tim* AN.TA *i-te-ru*

9. detach: 3' to 7' which the upper surface over the lower surface goes beyond
pu-ṭur-ma 3 *a-na* 7 *ša* A.ŠÀ AN.TA UGU A.ŠÀ KI.TA *i-te-ru*

17 para [...]
NAM

El diagrama en la figura 24 reproduce las características de un dibujo sobre la tableta tan fielmente como es posible, incluyendo la localización y orientación de los números (las letras son evidentemente agregadas). Los números muestran que ΔABC es rectángulo, y que los otros son cortados por alturas sucesivas. Todos los triángulos son, por consiguiente, rectángulos y *todos* son similares al triángulo 3-4-5.

Esta explicación probablemente es más adelantada a lo que los calculadores babilonios dijeron. Parece que ellos no poseían el concepto de un ángulo cuantitativo y, por decirlo de alguna manera, tener que distinguir un ángulo 'correcto' de uno 'incorrecto' —así como el texto presente distingue el largo *simplificador*, *i.e.*, el largo genuino, que sirve cuando el área es calculada, de la 'longitud larga', la hipotenusa BC. La manera en que los triángulos sucesivos son nombrados y los pasos hacia la solución sugieren una idea intuitiva de que al cortar un triángulo en un ángulo 'bueno' resultaría un nuevo triángulo 'del mismo tipo' que el original, *i.e.*, con el mismo radio entre sus lados ('similar' en nuestro sentido técnico). No se tienen informes acerca de cómo las áreas sucesivas de tal afirmación se calcularon, pero de lo que sabemos sobre escalas en una y dos dimensiones y de los cálculos que siguen más adelante en el texto es más probable que la 'superficie superior' de ΔABD fue calculada como $(3/5)^2$ veces la 'superficie completa' ΔABC —la 'superficie adyacente' ΔADE como $(3/5)^2$ veces el área ΔADC (encontrado por la sustracción de ΔABD de ΔABC)— la 'tercera superficie' ΔEDF mediante otra repetición de esta sustracción seguida por una multiplicación por $(3/5)^2$ y la 'superficie inferior', finalmente, por la sola sustracción. Es imposible no pensar, que en armonía con los pasos del procedimiento, subsecuentemente se encuentre ΔADE como $(4/5)^2$ veces ΔABD, etc. Por otro lado, es un cómputo directo de las alturas sucesivas (aquellas por las que se pregunta en el texto) y las bases correspondientes —pero aún esta posibilidad no puede ser del todo descartada dado que sólo los números están ahí—.

Es en principio igualmente indecisa la identificación del 'largo superior', el 'largo de la cima', el 'largo inferior' y el 'descendente' —pero sería extraño si los largos no fueran los largos (*simplificadores*) de los triángulos parciales correspondientes (AD, DE y EF) y el segmento FC el 'descendente'.

10. raise, 21 may your head retain!
íl, 21 *re-eš-ka li-ki-il*

11. 21 to 30 the width append: 51
21 *a-na* 30 SAG *ṣi-ib-ma* 51

12. together with 51 make hold: 43`21
it-ti 51 *šu-ta-ki-il-ma* 43,21

13. 21 which your head retains together with 21
21 *ša re-eš-ka ú-ka-lu it-ti* 21

14. make hold: 7`21 to 43`21 append: 50`42.
šu-ta-ki-il-ma 7,21 *a-na* 43,21 *ṣi-ib-ma* 50,42

15. 50`42 to two break: 25`21.
50,42 *a-na ši-na ḫi-pí-ma* 25,21

16. The equilateral of 25`21 what? 39.
íb.si$_8$ 25,21 *mi-nu-um* 39

17. From 39, 21 the made-hold tear out, 18.
i-na 39 21 *ta-ki-il-tam ú-sú-uḫ-ma* 18

18. 18 which you have left is the bar.
18 *ša te-zi-bu pi-ir-kum*

19. Well, of 18 is the bar.
ma-šum-ma 18 *pi-ir-kum*

20. the descendants and the surfaces of the two plots what?
mu-tar-ri-du-tum ù A.ŠÀ *ši-i[t-ta ta-wi-ra-tim mi-nu-um]*

21. You, 21 which together with itself you have made hold, from 51
at-ta 21 *ša a-na r[a-ma-ni-ša tu-uš-ta-ki-lu i-na* 51]

22. tear out: 30 you leave. 30 which you have left
ú-sú-uḫ-ma 30 *te-z[i-ib* 30 *ša te-zi-bu*]

23. to two break, 15 to 30 which you have left raise,
a-na ši-na ḫi-pí-ma 1[5 *a-na* 30 *ša te-zi-bu íl*]

La solucion hace uso de la duplicación del triángulo rectangulo que lo hace rectángulo, el cual encontramos en conexión con el desnivel del sitio, y del hacer escala en una dimensión que transforma un rectángulo en un cuadrado. Al principio, en efecto, el texto calcula el radio entre el largo y el ancho de ΔABC (y claramente presupone sostenerlo para ΔABD). Multiplicando el área 8`6 por el doble de este radio nos da el área del cuadrado en el ancho BD, del que BD es encontrado el mismo en la línea 8.[40] La altura AD es encontrada entonces (línea 10) del área y la media de BD.

La línea 11 encuentra DC como 1`15-$BD$ − 48, y usa esto para encontrar el radio de la escala que transforma el $\Delta ABC$ duplicado (y, se asume obviamente, el duplicado de $\Delta ADE$) en un cuadrado en su ancho. Continuando como antes, $AE$ es encontrado en la línea 15 como 21°36`. El texto se parte antes de que DE sea encontrado, pero es obvio como el cálculo tuvo que haber continuado.

VAT 8512[41]

Anverso

1. Un triángulo. 30 el ancho. En el interior dos parcelas,
[SAG.DU 30 SAG *i-na li-ib-bi ši-it-ta* *e*]*q-le-tum*

2. La superficie superior sobre la superficie inferior 7' va más allá.
[A.ŠÀ AN.TA UGU A.ŠÀ] KI.TA 7 *i-tir*

3. El descendente inferior sobre el descendente superior 20 va más allá.
m[*u-tar-ri-tum* KI.TA UGU *mu-tar-ri-tim*] AN.TA 20 *i-tir*

4. ¿El descendente y la barra qué?
mu-tar-ri-it[*u*]*-tum ù pi-i-i*[*r*]*-kum mi-nu-u*[*m*]

5. ¿Y la superficie de las dos parcelas qué?
ù a-š[*à*] *ši-it*[*-ta e-qé-le*]*-e-tum mi-nu-u*[*m*]

40. Ya que es el radio el que es multiplicado y no el área, 'elevando' se usa en lugar de 'repetición'. La última operación sólo podría ponerse en juego si el área fuera multiplicada *primero* por 45, por consiguiente produciendo un rectángulo isósceles.

41. Transcripción [MKT I, 341f], cf. [TMB, 101-103] y [von Soden 1939, 148].

24. 7'30 may you head retain!
7,30 *re-eš[-ka li-ki-il]*

Edge

1. 18 the bar together with 18 make hold:
18 *pi-i[r-kam it-ti 18 šu-ta-ki-il-ma]*

2. 5'24 from 7'30 which your head retains
5,24 [*i-na 7,30 ša re-eš-ka ú-ka-lu*]

3. tear out: 2'6 you leave.
ú-sú-[u]ḫ-ma 2,6 *te-[zi-ib]*

Reverse

1. What to 2'6 shall I posit
mi-nam a-na 2,6 *lu-uš[-ku-un]*

2. which 7' which the upper surface over the lower surface goes beyond gives me?
ša 7 *ša* A.ŠÀ [AN.TA UGU] A.ŠÀ KI.TA *i-[te-ru] i-na-di-nam*

3. 3°20' posit. 3°20' to 2'6 raise, 7' it gives you.
3,20 GAR.RA 3,20 *a-na* 2,6 ÍL 7 *it-ta-di-kum*

4. 30 the width over 18 the bar what goes beyond? 12 goes beyond.
30 SAG UGU 18 *pi-ir-ki mi-nam i-tir* 12 *i-ter*

5. 12 to 3°20' which you have posited raise, 40.
12 *a-na* 3,20 *ša ta-aš-ku-nu i-ši* 40

6. 40 the upper descendant.
40 *mu-tar-ri-tum* AN.TA

7. Well, if 40 is the upper descendant,
ma šum-ma 40 *mu-tar-ri-tum* AN.TA

8. the upper surface is what? You, 30 the width,
A.ŠÀ AN.TA *mi-nu-um at-ta* 30 SAG,

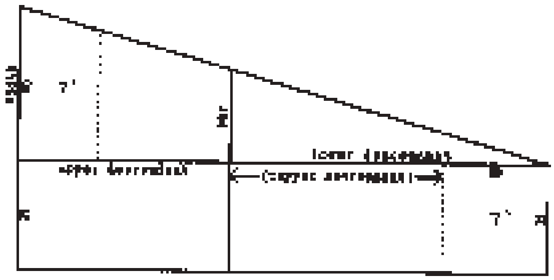

Figura 25

6. Usted, 30 el ancho posiciona, 7' que la superficie superior sobre la superficie inferior va más allá posicionar,
at-ta 30 SAG GAR.RA 7 *ša* A.ŠÀ AN.TA UGU A.ŠÀ KI.TA *i-te-ru* GAR.RA

7. y 20 que el descendente inferior sobre el descendente superior sale más allá posicionar
ù 20 *ša mu-tar-ri-t*[*um* K]I.TA UGU *mu-tar-ri-tim* AN.TA *i-te-ru* G[AR.R]A

8. El *igi* de 20 que el descendente inferior sobre el descendente superior va más allá
IGI 20 *ša mu-tar-ri-tum* KI.TA UGU *mu-tar-ri-tim* AN.TA *i-te-ru*

9. separar. 3' para 7' que la superficie superior sobre la superficie inferior sale más allá
pu-ṭur-ma 3 *a-na* 7 *ša* A.ŠÀ AN.TA UGU A.ŠÀ KI.TA *i-te-ru*

10. elevar, ¡21 que su cabeza retenga!
ÍL 21 *re-eš-ka li-kil*

11. 21 a 30 el ancho agregar: 51
21 *a-na* 30 SAG *ṣi-ip-ma* 51

12. junto con 51 haga sostener: 43'21
it-ti 51 *šu-ta-ki-il-ma* 43,21

13. 21 que su cabeza retiene junto con 21
21 *ša re-eš-ka ú-ka-lu it-ti* 21

14. haga sostener: 7'21 para 43'21 agregar: 50'42.
šu-ta-ki-il-ma 7,21 *a-na* 43,21 *ṣi-ip-ma* 50,42

9. 18 the bar accumulate: 48 to two break. 24.
18 *pí-ir-kam ku-mur-ma* 48 *a-na ši-na he-pí-ma* 24

10. 24 to 40 the upper descendant raise, 16'.
24 *a-na* 40 *mu-tar-ri-tim* AN.TA il 16

11. 16' the upper surface. Well, if 16' the upper surface.
16 A.ŠÀ AN.TA *ma šum-ma* 16 A.ŠÀ AN.TA

12. the lower descendant and the lower surface what?
mu-tar-ri-tum KI.TA *ma-nu-um* ù A.ŠÀ KI.TA MI.NU.UM

13. You. 40 the upper descendant to 20 which the lower descendant over the upper descendant goes beyond
at-ta 40 *mu-tar-ri-tam* AN.TA *a-na* 20 *ša mu-tar-ri-tum* KI.TA UGU *mu-tar-ri-tim* AN.TA *i-te-ru*

14. append, 1' the lower descendant.
ṣi-ib-ma 1 *mu-tar-ri-tum* KI.TA

15. 18 the bar to two break, 9
1[8] *pí-ir-kam a-na ši-na hi-pí-ma* 9

16. to 1' the lower descendant raise. 9'.
a-na 1 *mu-tar-ri-tim* KI.TA il 9

17. 9 the lower surface
9 A.ŠÀ KI.TA

The problem deals, like VAT 8391 N° 3, with a field that is subdivided into two 'plots'. There, however, the similarity between the two problems stops, and the present text is in fact an ingenious piece of pure geometry.

The field is triangular, and for convenience we may assume it to be right, in which case the 'descendants' are sections of the length (*simpliciter*).[42] A 'bar' (a parallel transversal) separates the two plots from each other, and we are told the width, the difference between the partial areas, and the difference between the two partial lengths.

42 In principle, any triangular shape would do if only the 'descendants' were sections of the height. But current habits as known from other texts support the conjecture that a 'right' and no 'wrong' triangle was meant.

15. 50'42 para dos parte: 25'21.
50,42 *a-na ši-na ḫi-pi-ma* 25,21

16. ¿El equilátero de 25'21 qué? 39.
ÍB.SI$_8$ 25,21 *mi-nu-um* 39

17. De 39, 21 lo sostenido quitar. 18.
i-na 39 21 *ta-ki-il-tam ú-sú-uḫ-ma* 18

18. 18 el que usted ha dejado es la barra.
18 *ša te-zi-bu pi-ir-kum*

19. Bueno, si 18 es la barra,
mu šum-ma 18 *pi-ir-kum*

20. ¿el descendente y la superficie de las dos parcelas qué?
mu-ur-ri-da-am ù A.ŠÀ *ši-i[t-ta ta-wi-ra-tim mi-nu-um]*

21. Usted, 21 que junto con el mismo usted ha hecho sostener, de 51
at-ta 21 *ša a-na r[a-ma-ni-ka tu-uš-ta-ki-lu i-na* 51]

22. quitar: 30 usted deja. 30 los que usted ha dejado,
ú-sú-uḫ-ma 30 *te-z[i-ib* 30 *ša te-zi-bu*]

23. para dos parta, 15 a 30 que usted ha dejado elevar,
a-na ši-na ḫe-pí-ma 1[5 *a-na* 30 *ša te-zi-bu* IL]

24. ¡7'30 que su cabeza retenga!
7,30 *re-eš[-ka li-ki-il*]

Borde

1. 18 la barra junto con 18 hace sostener:
18 *pi-i[r]-kam it-ti* 18 *šu-ta-ki-il-ma*]

2. 5'24 de 7'30 el que su cabeza retiene
5,24 [*i-na* 7.30 *ša re-eš-ka ú-ka-lu*]

3. quitar: 2'6 usted deja.
ú-sú-[u]ḫ-ma 2.6 *te-[zi-ib*]

The computation of the 'bar' makes use of an ingenious trick (first unravelled by Solomon Gandz [1948, 36*f*], more clearly explained by Peter Huber [1955], belonging to the same genre as the quadratic completion. Just as the quadratic completion allows us to replace a rectangle by a square, the present completion reduces the unequal partition of the triangle to a bisection of a trapezium —a problem whose solution was known by Mesopotamian surveyors at least since the 23d millennium B.C. As shown in Figure 25, a rectangle is joined to the triangle, and its width (21) determined in lines 8-10 in such a way that the area which is adjacent to the excess of the lower over the upper descendant (20) equals the excess of the upper over the lower plot (7'). The prolonged bar will thus bisect the trapezium that results when the rectangle is joined to the triangle.

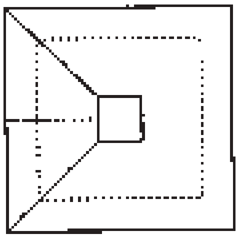

Figure 26

In lines 11 to 15, the areas of the squares on the parallel sides of the trapezium are found and their average (the moiety of their sum) is computed. This average is indeed the square on the bisecting transversal, as can be easily argued from Figure 26 (whether one looks at the isosceles or one of the right trapezia — our usual scaling operation in one dimension may have to be applied). Since this transversal turns out to be 39, the original 'bar' must be 18 (line 18).

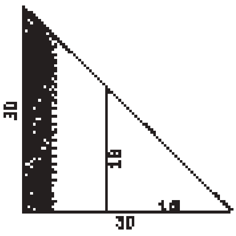

Figure 27

What follows next is an elimination of the added rectangle, from which we recalculate the width of the triangle, and then in lines 22*f* the area of the isosceles right triangle on this side (7'30). The triangle has thus been submitted to a scaling operation which transforms it into a semi-square —*cf.* Figure 27. In the next step, the square on the bar is found (5'24), *i.e.*, twice the area into which the lower plot is scaled or, indeed, the lower plot and as much of the upper plot as equals the lower plot. Subtraction of 5'24 from 7'30 thus leaves that which results from the scaling of

Reverso

1. ¿Qué a 2°6 posicionaré?
mi-nam a-na 2,6 *lu-uš*[*-ku-un*]

2. ¿qué 7° que la superficie superior sobre la superficie inferior va más allá me da?
ša 7 *ša* A.ŠÀ [AN.TA UGU] A.ŠÀ KI.TA *i-*[*te-ru*] *i-na-di-nam*

3. 3°20' posiciona. 3°20' para 2°6 elevar. 7° me da.
3,20 GAR.RA 3,20 *a-na* 2,6 IL 7 *it-ta-di-kum*

4. 30 el ancho sobre 18 la barra ¿qué va más allá? 12 va más allá.
30 SAG UGU 18 *pi-it-ki mi-nam i-ter* 12 *i-ter*

5. 12 a 3°20' que usted ha posicionado elevar, 40.
12 *a-na* 3,20 *ša ta-aš-ku-nu i-ši* 40

6. 40 el descendente superior.
40 *mu-tar-ri-tum* AN.TA

7. Bueno, si 40 es el descendente superior,
ma šum-ma 40 *mu-tar-ri-tum* AN.TA

8. ¿la superficie superior, qué es? Usted, 30 el ancho.
A.ŠÀ AN.TA *mi-nu-um at-ta* 30 SAG.

9. 18 acumular la barra: 48 para dos parte: 24
18 *pi-it-kam ku-mur-ma* 48 *a-na ši-na hi-pi-ma* 24

10. 24 a 40 el descendente superior elevar. 16°.
24 *a-na* 40 *mu-tar-ri-tim* AN.TA IL 16

11. 16' la superficie superior. Bueno, si 16' la superficie superior,
16 A.ŠÀ AN.TA *ma šum-ma* 16 A.ŠÀ AN.TA

12. ¿el descendente superior y la superficie inferior qué?
mu-tar-ri-tum KI.TA *mi-nu-um* ù A.ŠÀ KI.TA MI.NU.UM

13. Usted, 40 el descendente superior para 20 el que el descendente inferior sobre el descendente superior va más allá

the excess of the upper over the lower plot, *i.e.*, the shaded area of Figure 27.

This allows us to find the inverse scaling factor (3'20", rev. line 3); 'raising' the difference (12) between the width and the bar (which equals their distance in Figure 27) to 3'20' gives their distance in the original triangle (40, lines 5*f*), whence the upper surface can be computed (16', line 11). The lower descendant is found from the upper descendant and from the difference between the two (1', line 14), and the lower surface finally by the usual formula for the triangular area.

Even if we find it convenient to distinguish the Old Babylonian algebraic genre from other kinds of geometric computation, the terminology and operations of the present text thus suggests that this is really *our* distinction —a distinction which, if not directly alien to Old Babylonian mathematical thought, was hardly felt to be of major importance.

V. Appendix: recapitulation of terminology and operations

Additive operations

Of these there are two. One, 'appending' (*waṣābum*/DAH), is a concrete process in which one entity is joined to another and absorbed by it. For the same reason, no separate term for the sum by this operation exists—the absorbing entity so to speak conserves its identity while increasing in magnitude, and if the operation is geometrical it stays in place.

The other additive operation, 'accumulating' (*kamārum*/GAR.GAR/UL.GAR), may but need not be concretely meaningful. It can even apply to the addition of measuring numbers for entities of different dimension, and is thus the operation which allows the addition of [the measure of] sides and [the measure of] areas. In one text (AO 8862), where the operation was a concretely meaningful heaping, we have seen the sum designated by a plural, as 'the things accumulated' (*kimrātum*); most often (*e.g.*, TMS VIII) it is designated by the Sumerogram UL.GAR, which allows no interpretation beyond the translation 'accumulation'.

Subtractive operations

Even subtractions are of two kinds. One is the concrete removal of part of an entity which otherwise conserves its identity (in the sense that it remains in place if spatially located, and that no term exists for the difference except the descriptive 'what remains'), the standard term is *ar-ta* 40 *mu-tar-ri-tam* AN.TA *a-na* 20 *ša mu-tar-ri-tam* KI.TA U.GÙ *mu-tar-ri-tim* AN.TA *i-te-ru*

14. agregar, 1' el descendente inferior.
ṣi-ib-ma 1 *mu-tar-ri-tam* KI.TA

15. 18 la barra en dos parte; 9
1[8] *pi-ir-kam a-na ši-na hi-pi-ma* 9

16. a 1' el descendente inferior eleva, 9'.
a-na 1 *mu-tar-ri-tim* KI.TA IL 9

17. 9 la superficie inferior
9 A.ŠÀ KI.TA

El problema trata, como VAT 8391 Nº 3, con un campo que es subdividido en dos 'parcelas'. Ahí, sin embargo, la similitud entre los dos problemas se detiene, y el texto presente es de hecho una pieza ingeniosa de geometría pura.

El campo es triangular, y por conveniencia podemos asumir éste como recto, en cuyo caso los 'descendentes' son secciones del largo (*simplificador*).[42] Una 'barra' (un paralelo transversal) separa las dos parcelas una de otra, se nos dijo el ancho, la diferencia entre las áreas parciales, y la diferencia entre los dos largos parciales.

El cálculo de la 'barra' hace uso de un truco ingenioso (desenredado primero por Solomon Gandz [1948, 36f], explicado más claramente por Peter Huber [1955]), perteneciente al mismo género de completar cuadrados. Así como completar cuadrados nos permite reemplazar un rectángulo por un cuadrado, la 'compleción' presente reduce la división desigual del triángulo a una bisección de un trapecio —un problema cuya solución fue conocida por los metrólogos mesopotámicos al menos desde el milenio 23 a.C. Como se muestra en la figura 25, un rectángulo es unido al triángulo, y su ancho (21) determinado en las líneas 8-10 de tal forma que el área que es adyacente al exceso del inferior sobre el descendente superior (20) iguala el exceso del superior sobre la parcela inferior (7'). La barra prolongada entonces bi-

42. En principio, cualquier forma triangular lo haría, si sólo los 'descendentes' fueran secciones de la altura. Pero los hábitos comunes como se conoce de otros textos apoyan la conjetura de que fue pensado un triángulo 'correcto' y no 'incorrecto'.

'tearing out' (*nasāḫum*/ZI), but a number of near-synonyms can be found (one, 'cutting off'/*ḫarāṣum*, occurred in AO 8862) in situations where their general connotations fit the concrete process. Since one entity has to be part of the other, it can only be used when the subtraction is meaningful.[43]

The other is a comparison, the result of which notices how much one entity 'goes beyond' (*watārum*/DIRIG) another. Even this operation is only used when it is concretely meaningful. The difference may be designated simply by the Sumerogram DIRIG ('the going-beyond'), or by a full Akkadian phrase meaning "so much as A over B goes beyond" (used, *e.g.*, in YBC 6504 N° 4, line 11).

'Multiplications'

Four distinct operations are traditionally understood as (one and the same) multiplication ('there is only one', as Thureau-Dangin remarked somewhere). All occur in the texts that were discussed above.

'Raising' (*našûm*/ÍL, with the synonymous set *elûm*/NIM), was originally a spatial metaphor used for the calculation of volumes: a prism with base *A* SAR and height *h* KÙŠ is obtained when the base, provided with the standard height 1 KÙŠ, is raised from 1 to its real height *h*. From this use, the concept was generalized to other computations involving a similar consideration of proportionality[44] —*e.g.*, the *computation* of an area from the width and the length implicitly provided with a standard breadth (a 'projection') 1 —ultimately evolving into a general concept of multiplicative computation of concrete magnitudes.[45]

The tables listing the product of number by number refer to a different idea, that of repeated addition. The expression is *n* A.RÁ *a*, '*n* steps of *a*'. In less formal mathematical discourse, the same idea was

43 This claim seems to be contradicted by BM 13901 N° 2, where a side is 'torn out' from the area apparently just the way the two are 'accumulated' in N° 1. N° 3 from the same tablet shows, however, that the 'tearing' involves an automatic shift of conceptualization and the implicit involvement of a 'projection'.

44 We may remember the Euclidean definition of the product $a \cdot b$ as the number which is to b as a is to 1 —the number which, in the simple version of proportionality used in *Elements* VII, contains b as often as a contains the unit (*Elements* VII, def. 15). Basing multiplication on proportionality and not vice versa is thus not a Babylonian speciality.

45 This point is already reached in the earliest Old Babylonian texts at our disposal; only the observation that the order of factors is fixed when volumes are involved (invariably, it is the base which is raised to the height) but erratic in all other cases allows us to establish that the facile interpretation corresponds in fact to the original usage.

sectará el trapecio que resulta cuando el rectángulo es unido al triángulo.

En las líneas 11 a 15, las áreas de los cuadrados en los lados paralelos del trapecio son encontrados y es calculado su promedio (la media de su suma). Este promedio es, en efecto, el cuadrado sobre la transversal bisectada, como puede argumentarse fácilmente en la figura 26 (si uno ve al isóceles o uno de los trapecios rectos —nuestra operación usual de hacer a escala en una dimensión puede que tenga que ser aplicada)— Dado que esta transversal resulta ser 39, la 'barra' original debe ser 18 (línea 18).

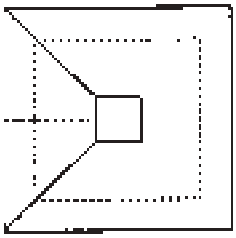

Figura 26

Lo que sigue después es una eliminación del rectángulo agregado, del que recalculamos el ancho del triángulo, y luego en las líneas 221 el área del triángulo recto isóceles en este lado (7°30). El triangulo por consiguiente ha sido sometido a una operación de escala que lo transforma en un semi-cuadrado —*cf.* figura 27—. En el próximo paso el cuadrado en la barra es encontrado (5°24), *i.e.*, dos veces el área en la que la parcela inferior es hecha a escala o, en efecto, la parcela inferior y tanto de la parcela superior como iguala a la parcela inferior. La sustraccion de 5°24 de 7°30 por consiguiente deja esa que resulta de hacer escala el excedente de la parcela superior sobre la parcela inferior, *i.e.*, el area sombreada de la figura 27.

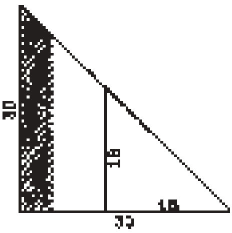

Figura 27

Esto nos permite encontrar el factor inverso de la escala (3°20', rev línea 3): 'elevando' la diferencia (12) entre el ancho y la barra (la que iguala su distancia en la figura 27) a 3°20' da su distancia en un triángulo original (40, líneas 5f), ya que la superficie superior puede expressed both in TMS VII —where 'going a to 10' produced $10a$, a being spoken of precisely as the 'step' —and in TMS VIII, where 'appending' a to B and 'going to 3' brought forth $B + 3a$.

The two remaining operations are not in themselves genuine multiplications but concrete operations which *entail* a multiplication. One is the construction of a rectangle ('building' in AO 8862), 'making l and w hold each other' (*šutakūlum*/KU.KU), with a number of near-synonyms.[46] in a few texts (thus AO 8862). the concomitant computation is made explicit, mostly it is left as an implicit consequence of the construction and the result given immediately.

'Repeating' or 'repeating to n' (*eṣēpum*/TAB), finally, is a concrete doubling or n-doubling. It only occurs with small integer values for n (n<10), and only when a real mirroring or an agglomeration of identical copies is involved —in the ramp problem from BM 85194 it was used when a triangle was doubled into a rectangle. Even this operation implies a multiplication of the measuring number by n.

Division

Division was no procedure in Babylonian mathematics. It was a problem. If d is a sexagesimally regular number. *i.e.*, if d can be expressed in the form $2^p\cdot3^q\cdot5^r$ and its reciprocal thus a as finite sexagesimal fraction. this reciprocal (the IGI of d) is 'detached' (*paṭārum*/DU₈), actually looked up, and then raised to A ($A÷d = A\cdot 1/d$). If the IGI cannot be looked up in the standard table of reciprocals, the text states that 'its IGI I do not know', poses the question 'what shall I posit to d which gives me A' and then gives the answer (at times designated *bandûm*) immediately: since all mathematical texts were constructed backwards from known results, this could always be done.

Bisection

The normal or 'incidental' half (*mišlum*) —that which stands on a par with other fractions— was found through multiplication by 30' (thus in AO 8862 N° 2). In cases, however, where the half could be nothing but precisely the half, it carried a particular name, the 'moiety' (*bāmtum*) —and so did the process by which the moiety is found: 'breaking' (*ḫepûm*/GAZ). This is the term that occurs when the width of a (right)

46. NIGIN, the basic meaning of which is to 'surround' or 'contain', was used logographically for *šutakūlum* in TMS IX and probably in other Susa texts as well.

ser calculada (16', línea 11). La descendente inferior se encuentra del 'descendente superior' y de la diferencia entre las dos (1', línea 14), y finalmente la superficie inferior por la fórmula usual del área triangular.

Aún si *nosotros* encontramos conveniente distinguir el antiguo género algebraico babilónico de otros tipos de cálculo geométrico, la terminología y operaciones del presente texto, por consiguiente sugieren que ésta es realmente *nuestra* distinción —una distinción que, si no directamente ajena al pensamiento matemático de la antigua Babilonia, fue difícilmente sentida como de una importancia mayor—.

V. Apéndice: recapitulación de terminología y operaciones

Operaciones de adición

De éstas hay dos. Una, 'agregando' (*waṣābum*/DAḪ), es un proceso concreto en donde una unidad es unida a otra y absorbida por ésta. Por la misma razón, en esta operación no existe un término separado para la suma —la entidad absorbida, por decirlo de alguna manera, conserva su identidad mientras incrementa su magnitud, y si la operación es geométrica se queda en el lugar—.

La otra operación aditiva, 'acumulando' (*kamarum*/GAR.GAR/UL.GAR), puede no necesitar un significado concreto. Ésta puede aplicarse a la adición de medidas en números para entidades de dimensiones diferentes, y es por consiguiente, la operación que permite la adición de [la medida de los] lados y [la medida de las] áreas. En un texto (AO 8862), donde la operación era un amontonamiento significativamente concreto, hemos visto la suma designada por un plural, como 'las cosas acumuladas' (*kimrātum*): a menudo (*e.g* TMS VII) designado por el sumerograma UL.GAR, que no permite interpretaciones más allá de la traducción 'acumulación'.

Operaciones de sustracción

Aún las sustracciones son de dos tipos. Una es concretamente remover una parte de una entidad que de otra forma conserva su identidad (en el sentido de que permanece en el lugar si está localizada espacialmente, y que no existen términos para la diferencia excepto la descriptiva 'lo que queda'). el término estandar es 'quitando' (*nasāḫum*/ZI), pero puede encontrarse un número casi sinónimo (uno, 'cortando'/*ḫarāṣum*, como ocurre en AO 8862) en situaciones donde su connotación general encaje triangle is bisected and then 'raised' to the length; above, we have mostly encountered it when a rectangle was transformed into a gnomon. In both cases, a 'necessary' and no 'incidental' half is indeed involved.

Squaring and square root

By accident, all four 'multiplications' might happen to involve two identical factors. However, only cases where a geometrical squaring is meant (directly or in representation) refer to a particular concept and terminology.

The square produced in the process is a 'confrontation [of equals]' (*mitḫartum*), parametrized by the side and *possessing* its area. Often, when one side is found, the side which meets it in a corner is characterized as its 'counterpart' (*meḫrum*/GABA-ri[47]). The process itself is spoken of as 'making *a* confront itself' (*šutamḫurum* —derived from the same verbal root *MḪR* as *mitḫartum* and *meḫrum*; often, NIGIN functions as a logogram for this verb rather than for *saḫārum*/*lawûm*). Various synonyms may be used, e.g., 'encountering' (I.I.ÚL).[48]

The opposite movement, finding the side of a square area, is spoken of in one of the few genuinely Sumerian expressions that occur in our texts.[49] The full phrase is *A*-e *x* íb.si₈ ('*A* makes *x* equilateral'), meaning that *A*, if laid out as a square area, produces *x* as its parametrizing 'equal-side'. Often, the term íb.si₈ (originally a verb, and still remembered in other texts to be a verb of which *A* is the agent and *x* the object) is treated like a noun, *x* being seen as 'the equilateral of *A*'.

At times, the prefix íb is replaced by ba without any apparent change of meaning. The idea, launched in the 1930es, that ba.si₈ designate the cube root, has been discredit by texts discovered since then. The preference may to some extent have been geographically determined.

---

47 In IM 55357, line 10, the 'length' of a particular right triangle was identified as 'the counterpart' of the identifiable 'long length' of the same triangle.

48 One may observe that the Gilgameš epic speaks of Enkidu as the *meḫrum* of Gilgameš, and about the predicted fight between the two peers in strength using the verb *šutamḫurum*.

49 Other genuinely Sumerian terms are UŠ (length) and SAG (width or 'front' of a rectangle). A.ŠÀ, 'surface', is always written with the Sumerogram but often provided with a phonetic complement that shows it to have been pronounced in Akkadian.

en el proceso concreto. Dado que una entidad tiene que ser parte de la otra, sólo puede ser usada cuando la sustracción sea significativa.[43]

La otra es una comparación, el resultado del que se nota cuánto una entidad 'va más allá' (*watārum*/DIRIG) a otra. Aún esta operación es solamente usada cuando es significativa concretamente. La diferencia puede ser designada simplemente por el sumerograma DIRIG ('el ir se más allá'), o por una frase completa akadiana que significa 'tanto como A sobre B va más allá' (usada, *e.g.*, en YBC 6504 N° 4 línea 11).

'Multiplicaciones'

Tradicionalmente, cuatro operaciones distintas son entendidas como (una y la misma) multiplicación ('*existe* solamente una' como Thureau-Dangin subrayó en alguna parte). Todo sucede en los textos que se discutieron antes.

'Elevando' (*našûm*/ÍL, con el conjunto de sinónimos *elûm*/NIM), fue originalmente una metáfora espacial usada para el cálculo de volúmenes: un prisma con base *A* SAR y altura *h* KÙŠ se obtiene cuando la base, provista con la altura estándar 1 KÙŠ, es elevada desde 1 hasta su altura real *h*. De este uso, el concepto fue generalizado a otros cálculos involucrando una consideración similar de proporcionalidad[44] —*e.g.*, el *cálculo* de una área a partir del ancho y el largo provista implícitamente con una anchura estándar (una 'proyección') — finalmente desarrollado en un concepto general de cálculo multiplicativo de magnitudes concretas.[45]

Las tablas listando el producto de número por número se refieren a una idea diferente a la adición repetida. La expresión es '*n* A.RÁ *a*', '*n* pasos de *a*'. En un discurso matemático menos formal, la misma idea fue expresada tanto en TMS VII —donde 'ir *a* hacia 10' produjo

43 Esta afirmación parece ser contraria a BM 13901 N° 2, donde un lado es 'separado' del área aparentemente de la misma forma que los dos son 'acumulados' en N° 1. La misma tableta N° 3 muestra, sin embargo, que 'separando' involucra un cambio automático de conceptualización y el involucramiento implícito de una proyección.

44 Podemos recordar la definición Euclidiana del producto *a·b*, como el número que es a *b* como *a* es a 1 —el número que, en la versión simple del uso de la proporcionalidad en *Elementos* VII, contiene *b* tan seguido como *a* contiene la unidad (*Elementos* VII def. 15). Basar la multiplicación en la proporcionalidad y no viceversa no es entonces una especialidad babilonia.

45 Este punto es ya alcanzado en los textos más antiguos de la temprana Babilonia a nuestra disposición; sólo la observación que el orden de factores es fijado cuando son involucrados volúmenes (posiblemente, es la base que es elevada a la altura) pero erradicada en todos los otros casos nos permite establecer que la fácil interpretación corresponde de hecho al uso original.

Units

Practical life made use of traditional measures, whose mutual relations were sexagesimally regular numbers but apart from that only slightly better adapted to the sexagesimal number system than British measures are to the decimal system. For computational purposes, the Babylonian calculators made use of metrological tables converting all measures to sexagesimal multiples of a set of basic units —the NINDAN for horizontal distances, the KÙŠ (= 1/12 NINDAN ≈ 50 cm) for vertical distances, the SILA (≈ 1 litre) for hollow measures, the SAR for areas and volumes (meaning NINDAN^2 and NINDAN^2-KÙŠ, respectively). The same conversions, and the same choice of basic units, recur in the mathematical texts and for good reasons: the students trained by the texts we know were expected to become practical calculators, and the only practical purpose of the extensive work on second-degree algebra was the drill of sexagesimal computation and conversions which it entailed.[50]

50 This is not the place to discuss the *social* function of second-degree algebra for professional pride, which has been similar to the function of Latin and Greek for clerks of a later age.

10a, siendo *a* precisamente descrita como el 'paso'— y en TMS VIII, donde 'agregando' *a* a *B* y 'llendo a 3' llevó hacia *B*+3*a*.

Las dos operaciones restantes no son multiplicaciones genuinas en sí, sino operaciones concretas que *se vinculan* con una multiplicación. Una es la construcción de un rectángulo ('construyendo' en AO 8862), 'haciendo a *l* y *w* sostenerse una a la otra' (*šutakūlum*/UL.KÚ.KÚ), con una serie de sinónimos cercanos.[46] En pocos textos (por consiguiente AO 8862), el cálculo concomitante es explícito, la mayoría de las veces se deja como una consecuencia implícita de la construcción y el resultado se da inmediatamente.

'Repitiendo' o 'repitiendo para *n*' (*ešēpum*/TAB), finalmente, es un duplicando concreto o *n*-duplicando. Esto sólo sucede con valores enteros pequeños de *n* ($n < 10$), y sólo cuando un reflejo real o una aglomeración de copias idénticas es involucrada —en el problema de rampa de BM 85194 fue usado cuando un triángulo fue duplicado en un rectángulo—. Aún esta operación implica una multiplicación del número medido por *n*.

División

La división no fue un procedimiento en las matemáticas babilónicas. Fue un problema. Si *d* es un número regular sexagesimal, *i.e.*, si *d* puede ser expresada en la forma $2^{\alpha}\,3^{\beta}\,5^{\gamma}$ y por consiguiente sus recíprocos, una fracción finita sexagesimal, este recíproco (el IGI de *d*) 'es separado' (*paṭārum*/DU₈), realmente buscado y después elevado a *A* ($A \div d = A \cdot 1/d$). Si el IGI no puede ser buscado en la tabla estandar de recíprocos, el texto afirma que 'sus IGI yo no se', tiene la pregunta 'qué posicionaré a *d* que me dé *A*' y después da la respuesta (unas veces designada *bandûm*) inmediatamente: ya que todos los textos matemáticos fueron construidos al revés de resultados conocidos, ésto siempre podría ser hecho.

Bisección

La mitad (*mišlum*) normal o 'incidental' —la que se basa de una parte con otras fracciones— fue encontrada a través de multiplicar por 30' (por consiguiente en AO 8862 Nº 2). En casos, sin embargo, en donde la mitad podría ser nada más que precisamente la mitad, ésta

46. NIGIN, el significado básico de lo que es 'rodear' o 'contener', fué usado logográficamente por *šutakūlum* en TMS IX y probablemente también en otros textos Susa

INDEXES.

Index I: discussions of terms and operations

This first index locates the main discussions of the single terms and operations. The standard translations are used as key words. The second index lists Akkadian terms and Sumerograms with cross-references to the standard translations.

lleva un nombre particular, la 'media' (*bāmtum*) —y también el proceso por el que la media es encontrada: 'partiendo' (*ḫepûm*/GAZ). Este es el término que ocurre cuando el ancho de un triángulo (recto) es bisectado y entonces 'elevado' al largo; arriba, lo hemos encontrado la mayoría de las veces cuando un rectángulo fue transformado en un gnomon. En los dos casos, una 'necesaria' y no 'incidental' mitad es en efecto involucrada.

Elevando al cuadrado y raíz cuadrada

Por accidente, sucede que las cuatro 'multiplicaciones' involucran dos factores, idénticos. Sin embargo, los únicos casos donde se intenta una elevación geométrica al cuadrado (directamente o en representación) se refiere a un concepto particular y terminología.

El cuadrado producido en el proceso es una 'confrontación [de iguales]' (*mitḫartum*), parametrizado por el lado y *poseyendo* su área. Usualmente, cuando un lado es encontrado, el lado que lo encuentra en una esquina es caracterizado como su 'contraparte' (*meḫrum*/GABA).[47] Se habla del proceso como 'haciendo a *s* confrontarse con ella misma' (*šutamḫurum* —derivado de la misma raíz verbal MHR como *mitḫartum* y *meḫrum*, con frecuencia NIGIN funciona como un logograma para este verbo en lugar de que para *šutakūlum*—). Varios sinónimos pueden ser usados, *e.g.*, 'encontrados' (LÁ.LÁ).[48]

Se habla del movimiento opuesto, encontrando el lado de una área cuadrada, en una de las pocas expresiones genuinas sumerias que ocurren en nuestros textos.[49] La frase completa es *A*-E *s* ÍB.SI₈ ('*A* hace *s* equilátero'), significando que *A*, si está dispuesta como una área cuadrada, produce *s* como su parametrizador 'lado-igual'. Con frecuencia el término ÍB.SI₈ (originalmente un verbo y aun recordado en otros textos como el verbo del que *A* es el agente y *s* el objeto) es tratado como un nombre, *s* siendo vista como el 'equilátero de *A*'.

47 En BM 33357, línea 10, el 'largo' de un triángulo recto particular fue identificado como la 'contraparte' de la identificable 'longitud larga' del mismo triángulo.

48 Uno puede observar que la épica de Gilgameš habla de Enkidu como el *meḫrum* del Gilgameš, y sobre la pelea predicha entre los dos pares en potencia usando el verbo *šutamḫurum*.

49 Otros términos genuinos sumerios son UŠ (largo) y SAG (ancho o 'frente' de un rectángulo). A.ŠÀ, 'superficie', es siempre escrito con el Sumerograma pero con frecuencia está provisto de un complemento fonético que muestra como hubiera sido pronunciado en Acadiano.

Index 2: Akkadian terms and Sumerograms with standard translations

Jens Egede Høyrup is Reader at Roskilde University, Denmark, in the Department of Languages and Culture. Much of his research in recent years has dealt with the cultural history of pre-Modern and early Modern mathematics and with the conceptual structure and the influence of Babylonian mathematics. One of his latest contributions is *In measure, number, and weight. Studies in mathematics and culture*, 1994.

Algunas veces, el prefijo IB es reemplazado por BA sin ningún cambio de significado aparente. La idea, lanzada en los 1930's, que BA.SI₈ designa la raíz cúbica, ha sido desacreditada por los textos descubiertos desde entonces. La preferencia puede en alguna extensión haber sido determinada geográficamente.

Unidades

La vida práctica hace uso de medidas tradicionales, cuyas relaciones mutuas fueron números regulares sexagesimales pero a parte de ésto solo ligeramente mejor adaptados al sistema numérico sexagesimal que las medidas británicas son al sistema decimal. Para propósitos de cálculo, los calculadores babilonios hacían uso de tablas metrológicas convirtiendo todas las medidas a múltiplos sexagesimales de un conjunto de unidades basicas —el NINDAN para distancias horizontales, el KÙŠ (= 1/12 NINDAN ≈ 50cm) para distancias verticales, la SILA (≈ 1 litro) para medidas de capacidad, el SAR para áreas y volúmenes (significando NINDAN^2 y NINDAN^2 KÙŠ, respectivamente). Las mismas conversiones, y la misma elección de unidades básicas recurren en los textos matemáticos —y por buenas razones: los estudiantes entrenados por los textos que conocemos se esperaba que llegaran a ser calculadores prácticos, y el único propósito práctico del trabajo extensivo en álgebra de segundo-grado era la instrucción del cálculo sexagesimal y las conversiones que ésto ocasionaba.[50]

Índices

Indice 1: Discusiones de términos y operaciones

Este primer índice localiza las principales discusiones de los términos únicos y las operaciones. Las traducciones estandar son usadas como las palabras claves. El segundo índice enlista los términos akadianos y sumerogramas con referencias cruzadas de la traducción estandar.

50. Este no es el lugar para discutir la función *social* del álgebra de segundo-grado: como orgullo profesional, el que ha sido similar a la función del latín y griego para el clérigo de una época posterior.

References

BAQIR, Taha. 1950. "An Important Mathematical Problem Text from Tell Harmal". *Sumer* 6: 39-54.

FRIBERG, Jöran. 1982. "A Survey of Publications on Sumero-Akkadian Mathematics, Metrology and Related Matters (1854-1982)". *Department of Mathematics, Chalmers University of Technology and the University of Göteborg* No. 1982-17.

GANDZ, Solomon. 1948. "Studies in Babylonian Mathematics I. Indeterminate Analysis in Babylonian Mathematics". *Osiris* 8:12-40.

GUNDLACH, Karl-Bernhard & Wolfram von Soden. 1963. "Einige altbabylonische Texte zur Lösung 'quadratischer Gleichungen'". *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 26:248-263.

HØYRUP, Jens. 1989. "Zur Frühgeschichte algebraischer Denkweisen". *Mathematische Semesterberichte* 36:1-46.

__________. 1990a. "Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought". *Altorientalische Forschungen* 17: 27-69, 262-354.

__________. 1990b. "Dýnamis, the Babylonians, and Theaetetus 147c7-148d7". *Historia Mathematica* 17: 201-222.

__________. 1991. "Changing Trends in the Historiography of Mesopotamian Mathematics". Revised Contribution to the Conference *Contemporary Trends in the Historiography of Science*, Corfu, May 27-June 1, *1991*. *Filosofi og Videnskabsteori på Roskilde Universitetscenter*. 3. Rkke: *Preprints og Reprints* 1991 nr. 3.

__________. 1992. "The Babylonian Cellar Text BM 85200 + VAT 6599. Retranslation and Analysis", in Sergei S. Demidov, Menso Folkerts, David E. Rowe & Christoph J. Scriba (eds), *Amphora*. Festschrift für Hans Wussing zu seinem 65. Geburtstag. Basel, etcetera: Birkhäuser. pp. 315-358.

__________. 1993a. "Mathematical Susa Texts VII and VIII. A Reinterpretation". *Altorientalische Forschungen* 20: 245-260.

__________. 1993b. "On Subtractive Operations, Subtractive Numbers, and Purportedly Negative Numbers in Old Babylonian Mathematics". *Zeitschrift für Assyriologie und Vorderasiatische Archäologie* 83: 42-60.

HUBER, Peter. 1955. "Zu einem mathematischen Keilschrifttext (VAT 8512)". *Isis* 46:104-106.

MCT: NEUGEBAUER, O. & SACHS, A. 1945. *Mathematical Cuneiform Texts*. (American Oriental Series, vol. 29). New Haven, Connecticut: American Oriental Society.

MKT: __________. 1935. *Mathematische Keilschrift-Texte*. I-III. (Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie

Índice 2: Términos akadianos y sumerogramas con traducciones estándar

Jens Egede Høyrup es profesor en la Universidad de Roskilde, Dinamarca, en el Departamento de Lenguas y Cultura. Su investigación más reciente se relaciona con la historia cultural pre-Moderna y con la estructura conceptual y la influencia de las matemáticas babilónicas en los inicios de la matemática moderna. Una de sus más recientes publicaciones es: *In measure, number and weight. Studies in mathematics and culture*, 1994.

Referencias

BAQIR, Taha. 1950. "An Important Mathematical Problem Text from Tell Harmal". *Sumer* 6: 39-54.
FRIBERG, Jöran. 1982. "A Survey of Publications on Sumero-Akkadian Mathematics, Metrology and Related Matters (1854-1982)". *Department of Mathematics, Chalmers University of Technology and the University of Göteborg* No. 1982-17.
GANDZ, Solomon. 1948. "Studies in Babylonian Mathematics I: Indeterminate Analysis in Babylonian Mathematics". *Osiris* 8:12-40.

und Physik. Abteilung A: Quellen. 3. Band, erster-dritter Teil). Berlin: Julius Springer, 1935, 1935, 1937.

TMB: THUREAU-DANGIN, F. 1938. *Textes mathématiques babyloniens*. (Ex Oriente Lux, Deel I). Leiden: Brill.

TMS: BRUINS, E. M. & RUTTEN, M. 1961. *Textes mathématiques de Suse*. (Mémoires de la Mission Archéologique en Iran, XXXIV). Paris: Paul Geuthner.

VON SODEN, Wolfram. 1939. [Review of TMB]. *Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft* 93: 143-152.

Índice 2: Términos akadianos y sumerogramas con traducciones estándar

Jens Høyrup es profesor en la Universidad de Roskilde, Dinamarca, en el Departamento de Lenguas y Cultura. Su investigación más reciente se relaciona con la historia cultural pre-Moderna y con la estructura conceptual y la influencia de las matemáticas babilónicas en los inicios de la matemática moderna. Una de sus más recientes publicaciones es *In measure, number and weight. Studies in mathematics and culture*, 1994.

Referencias

BAQIR, Taha. 1950. "An Important Mathematical Problem Text from Tell Harmal". *Sumer* 6: 39-54.
FRIBERG, Jöran. 1982. "A Survey of Publications on Sumero-Akkadian Mathematics, Metrology and Related Matters (1854-1982)". *Department of Mathematics, Chalmers University of Technology and the University of Göteborg* No. 1982-17.
GANDZ, Solomon. 1948. "Studies in Babylonian Mathematics I: Indeterminate Analysis in Babylonian Mathematics". *Osiris* 8:12-40.

und Physik. Abteilung A: Quellen. 3. Band, erster-dritter Teil). Berlin: Julius Springer, 1935, 1935, 1937

TMB: THUREAU-DANGIN, F. 1938. *Textes mathématiques babyloniens.* (Ex Oriente Lux, Deel I). Leiden: Brill.

TMS: BRUINS, E. M. & RUTTEN, M. 1961. *Textes mathématiques de Suse.* (Mémoires de la Mission Archéologique en Iran, XXXIV) Paris: Paul Geuthner.

VON SODEN, Wolfram 1939 [Review of TMB]. *Zeitschrift der Deutschen Morgenlandischen Geselischaft* 93: 143-152.

GUNDLACH, Karl-Bernhard & Wolfram von Soden. 1963. "Einige altbabylonische Texte zur Lösung 'quadratischer Gleichungen'". *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 26: 248-263.

HØYRUP, Jens. 1989. "Zur Frühgeschichte algebraischer Denkweisen". *Mathematische Semesterberichte* 36: 1-46.

______. 1990a. "Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought". *Altorientalische Forschungen* 17: 27-69, 262-354.

______. 1990b. "Dýnamis, the Babylonians, and Theaetetus 147c7-148d7". *Historia Mathematica* 17: 201-222.

______. 1991. "Changing Trends in the Historiography of Mesopotamian Mathematics". Revised Contribution to the Conference *Contemporary Trends in the Historiography of Science*, Corfu, May 27-June 2, 1991. *Filosofi og Videnskabsteori på Roskilde Universitetscenter. 3. Række: Preprints og Reprints* 1991 nr. 3.

______. 1992. "The Babylonian Cellar Text BM 85200 + VAT 6599. Retranslation and Analysis". En Sergei S. Demidov, Menso Folkerts, David E. Rowe & Christoph J. Scriba (eds), *Amphora. Festschrift für Hans Wussing zu seinem 65. Geburtstag*. Basel, etcétera: Birkhäuser. pp. 315-358.

______. 1993a. "Mathematical Susa Texts VII and VIII. A Reinterpretation". *Altorientalische Forschungen* 20: 245-260.

______. 1993b. "On Subtractive Operations, Subtractive Numbers, and Purportedly Negative Numbers in Old Babylonian Mathematics". *Zeitschrift für Assyriologie und Vorderasiatische Archäologie* 83: 42-60.

HUBER, Peter. 1955. "Zu einem mathematischen Keilschrifttext (VAT 8512)". *Isis* 46: 104-106.

MCT: NEUGEBAUER, O. & SACHS, A. 1945. *Mathematical Cuneiform Texts*. (American Oriental Series, vol. 29). New Haven, Connecticut: American Oriental Society.

MKT: ______. 1935. *Mathematische Keilschrift-Texte*. I-III. (Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Abteilung A: Quellen. 3. Band, erster-dritter Teil). Berlin: Julius Springer. 1935, 1935, 1937.

TMB: THUREAU-DANGIN, F. 1938. *Textes mathématiques babyloniens*. (Ex Oriente Lux, Deel 1). Leiden: Brill.

TMS: BRUINS, E. M. & RUTTEN, M. 1961. *Textes mathématiques de Suse*. (Mémoires de la Mission Archéologique en Iran, XXXIV). Paris: Paul Geuthner.

VON SODEN, Wolfram. 1939. [Review of TMB]. *Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft* 93: 143-152.