# Pequeños grandes cardinales

*José Alfredo Amor*

El objetivo general de este proyecto es dar una presentación estructural de los menos grandes de los cardinales grandes. Los grandes cardinales están definidos como cardinales transfinitos con propiedades muy fuertes, conocidas como axiomas fuertes de infinito, de modo tal que, si un cardinal las cumple, debe ser muy grande. Los menores de estos, son los llamados cardinales inaccesibles y un tipo especial de cardinal grande que parece representativo por sus aplicaciones a la matemática y por el orden lineal de implicaciones que puede establecerse hasta él mismo, es el de cardinal medible, por ello he dividido a los grandes cardinales en dos grupos: el primero es el de los menos grandes o "pequeños grandes cardinales" que incluye desde los débilmente inaccesibles hasta los medibles, pasando por los inaccesibles, los de Mahlo, los débilmente compactos y los de Ramsey; el segundo grupo sería el de los "monstruosamente grandes" que incluye a los compactos, supercompactos, enormes, super enormes y extendibles; en este grupo no puede establecerse un orden total.

Hay algunos tipos de cardinales que se han omitido, pero los mencionados son los más representativos.

Los objetivos particulares de este proyecto son cuatro:

1º Presentación estructural de los cardinales en orden lineal.
2º Mostrar la diversidad de áreas que motivan el estudio de cardinales grandes.
3º Presentar el problema de la existencia de los mismos.
4º Presentar algunas repercusiones de su posible existencia, en la práctica matemática y en la teoría de conjuntos.

En la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF) el axioma de infinito garantiza la existencia del primer cardinal transfinito conocido como $\omega$ o $\aleph_0$; si no se postula tal axioma, no se puede demostrar a partir de los demás. Es notable, en el caso de axiomas de infinito, que su verdad implica su independencia del resto de los axiomas, pues si existe $\omega$, entonces existe el conjunto de los conjuntos hereditariamente finitos $V\omega$ que es un modelo de los otros axiomas y en el cual no hay conjuntos infinitos, lo que prueba la independencia de dicho axioma.

En (Z F) se prueba la existencia de una serie infinita de cardinales transfinitos: $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \ldots, \aleph_{\aleph_\omega}; \ldots$ pero la pregunta que surge es: ¿qué tan lejos llegan los cardinales?, ¿hay cardinales muy grandes?, ¿qué tan grandes?

Otra pregunta clásica es la siguiente: dado un conjunto de cardinal k; ¿cuál es el cardinal de su conjunto potencia, al que denotamos $2^k$? ¿Es $2^k = k^+$ (el cardinal sucesor de k) o es $2^k > k^+$? Esto es el problema generalizado del continuo. Este proyecto pretende presentar una visión general acerca de algunos cardinales grandes de los cuales presentamos sólo los "pequeños" o menos grandes; sus propiedades y repercusiones en la matemática y la imposibilidad de probar su existencia en la teoría de conjuntos con axioma de elección (Z F E).

Generalizando ciertas propiedades de $\omega$, podemos definir los llamados cardinales inaccesibles. Tales propiedades que generalizamos son:

1. Si $\lambda < k$ entonces $\lambda^+ < k$. $\lambda$, k, cardinales.
2. Para todo conjunto S tal que $|S| < k$ y todo $x \in S$ $|X| < k$, se cumple $|US| < k$.
3. Para todo conjunto A tal que $|A| < k$, $|p(A)| < k$.

Lo anterior significa que el cardinal k no es alcanzado por medio de las operaciones usuales de conjuntos, como sucesor, unión o potencia.

Sabemos perfectamente que para $k = \omega$ lo anterior se cumple; pero, ¿hay cardinales $k > \omega$ que cumplan estas propiedades? Tales cardinales (si existen) son los llamados cardinales inaccesibles y son "grandes", en el sentido de que son, para los cardinales transfinitos menores, lo que $\omega$ es para los cardinales finitos. Además, si k es inaccesible hay al menos k cardinales transfinitos anteriores a k.

I. El primer objetivo, es la presentación de dichos cardinales, según sus tamaños (como en el diagrama anexo), donde el orden lineal estricto está dado por la siguiente relación de implicación. Si A y B son tipos de cardinales grandes, el tipo A es mayor que el tipo B si y sólo si $\forall k$($k$ de tipo A $\rightarrow$ $k$ de tipo B) y no inversamente.

La prueba de que "no inversamente" se hace con teoremas de la siguiente forma:

"Si $k$ es de tipo A, entonces hay $k$ cardinales de tipo B, menores que $k$"

entonces, tomando el mínimo cardinal de tipo A, cualquiera de tipo B menor que él (de los cuales hay $k$), será uno de tipo B que no es de tipo A.

II. El segundo objetivo particular es hacer notar la diversidad de áreas matemáticas que motivan la concepción de los pequeños grandes cardinales y estos son:

1. Generalizaciones inmediatas de las propiedades elementales de $\omega$, como se dijo antes, para motivar el concepto de cardinal inaccesible.
2. Combinatoria infinita para los cardinales de Mahlo, como propiedades de conjuntos estacionarios una caracterización de los débilmente compactos en términos de propiedades de particiones que generalizan el Teorema de Ramsey, para los cardinales de Ramsey.
3. Teoría de Árboles: para otra caracterización muy usual de los débilmente compactos, conocido como propiedad de árbol o propiedad arborescente: todo árbol de altura $k$ con todos sus niveles de cardinal menor que $k$, tiene una rama de cardinal $k$.
4. Teoría de los modelos: Compacidad en lenguajes infinitarios para caracterizar a los débilmente compactos. Existencia de inmersiones elementales del universo en modelos internos para caracterizar a los cardinales medibles.
5. Teoría de ultrafiltros y de medidas bivaluadas para otra caracterización de los cardinales medibles.

III. El tercer objetivo particular es acerca del problema de la existencia y se muestra la imposibilidad de demostrar la existencia de grandes cardinales en la teoría (Z F E). Como —por el diagrama anexo— todos ellos excepto quizá los débilmente inaccesibles, son inaccesibles, basta mostrar que en (Z F E) no se puede probar la existencia de inaccesibles:

La situación respecto a la existencia de tales cardinales inaccesibles es la siguiente: en la teoría (Z F E) no se puede probar su existencia. Por otro lado, es relativamente consistente con (Z F E) que tales cardinales no existan. Además, ni siquiera se puede probar (por métodos formalizables en (Z F E) que la existencia de tales cardinales sea relativamente consistente en (Z F E).

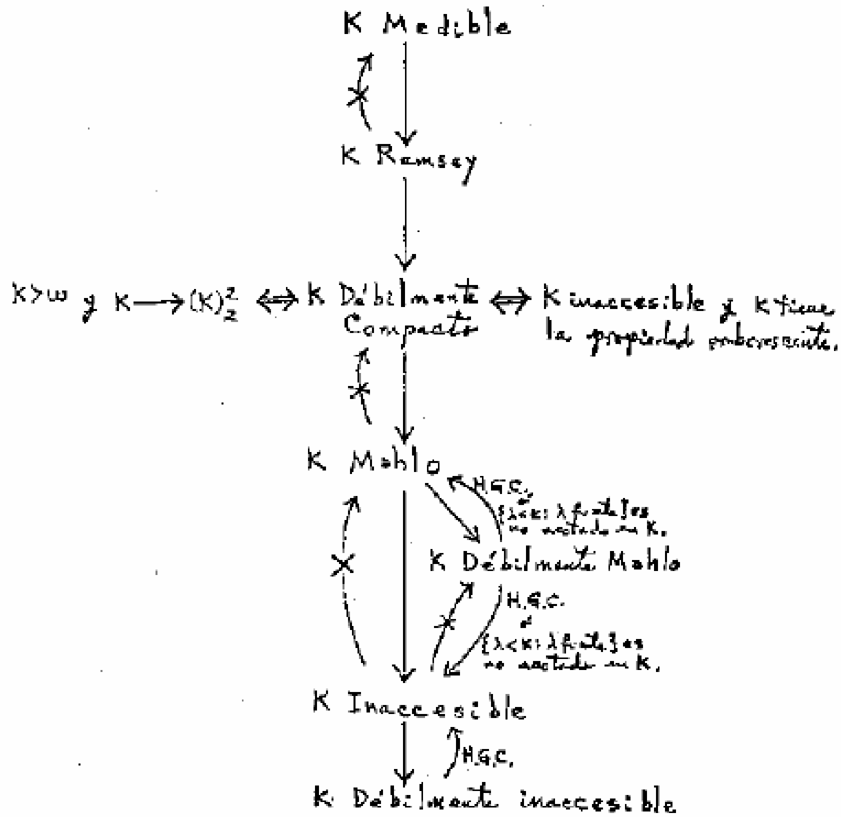


Diagrama de Pequeños Grandes Cardinales.

Ante esta situación ¿por qué estudiamos estos (posibles) cardinales grandes y otros más grandes?

Además del interés teórico propio, la respuesta está en:

IV. El cuarto objetivo particular, consiste en presentar algunas repercusiones que tiene su posible existencia en el seno de la matemática, así como la luz que arroja sobre problemas abiertos tales como el de la hipótesis generalizada del continuo, otros en teoría descriptiva de conjuntos (conjuntos de números reales) y en teoría de la medida. Uno de los resultados que se estudian en esta parte es el siguiente: si es posible que existan cardinales inaccesibles, es posible que todo conjunto de reales sea Lebesgue-medible (Axioma de Solovay), y que se decida afirmativamente la hipótesis del continuo para todo conjunto de reales.

Otro resultado famoso, típico ejemplo de la repercusión de la existencia de cardinales grandes, se refiere a la hipótesis conocida como axioma de constructibilidad que afirma que el universo constructible L de Gödel es todo el universo, esto es: $V = L$. Pues bien, el resultado mencionado, debido a Scott dice: Si hay cardinales medibles, entonces $V \neq L$, esto es, que no todo conjunto es constructible o definible, lo cual es la negación del axioma de constructibilidad.

Una justificación para creer en la posible existencia de cardinales grandes es la idea intuitiva de que la estructura acumulativa de los conjuntos hereditariamente conjuntos (base intuitiva de Z F E) no debe tener un fin concebible, y que los ordinales pueden ser tan grandes como se quiera, siempre que las propiedades que los caracterizan sean consistentes con Z F E.