# Sobre una noción normal de la teoría de las clases*

*Francisco Zubieta Russi*

## I

La presente nota se refiere a la teoría axiomática de las clases, de Bernays-Gödel. Las nociones primitivas son las representadas por los símbolos *Cls*, *M*, $\in$ . Las letras X, Y, Z, ... son variables que denotan clases; mientras que x, y, z, ... designan conjuntos.

Se toman de la lógica simbólica los símbolos:

$$\sim, \bullet, \vee, \supset, \ldots, (x), (X), (\exists x), \ldots, =, \ldots$$

Los axiomas de la teoría se distribuyen en cuatro grupos. Los del primer grupo dicen:

(1) *Cls*(x); todo conjunto es una clase.
(2) $X \in Y \;.\supset.\; M(X)$; son conjuntos las clases que son elementos.
(3) $(u)\ [u \in X \;.\equiv.\; u \in Y] \;.\supset.\; X = Y$; dos clases con los mismos elementos son iguales.
(4) $(x)(y)(\exists z)[u \in z \;.\equiv:\; u = x \;.\vee.\; u = y]$; todo par de conjuntos determina otro cuyos elementos son exactamente los dos conjuntos dados.

El par {x y} y el par ordenado <x y> se definen en la forma usual, lo mismo que la inclusión $X \subseteq Y$. La noción *Em*(X) se define poniendo:

* El presente artículo fue publicado –en forma abreviada– con el mismo título en el *Boletín de la Sociedad Mexicana de Matemáticas* 10 (1953) 33-34. Cuarenta años después, lo publicamos en su totalidad por primera vez.

*Mathesis* 9 (1993) 447-450

Dfn. $Em(X) \equiv. (u) \sim [u \in X]$; la clase X no tiene elementos.

Los axiomas del segundo grupo establecen la existencia de ciertas clases. Por ejemplo, existen: el dominio y el complemento de una clase, la intersección de dos clases, etc.

Los axiomas del tercer grupo establecen la existencia de ciertos conjuntos. Por ejemplo, el *axioma de la infinitud* dice: existe un conjunto no-vacío tal que cada elemento de ese conjunto está contenido en *otro* elemento del mismo.

El cuarto grupo lo forma el solo el axioma (D) que sigue:

(D) $\sim Em(A) \supset. (\exists u)[u \in A \bullet Em\,(uA)]$; toda clase no-vacía tiene al menos un elemento cuya intersección con ella es vacía.

Corolario: $\sim(x \in x)$.

Se considera también a veces el *axioma de selección*, cuya consistencia ha sido demostrada por Gödel.

El lenguaje de la teoría se construye a partir de las expresiones elementales de forma $\Pi \in \Gamma$ (donde $\Pi$, $\Gamma$, ... designan variables o clases especiales). Una *función proposicional primitiva* (ppf) es una expresión bien formada que se construye a partir de las elementales, de modo que las únicas variables ligadas sean las que denotan conjuntos.

El teorema fundamental de existencia dice: Si $\varphi\,(x_1, \ldots, x_n)$ es una ppf que no contiene variables libres distintas de $x_1, \ldots, x_n$, entonces existe una clase A tal que se cumple:

$$(x_1) \ldots (x_n)\ [\langle x_1 \ldots x_n\rangle \in A \;.\!\equiv.\; \varphi\,(x_1, \ldots, x_n)].$$

Los conceptos definidos en la teoría se clasifican como sigue:

1. Clases especiales: O, V, ...
2. Nociones: $X \subseteq Y$, $Em\,(X)$, ...
3. Operaciones: $-A$, $AB$, $A \times B$, ...

Una noción B se llama *normal* si existe una ppf, $\varphi$, tal que:

$$B\,(X_1, \ldots, X_n) \equiv \varphi(X_1, \ldots, X_n).$$

Una operación $U$ se llama normal si existe una ppf, $\varphi$, tal que:

$$Y \in U \quad (X_1, \ldots, X_n) \quad .\equiv. \quad \varphi\ (Y, X_1, \ldots, X_n).$$

Una variable se llama normal si su rango lo forman los elementos de una clase.

Los conceptos introducidos son normales:

$X \in Y$; $\in$ es normal porque $X \in Y$ es una ppf.

$X = Y\ .\equiv.\ (u)\ [u \in X\ .\equiv.\ u \in Y]$

$M(X) \equiv (\exists u)[u = X]$

$Z \in \{X\ Y\}\ .\equiv.\ [Z = X\ .\vee.\ Z = Y].\ \ M(Z)$

$Z \in \langle X\ Y\rangle\ .\equiv.\ Z \in \{\{X\}\ \{X\ Y\}\}$

$Un\ (X)\ .\equiv.\ (u)(v)(w)[\langle u\ v\rangle \in X \bullet \langle w\ v\rangle \in X\!:\ \supset.\ u = w].$

Una *función proposicional normal* (npf) es la que sólo contiene nociones normales, operaciones normales y variables ligadas normales. Toda npf es equivalente a una ppf y por eso el teorema fundamental de existencia vale para las npf.

## II

La noción $Un(X)$ (la clase $X$ es unívoca) puede también definirse así:

$Un(X) \equiv (x)(y)(u)(w)[\langle u\ x\rangle \in X \bullet \langle w\ y\rangle \in X : \supset (x = y \supset.\ u = w)]$;

lo que sugiere introducir una noción más general $Un(Y, X)$ (la clase $X$ es uniforme con respecto a la clase $Y$ ), que defino así:

$Un(Y, X) \equiv (x)(y)(u)(w)[\langle u\ x\rangle \in X \bullet \langle w\ y\rangle \in X : \supset (\langle x\ y\rangle \in Y \supset.$ $\langle u\ w\rangle \in Y)]$.

Esta nueva noción es normal (porque el definente equivale a una ppf) y voy a demostrar que realmente constituye una generalización de la anterior.

Se define el producto $A \times B$ como la clase formada por los pares ordenados $\langle y\ z\rangle$ tales que $y \in A$, $z \in B$. Además:

Dfn. $A^2 = A \times A$ ; $A^{n+1} = A \times A^n$.

En particular, $V^2$ es la clase de *todos* los pares ordenados, $V^3$ es la de todas las ternas ordenadas, ... y como cada terna ordenada es un par ordenado, se sigue que: $V^3 \subseteq V^2$.

Las *relaciones* se definen como clases formadas exclusivamente por pares ordenados, y las *funciones* como relaciones unívocas, es decir, como clases unívocas cuyos elementos son pares ordenados.

Dfn. $Rel\ (X)\ .\equiv.\ X \subseteq V^2$.

Dfn. $Fnc\ (X)\ .\equiv:\ Rel(X) \bullet Un(X)$.

Se define la relación *I* (de identidad): $\langle x\ y\rangle \in I \ .\!\equiv.\ x = y$.

En la definición de *Un* (Y, X), substituyendo la clase arbitraria *Y* por la relación *I*, obtenemos:

$$Un\ (I, X)\ .\!\equiv.\ (x)(y)(u)(w)[\langle u\ x\rangle \in X \bullet \langle w\ y\rangle \in X :\supset (\langle x\ y\rangle \in I \supset. \langle u\ w\rangle \in I)]$$

$$Un\ (I, X)\ .\!\equiv.\ (x)(y)(u)(w)[\langle u\ x\rangle \in X \bullet \langle w\ y\rangle \in X :\supset (x = y \supset. u = w)]$$

$$Un\ (I, X)\ .\!\equiv.\ Un(X)\ . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Es evidente la importancia de la noción *Un (Y , X)* que generaliza la idea de uniformidad de una relación con respecto a otra, frecuentemente usada en matemáticas. En particular, defino las funciones como relaciones que son uniformes con respecto a la identidad.*

En la aritmética elemental, al sumar fracciones, podemos substitutir cada fracción por otra equivalente, para obtener una suma equivalente a la anterior. Lo que nos dice bien que la operación de sumar fracciones es uniforme con respecto a la equivalencia de las fracciones. Pero si nos referimos a los números racionales, definidos como clases de fracciones equivalentes, podemos ver que la suma de dos números racionales es uniforme con respecto a la identidad. Lo que significa que se trata de una función que a cada par ordenado de números racionales le asigna un número racional y sólo uno.

**Francisco Zubieta Russi** imparte cursos de matemáticas desde 1943 en la Facultad de Ciencias de la UNAM.

* Esta definición, sugerida por las operaciones de la aritmética elemental, brevemente expuesta en junio de 1953, la comentó el profesor H. B. Curry [1955, 555] en *Mathematical Reviews*. [El comentario del profesor Haskel B. Curry es el siguiente: The author suggested the following definition of uniformity of a relation X with respect to a relation Y:

$$Un\ (Y, X) = (x)(y)(u)(v)[\langle u\ x\rangle \in X. \langle v\ y\rangle \in X :\supset (\langle x\ y\rangle \in Y \supset \langle u\ v\rangle \in Y)]$$

A function is then a relation which is uniform with respect to identity].

La parte I del presente artículo se basa en lo que dice Kurt Gödel al principio de su libro titulado *The consistency of the continuum hypothesis*, Princeton University Press, 1940.