Stephan Körner: Introducción a la filosofía de las matemáticas

Alejandro Valles Santo Tomás

Al contrario de lo que supone el título en español, el presente libro no es una introducción a la filosofía de las matemáticas, sólo representa una exposición crítica en torno a las escuelas filosóficas más importantes que aparecieron a principios de nuestro siglo. Como tal el texto exige cierto conocimiento sobre las matemáticas y los problemas concernientes a los fundamentos de las mismas. Sin embargo, dado que de ninguna manera hay claridad en cuanto a lo que "filosofía de las matemáticas" significa, resulta necesario que el autor nos explique en qué consiste esta disciplina. Körner nos la presenta como una instancia intermedia entre la filosofía y las matemáticas: no se trata de la reconstrucción de la matemática a partir de la lógica, ni los sistemas formales o los números naturales, tampoco es la aceptación o exclusión de tales o cuales métodos u objetos de la matemática, sino que tiene como propósito estudiar:

1. La estructura y función en general de las proposiciones y teorías que pertenecen a la matemática pura y a la matemática aplicada.
2. Las cuestiones acerca del papel que la noción de infinito juega en los distintos sistemas donde aparece. (p. 6).

El libro analiza las posiciones del *logicismo* de Frege y Rusell, el *formalismo* de Hilbert (además Körner nos presenta Curry como "formalista estricto", p. 105) y el *intuicionismo* de Brouwer (basándose en la exposición contenida en el libro de Heyting: *Intuitionism -An introduction*; p. 159). Cada una de estas escuelas encuentra antecedentes en ciertos filósofos, por lo que Körner

* Siglo XXI Editores, S. A. Traducción de Carlos Gerhad. México, primera edición, 1967, VII + 250 páginas. (*The philosophy of mathematics*, Hutchinson & Co. Ltd., 1960).

nos presenta algunas ideas al respecto de Platón, Aristóteles, Leibniz y Kant, entre otros.

El trabajo se divide en cuatro partes; en las tres primeras da a conocer las escuelas y las críticas que él hace a las mismas, y en el último expone su punto de vista.

1. *El logicismo*

El logicismo, nos dice Körner, se remonta a Leibniz, quien primero desarrolló la tesis de que la matemática es reducible a la lógica. Para Leibniz toda la matemática se compone de proposiciones analíticas y por tanto reducibles —mediante la lógica— a "proposiciones idénticas". Frege reemplaza la noción de "proposición idéntica", carente de una definición que nos permita distinguirlas, por la de *proposición analítica* tal y como está definida en los *Grundlagen der Arithmetik*.[1] Además se hace uso del simbolismo matemático (Frege el suyo y Russell el de Peano) con objeto de "prevenir la intrusión subrepticia de supuestos no lógicos" (p. 36) y abarcar "todo razonamiento deductivo" (p. 37).[2] Este uso de simbolismo en la lógica obliga a justificar la transición de los signos lógicos a los signos puramente matemáticos. Frege y Russell justifican la transición por medio de definiciones. Para Russell las definiciones son "artificios de mera notación" que no implican nuevos objetos ni afirman su existencia. Para Frege, por el contrario, la definición no hace más que "delimitar lo que existe por derecho propio" (p. 40) y por lo tanto es *necesario* "demostrar que estos objetos existen" (p. 40). Según Körner tales concepciones marcan la "diferencia entre las dos ramas del logicismo, la nominalista de Russell y la realista de Frege" (p. 40).

Para cumplir su programa, el logicismo requiere de: *a*) una lógica de las funciones de verdad; *b*) una lógica extensional de

[1] "If, in carrying out this process (that of finding the proof of the proposition), we come only on general logical laws and on definitions, then the truth is an analytic one, bearing in mind that we must take account also of all propositions upon which the admissibility of any of the definitions depends. If, however, it is possible to give the proof without making use of truths which are not of a general logical nature, but belong to the sphere of some special science, then the proposition is a synthetic one". Frege, *Foundations of Arithmetic*, 1884, *Philosophical Library* (Nueva York 1950) parágrafo 3, p. 4. La traducción es de Austin.

[2] Al respecto del simbolismo fregeano, recomendamos la lectura del ensayo-reseña de Carlos Alvarez *Gottlob Frege. Cálculo y característica*, aparecido en Mathesis, vol. I, no. 2, pp. 129-136.

clases; y *c*) una lógica de la cuantificación, las cuales Körner expone someramente (pp. 43-57).

> Una vez construido el sistema de Russell (su reconstrucción de la matemática a partir de la lógica) habrá que verificar si es matemáticamente sólido, en el sentido de saber si su simbolismo es preciso y sus deducciones son tan rigurosas como puede razonablemente exigirse sobre la base de las técnicas matemáticas existentes, o si el sistema presenta, efectivamente, un avance sobre éstas (p. 57).

Por otra parte, es necesario saber si es filosóficamente sólido, ello es, si el sistema ilustra u obscurece la tesis logicista: ¿Apoyan estos formalismos[3] la tesis filosófica en el sentido de que la matemática pura es parte de la lógica? ¿Da la filosofía logicista de la matemática una explicación satisfactoria de la matemática aplicada? (p. 60). Obviamente Körner se ocupará solamente de las preguntas filosóficas suponiendo que las cuestiones matemáticas se resuelven efectivamente.

Las objeciones que presenta Körner a los logicistas son:

1. No se delimita claramente el campo de la lógica.
2. No se hace justicia al hecho de que, si bien las proposiciones de la matemática pura son *a priori*, las de la matemática aplicada son empíricas. Se argumenta el no denotar la diferencia fundamental entre conceptos empíricos y no empíricos.
3. Se utiliza el infinito actual implícitamente en el concepto de número natural, mas no en el concepto empírico de número.

El problema radica en caracterizar una *proposición lógica*, lo cual requiere la pertenencia de una propiedad L que las distinga.

> El postulado matemático del logicismo consiste en haber deducido las proposiciones [matemáticas] a partir de las proposiciones [lógicas], en tanto que la pretensión filosófica es la de haber demostrado claramente que las proposiciones *l*, y por consiguiente las proposiciones *m*, poseen al característica general L (p. 66).

Si esto no fuera posible entonces podría suceder: 1) que las matemáticas y la lógica sean ciencias *a priori* no reducibles una a la otra; 2) en el supuesto de que se encontrara una característica general, sería imposible distinguir una de otras: "en estas condiciones, hablar de una reducción de la matemática a la ló-

[3] Aquí Körner llama "formalismos" a los sistemas simbólicos, como en el caso de los *Principia Mathematica* de Russell.

gica sería tan absurdo como hablar de una reducción de la lógica a la lógica o de la matemática a la matemática" (p. 68); o 3) resultaría imposible distinguir entre proposiciones *a priori* y proposiciones empíricas (esta posición, nos dice, es defendida por Quine).

Körner sostiene que "las matemáticas y la lógica son ciencias *a priori* distintas" (p. 69). Por otra parte critica el concepto de número, argumentando que 1) la definición de número es circular, ya que para llevar a cabo la relación de "similaridad" de conjuntos *es necesario* contar;[4] 2) el concepto de número, en cuanto que concepto puramente lógico, no puede definirse haciendo referencia a una hipótesis no lógica tal como *el axioma de infinitud*.

Körner distingue lo que llama "conceptos empíricos" de los "conceptos exactos", y así distingue dos conceptos de número. Para él cuando aplicamos el concepto empírico "Número natural" a un conjunto de objetos perceptibles es obvia su independencia respecto a la existencia de una serie infinita; si no existiera tal serie, sólo fuera una serie finita con un último elemento suficientemente grande, aún podríamos utilizar el "Número natural" para contar los objetos de la percepción, mientras que el "número natural" de la matemática pura no tendría fundamento alguno (p. 71).

Según Körner, la idea de que los conceptos empíricos y *a priori* de número se corresponden está basada en dos supuestos:

> primero, que resulta siempre claro si un concepto está o no en una determinada relación lógica con otro, y en segundo lugar, que las relaciones lógicas posibles entre conceptos matemáticos no son esencialmente distintas de las que pueden subsistir entre conceptos empíricos. Estos dos supuestos son erróneos. (p. 73).

Por último, critica a Russell ya que las antinomias[5] se evitan por "remedios *ad hoc*" que no atacan la esencia de la antinomia

[4] Esto es un punto importante al que Körner se referirá al final del libro. Körner identifica "similaridad" con "correspondencia biunívoca" de una manera que va más allá del uso común en matemáticas. Por otro lado, es falso que la aplicación de una función biyectiva implique contar.

[5] Russell, como lo anota acertadamente Alejandro Garciadiego, no hace uso de este término, sino del de "contradicción". Esta distinción es importante, ya que el uso que Russell hace de los términos "antinomia", "paradoja" y "contradicción", parece estar en relación con la posición que mantenía acerca de la relación entre las matemáticas y la lógica. Esta distinción, que por una parte se ha hecho posible por la revisión histórica

sino corta sólo sus efectos conocidos: "Frege y Russell se han servido sin sentido crítico... de los infinitos reales cantorianos..., [no] pueden pretender poseer una teoría del infinito" (p. 79).

2. *El formalismo*

Seguidores de Kant, en el sentido de buscar la evidencia y el contenido de la matemática en la percepción, los formalistas rechazan que ésta sea reducible a la lógica:[4]

> Si bien los teoremas se siguen de los axiomas *de acuerdo* con los principios de la lógica, los axiomas y teoremas no son principios de la lógica *ellos mismos*, ni son tampoco aplicación alguna *de* tales principios (p. 87).

Hilbert, a diferencia de los intuicionistas, no abandona la matemática cantoriana, sino la incluye utilizando "nociones ideales". Körner nos indica que Hilbert toma de Kant este procedimiento, ya que para este último era indispensable incluir nociones como la de "libertad moral" en su filosofía. Kant consideraba

> que todo sistema que contuviera nociones aplicables primordialmente concretas (tales como la matemática y la física de su tiempo) podía amplificarse efectivamente por medio de Ideas [de Kant], pero solamente a condición de que pudiera demostrarse que el sistema amplificado era congruente (p. 98).

del surgimiento de las paradojas (*The emergence of some of the nonlogical paradoxes of the theory of sets, 1903-1908*, Alejandro Garciadiego, en *Historia Mathematica* 12 (1985) 337-351), posiblemente permita profundizar en el análisis filosófico de las escuelas sobre los fundamentos.

[4] Hilbert nos presenta su posición de la siguiente manera: "Kant already thought —and indeed it is part and parcel of his doctrine— that mathematics has at its disposal a content secured independently of all logic and hence can never be provided with a foundation by means of logic alone [...] Rather as a condition for the use of logical inferences and the performance of logical operations, something must already be given to our faculty of representation [in der Vorstellung, sensibilidad], certain extralogical concrete objects that are intuitively [anschaulich] present as immediate experience prior to all thought. If logical inference is to be reliable, it must be possible to survey these objects completely in all their parts, and the fact that they occur, that they differ from one another, and that they follow each other, or are concatenated, is immediately given intuitively, together with the objects, as something that neither can be reduced to anything else nor requires reduction. This is the basic philosophical position that I consider requisite for mathematics". Hilbert, *On the Infinite*, contenido en van Heijenoort, *From Frege to Gödel, a source book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Harvard. Cambridge University Press, 1967, p. 376.

Según Hilbert, la materia elemental de la teoría de números son trazos: "/", "//", "///"; además de un proceso de construcción de trazos a partir de "/" añadiendo cada vez uno después del último. "La cifra inicial '/' y la regla de producción proporciona los objetos físicos de la teoría" (p. 94). Por lo tanto, la aritmética elemental puede concebirse como "una teoría *acerca* de la actividad regular de construir expresiones con trazos", pero además como "un formalismo", i.e. como la actividad reglamentada de construir objetos perceptivos: *fórmulas* (pp. 101-2).

Hilbert, de la manera que mencionamos arriba, intentará salvar el uso de totalidades infinitas dadas (necesarias para la construcción del análisis real), así como la hipótesis del continuo de Cantor y el axioma de elección de Zermelo (pp. 98-9).

El hecho de caer en "antinomías" por el uso de totalidades infinitas no demanda el abandono de estas herramientas, sino requiere una prueba de que la aritmética ampliada con nociones ideales está libre de contradicción.

El programa formalista consta de los siguientes pasos:

1. Definición de lo que se entiende por "métodos finitos".
2. Reconstrucción de la aritmética clásica en cuanto objeto concreto delimitado con precisión, dado en la percepción o realizable en ella.
3. Demostración de que el objeto posee una propiedad que garantiza claramente la consistencia de la aritmética clásica.

De la misma forma que sobre la construcción de trazos existe la teoría aritmética elemental, sobre la construcción de fórmulas (segunda característica) existe una teoría que la regula: "la metateoría". Entre el formalismo aritmético, la teoría aritmética y la metateoría existe una conexión fundada en el hecho "de que los mismos objetos físicos ... funcionan de modos distintos, pero correspondientes" en cada una de ellas.

> Al enunciar que un determinado objeto físico es, en el contexto del formalismo, una fórmula enunciativa o teorémica, hablamos *acerca* de una construcción de fórmulas y hacemos un enunciado en la metateoría. Este enunciado es *finito*, por cuanto enuncia, de un objeto perceptivo o del proceso que lo produce, una característica puramente perceptiva o formal. La característica *formal* de una fórmula enunciativa que es una fórmula teorémica [verdadera] corresponde a la característica lógica de un enunciado que es teorema. (p. 102).

Los métodos finitos se caracterizan —nos dice Körner— por: 1) todo concepto o característica matemática ha de ser tal que su posesión o no posesión pueda deducirse mediante la inspección del objeto construido efectivamente o del proceso constructivo mismo (p. 96); 2) no se aceptan proposiciones universales o existenciales, sólo debe interpretarse estas proposiciones como enunciados acerca de *cada objeto construido;* 3) por lo anterior la ley del tercero excluido no es universalmente válida.

Körner critica la posición formalista al considerar que "se está formulando el postulado de que las proposiciones de la matemática pura son empíricas" (p. 123). Al respecto creo que Körner mal interpreta la visión formalista; como nos indicó antes, la ampliación de la aritmética elemental a la clásica observa el mismo carácter que la adecuación kantiana de las Ideas de Razón. Esto no implica que los conceptos matemáticos sean empíricos, sino que existen *re-presentaciones* perceptivas de estos conceptos. Ante tal objeción Körner responderá que existe una "yuxtaposición" entre conceptos empíricos y no empíricos, reflejada en la ausencia de una teoría formalista de la matemática aplicada (*cf.* las críticas que en relación a ello hace el logicismo).[1]

> Los formalistas no pueden menos que suponer que los trazos de los que se ocupan poseen ciertas propiedades que no poseen en cambio, los que se encuentran en la percepción. Ningún trazo material o perceptivo es permanente, pese a que al convertirlo en objeto de la matemática lo consideramos de modo perfectamente adecuado como tal. En una forma u otra lo "abstraemos" de su impermanencia. (p. 127).

Es falso —concluye— hablando estrictamente, que los "enunciados categoriales" de la metamatemática sean enunciados perceptivos de certeza indudable. Por otra parte, la metamatemática no acepta casos límite, mientras que en la elaboración efectiva de trazos sí los hay: si acercamos / / más y más, llegará un momento en que alguien podrá decir "*x* es semejante a /", mientras otro diga "*x* es semejante a //".

[1] Hay que notar que los *objetos* de la matemática son "empíricos", en un sentido especial (ver la nota 6). Más adelante veremos que Körner hace una suposición semejante a la de Hilbert, ya que define las "reglas de atribución" de conceptos como reglas efectivamente dadas, al igual que Hilbert supone que "si la inferencia lógica ha de ser confiable", los signos nos deben ser efectivamente dados y no podrá haber confusión respecto a los mismos; es decir: las *reglas* que rigen al signo son efectivamente dadas.

no parecen darse cuenta que la desconexión de la matemática con respecto a la percepción —la introducción de conceptos no empíricos— tiene lugar no en la trivialidad de la aritmética elemental o la amplificada, sino en el origen mismo de todo desarrollo de la primera. El concepto mismo de número natural no es empírico. (p. 133).

Excluir de la matemática los conceptos no empíricos equivale precisamente a excluir de la matemática los conceptos matemáticos. (p. 141).

9. *El intuicionismo*

Debido a que las teorías matemáticas Brouwer las concebía sintéticas,[8] considera que el sustrato de la matemática no se encuentra en la lógica ni en la percepción sensible, sino en "la intuición pura" del tiempo. Para el intuicionista el objeto de estudio son las construcciones y objetos matemáticos no perceptivos intuidos introspectivamente. Lo que Brouwer pretende es separar la matemática de todo lenguaje (y por ende de la lógica). Las reglas de la lógica se emplean en la descripción y comunicación de la matemática, no en su construcción que es, según opina, anterior a todo lenguaje. Para los intuicionistas, el hecho de darle importancia al lenguaje e independizarlo de las construcciones intuitivas ha llevado a los matemáticos a suponer válidos los infinitos actuales y los métodos no constructivos como la ley del tercero excluido y la cuantificación en estos conjuntos.

Según Körner (quien lee a Heyting) la diferencia entre la matemática clásica y la intuicionista se pone de manifiesto en la definición de número real. Los intuicionistas, a diferencia de los logicistas y formalistas —quienes aceptan la existencia de conjuntos infinitos dados— utilizan la noción de "convergencia" de Cauchy, cambiando la palabra "existe" por la frase "se puede construir efectivamente". La identificación de existencia con cons-

[8] Kant define los juicios sintéticos y analíticos de la siguiente manera: "En todos los juicios en donde se piensa la relación de un sujeto con el predicado . . . esa relación [es] posible de dos maneras. O bien el predicado B pertenece al sujeto A como algo contenido (ocultamente) en este concepto A; o bien, B está enteramente fuera del concepto A, si bien en enlace con el mismo. En el primer caso llamo el juicio analítico (es pensado mediante identidad); en el otro sintético (el enlace es pensado sin identidad) pudieran también llamarse *juicios de explicación* [y] *juicios de ampliación*. Kant, *Crítica de la Razón Pura*, ed. Porrúa, México 1982. p. 31.

tructividad requiere una modificación profunda en lo referente a las nociones de igualdad. Como ejemplo se nos presenta la "igualdad" de dos números reales a, b. $a = b$ significa que es construible una sucesión de Cauchy para ambos. Sin embargo esta sucesión no está dada para todos los números, sino se determina a partir de un cierto elemento de la serie. Así Heyting define[3] $a = b$ si para cada n el enésimo término de cada una de las sucesiones, es igual, y $a = b$ para cada k natural, podemos encontrar una $N = N(k)$, tal que la norma de la diferencia de cada miembro de la serie a partir de $n > N(k)$ sea menor que el valor de $1/k$. Además, el "hecho de que no podamos encontrar la coincidencia requerida $N = N(k)$ para toda k no nos autoriza a decir que a y b no coinciden", la no coincidencia se logra solamente si podemos efectuar una construcción que deduzca una contradicción del supuesto $a = b$. Esto hace que el intuicionismo requiera de una definición exacta de negación, distinta de la utilizada por los formalistas y los logicistas. De aquí también se desprende la necesidad de una lógica proposicional distinta, que se base en la noción de "constructibilidad", además de una definición distinta de "conjuntos" (*cf.* p. 166).

El intuicionismo es objeto de las siguientes críticas por parte de Körner:

1. Al no aceptar el infinito cantoriano, elimina de hecho la matemática clásica, sin poder, hasta el momento, reconstruirla basándose en sus posiciones filosóficas.

2. El criterio de veracidad es identificable con el de autoevidencia cartesiano; las construcciones intuicionistas, en tanto que descansan en la intuición pura, son "claras y distintas". Las críticas en este sentido son básicamente iguales a las críticas a Descartes. No existe modo alguno de comprobar la veracidad de nociones "autoevidentes", que de ninguna manera son intersubjetivas. (*cf.* pp. 172-176).

3. No se hace ninguna mención clara al papel que juega la matemática aplicada, sin embargo, parece que sus resultados son semejantes a los kantianos, por ejemplo, en relación a la dinámica vs. la física teórica.

[3] Habrá de ahorrarse esta exposición, pues según el propio Brouwer, Heyting y él no coincidían totalmente en sus posiciones; sin embargo —según parece— Körner se basa únicamente en la exposición de Heyting.

4. *Conclusiones y críticas*

A lo largo de su exposición Körner hace sobresalir dos puntos que considera importantes, a saber, que la matemática

1. no es reducible a la lógica ya que excluye hipótesis no lógicas irreducibles a esta, tales como el concepto de número o el axioma del infinito.
2. es una ciencia *a priori* debido a que todos sus conceptos son *exactos*.

Para Körner los tres intentos de fundamentar la matemática muestran carencias filosóficas y, sobre todo, ninguna toma en cuenta a la matemática aplicada,[30] por lo que esboza una solución que es remarcada a través de todo el libro en la exposición que nos hace), distinguiendo entre *conceptos exactos* cuya aplicabilidad se refiere a las ciencias a priori, y por otra parte, a *conceptos inexactos* que se aplican a los datos de la experiencia.

> Por lo que se refiere a la matemática aplicada, demostraré, en términos generales, que la "aplicación" de la matemática pura consiste en intercambiar proposiciones perceptibles y puramente exactas, al servicio de algún propósito determinado. [p. 204].[31]

Será conveniente que presentemos, brevemente, esta distinción entre conceptos exactos e inexactos, ya que es aquí donde se encuentra la base de la argumentación de Körner.

Para introducir estos términos, Körner comienza por definir *signo* como una cosa de la que pueden distinguirse usos correctos e incorrectos; es decir, que cuenta con reglas para su empleo. Dado un signo, este es un *concepto* si entre las reglas que lo rigen se encuentra *una regla de referencia* que permita su atribución o no atribución a "objetos", donde por objeto se entiende "cualquier cosa".

[30] Debe anotarse que tanto Russell, Hilbert como Brouwer son claros en su posición al respecto: para los dos primeros la matemática no tiene relación con la realidad, por lo que su "aplicabilidad" es contingente; para el último la distinción entre matemáticas puras y aplicadas es una banalidad provocada por confundir la relación matemática-lenguaje.

[31] La traducción no es clara, lo que intenta decir es que ha de intercambiar los conceptos exactos de una proposición, por conceptos inexactos.

Si tenemos una regla de asignación r y un signo U, se define a r como *regla inexacta de referencia* y a U como *concepto inexacto* si

1. Cumple alguno de los resultados posibles de asignación, a saber:

a) que la atribución de U a un objeto sea conforme a r, mientras que la negación violaría la regla, por lo que el *objeto* es *candidato positivo de* U, y la *persona* que hace la atribución es un *caso positivo de* U.

b) la negación de U a un objeto es conforme a r, etc., por lo que el *objeto* es candidato negativo, y la *persona* es caso negativo.

c) Tanto la atribución como la negación son conformes a r; el objeto es candidato neutral, y la persona que atribuye es caso positivo, mientras la que niega es caso negativo.

2. Todos los conceptos que incluyen candidatos neutros de *otro* concepto como sus candidatos positivos son inexactos.[12]

> la posibilidad de candidatos neutros, y no su concurrencia real caracteriza a un concepto como inexacto. Sin embargo, la mayoría de las proposiciones podrían reemplazarse por otras en las que la "inexactitud del concepto" se define en términos de candidatos reales neutros al mismo y no de candidatos posibles. (p. 207).

Un ejemplo de *concepto inexacto* es "verde", donde existen objetos a los cuales se les puede atribuir o negar el concepto; estos objetos resultan ser los candidatos neutrales al concepto "verde".

Para estudiar las relaciones lógicas entre dos conceptos U y V, distingue su relación respecto a los candidatos positivos y negativos por una parte (conceptos exactos), y positivos, negativos y neutros por otra (conceptos inexactos).

Körner llama relaciones *provisionales* a las que sólo consideran candidatos positivos y negativos, mientras que llama *finales* a aquéllas que toman en cuenta a los candidatos neutros de cada uno

[12] Quisiera aclarar que el texto es sumamente confuso (probablemente debido a la traducción, la cual procede a su vez de la traducción francesa del original en inglés). Al parecer la diferencia en conceptos exactos e inexactos radica en que estos últimos cuentan, además de con los candidatos positivos y negativos, con candidatos neutros. Por otro lado, la segunda condición "se refiere a la naturaleza de los candidatos neutrales", pero nos habla de conceptos y no de objetos candidatos a un concepto. Sería conveniente que el lector verificara las definiciones dadas en las páginas 206-207.

y comunes de *U* y *V*. Aclara que las relaciones *provisionales* se encuentran "en cierto modo", antes de las elecciones (es decir, que son *a priori*), en tanto que las *finales*, se encuentran después de las elecciones (es decir, *a posteriori*) y *representan resultados posibles* de los mismos.

Se definen las relaciones lógicas de inclusión provisional y final, exclusión provisional y final, traslape provisional y final e indeterminación final y provisional (ver pp. 209-213).

El número de posibilidades de formar nuevos conceptos a partir de los ya existentes, por medio de los conectivos lógicos, aumenta debido a la consideración de conceptos inexactos. Se define la suma de conceptos, el producto y el complemento, como generalizaciones de la "lógica exacta" (p. 213). Además se incluyen las leyes de Morgan, el "concepto nulo" (para el cual todo objeto es candidato negativo) y su complemento.

El interés por los conceptos inexactos, recordamos, está ligado a una posible solución a los problemas de la matemática aplicada.

> Las características perceptibles, que en la literatura filosófica se designan a menudo como "determinables" o "aspectos de semejanza", como "color", "forma", etc., son todos internamente inexactos. Al afirmar que dos objetos perceptibles se parecen bajo cierto aspecto, estamos aplicando conceptos internamente inexactos es decir, que cada una de sus especies es inexacta o tiene una subespecie inexacta (p. 215).

Se hace hincapié en la distinción entre "semejanza" y "correspondencia biunívoca", con objeto de relacionar a ésta la distinción entre conceptos inexactos y exactos. Körner quiere resaltar que Frege "trata inclusive a los conceptos inexactos como si fueran exactos" (p. 216), ello es, como si tuvieran extensiones claramente determinadas. Esta carencia fregeana es, según Körner, lo que impide distinguir entre la matemática aplicada y la pura. Ha de observarse que el conjunto de candidatos positivos de un concepto constituye la "extensión del concepto" fregeano, y que es en la "extensión del concepto" y la regla "correspondencia biunívoca", donde Frege basa el concepto de número. El resaltar la diferencia entre "semejanza" y "correspondencia biunívoca" permite pensar en una *nueva definición* del concepto empírico de número, donde se fundamentaría una matemática aplicada (recordemos que una de las críticas de Körner es que no se hace tal distinción). Dice Körner:

> Del mismo modo que los objetos perceptibles que se parecen han de ser candidatos positivos o neutros de conceptos inexactos, así los objetos matemáticos que están en correspondencia biunívoca han de ser candidatos positivos de conceptos *exactos*. La semejanza o similitud empírica es totalmente distinta de esta correspondencia biunívoca o similitud matemática, de la que se sirve Frege para definir el número. (p. 216).

Recordemos que Frege define al número *n* como la clase de equivalencia de todos los conjuntos que son biyectables con *n*. Aquí la regla de atribución es "ser biyectable" y el concepto "número *n*". Sin embargo, resulta preciso notar cómo es falso que la semejanza empírica tenga su correlato en "correspondencia biunívoca" para los conceptos matemáticos exactos. El hecho de ser "semejante" está determinado internamente por la regla de atribución y es aplicable a todos los objetos candidatos positivos o neutros de *cualquier* concepto inexacto. Por el contrario, el ser "idéntico" no es identificable con "correspondencia biunívoca" en cualquier concepto exacto; pensemos en el concepto matemático exacto "espacio topológico de Hausdorff", y la regla de atribución "dados dos puntos distintos, *x* e *y*, existen vecindades *Nx* y *Ny* ajenas". Es poco claro qué significa aquí "correspondencia biunívoca" y habría de aclarar y verificar su posibilidad entre cualesquiera dos casos positivos de este concepto; mientras se ve claro que, por lo que se refiere al concepto, cualesquiera dos casos positivos son "idénticos" en cuanto están referidos al concepto "espacios topológicos T2".

Al igual que el logicismo, Körner necesita una lógica de clases, relaciones y proposiciones, para sus conceptos exactos a inexactos, la cual es presentada someramente (pp. 206-228). En lo referente a las proposiciones, Körner analiza principalmente las proposiciones existenciales. Aquí también resulta interesante observar cómo no admite que —si se acepta la existencia del concepto— debe aceptarse la existencia de casos positivos para tal concepto (p. 207), y que las proposiciones de existencia están basadas en el uso de los cuantificadores. Körner no analiza este uso.

Según esta diferencia entre conceptos exactos e inexactos y la lógica que de ella resulta,

> La "aplicación" a la percepción de la matemática pura desconectada lógicamente de la percepción, consiste en una actividad más o menos estrictamente reglamentada que implica: *i*) la sustitución de conceptos y proposiciones empíricas por conceptos y proposicio-

> nes matemáticas; ii) la deducción de consecuencias a partir de premisas proporcionadas de esta forma, y iii) la sustitución de algunas de las proposiciones matemáticas deducidas por proposiciones empíricas. Podríamos añadir, en iv) lugar, la confirmación experimental de estas últimas proposiciones. (p. 233).

Ha de destacarse que la solución propuesta por Körner no difiere grandemente de la propuesta logicista; si bien rechaza la idea de la reducción de la matemática a la lógica, conserva la noción de un análisis lógico de las proposiciones matemáticas. La innovación de Körner consiste en la aceptación de casos límite, es decir, de candidatos neutros a conceptos (diferencia esencial entre conceptos exactos e inexactos); esta diferencia no solamente resalta un alejamiento del logicismo de Rusell, sino quiere fundamentar el tratamiento de la matemática aplicada (la diferencia entre matemática pura y aplicada fue distinguida por el propio Rusell, aunque con un sentido posiblemente diferente).

Körner se propone solucionar el problema de los fundamentos retomando:

1. La definición de número de Frege.
2. La existencia de nociones irreducibles a la lógica (el axioma del infinito), en paralelo al planteamiento de Hilbert.
3. La necesidad de una lógica ampliada para los conceptos inexactos, en forma similar a la petición de Heyting.

El concepto central de la aritmética es el de número. Körner busca diferenciar dos conceptos de número: uno exacto, relacionado con la regla "correspondencia biunívoca", y otro inexacto (empírico) relacionado con la regla inexacta "ser semejante". Aparte de que "correspondencia biunívoca" no es lo mismo que "identidad" bajo cualquier concepto exacto, como arriba mencionamos, hay un detalle fundamental que se le escapa a Körner. Al utilizar el concepto fregeano de número, implícitamente acepta la definición de *número cardinal* como base de la aritmética; sin embargo, trabajos en la teoría de conjuntos han mostrado que el número cardinal se puede tratar lógicamente como un caso *dependiente* del concepto de *número ordinal*.

> Hay varias consecuencias sencillas de nuestra definición de número cardinal. Decimos que un número ordinal es *inicial* si y sólo si no es equinumérico a cualquier otro número anterior. Entonces cualquier ordinal inicial es su propio cardinal. Análogamente, cualquier

> cardinal debe —por definición— ser un ordinal inicial. Así, los números cardinales y los ordinales iniciales son *exactamente lo mismo*.[13]

El que los números cardinales sean un caso particular de los números ordinales (ya que los cardinales no se pueden distinguir de ciertos ordinales) nos obliga a cuestionar el uso que Körner hace del concepto de número. Es necesario verificar, ya no el concepto de número únicamente, sino los conceptos de "número cardinal" y de "número ordinal", conocer sus relaciones y decidir cuál es el que podemos utilizar como concepto básico. El número cardinal se define tal y como Frege define el concepto de número, no obstante, *número ordinal* tiene, desde su origen, una definición diferente:

> La diferencia esencial entre los conjuntos finitos e infinitos, es que un conjunto infinito presenta el mismo número de elementos en todas las sucesiones que le podemos dar (i.e. en todos los órdenes/avec); por el contrario, un conjunto compuesto de una infinidad de elementos presenta en general diversos números, de acuerdo al (orden de) sucesión que demos a sus elementos. *La potencia de un conjunto es, como hemos visto, un atributo independiente del orden del conjunto, pero el número se nos presenta como un factor dependiente, en general, de un (orden de) sucesión dado a sus elementos*, a partir de que tratamos con conjuntos infinitos. Aún en los conjuntos infinitos, *hay, sin embargo, una cierta relación entre la potencia del conjunto y el número de sus elementos*, dado por un cierto orden.[14]

Para Cantor la potencia (o número cardinal) de dos conjuntos es igual, si es posible establecer una correspondencia biunívoca

[13] Herbert B. Enderton. *Elements of Set Theory*. Academic Press, 1977, p. 199.

[14] Georg Cantor *Fondements d'une Théorie Générale des Ensembles*. La différence essentielle entre les systèmes finis et infinis, c'est qu'un système fini offre le même nombre d'éléments dans toutes les successions que l'on peut leur donner; au contraire un système composé d'un nombre infini d'éléments aura en général divers nombres, d'après la succession que l'on donnera à ses éléments. *La puissance d'un système est, comme nous l'avons vu, un attribut indépendant de l'ordre de ce système; mais le nombre du système nous apparaît comme un facteur dépendant, en général, d'une succession donnée des éléments*, dès qu'on a à faire avec des systèmes infinis. Cependant même dans les systèmes infinis il *y a encore un certain rapport entre la puissance du système et le nombre de ses éléments*, par rapport à une succesion donné. [14] Acta Mathematica 2(1883) 381-408, p. 394.

entre ellos; por el contrario, define *número* (número ordinal) como dependiente del *orden de la sucesión* que se le dé.

Pensar ya no en la regla de asignación del concepto, sino en el orden de *sucesión*, varía en su esencia el trabajo de Körner. Cuando pensamos en el concepto de número como la extensión del concepto y nos referíamos a las reglas de asignación y proponíamos una lógica de las proposiciones, nos basamos en la idea de que fundamentalmente dependíamos de este análisis de las proposiciones matemáticas. Pero cuando pensamos, ya no en conceptos y reglas de asignación, sino en *sucesiones y órdenes*, ¿en qué estamos obligados a pensar? ¿En la sucesión dada por la intuición pura del tiempo, tal y como en Brouwer? ¿O en la sucesión construible mediante la producción de trazos, propuesta por Hilbert?

A mi parecer, la diferenciación entre números ordinales y cardinales, implica que la solución no debe buscarse por el lado del análisis de las proposiciones mediante la lógica del lenguaje, sino bajo el aspecto de la *construcción* de la serie de los números; no es en Frege sino en Hilbert donde podrá encontrarse una respuesta, tal vez no definitiva, pero al menos más satisfactoria: no en la Lógica externa, sino en la lógica interna de la construcción de las matemáticas.

Como se puede observar, la cuestión referente a los fundamentos de la matemática no es, de ninguna manera, una cuestión terminada y no sólo eso, también ofrece un amplio campo de investigación el trabajo que produjeron gentes como Frege, Russell, Hilbert, Poincaré, Weyl y Brouwer. Libros como el que nos ocupa es muestra de ello.

Esta obra —insisto— no es un libro introductorio y resulta recomendable leer previamente la breve bibliografía secundaria que Körner presenta al final del mismo: sin duda apoyará al lector que encuentre difícil el seguimiento de la exposición. Para aquél que tenga conocimiento sobre la bibliografía secundaria le recomendamos la lectura de las fuentes originales.