La definición de proporción de Eudoxio

Francisco Zubieta R.

Esta nota presenta la definición de número real atribuída a Dedekind como una interpretación de la definición de proporción de Eudoxio, tal como la enuncia Euclides al principio de su libro V. Como aplicación mencionamos las proposiciones VI–1 y VI–2 de Euclides; de esta última y de I–34 (lados opuestos de parelogramos son iguales) es fácil obtener el teorema de Thales de Mileto. Más aún: esta nota termina con una demostración del teorema de Thales, basada en la definición de Eudoxio y en la proposición I–34 de Euclides.

La razón A/C de dos magnitudes representa la medida de A cuando C es la unidad, y es un número racional cuando A y C son conmensurables, pero es irracional cuando A es inconmensurable con C.

La proporción $A/C = B/D$, que expresa la igualdad de dos razones, nos dice que ambas designan el mismo número real.

La definición de proporción de Eudoxio (definición 5 del libro V de Euclides) dice lo siguiente:

Dos magnitudes, A y B, son proporcionales a otras dos, C y D, cuando equimúltiplos arbitrarios, mA y mB, de las dos primeras son respectivamente iguales, mayores o menores que los equimúltiplos, también arbitrarios, nC y nD de las dos últimas.

En símbolos:
$$
\begin{aligned}
mA &= nC &&\text{si y sólo si } mB = nD.\\
m'A &> n'C &&\text{si y sólo si } m'B > n'D.\\
m''A &< n''C &&\text{si y sólo si } m''B < n''D.
\end{aligned}
$$

En el primer caso, tenemos que $A/C = n/m = B/D$. Si esto sucede (para algún par de valores m,n), entonces, y sólo entonces, las magnitudes consideradas son conmensurables porque su razón es un número racional.

En el segundo caso, sucede que $A/C > n'/m'$, $B/D > n'/m'$.

En el tercer caso: $A/C < n''/m''$, $B/D < n''/m''$.

Vemos así que las razones A/C, B/D, están definidas por la misma cortadura del conjunto ordenado de los números racionales; donde los racionales n'/m', menores que ambas razones, forman la clase "izquierda" de la cortadura, mientras que los racionales mayores n''/m'' forman la clase "derecha" de la propia cortadura.

Esto significa que la definición de número real propuesta por Richard Dedekind es la misma que la presentada por Eudoxio.

En seguida presentamos las dos primeras proposiciones del libro VI de Euclides, cuyas demostraciones se basan en la definición de proporción de Eudoxio.

Euclides VI–1: *Triángulos y paralelogramos que tienen la misma altura, (sus áreas) son entre sí como sus bases.*

Consideremos los triángulos. La demostración de Euclides se basa en la proposición I–38 y su corolario, que podemos enunciar de la siguiente manera:

1) Dos triángulos de bases iguales y la misma altura (sus áreas) son iguales, I–38.

2) Si dos triángulos tienen la misma altura y sus bases desiguales, el de base menor tiene menor área (corolario del anterior en vista de los postulados).

Ahora supongámos los triángulos ABC y ACD con la misma altura, como se ilustra en la fig. 1. Probaremos que la base BC es a la base CD como el triángulo ABC (su área) es al triángulo ACD (su área).

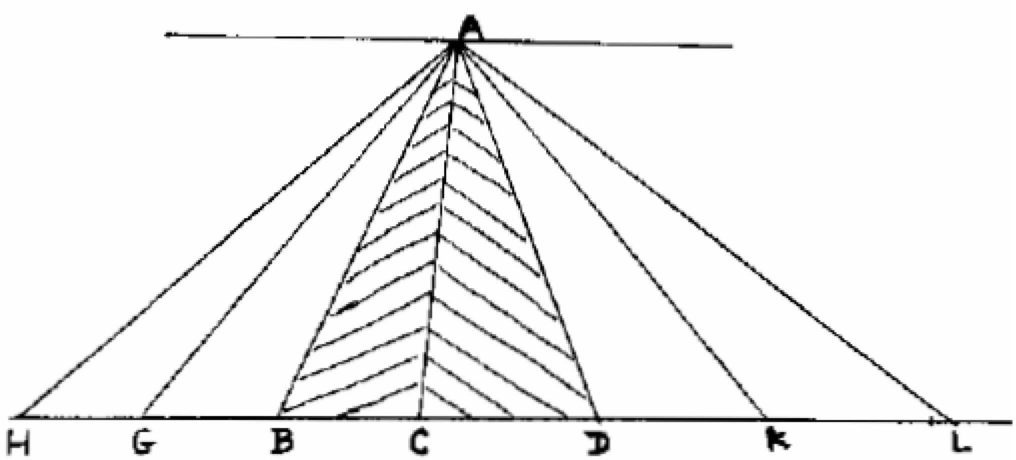

figura 1

Es claro que, si tomamos múltiplos de la base BC, tendremos equimúltiplos del área ABC; también los múltiplos de la base CD producen iguales múltiplos del área ACD. Ahora bien, si los múltiplos de BC son respectivamente iguales, menores o mayores que los de CD, los múltiplos correspondientes del área ABC también son respectivamente iguales, menores o mayores que los del área ACD. Por tanto, las áreas de los triángulos ABC y ACD, que tienen la misma altura, son proporcionales a sus bases respectivas.

Euclides VI-2: *Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo, corta los otros dos lados proporcionalmente. Y recíprocamente: si los lados se cortan proporcionalmente, la recta que los corta será paralela al tercer lado.*

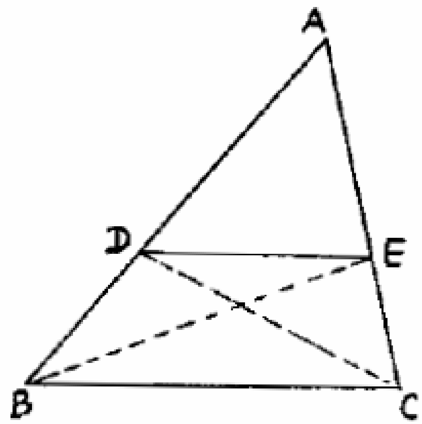

figura 2

Sea el triángulo ABC, fig. 2. Suponemos que DE es paralela a BC y trazamos las líneas BE y CD. Los triángulos BED y CDE son iguales, es decir, tienen la misma área por tener la misma base (el segmento DE) e igual altura por estar entre las paralelas dadas.

Consideremos ahora el área del triángulo ADE.

El triángulo ADE es al triángulo BED como AD es a DB (por el teorema anterior), y ADE es a CDE como AE es a EC. De ahí la proporción: $AD/DB = AE/EC$.

Suponer ahora que los puntos D y E dividen los lados AB y AC proporcionalmente. Trazar la recta DE para probar que es paralela a BC, pues se tiene la proporción $BD/DA = CE/EA$, de la que inferimos que los los triángulos BED y CDE están en la misma razón con el triángulo ADE, y por eso los dos primeros son iguales (tiene igual área). Como ambos tienen la misma base DE, deben tener la misma altura, de donde se infiere que DE es paralela a BC.

A este teorema le sigue, como es bien sabido, toda la teoría de la semejanza de triángulos, incluyendo el teorma de Pitágoras (véase Euclides, libro VI–2, 3, 4, 5, 6 y 7).

También se deduce el llamado teorema de Thales de Mileto, el cual afirma que: *Tres rectas paralelas dividen a sus transversales en partes proporcionales*. En la fig. 2, por el vértice A trazar una paralela a la base BC, para tener tres paralelas que cortan a dos de sus transversales, AB y AC, en partes proporcionales. Por otra parte, es posible dar al teorema de Thales de Mileto una demostración directa basada en ladefinición de Eudoxio, como lo haremos en seguida.

Sean dos rectas paralelas, PR y QS, fig. 3. Y sean las transversales PQ y RS comprendidas entre ellas.

Suponer que la nueva paralela, MN, divide a la transversal PQ en dos partes iguales: $PM = MQ$, para demostrar que la paralela MN divide también a la transversal RS en dos partes iguales: $RN = NS$. Es decir, si M es el punto medio de PQ, entonces N es el punto medio de RS.

Trazar ahora los segmentos MJ y PK, paralelos a la recta RS. Estos segmentos son respectivamente iguales a los segmentos NS y RN, por ser lados opuestos de paralelogramos (Euclides I–34). Por eso ponemos $PK = RN$ y $MJ = NS$.

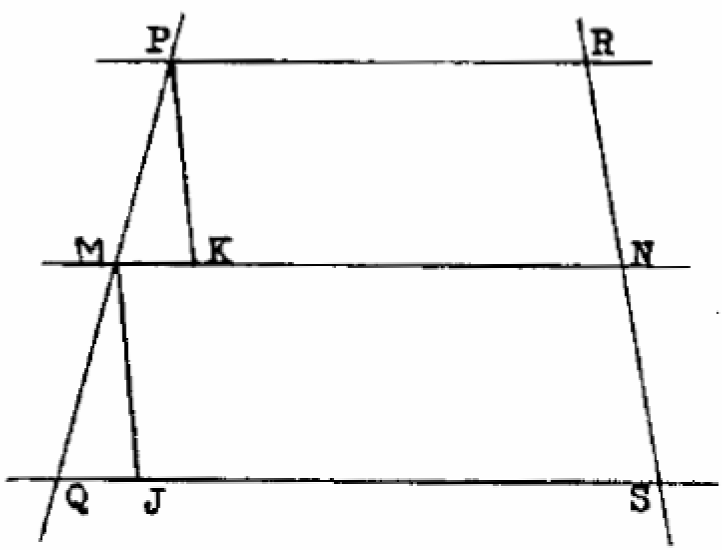

figura 3

Por otra parte, los triángulos PMK y MQJ son iguales por tener un lado igual, $PM = MQ$, adyacente a ángulos respectivamente iguales, de donde se sigue que $PK = MJ$. Y de esto resulta que $RN = NS$.

Así, hemos demostrado que la paralela MN, que divide a la transversal PQ en dos partes iguales, también divide a la otra transversal RS en dos segmentos iguales.

Es fácil probar ahora que si la paralela MN divide a una transversal en partes desiguales, también divide a la otra en partes desiguales, porque si sucediera que $PM > MQ$, también sucedería que $RN > NS$. O también: si $PM < MQ$, entonces $RN < NS$.

El primer teorema puede generalizarse. si al trazar nuevas paralelas a las paralelas dadas la transversal PQ fuera dividida en n partes iguales, la transversal RS también quedaría dividida en n prtes iguales. Trate de hacerlo el lector.

Pasemos ahora al teorema de Thales de Mileto, el cual afirma que tres rectas paralelas cortan a sus transversales en partes proporcionales.

En la figura 4 tenemos las paralelas AE, BD y CF y sus transversales AC y EF. Prolongar hacia arriba las rectas BC y DF; formar segmentos iguales, $BC = CC_1 = C_1C_2 = \ldots$ Por los puntos C_1, C_2 ... trazar paralelas a la recta CF para obtener segmentos iguales, $DF = FF_1 = F_1F_2 = \ldots$ Es decir, múltiplos $n(BC)$ del segmento BC, determinan equimúltiplos $n(DF)$ del segmento DF.

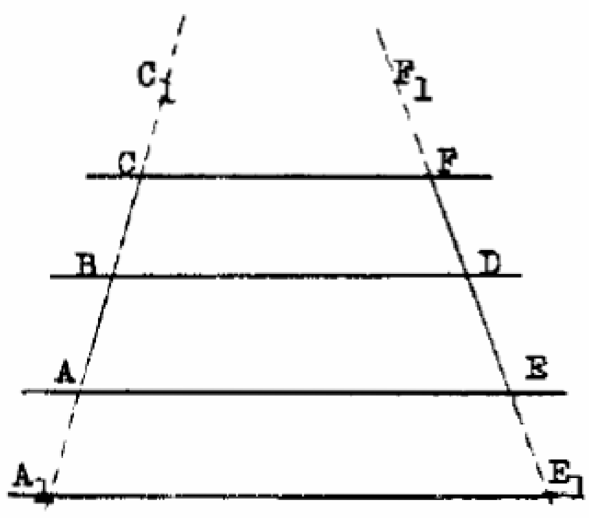

figura 4

Ahora prolongar hacia abajo las rectas BA y DE y formar segmentos iguales, $BA = AA_1 = A_1A_2 = \ldots$ Por los puntos $A_1, A_2 \ldots$ trazar paralelas a la recta AE para obtener segmentos iguales, $DE = EE_1 = E_1E_2 = \ldots$ O sea: múltiplos $m(BA)$ del segmento BA, determinan equimúltiplos $m(DE)$ del segmento DE. Ahora bien, por el teorema anterior:

Si $n(BC) = m(BA)$, entonces y sólo entonces $n(DF) = m(DE)$. Si $n(BC)$ es mayor o menor que $m(BA)$, entonces y sólo entonces $n(DF)$ es mayor o menor que $m(DE)$.

Estas tres condicionales nos dicen (definición de Eudoxio) que los segmentos BC y DF son proporcionales a los segmentos BA y DE. Y de este modo queda demostrado el teorema de Thales de Mileto, del que podemos deducir nuevamente la proposición VI–2 de Euclides.

Bibliografía

Dedekind, R. *Essays on the theory of numbers*, *Nueva York, Dover Publications.*

Heath, T. L. *Euclides Elements*, 3 vol. Nueva York, Dover Publications Inc.

La "exhausión" de Eudoxio aplicada al círculo

Esta nota, redactada sin pretensiones, puede ser de utilidad a quienes enseñan geometría en las escuelas de enseñanza media y superior.

Tracemos un círculo y una cuerda AB, que abarca un ángulo central α. En ambos extremos de la cuerda tracemos tangentes, AC y BC, que

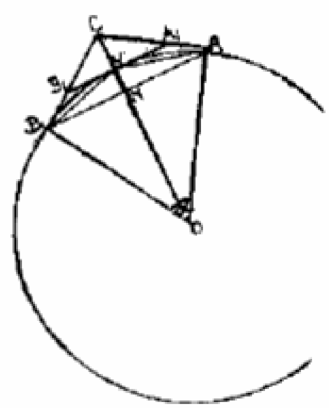

figura 1

forman ángulos iguales con la cuerda AB en sus extremos; cada uno de esos ángulos es la mitad del ángulo central α. Por eso y por un teorema conocido (prop. I–6 de Euclides) el triángulo BAC es isósceles; sus lados iguales $AC=BC$. Trazar la recta OC, diámetro perpendicular a la cuerda AB, que pasa por el punto medio de esa cuerda; pasa también por el punto medio N del arco ANB. Y la tangente A_1B_1 que toca a la circunferencia en el punto N, debe ser perpendicular a la recta OC y paralela a la cuerda AB.

El área del triángulo OAB es parte del área de todo polígono inscrito en el círculo que tenga por lado la cuerda AB. Y el área del cuadriiátero $OACB$ es parte del área del polígono circunscrito "asociado" al inscrito que se elija. La diferencia entre ambas áreas es la del triángulo BAC. —Todo polígono inscrito tiene un "asociado" circunscrito, cuyos lados son tangentes a la circunferencia en los puntos que son vértices del polígono inscrito.—

Olvidemos la cuerda AB y tracemos las nuevas cuerdas AN y NB, que vendrán a ser nuevos lados de un polígono inscrito. Por su parte, la tangente A_1B_1 será nuevo lado del "asociado" circunscrito. El nuevo polígono inscrito habrá ganado el área del triángulo BAN y el "asociado" circunscrito habrá perdido el área del triángulo B_1A_1C. La diferencia entre ambas áreas vendrá a ser ahora la suma de los triángulos B_1BN y NAA_1 que es menor que la mitad de la diferencia anterior, porque ambos triángulos tienen juntos menos área que la del triángulo BAN; teniendo igual altura MN, la suma de sus bases B_1A_1 es menor que la base BA del triángulo BAN.

1) Considerar un polígono inscrito cuyos vértices A, B, C, ... están sobre la circunferencia, y el polígono "asociado" circunscrito cuyos contactos con la circunferencia son los vértices del polígono inscrito. La diferencia de sus áreas está dada por la suma de los triángulos ABA_1, BCB_1, ...

Si bisecamos los arcos AB, BC, ... obtenemos un nuevo polígono inscrito (doble número de lados que el anterior) y su "asociado" circunscrito, cuyas áreas difieren en menos de la mitad de la diferencia anterior; es fácil probarlo. Este proceso, repetido n veces, nos permite obtener polígonos inscritos y sus "asociados" circunscritos cuyas áreas difieren tan poco como se quiera.

Es obvio que todo polígono inscrito tiene menor área que cualquier polígono circunscrito. Y el resultado anterior nos dice que la frontera

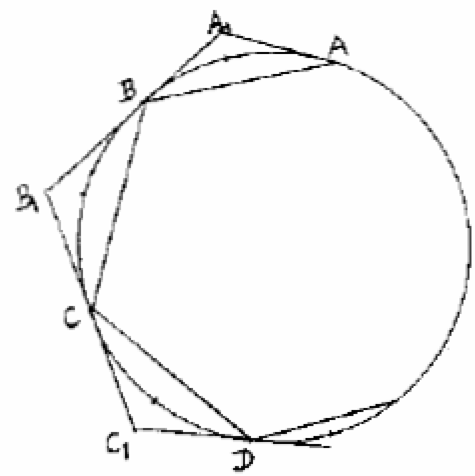

figura 2

superior de las áreas de los inscritos coincide con la frontera inferior de las áreas de los circunscritos.

Este valor común (sup. A_i = inf. A_c) es por definición (la medida de) el área del círculo A.

2) Suponer ahora que se trata de polígonos regulares y poner lo siguiente:

R = radio del círculo considerado.

$R-h$ = apotema del polígono (regular) inscrito.

A_i = área del polígono (regular) inscrito.

A_c = área del polígono "asociado" circunscrito.

P_i = perímetro del polígono inscrito.

P_c = perímetro del polígono circunscrito.

[Obviamente: $A_i < A_c, P_i < P_c, R-h < R$.]

Se cumple lo siguiente:

$A_c = \frac{1}{2} R\, P_c;\ A_i = \frac{1}{2}(R-h)P_i$; por tanto:

$2(A_c - A_i) = R(P_c - P_i) + hP_i$

$2(A_c - A_i) > R(P_c - P_i)$

Ambos miembros de esta desigualdad son números positivos, y la diferencia $(A_c - A_i)$ puede ser tan pequeña como uno quiera; con R = constante, la diferencia $(P_c - P_i)$ viene a ser tan pequeña como se quiera; lo que nos permite definir la longitud de la circunferencia como sup. P_i = inf. P_c.

3) No hay duda acerca de que las áreas de los polígonos inscritos son todas menores que las áreas de los polígonos circunscritos. Si la hubiera acerca de los perímetros, podríamos razonar a la Darboux cuando prueba que las sumas inferiores usadas para definir la integral de Riemann son todas menores que las sumas superiores consideradas en su totalidad. Para ello, definir polígonos "sucesivos" agregando nuevos vértices al polígono inscrito dado (que serán nuevos puntos de contacto para el "asociado" circunscrito).

Todo polígono "sucesivo" inscrito tendrá mayor perímetro y área que el original, sucediendo lo contrario con el "sucesivo" circunscrito. Por lo que, dados arbitrariamente dos polígonos en el círculo, uno inscrito y otro circunscrito, bastará tomar todos los vértices del primero y los puntos de contacto del segundo, para obtener dos nuevos polígonos "asociados" entre sí, ambos "sucesivos" de los dos polígonos arbitrariamente dados; de modo que se cumpla:

$P'_i < P_i < P_c < P''_c$; donde P'_i, P''_c, son los perímetros de los polígonos dados (que suponemos "no-asociados") en tanto que P_i, P_c, son los perímetros de los "sucesivos" respectivos, "asociados" entre sí. Para éstos, la desigualdad $P_i < P_c$ es evidente.

4) Si ponemos: $A = \pi R^2$ (área del círculo); $A_c = \frac{1}{2} R \cdot P_c \therefore$ $A = \text{inf.}\, A_c = \frac{1}{2} R\, \text{inf.}\, P_c$; obtenemos: $\text{inf.}\, P_c = 2\pi R$ (longitud de la circunferencia), porque $A = \pi R^2$.

La fórmula $A = \pi R^2$ para el área del círculo, es consecuencia de la prop. XII–2 de Euclides, que dice: "Círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros". Esta se demuestra por exhausión, basándose en elo que llevamos dicho sobre las áreas de los polígonos inscritos, que pueden diferir de la del círculo tan poco como se quiera, y en la prop. XII–1 que dice: "Polígonos semejantes inscritos en círculos (sus áreas) son entre sí como los cuadrados de los diámetros respectivos".- Ver Euclides, XII–1 y 2.

5) Los razonamientos anteriores se aplican a sectores semejantes (en círculos distintos) para demostrar que sus áreas son proporcionales a los cuadrados de sus radios. Y la definición de proporción de Eudoxio permite demostrar que en un mismo círculo (o en círculos iguales) sectores distintos (sus áreas) son proporcionales a sus ángulos centrales. Ambos resultados se resumen en la fórmula:

$A_s = k\, \alpha\, R^2$ (área del sector de ángulo α, radio $= R$).

Y la constante k se calcula para un sector particular (por ejemplo, el semi-círculo) lo que da: $k = \frac{1}{2} \therefore A_s = \frac{\alpha}{2}R^2$.

Si $\alpha = \pi$ (semi-círculo) $\therefore A_s = (\frac{\pi}{2})R^2 \therefore K = \frac{1}{2}$.