Reseñas

Las obras completas de Georg Cantor

El profesor Zermelo acaba de reunir en un volumen las memorias de Cantor dispersas, hasta ahora, en revistas y folletos, algunos, de difícil acceso. Se ha propuesto hacer figurar, en una primera parte, los trabajos de juventud sobre la teoría de los números a la que Cantor se dedicó inicialmente y los que, según el comentario de Fraenkel, por "la particular pureza y belleza en su desarrollo" pudieron influenciar en sus investigaciones ulteriores. ¿No había sostenido, como tercera tesis para su habilitación (*De transformatione formarium ternarium quadraticarum*): "*Numeros integors simili modo atque corpora coelestia totum quoddam legibus et relationibus compositum efficere*"? - Las otras tres partes del volumen están consagradas respectivamente, a las memorias sobre la teoría de funciones, a la teoría de conjuntos propiamente dicha y, en fin, a la historia de las matemáticas y a la filosofía del infinito. El orden cronológico se encuentra, así, casi respetado pues el estudio de la series trigonométricas, que llevara a Cantor, como por virtud de una necesidad interna, al descubrimiento de las nociones fundamentales de los conjuntos; a continuación, una vez terminado el período creativo, sometió las consecuencias filosóficas de su obra a una especie de revisión crítica, buscando cauciones para el infinito actual hasta en la Edad Media. El interés central se concentra en la tercera parte en donde se puede seguir, paso a paso, el desarrollo de la teoría: desde el descubrimiento de la imposibilidad de poner en correspondencia biunívoca al sistema de números algebraicos con el continuo - descubrimiento que asombró a Cantor antes que a nadie - hasta las sistematizaciones, aún concretas y portadoras de la traza de investigaciones a tientas, de la serie de artículos de 1880-1884 e incluso, hasta la notable exposición de vigor y precisión con que terminan las publicaciones propiamente matemáticas en 1897.

Numerosas notas nos ayudan a seguir la evolución del pensamiento y completan ciertas lagunas en las demostraciones. Es una

Mathesis, 6 (1990), 97-105

rara fortuna que el creador de una teoría se encuentre comentado de esta manera por el más grande e inmediato de sus sucesores. Sería imposible querer seguir aquí los comentarios de manera detallada. El más interesante se encuentra en los pasajes en donde Zermelo muestra la fortuna posterior de los esbozos cantorianos: por ejemplo, a propósito de la propiedad (tal que la condición necesaria y suficiente para que un conjunto la posea es que pertenezca a menos a una de sus partes en una división finita) estudiada y utilizada por Cantor desde 1883 y más tarde, en 1899, retomada por Peano bajo el nombre de propiedad distributiva (y generalmente atribuída a este autor) y que según la opinión de Zermelo "puede, aunque aún sea poco conocida, abrir un acceso, más fácil y más natural, a las diferentes teorías matemáticas que tienen que ver con los conjuntos de puntos, por ejemplo, al teorema de Borel-Lebesgue y a la teoría de la medida en el sentido de Lebesgue". Cantor mismo había sentido la necesidad de introducir un fundamento métrico a su teoría de conjuntos de puntos y había intentado definir una especie de medida, la *Inhalt* (a la que el estudio de grupos integrables, hecho al mismo tiempo que Du Bois Raymond, conducía naturalmente), que coincide con la medida exterior en el sentido de Jordan. Sin embargo, como hace notar Zermelo, la tentativa no fue feliz y la *Inhalt* es casi inutilizable. Además, de los que conciernen a los conjuntos cerrados, los trabajos de Cantor sobre conjuntos de puntos no fueron, en general, muy fecundos y los esfuerzos en los artículos publicados en *Acta Mathematica* entre 1883 y 1885, con las distinciones entre adherencia, coherencia e inherencia, nos parecen, hoy en día, un poco vanos. Todo lo contrario en lo que se refiere a la teoría de los números transfinitos, potencias, tipos de orden y números ordinales de los que lo esencial subsiste como base fundamental de todo desarrollo moderno del tema. Solamente el orden que se sigue es equívoco y Zermelo muestra como el deseo de ir de lo simple a lo compuesto, del número cardinal - en donde la abstracción está en su punto más alto - al número ordinal, lleva a Cantor a hacer intervenir en su teoría intuiciones injustificables: en particular la teoría de los conjuntos finitos y el principio de inducción completa carecen, por ello mismo, de valor.

El error es tanto más sorprendente cuanto que Cantor estaba en correspondencia con Dedekind y, desde 1887 tenía *Was sind und was sollen die Zahlen?* a su disposición. Por paradójico y contrario a la simetría que parezca, es por los conjuntos ordenados por donde se debía comenzar para fundamentar el resto; pero ¿cómo proceder si no con una definición axiomática de orden y buen orden, preludio a una axiomatización de toda la teoría, es decir en la revolución zermeliana? Al margen de este error, las memorias de 1897, en particular, en la armonía de su desarrollo riguroso están llenas de felices descubrimientos - como la caracterización unívoca del tipo de orden del sistema de los números racionales - y en presentimientos geniales como la teoría de los números ε (en lenguaje moderno: números críticos de una cierta función normal) y de manera general el procedimiento de definición por inducción transfinita y la introducción de las funciones normales, desde entonces clásicas y centrales.

En fin, como apéndice encontramos reproducidas cinco cartas extraídas de la correspondencia aún inédita entre Cantor y Dedekind. Están tomadas del último año de este largo intercambio que se prolongó de 1872 a 1899, durante toda la vida productiva de Cantor. En 1899 las paradojas, recientemente descubiertas, ocupaban un primer plano: a la de Burali-Forti del conjunto de todos los números ordinales, Cantor opone una nueva distinción entre multiplicidades consistentes e inconsistentes: las primeras o "absolutamente infinitas" son tales que "admitir una reunión de todos sus elementos conduce a una contradicción". Solamente las multiplicidades consistentes son conjuntos (esto es como un anuncio de la distinción zermeliana entre *Bereiche* y *Menge*, pero Zermelo no conoció estas cartas sino mucho más tarde). En verdad, bajo esta forma embrionaria no hay más que una simple huida ante la dificultad pues ningún medio está dado - salvo la contradicción experimentada *a posteriori*, para distinguir entre los dos tipos de multiplicidad. Cantor mismo hace la objeción en una segunda carta: ¿Qué me prueba que las multiplicidades como aquellas a las que hago corresponder un número cardinal son consistentes, es decir, no podrán conducirme, algún día, a una contradicción hasta ahora desapercibida? La respuesta es poco satisfactoria: se podría extender la cuestión también a los conjuntos finitos. "En una palabra, el hecho de la consistencia es una verdad simple e indemostrable, es el axioma de la aritmética. Por lo mismo, la consistencia de los alefs es el *axioma de la aritmética transfinita*." En cambio, se puede demostrar, en particular por el procedimiento de la diagonal, que el sistema de todos los alefs es inconsistente. Pero esa no es la meta de Cantor: a sus ojos, la solidez del edificio que había construído estaba fuera del alcance de las paradojas. Lo que buscaba con esta nueva distinción era un medio para responder a la irritante cuestión planteada desde el inicio de sus investigaciones y a la que respondía obstinadamente por la afirmativa sin poder encontrar una demostración: ¿el continuo tiene por potencia el segundo número cardinal transfinito? Esta pregunta, posteriormente, se desdobló: por un lado, ¿toda potencia es un alef? o, ¿el sistema de números cardinales puede ser ordenado en una sucesión bien ordenada? Por otra parte, ¿qué rango corresponde al número cardinal asignado al continuo? El primer problema encuentra su solución en el teorema de Zermelo en 1904-1907. El segundo permanece abierto. De la verdad del sufrimiento que pudo provocar en Cantor la imposibilidad a la que se enfrentaba da muestra suficiente la correspondencia que Cantor sostuvo con Mittag Leffler alrededor de 1884: el 26 de octubre de 1884, triunfa: "Estoy ahora en posesión de una demostración extremadamente simple de este teorema, el más importante de la teoría de conjuntos", y el 4 de noviembre: "Felizmente no he utilizada ninguna parte de esta afirmación como medio de demostración... He encontrado en los últimos días, una demostración rigurosa de que el continuo no tiene la potencia de la segunda clase y, más aún, que no hay una potencia expresable por un número." Pero desde el 15 desautoriza su carta y el 16 comienza a construir planes para alcanzar, con la ayuda de los conjuntos cerrados, la meta siempre huidiza. (Correspondencia publicada por Schoenflies, *Acta Mathematica*, 50, p,. 16-18) En 1899 creía, por medio de su distinción, resolver el primer problema: supongamos una multiplicidad V que no tenga por número cardinal ningún alef: entonces su puede proyectar sobre ella el sistema de todos los alefs, y, como este sistema es inconsistente, V también lo es: por lo tanto, todo sistema consistente tiene por cardinal a un alef. El error, como señala Zermelo, yace en el carácter puramente intuitivo de esta "proyección": es imposible ver qué ley podría dar es correspondencia biunívoca entre el sistema de todos los alefs y un sistema parcial V' de V. No es *imaginable* más que a través de una sucesión transfinita de elecciones arbitrarias, algo análogo al procedimiento con que Jourdain pretendía ordenar el continuo en 1905. Por el contrario, el axioma de Zermelo afirma la existencia de una ley que rige una infinidad de elecciones simultáneas: no hay arbitrariedad más que relativamente a nuestro conocimiento y cada elección es independiente del resultado de todas las anteriores. Contrariamente a lo que pasa aquí - como en la demostración de

Jourdain y que es lógicamente inadmisible -, en fin, obviamente, el teorema de 1904 no tiene que ver sino con multiplicidades consistentes.

Esta comunicación de Cantor produjo un efecto curioso en Dedekind: la distinción no le interesa ("No alcanzo a estar claro sobre ella"); pero el problema de la tricotomía (entre dos números cardinales siempre vale una y una sola de las relaciones =,,, es decir, una parte del primero de los dos problemas planteados le recuerda el teorema de equivalencia del que había encontrado, por medio de su noción de cadena, una demostración más simple que la de Bernstein y que comunicó a Cantor. Zermelo se sorprendió al reconocer (pues las cartas no fueron accesibles sino poco después) exactamente, casi término a término, la demostración que él mismo publicó en 1908: tiene sobre la de Bernstein la ventaja de no hacer intervenir la sucesión ordenada 1,2,...,w o el principio de inducción completa. Lo más sorprendente es que Dedekind, que parecía haber encontrado esta demostración en 1899 en ocasión de una visita del joven Bernstein, la tenía en realidad desde hacía diez años: hay, en efecto, en sus papeles inéditos, una hoja (que aparecerá probablemente en el t. III de sus obras completas publicadas por E. Noether) en la que de la mano de Dedekind está escrito 1887.7.11 que da exactamente, esta vez en la notación de *Was sind und was sollen die Zahlen?*, el mismo razonamiento. ¿Porqué no se lo comunicó a Cantor quien desde 1883 formulaba el teorema de equivalencia como uno de los más importantes de la teoría y sobre el que prometía regresar con más calma (*Oeuvres*, p. 20) (promesa incumplida)? ¿Porqué uno y otro, en 1899, se olvidaron de publicarlo? Estos son hechos difícilmente explicables. Queda, de este doble reencuentro, cada vez a diez años uno del otro, de Dedekind consigo mismo y luego con Zermelo, una prueba de la necesidad con la que se impone la noción de cadena para ciertos desarrollos de la teoría.

La obra se termina con una biografía de Cantor tomada del estudio, extremadamente detallado y de un interés ininterrumpido hecha por Fraenkel en el *Jahresberichte der deutschen Mathematiker Vereinigung* (1930). Como anota Fraenkel hay pocos ejemplo de creación de una rama de las matemáticas que sea obra casi exclusiva de un solo investigador que trabajaba en la soledad y a veces en medio de la hostilidad, su vida confundida con sus investigaciones. Fraenkel la sigue en su desarrollo en instantes casi dramáticos: desde su primera juventud cuando se manifiesta de manera irresistible la vocación matemática - Cantor, a los diecisiete años, ¿no habla, en una carta a su padre afortunadamente reencontrada de "una voz misteriosa y desconocida que lo llama" (p. 453) - hasta la instalación en Halle, en donde E. Heine lo lanza al estudio de las series trigonométricas. Estos son los primeros descubrimientos, numerabilidad del sistema de los números racionales, sobre todo, la puesta en correspondencia biunívoca del continuo lineal y del continuo de n dimensiones, teorema sobre el que Cantor duda durante tres años (1874-1877) y del que dudaba aún cuando tenía una demostración irreprochable. "Lo veo y no lo creo" (Carta a Dedekind, 29 de junio de 1877). La sorpresa provenía del olvido del papel jugado por la continuidad en la correspondencia: la independencia mutua de las variables parecía, por entonces algo mal conocido puesto que una sola podía reemplazar n: la hipótesis declarada absurda por un matemático en 1874 (Carta de Dedekind, 18 de mayo de 1874). Debía costar cara a su autor: la hostilidad de Kronecker hasta entonces sorda, comenzó a mostrarse de manera sorprendente. La memoria enviada en julio de 1877 al *Journal de Creelle* no apareció sino hasta enero de 1878 cuando, Cantor, inquieto por los retrasos, y por la causa a que los atribuía se disponía a retirarla. Esta fue, por otra parte, su últimas colaboración con la revista. Pero el drama continuó: drama de aislamiento en la pequeña universidad de Halle en donde en su seminario no tenía, a veces, que de uno a tres oyentes, en donde, hasta Bernstein y Hermann Schwarz, a finales del siglo, no pudo formar ningún discípulo. En vano buscó una mejor tribuna. Berlín en particular, se le cerraba gracias a Kronecker. En 1881, sin embargo, Mittag-Leffler vino a su ayuda y le abrió su nueva revista, *Acta Mathematica* en donde aparecieron, no solamente los artículos originales sino una traducción francesa de fragmentos de su gran memoria de los *Mathematischen Annalen* atribuída a poincaré. Fue el principio del reconocimiento de sus ideas: Schoeffer, Mittag-Leffler, Poincaré las utilizaron en sus trabajos sobre teoría de funciones. Sin embargo, la crisis más grande aún estaba por venir: en 1884, la influencia de Kronecker era, nuevamente dominante: el artículo de Mittag-Leffler fue mal recibido en París a causa de sus referencias a nociones cantorianas; con Mittag-Leffler mismo, surgieron algunas dificultades - más imaginarias que reales - (a propósito de una artículo que Kronecker quería que apareciera en el *Acta*) e incluso Weierstrass quien siempre había protegido a su antiguo alumnos, pareció enfriarse al y lo animaba en sus trabajos al grado de indicarle nuevas aplicaciones tales como el principio de condensación de singularidades. Este aislamiento creciente, aunado a la irritación del problema del continuo que le atormentaba particularmente en aquella época, provocó una crisis depresiva - agravada por una crisis mental que le obliga a pasar un tiempo en una clínica - y lo llevo a una doble capitulación: abandono de las matemáticas y contrición oral y escrita ante Kronecker. Ni uno ni otra fueron, felizmente, definitivas: los ataques contra "Me]re]" - así llamaba a Kronecker - reaparecieron en su correspondencia y su actividad productiva no se extinguió. Se consagró, sin embargo, lo mejor de su tiempo durante muchos años a intentar demostrar que Francis Bacon es el autor de los dramas de Shakespeare y solicitó al ministro prusiano de instrucción pública autorización para enseñas filosofía. Fue la época de sus investigaciones sobre el pasado del infinito actual, de sus incursiones en l;a escolástica medieval: trabajos de los que los artículos en la *Zeitschrift fu:r Philosophie und Philosophie kritik* guardan la traza curiosa. Pero la verdadera filosofía perdió en este cambio de frente. - Los últimos años del siglo aportaron, por fin, el reconocimiento oficial y definitivo a su obra: en el Congreso de Zurich (18971) cada quien en su turno, Hadamard, Hurwitz y Hilbert le rindieron el homenaje merecido e incluso las *Lecciones sobre teoría de funcione*s de Borel, publicadas ese mismo año, presentan una exposición parcial y una utilización que desde entonces son clásicas. Hubo empero, una alerta, todavía, en el Congreso de Heidelberg en 1904: el discurso en que Koenig, apoyándose en un teorema de Bernstein mal interpretado, pretendía demostrar que la potencia del continuo no puede ser un alef. Schoenflies relata la conmovedora escena en que Cantor exhorta a sus jovenes discípulos para que encuentren la falla para asegurar, por fin, un teorema necesario para la solidez de su obra. Su voto no tardó en ser cumplido, al menos en parte: Hausdorff mostró (*Jahresber*, 1904) que el dominio de validez de la relación de Bernstein ne permitía la aplicación hecha por Koenig y en septiembre del mismo año, Zermelo demostraba la posibilidad de dar un buen orden al continuo.

Fraenkel termina su estudio comparando los estilos matemáticos de Cantor y de Dedekind. Se trata, tal y como se muestra en su correspondencia, de la oposición de un romántico, "matemático de la *Sturm und Drang*" y de un clásico, maestro del rigor y de la simetría. Dedekind terminó, en fin, por influenciar a Cantor como testimonia el segundo estilo de las memorias de Cantor, las *Beiträ-*

ge, de 1897. En cuanto a los resultados tangibles, lo importante, sobre todo es la diferencia en las formas de pensar, generadora de métodos distintos tales como la recurrencia transfinita por una parte y el razonamiento de la cadena por la otra y cuya utilización simultanea se mostrará particularmente fecunda a continuación. Ahí, como en otras partes, es muy notorio que lo particular de las creaciones haya desaparecido rápidamente bajo la presión de las exigencias de los problemas. Más que el célebre pasaje en que Cantor opone la "matemática libre" generadora de realidades inmanentes a la "ciencia metafísica de las realidades trascendentes", es instructiva la carta a Mittag-Leffler escrita en 1884: "*was das übrige betrifft, so ist dies nicht mein Verdienst, ich bin in bezug auf den Inhalt meiner Arbeiten nur Berichterstatter und Beamter*". De parte del matemático cuya obra aparece más íntimamente ligada a la persona, criada en la soledad, desarrollada hasta un estadio avanzado solamente por él mismo en una originalidad radical, esta negación del elemento histórico es particularmente impactante. Es así que la materia sobre la que trabajaba le forzaba perspectivas inaccesibles a las construcciones humanas. Un mundo de realidades ideales, independientes de nuestros esfuerzos y cuya existencia tiene una solidez objetiva tal que podemos fundar nuestros razonamientos sobre relaciones que incluso se nos ocultan sabiendo solamente que existen, tal le parecía el mundo matemático, tal debió parecerle, más tarde, la axiomática zermeliana. Pero poco importa aquí el debate entre los "construccionistas" y los "existencialistas", en el que la posición de Cantor no puede ponerse en duda. Lo que afirmaba en su carta a Mittag-Leffler es el carácter absoluto, independiente de todo factor humano, de una realidad matemática apoyada en sí, con su estructura interna necesaria y tal que el desarrollo de la historia puede hacer visibles ciertas líneas preferidas a otras (*ou plus tot qu'elles*) pero que, por la unidad que rige sus diferentes ramas y la cerrazón de su tejido, obliga al reestablecimiento indispensable y procura una armonía superior a todas las voluntades de los sabios. Es solamente en relación con ella - la *mathesis perennis* - que se pueden explicar los encuentros inesperados, como el de Dedekind y Zermelo y otros que un estudio más detallado revelaría en los trabajos de los contemporáneos y de sus predecesores - que alcanza su verdadera significación esta obra, despojada de su carácter pintoresco y in poco monstruoso, no curiosidad histórica sino, bajo sus imperfecciones, realidad objetiva de núcleo inquebrantable (**inebranlable*): "del paraíso que

Cantor ha creado para nosotros, decía Hilbert, nadie podrá expulsarnos".

Jean Cavaillès.

[Traducción de Santiago Ramírez]