notas educativas

Los Métodos en Matemáticas

Francisco Zubieta R.

En la presente nota aparecen algunos comentarios sobre la distinción que podemos hacer entre los métodos efectivos de la matemática elemental y los métodos formales de la matemática superior. Los primeros, los métodos efectivos, obviamente los más recomendables en la enseñanza elemental de las matemáticas, que comprende desde la escuela primaria hasta el bachillerato.

Por ejemplo, es efectiva la definición de número primo, que comporta un criterio (la criba de Eratóstenes) que permite decidir a un número finito de pasos si un número natural dado es primo o no lo es. Pero no es efectiva la definición de algebráico, que supone la existencia de un polinomio con coeficientes enteros que tenga por raíz el número dado. No sabemos, por ejemplo, si la constante de Euler ($C = 0.57721566...$) es o no es un número algebráico, por no existir un criterio conocido que permita decidirlo.

Un ejemplo similar lo tenemos en la demostración de la existencia de la raíz cuadrada positiva de cada número positivo dado. La matemática elemental posee un método efectivo, basado en el empleo de la notación decimal, que permite obtener paso a paso las aproximaciones sucesivas de la raíz pedida, a menos de un décimo, de un centésimo, de un milésimo, ... de aproximación; de modo que esa raíz queda potencialmente definida por la lista completa de sus aproximaciones sucesivas. Esta manera de proceder puede formalizarse más tarde, haciendo intervenir el principio de convergencia de Cauchy.

Comparar con el método que suele emplearse en los cursos de análisis matemático; donde se consideran los números reales positivos cuyos cuadrados son menores que el número positivo dado, los cuales forman un conjunto no-vacío y acotado. Por un razona-

MATHESIS 4 (1988) 523-530

miento puramente formal, se prueba que la frontera superior (cuya existencia se admite) del conjunto considerado viene a ser la raíz cuadrada pedida, pero no se dice cómo calcularla con una aproximación deseada.

En razonamientos informales como los primeros que acabo de exponer, los matemáticos del siglo XVI basaron su convicción de la existencia de la raíz ené-sima positiva de todo número positivo; lo que les permitió extender la teoría de los exponentes hasta comprender como tales a todos los números racionales e irracionales. De allí derivó, finalmente el uso y aplicación de los logaritmos, iniciados por John Napier.

[Véase en este ejemplo cómo se realiza la invención matemática, sin pretensiones formales de rigor, cuando tales pretensiones no pueden cumplirse. La exposición formal, rigorista, de la teoría de los logaritmos sólo pudo hacerse en el siglo XIX, después de los trabajos de Agustín Cauchy.]

En términos populares podemos dar un ejemplo de lo que es un teorema de existencia y su demostración formal, considerando las dos premisas siguientes, que suponemos son verdaderas:

(a) Hay en esta ciudad más de un millón de personas.

(b) Toda persona tiene menos de un millón de pelos en la cabeza.

De tales premisas deducimos que existen en esta ciudad (por lo menos) dos personas que tienen el mismo número de pelos en la cabeza, aunque nuestro método deductivo no nos informa quienes son las dos personas que se mencionan. Por tanto, la conclusión es:

(c) Hay en esta ciudad (por lo menos) dos personas con igual número de pelos en la cabeza.

Según (b), los números que cuentan los pelos en las cabezas de las distintas personas pueden ser de 0 hasta n, con n < 1 millón. Estos números son menos que las personas que habitan en esta ciudad, según (a). Si cada número se asigna (a lo más) a una sola persona, se agotan los números y sobran personas; lo que obliga a repetir números para las personas sobrantes. Y esto prueba (c).

Por supuesto, habrá casos en que las premisas no se cumplan; la conclusión podrá ser verdadera o no; pero la demostración seguirá siendo válida aún en tales casos. Lo que ilustra la manera de razonar de la matemática formal, que garantiza la verdad de las conclusiones cuando las premisas son verdaderas; pero no se compromete a más.

No se piense, sin embargo, que los métodos formales empleados en matemáticas son invención moderna. Su origen se encuentra en la matemática antigua. Ejemplos son: *la teoría de las proporciones* de Eudoxio (expuesta en el libro V de Euclides) y el llamado "método de exhausión", también de Eudoxio (expuesto en los libros X y XII de Euclides y en la obra de Arquímedes).

En cuanto a la primera (teoría de las proporciones) podemos decir que, salvo ciertas deficiencias, su presentación se puramente formal, axiomática, incluyendo la llamada "propiedad arquimediana" de las magnitudes o números reales, en la que basó Eudoxio su "método de exhausión".

Si nosotros comparamos la definición de proporción de Eudoxio (tal como aparece en el texto de Euclides) con la moderna definición de número real, de Dedekind, quedaremos sorprendidos por la casi identidad de ambas definiciones. Tal vez la mayor aportación de Dedekind haya sido poner de relieve la idea de cortadura, implícita en los razonamientos de Eudoxio, cuya importancia destacó.

En cuanto al "método de exhausión", que los antiguos emplearon para el cálculo riguroso de áreas y volúmenes, el análisis matemático moderno lo sigue empleando en su forma casi igual, aunque con mayor alcance. Para verlo, basta comparar lo que trata Euclides en sus libros X y XII, con las modernas teorías de la medida y la integral de Borel y Lebesgue.

No hablaré más del origen empírico de las matemáticas y del tratamiento informal que recibe cada rama de la misma en sus comienzos, para referirme al tratamiento ordenado y sistemático que se le otorga a medida que progresa y alcanza madurez.

Se atribuye a Thales de Mileto el haber iniciado el estudio de la geometría como ciencia deductiva. Los pitagóricos siguieron su escuela y avanzaron tanto en esa dirección, que trataron de establecer ideas y principios básicos en los que pudiera deducirse todo el cuerpo de definiciones y teoremas que componen la geometría. Fracasaron en su intento, porque aún quedaban dudas por resolver. Pero los geómetras del siglo IV antes de J.C. disiparon las dudas con nuevas aportaciones, y Euclides apareció en el momento preciso para fundamentar la geometría, axiomatizándola.

Aunque la obra de Euclides no es tan conocida como pudiera suponerse, todos los matemáticos están informados, directa o indirectamente, del plan general de esta obra, admirada a través de los siglos, fuente de inspiración de muchos inventos modernos. La componen 13 capítulos, llamados "libros" según costumbre de la época. Empieza el libro I con una serie de definiciones que comprenden: *punto, línea recta, plano, rectas perpendiculares, paralelas, circunferencia*, ... Como hemos de suponer ahora, varias de estas definiciones dicen poco o nada que valga la pena; pero no anticipemos, porque algunas de ellas son realmente impecables.

En seguida vienen los cinco famosos postulados, que dicen:

1. *De un punto a otro punto, trazar una recta.*
2. *La recta trazada se prolonga de modo que sigue siendo recta.*
3. *Describir un círculo con cualquier centro y radio.*
4. *Todos los ángulos rectos son iguales.*
5. *Si una recta cae sobre otras dos haciendo los ángulos interiores del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas, prolongadas, se cortan del mismo lado donde están esos ángulos cuya suma es menor que dos rectos.*

Este último es el famoso 5° postulado que tanto se ha comentado a través de los siglos, porque tiene menor evidencia que los cuatro que lo preceden, si es que estos la tienen.

Finalmente vienen las nociones comunes, de las cuales mencionaremos las cinco que siguen:

1. *Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.*
2. *Si a iguales se agregan iguales, los totales son iguales.*
3. *Si iguales se substraen de iguales, las diferencias son iguales.*
4. *Cosas que coinciden una con otra, son iguales.*
5. *El todo es mayor que la parte.*

Uno debe suponer que Euclides puso aparte estas nociones comunes por no estar referidas específicamente a la geometría. Su carácter es universal y su validez, si la tienen, trasciende a esta ciencia particular. Los geómetras antiguos trataban las nociones comunes o axiomas como verdades universales y evidentes, en tanto que los postulados eran verdades convencionales referidas especialmente a la geometría. La matemática moderna no admite tal distinción y considera como sinónimos las palabras "axioma" y "postulado", que significan: *proposición que se admite sin demostración*.

De la definiciones, postulados y nociones comunes que hemos mencionado, deduce Euclides el contenido completo del libro I.

En sus *Elementos* logra Euclides seleccionar lo mejor de la geometría de su tiempo y ponerlo en un orden lógico, aparentemente impecable. Los defectos de está obra, en cuanto a fundamentación de la geometría, no fueron claramente detectados sino al mediar el siglo XIX, desde los trabajos de Bolyai y Lobatchevski. A propósito, recordemos que este último inició su memoria sobre las paralelas diciendo: "En geometría encuentro ciertas imperfecciones ..."

A partir de entonces otros matemáticos se preocuparon por una nueva fundamentación de la geometría. Son bien conocidos al respecto los trabajos de Pasch, Peano, Hilbert y Pieri.

Como quiera que sea, la obra de Euclides (me refiero especialmente a su método axiomático) queda en pie, aunque su sistema de axiomas para la geometría haya sido perfeccionado. Otros trataron de extender su método a otras ramas de las matemáticas, empezando por la aritmética; recordemos que Dedekind empezó por presentar en forma axiomática la definición pitagórica de los números naturales, en donde Peano derivó su célebre sistema de axiomas.

Aunque no toda la matemática de nuestro tiempo se maneja en forma axiomática, aquellas partes que han sido axiomatizadas pueden considerarse como el prototipo de la matemática formal, cuando así se las trata. Un ejemplo típico lo constituye la construcción axiomática de la aritmética de los números naturales, ya mencionada.

En su sistema considera Peano lo siguiente:

(a) conceptos no definidos: *cero, número natural, sucesor*.

(b) axiomas que se refieren a los conceptos no-definidos.

(c) definiciones que introducen nuevos conceptos, los cuales se definen en términos de los no-definidos.

(d) teoremas o proposiciones que se deducen de los axiomas y definiciones por los métodos que autoriza la lógica.

Los conceptos no-definidos deben cumplir los cinco axiomas siguientes, donde $s(m)$ denota al sucesor de m:

1. *0 es un N (cero es un número natural)*.

2. *Si m es un N, entonces $s(m)$ es un N.*
3. *Si m es un N, entonces $s(m) \neq 0$.*
4. *Si $s(m) = s(n)$, entonces $m = n$.*
5. *Si 0 pertenece a la clase Q y también pertenece a Q el sucesor de cada número que pertenece a Q, entonces N está contenida en Q.*

Los cinco axiomas dicen bien que N (número natural) es una clase, a la cual pertenecen 0 (cero); que s (sucesor) es una función definida en N con valores en N. El axioma 5 es el llamado *principio de inducción finita*, que utiliza Peano como verdadero motor en la construcción teórica de la aritmética.

La adición de los números naturales la define en seguida por medio de las dos igualdades siguientes:

$$m + 0 = m \ ; \quad m + s(n) = s(m + n).$$

La segunda igualdad define la suma $m + s(n)$ como el sucesor de la suma $m + n$, en el supuesto de estar definida esta última; lo que nos indica que las dos igualdades anteriores definen por inducción la suma de todo par de números naturales.

De ambas igualdades deduce Peano, por inducción, las propiedades conocidas de la adición de los números naturales.

Si ponemos la definición $1 = s(0)$, y substituimos en la segunda igualdad, obtenemos: $m + s(0) = s(m + 0)$. Es decir: $m + 1 = s(m)$ en vista de la primera igualdad; lo que bien dice que, sumando la unidad a cada número natural se obtiene el sucesor de ese número.

Es claro que podemos definir números particulares, introduciendo al mismo tiempo la notación decimal, como sigue:

$$1 = s(0) \ ; \ 2 = s(1) = 1 + 1 \ ; \ 3 = s(2) = 2 + 1 \ ; \ldots$$

Con tales definiciones podemos construir (en forma sofisticada) las tablas de sumar que aprendimos en la escuela primaria; propongo al lector que ensaye hacerlo.

De manera parecida define Peano la multiplicación de los números naturales; también define el orden natural de los números. Y de esas definiciones deduce todo el contenido de la aritmética tradicional de los números naturales.

Esta formulación de un sistema axiomático (representado a la perfección en el caso que estamos tratando) caracteriza a la llamada "matemática pura" de nuestro tiempo, la que inspiró a Bertrand

Russell su célebre frase que expresa: *En matemáticas no se sabe de qué se habla, ni se dice si lo que se habla es verdadero o no*. No se sabe de qué se habla, porque todo se define, en última instancia, en términos de lo que no está definido. Y por obvia razón, no pudiendo decir que los axiomas son verdaderos, tampoco podemos decirlo de los teoremas que se deducen de ellos.

Esta situación que nos permite deducir proposiciones de proposiciones, sin importar que sean o no verdaderas, caracteriza las deducciones de la matemática formal. Si alguien objetara ¿cómo podemos hacer deducciones sin saber que partimos de premisas verdaderas? la respuesta sería la célebre frase de Laplace: *Je n'ai pas besoin de cette hypothèse* (No tengo necesidad de esta hipótesis).

En verdad, cualquier sucesión infinita, a, a′, a″, ... que no contenga términos repetidos, puede identificarse con la clase N de los números naturales, con tal que al primer elemento de la sucesión se le llame "cero" y la noción de "sucesor" se aplique al elemento que sigue a otro cualquiera de la sucesión.

Cada sucesión como ésta constituye un "modelo" de la teoría axiomática de Peano. Ahora bien, tales "modelos" son todos isomorfos entre sí, porque (tomando dos de ellos) podemos hacer que sus elementos correspondan uno-a-uno y sus relaciones y operaciones aparezcan como calcadas del uno al otro; lo que se expresa diciendo que el sistema de axiomas considerado es *categórico*.

Podemos convenir en que los sistemas categóricos definen los conceptos primitivos "a un isomorfismo *près*", como dicen los franceses, y que los axiomas son verdaderos respecto de los conceptos primitivos así definidos. Entonces el comentario anterior de Bertrand Russell queda sin efecto.

La aritmética de los números reales puede manejarse también como un sistema formal, mediante los axiomas que definen un *campo ordenado completo (dedekindiano)*. Estos axiomas forman a su vez un sistema categórico, de manera que definen a los números reales (a un isomorfismo près) con sus operaciones y su orden de magnitud.

Sin embargo, la mayoría de los sistemas de la matemática moderna no son categóricos, como sucede por ejemplo con los axiomas que definen la noción de *grupo*. Obviamente, *un grupo finito no puede ser isomorfo con otro que tiene una infinidad de elementos*.

En general, puede observarse que los sistemas de la matemática tradicional son categóricos, en tanto que los sistemas formales más recientes no lo son.

En este artículo hablamos en plural, como es costumbre hacerlo, de los métodos efectivos y los métodos formales empleados en matemáticas. Porque hablar en singular, en términos generales, sobre el método de las matemáticas, nos conduciría a disquisiciones filosóficas que nos alejarían de nuestro propósito inicial.

Un método no es otra cosa que una manera de hacer algo. Cuando empleamos un artificio para resolver un problema o demostrar un teorema, si el artificio funciona y volvemos a usarlo, decimos que estamos empleando un método. Los libros de texto suelen decir: *se resuelve la ecuación empleando tal método*. Y al proponer un problema, recomiendan: *usar el método, no la fórmula*.

Nota. La constante de Euler se define por medio de la función: $\phi(n) = (1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n) - L(n)$ donde $L(n)$ designa el logaritmo natural de n. Esta función tiene un límite cuando $n \to \infty$. Y ese límite viene a ser la constante de Euler.