Mathesis 10 (1994) 187-209
Impreso en México. Derechos reservados © 1994 por UNAM ISSN 0185-6200

Hipotesis del continuo, definibilidad y funciones recursivas: historia de un desencuentro (1925-1955)

Fernando Zalamea

Resumen

En 1925 Hilbert intenta demostrar la hipótesis del continuo, usando definibilidad de funciones en la aritmética; introduce (sin llamarlos así) la recursión primitiva y los funcionales recursivos. El intento no consigue el resultado deseado; sin embargo, rastreamos sus escondidas consecuencias en las tres décadas que siguen. Por otro lado, en 1925, Lusin y Sierpinski sistematizan la jerarquía proyectiva. Se consolida así otra vía de ataque para estudiar el continuo. En los años 1930 se precisa la noción de recursividad (Herbrand, Gödel, Kleene) y se recuperan resultados importantes de Post. Por otro lado, las monografías sistemáticas de Sierpinski (*Hypothèse du continu* (1934) y *Les ensembles projectifs et analytiques* (1950)) estudian a fondo las contribuciones de la teoría de funciones de variable real para elucidar el problema del continuo. En algunos momentos del período 1925-1955 se juntan esos dos enfoques a la hipótesis del continuo (definibilidad y recursión *versus* jerarquías proyectiva y analítica) pero, en realidad, la situación es la de un desencuentro. Estudiamos el porqué de ese desencuentro y tratamos de explicar algunos de los presupuestos epistemológicos en los que se basa la práctica matemática. Finalmente, en 1955, Kleene y Addison, siguiendo el camino abierto por Mostowski, explican las hondas conexiones entre las jerarquías de la recursión y los conjuntos analíticos. El desarrollo posterior de esa unificación (en la teoría descriptiva de conjuntos) ha proporcionado algunas de las más lúcidas intuiciones acerca del continuo; presentamos un corto resumen de esos últimos trabajos.

1. El intento de demostración de Hilbert de la hipótesis del continuo (1925)

El problema del continuo fue para Cantor uno de los motores principales que impulsaron al desarrollo técnico de las herramientas fundamentales de la teoría de conjuntos. La construcción de la escala de los *alephs*, vía clases ordinales (Cantor 1895-97), y el teorema, equivalente a buena ordenación o al axioma de elección, de que todo cardinal infinito es un aleph (Cantor 1989), fueron en buena medida motivados por la necesidad de precisar el problema del continuo. Si c es el cardinal del continuo (la recta real), Cantor mostró que $c=2^{\aleph_0}$ y que $c > \aleph_0$. La hipótesis del continuo (HC), proclamada por Cantor, consistió en afirmar que $c = \aleph_1$ (cardinal del conjunto de todos los ordinales enumerables).

Zermelo formula su axiomatización de la teoría de conjuntos (Zermelo 1908) motivado por una revisión crítica de su teorema del buen orden (Zermelo 1904, donde ya se encuentran todos los enunciados básicos que alcanzarán cuatro años después el rango de axiomas). La axiomatización es perfeccionada por [Skolem 1922]. A propósito de la posible demostración o falsación de (HC) dentro de ese sistema axiomático (equivalente a ZF):

> como los axiomas de Zermelo no determinan de manera única el dominio B [un modelo ZF], es muy improbable que todos los problemas de cardinalidad sean decidibles por medio de esos axiomas. Por ejemplo, es bastante probable que lo que se denomina el problema del continuo, a saber, la pregunta de si $2^{\aleph_0}$ es mayor o igual que $\aleph_1$, no sea resoluble sobre esas bases; nada tiene que ser decidido acerca de él. La situación puede que sea exactamente la misma que la del caso siguiente: no es dado un campo no especificado y preguntamos si contiene un elemento x tal que $x^2 = 2$. Esto no está determinado puesto que el dominio [modelo de los axiomas de campo] no es único [Skolem 1922, 299].

La intuición de Skolem será reafirmada por los trabajos posteriores de [Gödel 1940] y [Cohen 1966], quienes demostrarán la independencia de (HC) con respecto a (ZF). Pero el problema no queda zanjado allí. Para la gran mayoría de los investigadores en teoría de conjuntos, el problema se torna en encontrar axiomas plausibles que decidan de la verdad o falsedad de (HC) (ver sección 7).

En 1900, en la famosa lista de problemas que Hilbert había presentado en el Congreso de Matemáticas realizado en París, la hipótesis del continuo aparecía como el primer gran problema abierto de la época. En los 25 años posteriores, a pesar de la emergencia de la lógica de primer orden y las axiomatizaciones de la teoría de conjuntos, pocos avances se realizan para tratar de decidir el problema del continuo.

Mathesis 10 (1994) 177-223
[illegible]

Hipotesis del continuo, definibilidad y funciones recursivas: historia de un desencuentro (1925-1955)

Fernando Zalamea

Resumen

En 1925 Hilbert intenta demostrar la hipótesis del continuo, usando definibilidad de funciones en la aritmética; introduce (sin llamarlos así) la recursión primitiva y los funcionales recursivos. El intento no consigue el resultado deseado; sin embargo, rastreamos sus escondidas consecuencias en las tres décadas que siguen. Por otro lado, en 1925, Lusin y Sierpinski sistematizan la jerarquía proyectiva. Se consolida así otra vía de ataque para estudiar el continuo. En los años 1930 se precisa la noción de recursividad (Herbrand, Gödel, Kleene) y se recuperan resultados importantes de Post. Por otro lado, las monografías sistemáticas de Sierpinski (*Hypothèse du continu* (1934) y *Les ensembles projectifs et analytiques* (1950)) estudian a fondo las contribuciones de la teoría de funciones de variable real para elucidar el problema del continuo. En algunos momentos del período 1925-1955 se juntan esos dos enfoques a la hipótesis del continuo (definibilidad y recursión *versus* jerarquías proyectiva y analítica) pero, en realidad, la situación es la de un desencuentro. Estudiamos el porqué de ese desencuentro y tratamos de explicar algunos de los presupuestos epistemológicos en los que se basa la práctica matemática. Finalmente, en 1955, Kleene y Addison, siguiendo el camino abierto por Mostowski, explican las hondas conexiones entre las jerarquías de la recursión y los conjuntos analíticos. El desarrollo posterior de esa unificación (en la teoría descriptiva de conjuntos) ha proporcionado algunas de las más lúcidas intuiciones acerca del continuo; presentamos un corto resumen de esos últimos trabajos.

1. El intento de demostración de Hilbert de la hipótesis del continuo (1925)

El problema del continuo fue para Cantor uno de los motores principales que impulsaron el desarrollo técnico de las herramientas fundamentales de la teoría de conjuntos. La construcción de la escala de los *alephs*, vía clases ordinales (Cantor 1895-97), y el teorema, equivalente a buena ordenación o al axioma de elección, de que todo cardinal infinito es un aleph (Cantor 1989), fueron en buena medida motivados por la necesidad de precisar el problema del continuo. Si c es el cardinal del continuo (la recta real), Cantor mostró que $c = 2^{\aleph_0}$ y que $c > \aleph_0$. La hipótesis del continuo (HC), proclamada por Cantor, consistió en afirmar que $c = \aleph_1$ (cardinal del conjunto de todos los ordinales enumerables).

Zermelo formula su axiomatización de la teoría de conjuntos (Zermelo 1908) motivado por una revisión crítica de su teorema del buen orden (Zermelo 1904, donde ya se encuentran todos los enunciados básicos que alcanzarán cuatro años después el rango de axiomas). La axiomatización es perfeccionada por [Skolem 1922]. A propósito de la posible demostración o falsación de (HC) dentro de ese sistema axiomático (equivalente a ZF):

> como los axiomas de Zermelo no determinan de manera única el dominio B [un modelo ZF], es muy improbable que todos los problemas de cardinalidad sean decidibles por medio de esos axiomas. Por ejemplo, es bastante probable que lo que se denomina el problema del continuo, a saber, la pregunta de si $2^{\aleph_0}$ es mayor o igual que $\aleph_1$, no sea resoluble sobre esas bases; nada tiene que ser decidido acerca de él. La situación puede que sea exactamente la misma que la del caso siguiente: no es dado un campo no especificado y preguntamos si contiene un elemento x tal que $x^2 = 2$. Esto no está determinado puesto que el dominio [modelo de los axiomas de campo] no es único [Skolem 1922, 299].

La intuición de Skolem será reafirmada por los trabajos posteriores de [Gödel 1940] y [Cohen 1966], quienes demostrarán la independencia de (HC) con respecto a (ZF). Pero el problema no queda zanjado allí. Para la gran mayoría de los investigadores en teoría de conjuntos, el problema se torna en encontrar axiomas plausibles que decidan de la verdad o falsedad de (HC) (ver sección 7).

En 1900, en la famosa lista de problemas que Hilbert había presentado en el Congreso de Matemáticas realizado en París, la hipótesis del continuo aparecía como el primer gran problema abierto de la época. En los 25 años posteriores, a pesar de la emergencia de la lógica de primer orden y las axiomatizaciones de la teoría de conjuntos, pocos avances se realizan para tratar de decidir el problema del continuo.

Se obtienen resultados parciales, siguiendo las investigaciones topológicas iniciadas por Cantor: Cantor (1884) había demostrado que (HC) valía al restringirse a la clase de subconjuntos cerrados de la recta real. Hausdorff (1916) extiende el resultado a la clase de subconjuntos de Borel, Suslin (1917) lo extiende a la clase de los subconjuntos analíticos (ver sección 2). Sin embargo, ninguna de estas aproximaciones intenta *forzar* la demostración (o la negación) de la hipótesis del continuo a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos.

Hacia 1925, el programa de Hilbert alrededor de la teoría de la prueba se hallaba muy avanzado. Hilbert confiaba en ese entonces en poder demostrar la consistencia y la completitud de la aritmética y de la teoría de conjuntos. Su famoso mote, 'Debemos conocer - Conoceremos', permeaba toda su filosofía de la matemática. Para Hilbert [1925, 384] como consecuencia de la esperada completitud de los más importantes sistemas axiomáticos, "todo problema matemático puede ser resuelto. Estamos todos convencidos de ello". En el artículo de 1925, *Sobre el infinito*, Hilbert experimenta con la potencia de su teoría de la prueba: cree demostrar la hipótesis del continuo a partir de una axiomatización de la lógica y de la teoría de conjuntos, en la cual interviene su operador nominal ε, el 'transfinito operador lógico de selección' [Hilbert 1924, 382]. Hilbert cree resolver el problema del continuo estableciendo una correspondencia biunívoca entre las funciones de N en N y los ordinales de la segunda clase (ordinales enumerables). Por tanto, se tendría:

$$\mathbf{N}^{\mathbf{N}} \sim \omega_1 \text{ y } c = \overline{\overline{\mathbf{R}}} = \overline{\overline{\mathbf{N}^{\mathbf{N}}}} = \overline{\overline{\omega_1}} = \aleph_1.$$

Al tratar de establecer la correspondencia anterior, Hilbert trabaja con las posibles *definiciones* de funciones entre números naturales. Debido a la filosofía impenetrable detrás de su programa de trabajo en la teoría de la prueba, cree poder demostrar que todas las funciones de N en N son definibles por medio de *esquemas recursivos*, en los cuales podrían eliminarse todas las apariciones del operador ε (Lema I; [Hilbert 1925, 385]). Es un intento abocado al fracaso, pero se trata de un intento extremadamente rico en ideas, que se revelarán muy fructíferas 30 años más tarde. La historia extremadamente fértil, tanto epistemológica como técnicamente, de la cual este artículo espera revelar algunos de sus más salientes aspectos.

Hilbert trabaja en un lenguaje con símbolos de predicado *Z* y *N* para representar *Z*(*a*): '*a* es un natural' y *N*(*a*): '*a* es un ordinal enumerable'. Introduce dos clases de variables, las 'variables primitivas' (entre las cuales cuenta Z y N) y las 'variables-tipo' (para representar funcionales sobre las variables primitivas). Para,

> las variables-tipo pueden clasificarse de acuerdo a su 'altura'. Entre las de altura 0 incluimos todas las constantes numéricas y entre las de altura 1 todas aquellas funciones cuyos argumentos y valores tienen las propiedades de las variables primitivas, por ejemplo la propiedad Z o la propiedad N. Una función cuyos argumento y valor tienen alturas dadas a y v posee una altura $1 + \max(a, v)$. Una sucesión de funciones de varias alturas dadas posee la altura otorgada por el límite de esas altura [Hilbert 1925, 387]

Con el ejemplo de la función de Ackermann, Hilbert [Ibid., 388], muestra que substitución y recursión (por ahora sólo se piensa en la recursión primitiva) sobre variables numéricas no son suficientes para generar a todas las funciones de N en N. Sin embargo (Lema II), para Hilbert [1925, 391], substitución y recursión sobre variables numéricas y sobre Z-tipos sí generarían N^N. Como resulta, usando la escala ascendente de las alturas, que substitución y recursión sobre Z-tipos sí generan la segunda clase de números (ω_2), se tendrían entonces descripciones matematemáticas comunes para N^N y ω_1 y de ahí se deduciría $N^N \sim \omega_1$

Aunque los dos lemas sobre los que se basa el argumento de Hilbert son falsos, el artículo es notable en la introducción de nuevas ideas: recursión primitiva (en N^N), recursión en tipos superiores (en N^N), definibilidad de funciones y funcionales vía descripciones recursivas, uso de descripciones lógicas para generar correspondencias conjuntistas. La precoz aplicación de esas ideas para tratar de controlar el problema del continuo sólo podría ser recuperada, en parte, 30 años después con los comienzos de la teoría descriptiva y efectiva de conjuntos (ver secciones 6 y 7).

2. Los trabajos de las escuelas rusa y polaca sobre los conjuntos analíticos y proyectivos (1917-1930)

Sierpinski [1950, 28], un testigo de excepción, ha contado cómo se realizó el descubrimiento de los conjuntos analíticos. La escuela empirista francesa de Baire, Borel y Lebesgue, también conocida como semi-intuicionista, sólo aceptaba objetos matemáticos que fueran dados de manera efectiva, determinados sin ambigüedad, que siguieran un proceso definitorio especificado en términos finitos. El arquetipo de tales objetos estaba formado por la clase de los conjuntos borelianos. Estudiando una memoria de Lebesgue, Suslin, discípulo del gran matemático ruso Suslin, descubrió un error que se haría famoso: según Lebesgue toda proyección de un boreliano debía ser también un conjunto de Borel. Suslin (1917) mostró que ése no tenía por qué ser el caso, construyó un contraejemplo y pasó a estudiar la clase, extendida de los conjuntos que resultaban como proyecciones de borelianos: los llamó conjuntos analíticos (pues la memoria de Lebesgue trataba de la representación de las funciones analíticas de variable real). Lebesgue, anteriormente, había definido una función que no pertenecía a la clase de las funciones de Baire, pero su construcción usaba los ordinales de la segunda clase y no satisfacía los criterios semi-intuicionistas. Con la construcción de los conjuntos analíticos, Suslin y Lusin extendieron por primera vez la clase de los conjuntos borelianos adaptándose a las exigencias del semi-intuicionismo francés.

En trabajos posteriores, Lusin [1925, 1927, 1930] construye la jerarquía de los conjuntos proyectivos, iterando las operaciones de proyección y complementación a partir de los conjuntos analíticos. La jerarquía otorga un cierto control para clasificar las definiciones de los conjuntos que se trabajan en análisis; la amplitud de la jerarquía proyectiva la pone de manifiesto Lusin [1927, 90] cuando comenta que, hasta 1924, todos los conjuntos que se habían definido en análisis, para proveer ejemplos de todo tipo, eran todos conjuntos proyectivos. La generación de los conjuntos analíticos vía operación (A) de Lusin (*cf* Kuratowski 1958, 390) y la generación de los conjuntos proyectivos vía complementaciones y proyecciones se constituyen en métodos (semi-intuicionísticamente) efectivos para estratificar la jerarquía proyectiva.

Usando las notaciones y descripción de Sierpinski (1950), los conjuntos analíticos se designan por P_1 y sus complementos por C_1; por inducción, para $n \geq 2$, se definen las clases P_n y C_n por $P_n = \Pi C_{n-1}$ y $C_n = \complement P_n$, donde Π es la operación de proyección y $\complement$ la operación de complementación. Un resultado fundamental es el de que así se obtiene una genuina estratificación:

2.1 (Teorema de la jerarquía) $P_n - C_n \neq \emptyset$ y $P_n - C_n \neq \emptyset$

La idea para demostrar este teorema se debe a Lusin [1925], quien retoma el concepto de conjunto universal debido a Lebesgue [1905] (*cf* [Sierpinski 1950, 6-122]). Un conjunto universal U para una clase de conjuntos lineales Φ es un conjunto plano U que genera precisamente a Φ al tomar intersecciones con una familia de rectas horizontales; el argumento de Lusin para demostrar 2.1 usa el hecho de que, si la familia Φ admite ciertas propiedades básicas de clausura, y D es la recta $y = x$ entonces $\Delta = D \cap U \in \Phi$ mientras que $D - \Delta \in \Phi$, Lusin demuestra luego la existencia de conjuntos universales para (los varios niveles de) la jerarquía proyectiva y obtiene 2.1.

Otros resultados importantes que se obtienen en esos años, y que nos interesan por sus analogías con las jerarquías posteriores de Kleene en la teoría de la recursión, son los siguientes:

2.2. (Representación de los conjuntos P_1) [Lusin 1930] Un conjunto es analítico si y sólo si es imagen continua del conjunto de los números irracionales.

2.3. (Forma normal prenexa) [Kuratowski y Tarski 1931] La jerarquía proyectiva se obtiene mediante la iteración de cinco operadores lógicos ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$) sobre la clase de las 'funciones proposicionales proyectivas'.

2.4. (Teoremas de separación). Dos conjuntos analíticos disyuntos son separables por un boreliano [Lusin 1927]; un conjunto es boreliano si y sólo si es analítico y su complemento es analítico [Suslin 1927].

2.5. (Elección efectiva de un punto en un complementario analítico). [Novikov 1935] Si E es un conjunto analítico cuyo complemento $\complement E$ no es vacío, entonces puede describirse de manera explícita un punto $\in \complement E$.

El primer resultado fundamental que se obtuvo sobre la potencia de los conjuntos analíticos se debe a Suslin [1917]. Suslin muestra que todo conjunto analítico no enumerable contiene un subconjunto perfecto (no vacío) y por lo tanto su cardinal es el continuo: para la clase de los conjuntos analíticos vale la hipótesis del continuo. Gödel [1940, 26] indicará que puede asumirse, sin llegar a contradicciones con los demás axiomas de (ZF), la existencia de complementarios analíticos (conjuntos C_1) no enumerables y sin subconjuntos perfectos. Esto da una idea de la complejidad de los cardinales aún en los niveles más bajos de la jerarquía proyectiva (traigamos a colación el comentario de Hartley Rogers [1967, 322]:

> la mente humana parece limitada en su habilidad para entender y visualizar mas allá de cuatro o cinco alternancias de cuantificadores. En efecto, puede argumentarse que los inventos, subteorías y lemas centrales de variadas partes de las matemáticas son subterfugios para asistir a la mente en el trato de una o dos alternancias de cuantificadores

El encontrar axiomas que *uniformizarán* el comportamiento de la jerarquía se convertirá, en los años 60, después de las intuiciones de Gödel (1947), en uno de los programas más importantes de investigación en la teoría de conjuntos (ver sección 7).

Valiéndose de la hipótesis del continuo, Lusin [1914] había mostrado la existencia de un conjunto lineal de cardinal c cuyas intersecciones con todo conjunto perfecto no denso eran a lo sumo enumerables; de allí pudo deducir la existencia de funciones de Baire no representables analíticamente. Sólo algunos años después, mediante la teoría de los conjuntos analíticos, Lusin podría obviar el requerimiento de la hipótesis del continuo en la construcción de su ejemplo de funciones no representables analíticamente. Muchos otros resultados de Lusin y Sierpinski sobre los conjuntos analíticos dependen crucialmente, en cambio, del uso de (HC) [ver Sierpinski 1934]. Entre el poder deductivo de (HC) y la estructuración de la jerarquía analítica existe un intenso vaivén de informaciones parciales; éstas se han constituido en un preciso caldo de cultivo para afinar la intuición de los 'buscadores de axiomas' que intentan forzar el status de la hipótesis del continuo.

3. La teoría de la recursión y las jerarquías de Kleene (1930-1943)

Herederas en buena medida de la escuela semi-intuicionista francesa, la escuela polaca y la escuela de Lusin se preocuparon siempre por las nociones de efectividad. Sin embargo, las precisiones acerca de lo que debía ser efectivo o definible no pasaron de ser meras indicaciones hasta mediados de los años 1930: se necesitaron los trabajos independientes de Gödel, Herbrand, Church, Kleene y Turing para conseguir adecuadas matematizaciones de lo computable, los trabajos posteriores de Tarski, Mostowski y Grzegorczyk reinsertaron a la escuela polaca en un ámbito más preciso para trabajar las nociones de efectividad que surgían en el estudio de las funciones de variable real (sin embargo, aún en [Kuratowski 1958, 142] se habla de la noción de 'efectividad' como de una noción de naturaleza 'matemática' y se dice que "un teorema de existencia se demuestra de manera *efectiva* cuando se *define* un individuo *a* y se demuestra que *a* satisface el teorema considerado"; la vaguedad acerca de cuáles procesos de definición serían aceptables nunca es elucidada).

Bajo las orientaciones del programa de Hilbert, al intentar demostrar la consistencia y la completitud de la aritmética, Herbrand y Gödel obtienen resultados, tanto positivos como negativos, que tendrán un importante impacto en las formalizaciones matemáticas de la noción de efectividad. Herbrand (1931) y Gödel (1931) reintroducen (independientemente de (Hilbert 1925)) las funciones recursivas: poseen así una amplia clase de funciones que, demuestran Herbrand y Gödel, son representables (definibles) en fragmentos de la aritmética. Mientras que Herbrand logra mostrar la consistencia de un fragmento de la aritmética en el cual se restringe el axioma de inducción, Gödel en cambio demuestra su famoso teorema de incompletitud para las extensiones de la aritmética de Peano. La escuela de Church en Princeton (Church, Rosser, Kleene) prosigue con las investigaciones de Gödel; basándose en la equivalencia de las varias definiciones propuestas para capturar el concepto de 'efectividad' (recursividad (Gödel), λ-definibilidad (Church, calculabilidad (Turing)), Church lanza su famosa tesis: lo efectivamente computable coincide con lo recursivo. Los desarrollos en el ámbito matemáticamente muy rico de la *teoría de la recursión* serán creación, casi exclusiva, de Kleene en una serie de notables trabajos posteriores [1936, 1938, 1943, 1955].

En 1936 (publicado en 1938), Kleene introduce el esquema de minimización y extiende la clase de las funciones recursivas a las parciales recursivas (*cf.* [Kleene 1991, 163]). Una indicación de cómo conceptos que, ahora, nos parecen primordiales y de sobra conocidos, en esa época no lo eran tanto, nos la proporciona Kleene al recordar la escritura de su *Introduction to Metamathematics*: "Recuerdo que, en la primavera de 1940, cuando usé el término 'función parcial recursiva' en una conversación con Gödel, él inmediatamente preguntó '¿Qué es una función parcial recursiva?'" [Kleene 1991, 164]. Los teoremas básicos para el desarrollo estructural de la teoría (forma normal, enumeración, s-m-n) aparecen en Kleene [1938]. Kleene [1959] mostrará que los teoremas anteriores caracterizan a la clase de las funciones parciales recursivas; Wagner [1969] usará la caracterización de Kleene para introducir versiones combinatorias de la computabilidad en dominios abstractos que no tiene por qué poseer equivalentes del sucesor, buen orden o minimización de $\mathbb{N}$.

Situándose dentro de la teoría de la recursión, Kleene [1943] define y estudia la jerarquía aritmética: relaciones definibles en la aritmética (de primer orden) con las relaciones recursivas como parámetros. Σ^0_n es la clase de aquellas relaciones definibles una fórmula en forma prenexa, con matriz recursiva, con n alternancias de cuantificadores en el prefijo y con cuantificador $\exists$ al extremo izquierdo. Π^0_n se define como Σ^0_n pero requiriendo un cuantificador $\forall$ al extremo izquierdo.

$$\Delta^0_n = \Sigma^0_n \cap \Pi^0_n$$

Kleene, usando un argumento diagonal demuestra

3.1 (Teorema de la jerarquía) $\Sigma^0_n - \Pi^0_n \neq \emptyset$, y $\Pi^0_n - \Sigma^0_n \neq \emptyset$

Por construcción, los análogos de 2.3 y 2.5 se tienen en la jerarquía aritmética. Como Δ^0_1 es la clase de los conjuntos recursivos y Σ^0_1 es la clase de los recursivamente enumerables, una primera aproximación analógica entre la jerarquía proyectiva y la jerarquía aritmética podría establecerse reemplazando 'boreliano' por 'recursivo' y 'analítico' por 'recursivamente enumerable'. Sin embargo, ya uno de los teoremas de separación (2.4) no se tendría en la jerarquía aritmética: para todo $n \geq 1$ existen dos conjuntos Σ^0_n disyuntos que no pueden ser separados por un Δ^0_n. Las analogías al nivel de las formas normales y del teorema de la jerarquía no calan en una estructura más honda. Tampoco se posee en la jerarquía proyectiva un análogo al fundamental teorema de Post [1948] dentro de la jerarquía aritmética: el teorema de Post proporciona una reconstrucción puramente recursiva de la jerarquía y demuestra que la recursión relativa (grados) dentro de la jerarquía corresponde a la definibilidad vía añadidura de cuantificadores: Post muestra que una relación es Δ^0_n ssi es recursiva en una relación Σ^0_n (o Π^0_n) y que una relación es Σ^0_{n+1} ssi es recursivamente enumerable en una relación Σ^0_n (o Π^0_n).

Kleene, en sus trabajos hasta el año 1955, estudia la teoría de las jerarquías en el ámbito propio de la recursión. Mostowski y Addison (ver secciones 4 y 6) son los que primero intentan elucidar los rasgos comunes de las jerarquías del análisis y de la teoría de la recursión. El punto de apoyo que permitirá precisar las analogías es la introducción de la *jerarquía analítica* [Kleene 1955] (el nombre es desafortunado pues no tiene conexión directa con los conjuntos analíticos, en inglés se mantiene una ligera diferencia: 'analytic set' *versus* 'analytical hierarchy'). La jerarquía analítica se construye de manera similar a la jerarquía aritmética, pero admitiendo en cambio definiciones a través de fórmulas aritméticas en segundo orden. Las clases

$$\Sigma^1_n,\ \Pi^1_n \text{ y } \Delta^1_n$$

que estratifican a la jerarquía analítica se definen como las clases con superíndice ^{0}, pero permitiendo cuantificaciones sobre símbolos de función y admitiendo matrices no sólo recursivas sino pertenecientes a la jerarquía aritmética. Para las precisas relativizaciones que ocurren entre la jerarquía analítica y la proyectiva, véase la sección 6. Para las incidencias, sobre el problema del continuo, del encuentro entre recursión y teoría descriptiva de conjuntos, véase la sección 7.

4. Topología en el artículo fundamental de Mostowski (1947)

En el curso de la segunda guerra mundial, Mostowski construyó, independientemente de Kleene, la jerarquía aritmética. Una gran diferencia entre esas construcciones consiste en las distintas motivaciones y guías intuitivas que impulsaron a Kleene y a Mostowski en la armazón de sus jerarquías. Para Mostowski es fundamental proceder por analogías con la jerarquía proyectiva; las analogías no sólo no surgen a posteriori sino que, en realidad, impulsan a la creatividad [Mostowski 1947, 340]:

> creo que debido a métodos familiares en la teoría de los conjuntos proyectivos yo obtuve no solamente considerables simplificaciones en las pruebas sino también algunas leves generalizaciones de los resultados. Parece posible desarrollar muy extensamente la teoría de las nuevas clases [las clases aritméticas] sobre el patrón de la teoría de los conjuntos proyectivos. De este tipo de problemas sólo uno será discutido aquí, a saber, el análogo del teorema de Suslin, es decir el teorema de que un conjunto recursivamente enumerable cuyo complemento también es recursivamente enumerable debe ser recursivo.

Además de la indicación anterior, Mostowski hace en su artículo otras siete referencias al papel inductivo de la jerarquía proyectiva en el estudio de los conjuntos definibles de enteros. Desde un punto de vista positivo, para Mostowski, su clase

$$P_0 = Q_0 \quad [= \Delta^0_1]$$

juega el mismo papel que la clase de subconjuntos de Borel en la jerarquía proyectiva [Mostowski 1947, 345]; el uso del método de Kuratowski y Tarski para situar el lugar de un conjunto en la jerarquía proyectiva puede extrapolarse a la jerarquía aritmética [1949, 350]; funciones universales en la jerarquía aritmética juegan el mismo papel que el de los conjuntos universales en la jerarquía de Lusin [1947, 351]; el teorema de Suslin (un conjunto en boreliano ssi es analítico y coanalítico) corresponde al resultado

$$P_1 \cap Q_1 = P_0 \; [\Pi^0_n \cap \Sigma^0_n = \Delta^0_1]$$

[1947, 364]. Mostowski también nota dos discrepancias: la definición de funciones de clase P_n (o Q_m) debe hacerse vía sus grafos y no resulta equivalente hacerlo vía preservaciones bajo imágenes inversas ("la analogía con la teoría de los conjuntos de Borel se rompe aquí") [1947, 361]; por otro lado, Mostowski comenta cómo, aunque un conjunto A sea P_0 y f sea una función P_0, $f(A)$ no tiene por qué ser P_0 (ni aún si f es 1-1). "Vemos aquí otra discrepancia entre nuestra teoría y la teoría de los conjuntos de Borel" [1947, 363]. El artículo concluye con una nota añadida en pruebas [1947, 370]:

> *Nota.* Este artículo estaba en el proceso de impresión cuando un interesante artículo de S. C. Kleene [1943] resultó disponible en Polonia. Una parte considerable de la teoría aquí desarrollada puede encontrarse en el artículo de Kleene. Me parece sin embargo que algunos de mis resultados son nuevos y que mi presentación de la teoría, basada en analogías con la teoría de los conjuntos proyectivos, puede ser de algún interés para el lector matemático. El profesor A. Tarski me ha informado que él también encontró en 1942 resultados muy similares a los míos.

5. Excursus: acerca de algunos presupuestos epistemológicos de la práctica matemática

En la cita anterior, Mostowski habla de los intereses del lector matemático. En un artículo sobre fundamentos y lógica, como es el de Mostowski, era legítimo en esa época, y desgraciadamente aún lo es a menudo hoy en día, preocuparse por involucrar al 'working mathematician'. Resultaba muy patente el divorcio entre lógica y matemáticas; como menciona Dieudonné en su prefacio a las obras de Albert Lautman [1947],[1] era difícil en los años 1920-1930 tener una visión extensa y precisa de las matemáticas, que se elevara más allá de la práctica cotidiana cobijada en las muchas y estrechas especializaciones (claro, es aún más difícil ahora obtener esa extensa y precisa visión). Uno de los grandes méritos de Mostowski [1947] es precisamente el haber logrado superar las barreras que se erigían entre la aritmética y el análisis, y realizar así, muy concentrante, un paso más en la incipiente unificación de las matemáticas.

La escuela polaca, alrededor de sus trabajos en lo que se terminaría por llamar *teoría de modelos*, tuvo siempre que tener presente la honda unidad de las varias disciplinas matemáticas. La progresiva liberación de las matemáticas, que pasa de ser una ciencia revelada, supuesta poseedora de una verdad única, a ser una ciencia construida, que llega a definir y comparar varias verdades, es muy patente en esos años. Así como la definición recursiva de la verdad propuesta por Tarski

---

1 Los textos originales de Lautman son de 1937 y 1939. Lautman puede considerarse, sin duda, como el más profundo filósofo de las matemáticas que ha producido nuestro siglo. Otros grandes filósofos como Russell o Quine son filósofos que se ocupan de la lógica y de los fundamentos de las matemáticas. Nadie se ha ocupado como Lautman de los presupuestos filosóficos de la matemática moderna en acción: topología, geometría diferencial, teoría algebraica y analítica de números, estructuras algebraicas, ecuaciones diferenciales, variable compleja, etc.

es un paso decisivo hacia esa liberación, los trabajos alrededor de la hipótesis del continuo [Sierpinski 1934] y el comienzo de elucidación de las analogías entre las jerarquías aritmética y proyectiva [Mostowski 1947] también se sitúan en esa línea de liberación. Resulta, gracias a esos trabajos, que los conjuntos no poseen sólo propiedades extrínsecas que el matemático debe 'descubrir', sino que también son muy susceptibles a la manera en que 'se los mira': procesos de definibilidad y descripción que alteran el status de los conjuntos dependiendo del poder admitido en las descripciones.

Entre 1925 y 1955, se sitúa el desencuentro de las dos líneas naturales que convergerían, produciendo notables frutos, en la *teoría efectiva y descriptiva* de conjuntos de Addison (ver secciones 6 y 7). Recursión y efectividad, por un lado, caminan paralelas, sin ofrecer puentes al 'working mathematician'. Las intuiciones de Hilbert, Lusin y Sierpinski, las primeras evidencias conseguidas por Mostowski, representan un magro botín para las grandes posibilidades de esas décadas. Creemos que ese desencuentro expone, con detalles precisos, el duro divorcio que matemáticas y lógica apenas en esos años empezaron a superar (el mérito de esa superación, o liberación de férreos presupuestos, se lo debemos, en gran medida, a la escuela polaca). A su vez, creemos que ese desencuentro muestra la prevalente actitud del matemático especialista del que hablaba Dieudonné; sólo al final del período que consideramos es cuando surgen las visiones unitarias que nos ofrecen la sistematización de la teoría de modelos, la escuela Bourbaki o la escuela norteamericana en teoría de categorías. A comienzos de los años 1950 cambian algunos paradigmas fundamentales en la conciencia del hacer matemático. Las peripecias que hemos recorrido, alrededor del problema del continuo y de los problemas de definibilidad, pueden verse como cristalizaciones de una ruptura epistemológica mucho más profunda.

6. La sistematización, por Addison, de las analogías entre las jerarquías de Lusin y de Kleene-Mostowski [1955]

Addison, alumno de Kleene en Wisconsin, realiza la serie definitiva de los trabajos [Addison 1954, 1955, 1959, 1959a] que demuestran que las jerarquías clásicas del análisis pueden obtenerse como relativizaciones de las jerarquías recursivas. Es de notar que [Addison 1959, 1959a] son publicados en los *Fundamenta Mathematicae*: el círculo se cierra de manera natural en Polonia. Leemos en [Addison 1955, 75]

> Moschovakis utilizó una analogía con la jerarquía proyectiva sobre la línea real para desarrollar la jerarquía de Kleene sobre el conjunto de los números naturales. Una imperfección en esta analogía fue luego descubierta. Se muestra que existe luego una analogía sin esta imperfección entre la jerarquía de *Borel* en $\mathbb{R}$ y la jerarquía de Kleene en N [...] Muchos teoremas paralelos, incluyendo teoremas de separación, acerca de las jerarquías de Borel y de Kleene en N^N se demuestran con pruebas esencialmente idénticas. Cambiando sistemáticamente unos pocos símbolos, estas pruebas se aplican también a la jerarquía de Kleene en N.

Dado un conjunto $C \subset N^k$ se pueden considerar jerarquías de predicados que son aritméticos o analíticos (en el sentido de la teoría de la recursión) en un número finito de funciones de C. Addison mostró que la N^N-jerarquía analítica correspondía a la jerarquía finita de Borel y que la N^N-jerarquía analítica corresponde a la jerarquía proyectiva. De manera precisa, Addison mostró que la teoría clásica descriptiva de conjuntos podía obtenerse por relativización a partir de las jerarquías de Kleene, usando las siguientes traducciones (*cf.* [Odifreddi 1989, p. 393]):

función recursiva	Función continua
conjunto r.e.	conjunto abierto
conjunto hiperaritmético	conjunto de Borel
conjunto Σ^1_1	conjunto analítico
conjunto analítico	conjunto proyectivo

Los términos del lado izquierdo son las versiones efectivas de los del lado derecho. Addison mostró que las versiones efectivas son más fuertes y que implican a las correspondientes versiones clásicas.

7. Los aportes posteriores de la teoría descriptiva y efectiva de conjuntos para esclarecer el problema del continuo

Después del prematuro intento de Hilbert [1925], el primer axioma que se construyó para decidir el problema del continuo fue el *axioma de constructibilidad* de Gödel. En una reseña acerca de la prueba de Gödel sobre la consistencia de la hipótesis del continuo, Bernays [1940, 118] anotaba: "El razonamiento de Gödel puede considerarse como una manera de modificar el proyecto de Hilbert para probar la hipótesis del continuo, al volverlo practicable, y a su vez, generalizable a las potencias mayores". Gödel, en una carta a van Heijenoort (*cf.* [van Heijenoort 1967, 369]), precisa mejor algunas diferencias

> Existe una analogía remota entre el Lema II de Hilbert y mi teorema 12.2 [Gödel 1940, 88] para α = 0. Existe sin embargo una gran diferencia. Hilbert considera sólo definiciones estrictamente constructivas e iteraciones transfinitas de las operaciones definidas sólo hasta los ordinales constructivos, mientras que yo admito, no sólo cuantificadores en las definiciones, sino también iteraciones de las operaciones definidas hasta cualquier ordinal, no importa de qué manera haya sido definido. El término 'conjunto construible', en mi prueba, sólo está justificado en un sentido muy débil, sólo en el sentido de 'relativamente a los números ordinales', donde éstos no están sujetos a condiciones de constructividad. Fue exactamente al mirar la situación desde este altamente transfinito, conjuntista punto de vista que, en mi enfoque, las dificultades pudieron ser vencidas y una prueba de consistencia finitaria y relativa pudo obtenerse.

La insistencia, en la cita anterior, de que se trata de una prueba relativa es muy importante. El mismo Gödel nunca creyó en la plausibilidad de su axioma de constructibilidad, en el clarividente [Gödel 1947] se insiste en la búsqueda de nuevos axiomas que decidan de la *falsedad* de la hipótesis del continuo. Uno de los argumentos extrínsecos que los investigadores en teoría de conjuntos consideran como decisivos para descartar la naturalidad del axioma de constructibilidad, lo otorgan las poco agradables consecuencias del axioma sobre el comportamiento de la jerarquía proyectiva. En efecto, Addison [1959] demostró que, bajo el axioma de constructibilidad, tres propiedades fundamentales de la jerarquía (reducción, uniformización, separación (*cf.* [Martin 1977, 803])) no se distribuyen alternadamente a lo largo de los niveles de la jerarquía. Si los criterios de simetría y dualidad en la jerarquía proyectiva son deseables, y son signo de adecuada naturalidad para los axiomas que fuercen esa simetría (esos criterios son los que guían muchas de las investigaciones en teoría de conjuntos), entonces el axioma de constructibilidad no parece 'cierto'.

La línea de ataque más prometedora para decidir de la falsedad de la hipótesis del continuo está asociada con el *axioma de determinación* (*cf.* [Maddy 1988, 736ss]). Este es un axioma que codifica una propiedad de regularidad para conjuntos de números reales (que implica, como consecuencias, por ejemplo, para todos los subconjuntos de reales, la medibilidad Lebesgue y la propiedad de Baire); es contradictorio con el axioma de elección. Para muchos, el axioma de determinación es demasiado fuerte: en vez de determinar *todos* los subconjuntos de **R**, se consideran más naturales hipótesis de determinación para clases más restringidas de subconjuntos. Dentro de la teoría de conjuntos usual (ZF + axioma de elección), Gale y Stewart [1953] demostraron la determinación de la clase de los abiertos y sorprendentemente para la comunidad matemática de ese entonces - Martin [1975] demostró la determinación de la clase de los conjuntos de Borel. Se demostró posteriormente que la determinación de clases más amplias de conjuntos se encuentra más allá del poder de (ZF).

La búsqueda de un submodelo natural de la teoría de conjuntos, que contuviera a los números reales y en el cual el axioma de determinación relativizado estuviera cerca de valer, ha llevado a los investigadores a trabajar con el modelo $L[\mathbb{R}]$. El axioma de *cuasi-proyectiva determinación* (QPD) pide que la clase de todos los subconjuntos reales en $L[\mathbb{R}]$ esté determinada. Una de las mayores evidencias extrínsecas de la Plausibilidad de (QPD) la otorgan sus 'bondadosas' consecuencias en la jerarquía proyectiva. Se ha demostrado que (QPD) no puede decidir el problema del continuo; sin embargo, una gran proliferación de cardinales en $L[\mathbb{R}]$, bajo la hipótesis (QPD), hace pensar que la hipótesis del continuo pueda ser falsada por algún axioma similar (para mucha información adicional sobre este tema véanse Maddy [1988], Martin [1977] y Foreman [1988]). A pesar de la enorme cantidad de resultados y teorías parciales a que ha dado lugar en los cien años que van desde su planteamiento, la complejidad del problema del continuo sigue siendo gigantesca. Como comenta Martin [1976, 90]:

> Aquellos que argumentan que el concepto de conjunto no es lo suficientemente claro para fijar el valor de verdad de la hipótesis del continuo, se encuentran en una posición difícil de rebatir en el momento presente. Mientras no encontremos un nuevo axioma que decida (HC), su posición se afirmará con más fuerza, y nuestra afirmación de que el sentido de (HC) es claro sonará más y más vacía.

Referencias

ADDISON, J. W. 1954. On some points of the theory of recursive functions. Ph. D. Thesis, University of Wisconsin.

________. 1955. "Analogies in the Borel, Lusin and Kleene Hierarchies I, II". *Bull. Amer. Math. Soc.* 61 (reports 139, 341).

________. 1959. "Some consequences of the axiom of constructibility". *Fund. Math.* 46: 337-357.

________. 1959a. "Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory". *Fund. Math.* 46: 123-135.

ADDISON, J. W. y MOSCHOVAKIS, Y. N. 1968. "Some consequences of the axiom of definable determinateness". *Proc. Nat. Acad. Sci.* 59: 708-712.

BERNAYS, P. 1940. Reseña. *Journal of Symbolic Logic* 5: 117-118.

CANTOR, G. 1884. "Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten 6". *Mathematische Annalen* 23: 453-488.

________. 1895-97. "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre I, II". *Mathematische Annalen* 46: 481-512, 49: 207-246.

____ 1899. "Letter to Dedekind", en van Heijenoort 1967, 113-117.

COHEN, P. J. 1966. *Set theory and the continuum hypothesis*. W. A. Benjamin Inc., Reading.

FOREMAN, M. 1988. *The constructive continuum hypothesis*. Preprint, Union College Set Theory Conference.

GÖDEL, K. 1931. *On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I*, en: [Gödel 1986, I, 126-195]

____ 1940. *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis*, en: Gödel 1990, II, 1-101

____ 1947. *What is Cantor's Continuum Problem?*, en Gödel, II, 1990, 154-188

____ 1986. *Collected Works* Vol I. Oxford University Press, New York.

____ 1990. *Collected Works* Vol II. Oxford University Press, New York.

HAUSDORFF, F. 1916. "Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen". *Mathematische Annalen* 77: 430-437

HERBRAND, J. (1931). "*On the consistency of arithmetic*", en (van Heijenoort 1967, 618-628). Harvard University Press, Cambridge, 1967.

HILBERT, D. 1925. "On the infinite", en van Heijenoort 1967, 367-392.

KLEENE, S. C. 1936. "General recursive functions of natural numbers". *Math. Ann.* 112: 727-742.

KLEENE, S. C. 1938. "On notations for ordinal numbers". *Journal of Symbolic Logic* 3: 150-155.

____. 1943. "Recursive predicates and quantifiers". *Trans. Amer. Math. Soc.* 53: 41-73.

____ 1955. "Arithmetical predicates and function quantifiers". *Trans. Amer. Math. Soc.* 79: 312-340

____ 1959. "Recursive functionals and quantifiers of finite types I". *Trans. Amer. Math. Soc.* 91: 1-52.

____. 1991. "The writing of introduction to Mathematics" en: *Perspectives on the History of Mathematical Logic* (161-168). Birkhauser, Boston.

KURATOWSKI, K. y TARSKI, A. 1931. "Les opérations logiques et les ensembles projectifs". *Fund. Math.* 17: 2240-248.

LAUTMAN, Albert. 1977. *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, 10/18, Paris.

LEBESGUE, H. 1905. "Sur les fonctions représentables analytiquement". *J. de Math.* 1: 139-216.

LUSIN, N. 1914. Note (4 Mai), C. R. Paris 158 (1259).

____. 1925. *Sur les ensembles Projectifs de M. Henri Lebesgue*. C. R. Paris 180 (1570).

____ 1927. "Sur les ensembles analytiques". *Fund. Math.* 10: 1-95.

____ 1930. *Leçons sur les ensembles analytiques*. Gauthier-Villars, Paris.

MADDY, P. 1988. "Believing the axioms I, II". *Journal of Symbolic Logic*. 53: 481-511, 736-764.

MARTIN, D. A. 1976. "Hilbert's first problem: the continuum hypothesis" en: *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*. 28: 81-92

____ 1977. "Descriptive set theory: projective sets" en: *Handbook of Mathematical Logic* (784-815), North-Holland, Amsterdam.

MOSTOWSKI, A. 1947. "On definable sets of positive integers" en: Mostowski 1979

____ 1979. *Foundational Studies - Selected Works*. I: 339-370. North-Holland, Amsterdam.

NOVIKOV, P. 1935. "Choix effectif d'un point dans un complémentaire analytique arbitraire, donné par un crible". *Fund. Math.* 25: 559-560

ODIFREDDI, P. 1989. *Classical Recursion Theory*. North-Holland, Amsterdam.

POST, E. 1948. "Degrees of recursive unsolvability". *Bull. Amer. Soc.* 54: 641-642.

ROGERS, H. 1967. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. MIT Press paperback edition (1987), MIT Press, Cambridge.

SIERPINSKI, W. 1934. *Hypothèse du Continu. Monografie Matematyczne*. Tomo 4. Varsovia.

——— 1950. *Les ensembles projectifs et analytiques*. Gauthier-Villars, Paris.

SKOLEM, T. 1922. "Some remarks on axiomatized set theory", en: van Heijenoort, 1967, 290-301.

SUSLIN, M. 1917. "Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis". *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* 164, 88-91.

VAN HEIJENOORT, J. 1967. *A source book in the mathematical logic. 1879-1931*. Harvard University Press, Cambridge 1967.

WAGNER, E. G. 1969. "Uniformly reflexive structures: on the nature gödelizations and relative computability". *Trans. Amer. Math. Soc.* 144, 1-41.

ZERMELO, E. 1904. "Proof that every set can be well-ordered", en: van Heijenoort 1967, 139-141.

——— 1908. "Investigations in the foundations of set theory I", en: van Heijenoort 1967, 199-215.

Fernando Zalamea (1959, Bogotá) es profesor asociado en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia. Ph. D. (1991) de la Universidad de Massachusetts (Recursión en Categorías). Ensayista (libro sobre Bajtin) y crítico cultural (reseñas semanales en la prensa colombiana). Dirige, desde 1992, un Seminario de Historia de la Lógica Matemática.