Lo que son y lo que no son los números: nota introductoria al célebre artículo de Benacerraf

Francisco Rodríguez Consuegra

En historia de la filosofía se aplica a veces un criterio para evaluar la importancia de un autor o de una obra que, aunque a primera vista parece intrínsecamente injusto, pues es compatible incluso con autores equivocados y con obras erróneas, sin embargo suele llevar a buenos resultados. El criterio es el de hacer esa importancia directamente proporcional a la de la influencia ejercida, que es fácilmente medible atendiendo a la consideración merecida a los ojos de filósofos contemporáneos y posteriores. Si nos limitamos a la filosofía de tradición analítica, y dentro de ella a los temas relacionados con la filosofía de la matemática, podríamos citar algunos artículos que han sido extraordinariamente importantes, a la luz del criterio mencionado. Por ejemplo, "Sobre sentido y referencia" (1892), de Frege; "Sobre la denotación" (1905), de Russell; o "Dos dogmas del empirismo" (1951), de Quine. Cada uno de ellos ha desatado verdaderos torrentes de tinta, tanto en otros artículos como en numerosos libros, así como aplicaciones sistemáticas de carácter metodológico, que han dado a veces lugar incluso al nacimiento de escuelas de pensamiento.

El artículo "Qué no podrían ser los números" (1965), de Paul Benacerraf, del que se publica una traducción en este número de *Mathesis*, es claramente uno de esos artículos, que, algo incomprensiblemente, no estaba aún vertido a nuestra lengua. En el período transcurrido desde su publicación han aparecido varias docenas de artículos en los que, directa o indirectamente, se discuten sus tesis principales, que se han abordado también en numerosos libros más o menos recientes. Asimismo, hay toda una floreciente escuela de pensamiento en filosofía de la matemáti-

Mathesis 9 (1993) 309-315

ca, el "estructuralismo", entre cuyos proponentes podemos citar a Michael Resnik y Stewart Shapiro, que es en algún grado obviamente heredera de las ideas que Benacerraf expresó en el trabajo aludido. El profesor Benacerraf ha hecho otras valiosas aportaciones, en el campo de la filosofía de la matemática, que han ejercido también influencia. Un ejemplo de su importancia puede verse fácilmente sin más que echar una ojeada al número 68 de la revista *Crítica* (vol. XXIII, agosto de 1991), íntegramente dedicado a su estudio.

En ese número se publicó un largo trabajo (pp. 7-86) del presente autor, titulado "Números, objetos y estructuras", cuyo contenido podría resumirse diciendo que su objetivo principal era llevar a cabo una exposición crítica del célebre artículo, señalando brevemente sus antecedentes, destacando sus logros, problemas e insuficiencias básicos, seguida de un estudio destinado a evaluar las principales críticas a que ha sido sometido, así como de un marco histórico donde una nueva crítica global cobraba sentido. Por último, se estudiaba un posible nexo con la filosofía estructuralista de la matemática, resultado parcial de la influencia de Benacerraf. Permítaseme resumir aquí el contenido de aquel artículo.

En las secciones 2 y 3 se muestra que los antecedentes "objetivos" fundamentales de las ideas de Benacerraf son Quine, junto a Parsons y el nominalismo de Goddard, señalando también algunas diferencias importantes entre ellos. Se estudia entonces el rechazo de Benacerraf de la identificación entre números y objetos y su sustitución por las progresiones, en el marco del típico argumento quineano del polimorfismo conjuntista, así como su difícil teoría de la identidad, todo ello falto de un contexto ontológico claramente relativista. Su reducción de los números a posiciones en una progresión se sitúa en un debate ya antiguo entre lo cardinal (Frege, Cantor, Russell) y lo ordinal (Dedekind, Peano), que da paso a un estructuralismo en ciernes, aunque a mi juicio carente de la suficiente justificación. Una muestra de mis críticas a la línea de Benacerraf puede ser la siguiente (*ibid.*, pp. 26-28):

> decir que los números no son ni pueden ser más que lugares en una progresión es identificar la aritmética con la aritmética de Peano, o sea con la estructura abstracta que rige todas las progresiones, entendidas éstas de cierta forma. Al mismo tiempo, negar que los números puedan tener otras propiedades distintas de las de ser un lugar en una progresión es olvidar que podemos también construirlos primeramente en términos de clases de clases, con lo que podrían ser *objetos* en esta nueva teoría.
>
> En la misma línea, podría también argumentarse que la aplicación del compromiso ontológico de Quine es incoherente. Si ser es ser el valor de una variable, o, en otros términos, si lo que algo es queda determinado sólo por la estructura cuantificacional que determina qué huecos dejan si-

> tio para que a ciertos objetos se les apliquen ciertos predicados, entonces decir, como hace Benacerraf, que ser un número determinado es sólo tener ciertas relaciones con otros números, no es más que presuponer, una vez más, que no hay más teoría que la ordinal. Habría, más bien, que decir que cualquier teoría que cuantifique sobre números es una teoría en la que los números son objetos. Por tanto cuando Frege y Russell, dentro de su teoría logicista, construían los números de forma que tales y cuales propiedades se les podían atribuir coherentemente, entonces estaban, *eo ipso*, determinando que los números son cierto tipo de objetos.
>
> No cabe duda de que Benacerraf, con su énfasis en la estructura ordinal como lo característico de los números naturales, ha hecho mucho por una postura general estructuralista (...). Pero unas cuantas referencias históricas al respecto hubieran hecho el célebre artículo mucho menos confundiente para sus lectores, entre otras cosas porque posturas parecidas habían sido ya defendidas mucho antes del Quine de 1960a [*Palabra y objeto*]. Por otra parte, una cierta consideración hacia la masiva construcción global de Frege y Russell, enmarcada en un contexto logicista global, y por tanto no limitado a ofrecer una definición de número natural, habría hecho posible un contexto histórico mucho más aceptable.
>
> En consecuencia, la conclusión de que los números no son objetos peca de la misma falta que Benacerraf cree poder atribuir a quienes defienden ésta o aquélla reducción conjuntista concreta. Por eso su última tesis, a saber que no hay números y también numerales de los que los primeros serían referencia, sino sólo numerales, no es convincente. A menos, claro está, que se articule de alguna forma con lo anterior, como por ejemplo en Goddard (...), cosa que Benacerraf no hace, aparte de su insistencia en el contar tal y como la he descrito más arriba. Pero tal recurso, como ya dije también, no puede ejercerse de forma independiente de una teoría global en la que se establezca alguna relación clara entre el contar (en sus dos modalidades [el transitivo y el intransitivo]), el orden, la correspondencia biunívoca, el número natural y el par finito-infinito.

En las secciones 4 y 5 de mi artículo se hace un estudio valorativo de las críticas que me parecen más certeras, o más ilustrativas de los problemas subyacentes. Entre ellas, se pasa revista a lo más relevante de la literatura: Steiner, Resnik, Maddy, Wright y Hale, junto a un número de artículos de la enorme cantidad que sobre este punto ha aparecido en los últimos veinte años. Se trazan líneas comunes, mostrando posibles defensas de Benacerraf, aunque señalando de nuevo las carencias de su postura, procedentes de sus problemas pendientes (el marco histórico, la ontología indefinida, el estructuralismo en ciernes, etc.).

En la sección 6, y partiendo del problema del contar, eje del trabajo de Benacerraf, se presenta un excursus histórico donde se muestra que el problema señalado más arriba (lo cardinal frente a lo ordinal) puede verse como centro de las dificultades señaladas. Se compara la teoría de Dedekind-Peano con la de Cantor, señalando las ventajas epistemológicas y las constructivas de la segunda. Se muestra la forma en que posturas muy afines a la de Benacerraf fueron ya mantenidas por Cassirer y Weyl (¡sin contar a Berkeley!), al tiempo que el enfoque cantoriano de Couturat y Russell se muestra como superior, al menos desde el punto de vista de una concepción filosófica global. Por último, se señala el nexo entre construcción y el polimorfismo, problema común en lógica, matemática y física.

Finalmente, en la sección 7 se trazan los antecedentes del estructuralismo de Resnik y Shapiro en el propio Benacerraf y se extiende el rastreo histórico a los ordinalistas, Bourbaki y Quine, tratando de arrojar alguna luz al problema de fondo: la supuesta antítesis entre términos y relaciones (ya familiar a Bradley y Russell). Por otro lado, se intenta un paralelismo con el relativismo de las entidades matemáticas tal y como éste aparece tras las limitaciones de la axiomatización, al menos de primer orden. El artículo finaliza con un ensayo de inserción del tema en la teoría de categorías, que sorprendentemente no ha sido todavía considerada por los estructuralistas, a pesar de que a todas luces se trata de una extensión natural de su punto de vista.

Remito al lector interesado en los detalles de mi artículo a la versión completa, ante la imposibilidad de desarrollar aquí sus argumentos o aludir siquiera a la larguísima bibliografía pertinente. (Para el contexto quineano del que partió Benacerraf puede verse también mi trabajo ''La reducción ontológica y sus problemas'', *Crítica* 70 (1992) 17-64).

Quisiera terminar esta nota refiriéndome a uno de los pocos trabajos que, por diferentes razones, no pude tener en cuenta en mi artículo. Se trata de ''That numbers could be objects'', de Linda Wetzel, publicado en *Philosophical Studies* 56 (1989) 273-292. La razón de ello es que en él se encuentran excelentes presentaciones y análisis de los argumentos de Benacerraf, seguidos de argumentos paralelos que parecen estar implícitos en los anteriores, y que a juicio de la autora son manifiestamente incorrectos. Wetzel divide sus análisis en dos partes: lo que llama el argumento ''reduccionista'' de Benacerraf, (cuya conclusión, que los números no son objetos, se apoya en la multiplicidad de reducciones conjuntistas) y a su argumento ''estructuralista'' (con la misma conclusión pero dependiendo ahora de la supuesta carencia de propiedades no ''estructurales'' de los números). Me limitaré en lo que sigue al aspecto reduccionista, que ejemplifica muy bien los métodos de Wetzel.

El argumento de Benacerraf es, en la síntesis de la autora, el siguiente (una vez simplificado para mis propósitos)

- La aritmética de Peano tiene infinitos modelos en la teoría de conjuntos, por ejemplo el de Zermelo y el de von Neumann, que se presentan como explicaciones de los números.

- Hay tres posibilidades: (a) ninguna de tales explicaciones es correcta; (b) sólo una lo es; (c) varias, o todas, lo son.
- Si varias de las explicaciones fueran correctas, un número dado serían igual a conjuntos diferentes, lo cual es falso, por lo que se rechaza la posibilidad (c).
- Si la posibilidad (b) fuese la buena, deberíamos poder dar razones para preferir la correspondiente explicación sobre las otras, lo cual no es posible, aparte de preferencias estilísticas.
- Por tanto, sólo queda (a): ninguna de las explicaciones conjuntistas es correcta. Así, los números no son conjuntos.

El problema estaría, según Wetzel, en la extensión de Benacerraf de este argumento hasta concluir que, visto lo anterior, los números no son objetos, lo cual viene a ser equivalente a decir que los números no existen.

Pero semejante extensión no se hace explícita en el artículo de Benacerraf, así que la autora nos propone la siguiente.

- La aritmética de Peano tiene muchos modelos, incluso fuera de la teoría de conjuntos.
- O varios de ellos son correctos, o sólo uno, o ninguno lo es.
- Varios no pueden ser correctos, porque son incompatibles.
- Si sólo uno fuese correcto, deberíamos poder explicar la razón, lo cual no es posible dado que cada uno funciona tan bien como los demás.
- Por tanto, los números no son objetos de ningún tipo.

Detalles aparte, Wetzel declara falsa la cuarta premisa, bajo el argumento de que si, por ejemplo, estamos hablando de modelos en los números naturales mismos, entonces el modelo estándar es claramente preferible a otros, por ejemplo al de los números pares o al de los impares. Además, el modelo estándar hace posible que podamos introducir los otros dos. De forma similar, si modificamos la primera premisa limitando los modelos a subconjuntos de los naturales, entonces la cuarta premisa sería verdadera, pero no podríamos extraer la misma conclusión, que es mucho más general.

Wetzel lleva a cabo la misma maniobra examinando lo que ocurriría si la primera premisa se limitara al dominio de los objetos físicos, así como al de las expresiones. Con ello, aunque podríamos concluir, respectivamente, que los números no son objetos físicos ni expresiones, la generalidad de la conclusión buscada nos seguiría vedada, pues los números podrían todavía ser otro tipo de objetos. Su conclusión es entonces aplastante. Benacerraf debería haber ofrecido una lista de todas las posibilidades, más un argumento según el cual tal lista sería exhaustiva. Sólo con ello la correspondiente serie de argumentos llevaría a la conclusión de que los números no pueden ser objetos de ningún tipo. Sin embargo, ni la lista ni el argumento aparecen en el artículo original. Por tanto los números continúan pudiendo ser objetos.

La conclusión de nuestra autora es, así, similar a la extraída en la cita de mi artículo reproducida más arriba: el quid de la cuestión está precisamente en el manejo inaceptable, por parte de Benacerraf, de la noción de objeto, que se ve sometida a ciertas fluctuaciones. Como decía yo en la cita, si una teoría declara objetos a los números, entonces los números son objetos en ella. Wetzel señala, acertadamente, que incluso con el tipo de argumentos negativos de Benacerraf podemos alcanzar la misma conclusión, sin más que admitir, en la lista de dominios generadores de los correspondientes argumentos, a los números mismos. Naturalmente, nadie podría demostrar que los números no son números. Por tanto los números seguirían pudiendo ser objetos después de todo.

Finalmente, quisiera también romper una lanza a favor del artículo de Benacerraf. El hecho de que casi todo lo dicho aquí sobre él haya sido negativo no debe hacer pensar que estemos ante un artículo falto de valor. Primero porque, si recordamos el criterio que sugerí al principio de esta nota, muchas veces la valía de un trabajo radica sobre todo en la influencia ejercida, y en este sentido la ejercida por éste ha sido realmente masiva. Segundo, porque la lectura y estudio de su contenido son extraordinariamente ilustrativos del tipo de problemas y razonamientos que son frecuentes en la filosofía de la matemática. Y tercero porque su línea principal de razonamiento se inserta en una tendencia, que puede considerarse básica en la filosofía de la ciencia contempóranea, y que podríamos caracterizar como la tendencia "modelista", o "semántica".

En ella lo importante no es tanto la "esencia" de los "objetos" considerados, como las posibilidades de proyectar, o modelar, unas estructuras, o unos lenguajes, en otras/os. Una de las consecuencias principales del nuevo punto de vista es que muchos problemas ya no se ven como problemas de "reducción" de unos objetos a otros, supuestamente más "originarios", lo cual era la característica básica del enfoque fundacionalista y *absolutista*, sino que tales problemas se vuelven más abstractos y generales, permitiendo la búsqueda de soluciones *relativas* a propósitos determinados, que se consideran tan aceptables como otras, más convenientes a otros propósitos. En el mismo sentido, la nueva actitud semántica permitió dejar de contemplar la lógica misma como un "lenguaje universal" irrebasable e inescapable, al viejo estilo de Frege, Russell y el primer Wittgenstein, y hablar de diversas "lógicas", relativas a diversos "lenguajes", que se escogían por sus virtudes de cara a determinados fines.

Puesto que el artículo de Benacerraf acerca, de forma instructiva, práctica y amena a tales tendencias contempóraneas, su estudio debe considerarse como altamente recomendable.

Francisco Rodríguez Consuegra es doctor en filosofía por la Universidad de Barcelona. Ha enseñado filosofía en España desde 1978 y actualmente es miembro del Departamento de Lógica, Historia y Filosofía de la Ciencia de la Universidad de Barcelona. Sus publicaciones incluyen más de treinta artículos en diversas revistas de varios países, y su libro *The mathematical philosophy of Bertrand Russell: origins and development*. Estuvo como Visiting Fellow durante el curso 1989-1990 en la Universidad McMaster (Canadá) y en 1993 en la Universidad de Harvard. Actualmente desarrolla varios proyectos, entre ellos un libro para la Synthese Library sobre problemas de ontología relacional y otro dedicado a la filosofía de las matemáticas de Kurt Gödel, en el qüe se recogerán diversos manuscritos inéditos traducidos al castellano.