

El *De Numeris Datis* de Jordanus Nemorarius como sistema matemático de signos

Luis Puig

Resumen

El libro de Jordanus Nemorarius *De Numeris Datis* es un texto precioso para examinar la historia de las ideas algebraicas al estar situado en el Occidente cristiano, en el siglo XIII, poco después de la llegada de los libros de al-Khwārizmī y antes de la reaparición de *La Aritmética de Diofanto*.

En este artículo presento una descripción de una parte del *De Numeris Datis* desde la perspectiva de una teoría semiótica de las matemáticas que pretende mostrar las características del sistema matemático de signos (SMS) en que está escrito ese texto, cómo configura tal SMS los objetos de los que trata y qué operatividad tiene sobre ellos. Además, esa descripción está hecha en otro(s) SMS(a), lo que, junto con la consideración de qué problemas se plantean, cómo se plantean y cuáles son los mecanismos que se descomponen para su resolución, permite precisar en qué sentido el SMS en el que está escrito *De Numeris Datis* se ve desde el SMS del álgebra simbólica como menos abstracta.

Abstract

The book *De Numeris Datis* by Jordanus Nemorarius is a precious text to examine the history of algebraic ideas due to its place in the Middle Ages, in the Christian Science, just after the translation of al-Khwārizmī's books and before the rediscovery of Diofanto's *Arithmetica*.

In this paper I present a description of a part of *De Numeris Datis* from a semiotic theory of mathematics that attempts to show which are the characteristics of the mathematical sign system (MSS) in which it is written, how this MSS shapes the objects it allows to speak of, and the kind of operativity the MSS has on the objects

expressed in it. Moreover, this description is made in another MSS(s), and this fact, and the taking into account of which problems are posed to solve, how they are posed and the mechanisms that are produced to solve them, allows to precise in which sense the MSS of *De Numeris Datis* is seen as less abstract from the MSS of symbolic algebra.

Introducción

Filloy y Rojano (1984) plantean un tipo de lectura de los textos clásicos de la historia de las matemáticas que se pone al servicio de la investigación en didáctica de las matemáticas. Se trata de analizar la historia de las ideas matemáticas con el fin de elaborar secuencias didácticas que tengan en cuenta lo determinado teóricamente en tal análisis, y poner a prueba tales secuencias didácticas en los actuales sistemas educativos para después volver al análisis de la historia de las ideas con los resultados prácticos obtenidos con los estudiantes intentando leer de nuevo los textos en busca de posibles equivalentes de los resultados didácticos. Ese es el punto de vista desde el que he querido encarar el libro de Jordanus Nemorarius, *De Numeris Datis*. Ahora bien, el programa de análisis histórico-crítico de las ideas matemáticas es mucho más ambicioso que lo que voy a reseñar aquí, ya que yo, aun situándome en el terreno abierto por Filloy y Rojano y en la dirección que señalan, no he realizado el varén de los textos a los sistemas educativos, sin embargo, he tenido presentes resultados, problemática y marcos teóricos de la investigación reciente en didáctica del algebra.¹

Así, he ido a buscar en el texto de Nemorarius cuáles son las características del sistema matemático de signos (SMS) —o los sistemas matemáticos de signos— en que está escrito, cómo configura ese lenguaje los objetos de los que permite hablar, qué problemas son los que se plantea y pretende resolver y qué operatividad es la que el

1 Hay otro tipo de lectura de la historia que se hace con intenciones didácticas: es la que parte de la creencia en que, en el aprendizaje como en el desarrollo biológico, la ontogénesis repite la filogénesis, o, por usar las palabras de Jaime Paradís, "el individuo en la asimilación espontánea de muchos conceptos, reproduce en cierta forma el camino recorrido históricamente" (Paradís y Malet 1989, 33). No es éste el lugar para rebatir esta creencia, ni siquiera en la versión moderada que indica el *en cierta forma* de la cita de la obra de Paradís y Malet: lo único que quiero indicar es que quienes mantienen este punto de vista no suelen tomar en consideración lo que sucede en la investigación en didáctica de las matemáticas, ya sea resultados, problemática o marcos teóricos, se pretenden usar el análisis de la historia en la investigación; lo que hacen básicamente, es basar en la historia modelos de secuencias didácticas para el desarrollo curricular, o apoyos con intenciones motivadora.

SMS tiene sobre los objetos expresados en él. Según Fillouy y Rojano (1984) la construcción del álgebra simbólica es la identificación final en un solo estrato de lenguaje de estratos anteriores de lenguaje medibles uno a otro hasta que no se ha desarrollado el lenguaje más abstracto.² El interés de ir a un texto del siglo XIII como el de Nemorarius, que es anterior al establecimiento con Vietá del lenguaje del álgebra simbólica, reside, desde esta perspectiva, en la posibilidad de —contándolo como un monumento— describir uno de los estratos de lenguaje —o SMS— que, retrospectivamente, se ven desde el álgebra simbólica como menos abstractos. Este interés es propio de la investigación en la didáctica de las matemáticas desde el momento en que se concibe que lo que los estudiantes hacen cuando aprenden el álgebra simbólica y son enseñados en los sistemas educativos puede describirse también en términos del uso de SMS —algunos diosincráticos— que han de culminar en el uso competente del SMS más abstracto del álgebra simbólica —o al menos esa es la intención de los sistemas educativos—

En Fillouy y Rojano 1984 se puede encontrar ya un examen del SMS del *De Numeris Datis*, contrastado con el de los libros de Ábaco. Lo que yo voy a presentar aquí no pretende ser más que una profundización en ese examen.

El contexto histórico de *De Numeris Datis*

La edición crítica de que disponemos del texto de Nemorarius es la de Hughes (1981). En ella se establece 1225 como fecha más probable de su aparición y se indica que no se sabe gran cosa sobre la vida del autor, ni siquiera sobre dónde vivió, a excepción de la constancia de su paso por Toulouse. Además de este libro, escribió otros sobre el sistema de numeración árabe, *Demonstratio de algorismo*; sobre fracciones, *Demonstratio de minutis*; sobre geometría, *Liber phylotegni de triangulis* y *Demonstratio de plana sphaera*, y una aritmética teórica, *De elementis arismetice artis*, de la que puede encontrarse una breve descripción

2. En este artículo se habla de "estratos de lenguaje". Posteriormente, Fillouy ha introducido la noción de SMS (con Kieren y Fillouy 1986), que es la que utilizamos aquí. Para la caracterización de lo que se entiende por SMS 'más abstracto', referéncese también a Kieren y Fillouy 1989.

3. Este "bambuleo" no es una recusa en la creencia mencionada en la nota 1. Los SMS presente en la historia y en la historia de cada sujeto, sobre los que se exige el SMS más abstracto, no pueden ser los mismos; tampoco, por tanto, los caminos hacia el SMS más abstracto. En el caso del álgebra, basta con tener en cuenta que la actual aritmética escolar no se escribe en veracruzito, sino en un SMS impregnado de signos e, incluso, reglas de sintaxis, que proceden del SMS del álgebra simbólica y que han descendido de ésta a la aritmética.

en Paradis y Malet 1989. Al considerar el libro que nos ocupa como la primer álgebra avanzada medieval, Hughes [1981] se pregunta por qué Jordanus Nemoranius no escribió un álgebra elemental y propone que probablemente no necesitó escribirla porque estaban disponibles las traducciones de Chester del álgebra de al-Khwāzmi, que es de 1143, y el *Liber Abaci* de Leonardo de Pisa, Fibonacci, de 1202. Nemoranius conocía también *Los Elementos* y los *Data* de Euclides y, cabe pensar que fue éste último el que le condujo a escribir *De Numeris Datis*, como su equivalente en el terreno de la aritmética.⁴

No pudo conocer, sin embargo, la *Aritmética* de Diofanto. En efecto, hasta el siglo XV no reaparece en el occidente cristiano la obra de Diofanto Johann Müller, conocido como Regiomontanus, comunica su hallazgo en 1464 y aún hay que esperar bastante tiempo para que se hiciera una buena traducción que la difundiera (Bachel de Méthac en 1621, aunque antes Bombelli hiciera una que se ha perdido y Xyländer otra, en 1575, con errores). La presencia, por otro lado de la obra de Diofanto en Bizancio en el tiempo de Planudes (1260-1310), es también posterior a la época que nos ocupa. Finalmente, el descubrimiento reciente de Roshdi Rashed de cuatro de los libros que se consideraban perdidos, en una traducción al árabe del siglo IX, que parece que comprendía también los tres primeros libros, sólo permitiría decir que Nemoranius conoció indirectamente problemas y resultados de Diofanto a través de los textos de matemáticos árabes que conocieron esa traducción de Diofanto;⁵ sin embargo, Hughes señala que es difícil asegurar que Nemoranius conociera las obras de Abū Kāmil o de al-Karajī, pero que al menos la de Abū Kāmil estaba seguramente a su alcance. Rashed [1984a] mantiene que Leonardo de Pisa sí que tuvo contacto con esta traducción del álgebra árabe, incluidos los trabajos,

4. O en el terreno de la *Logística*, si conservamos la distinción griega entre ambas disciplinas.

5. Hughes no parece haber tenido noticia de este hecho antes de la publicación de su edición de *De Numeris Datis*. El descubrimiento de Rashed es de 1971, su presentación pública de 1974, su edición en árabe de 1975 y su edición bilingüe —árabe y francés— de 1984 (ver Rashed 1984b). Esta traducción árabe de Diofanto está realizada unos 50 años después de la aparición del libro de álgebra de al-Khwāzmi —entre 870 y 880, según Rashed— y utiliza el vocabulario recién forjado por al-Khwāzmi para traducir el griego de Diofanto. Quidā ibn Lūqā, el traductor, fue pues el primero en dar una interpretación algebraica de *La Aritmética* de Diofanto —algebraización que está presente desde el título de la traducción, que es "El arte del álgebra"— Por las fechas que da Rashed, Abū Kāmil (850-930) ya pudo conocer esta versión de *La Aritmética* de Diofanto, pero Anbouba (1978) afirma que es indudable que no la conoció; al-Karajī (muerto al comienzo del Siglo XI) se sabe que sí la conoció porque incluso escribió un resumen de ella.

más desarrollados, del discípulo de al-Karajī as-Samaw'al (muerto en 1175).

El aspecto general de *De Numeris Datis*

De Numeris Datis está escrito en latín y consta de tres definiciones a las que siguen 115 proposiciones repartidas en cuatro libros. No hay más comentarios, ni ninguna introducción que indique la intención del libro o explique su organización general o la división en libros distintos. Tampoco hay ninguna introducción al enunciado de cada proposición, ni nada como tránsito de unas a otras. Lo único que hay escrito en el libro además de las proposiciones es una breve frase al final de cada uno que dice que ahí acaba el libro correspondiente y especifica cuántas proposiciones contiene. En el último se añade además que 'con ello se termina los datos por Jordanus respecto a las operaciones de los números'.⁶ Las 29 proposiciones del libro I tratan de lo que desde el álgebra podemos leer como ecuaciones simultáneas o ecuaciones cuadráticas; las 28 del libro II, sobre proporciones; las 23 del libro III, sobre proporciones continuas y, de nuevo, sobre proporciones, finalmente, las 35 del libro IV combinan proporciones con ecuaciones simultáneas y cuadráticas.

El formato de las proposiciones tiene siempre tres partes.⁷

1) Un enunciado que afirma que si han sido dados unos números (o razones) —entre los que unas determinadas relaciones han sido dadas— entonces otros números (o razones) también han sido dados;

2) Unas transformaciones de los números (o razones) y las relaciones que, o bien muestran que los números efectivamente están dados, o

6. *Et cum in fine dicitur data Jordanus secundum operationem numerorum*. Vale la pena mostrar que comentario final por el hecho de que se refiere a las operaciones como aquello de lo que el libro trata.

7. Hay una única excepción: la proposición II-27. En este caso, se trata de una solución (distinta de la proposición anterior, no de una proposición nueva, y Nemarius invierte el orden de las partes 2) y 3): tras el enunciado, que no repite la proposición anterior sino que se limita a decir que va a exponer el procedimiento de los árabes, para directamente el cálculo del ejemplo y, una vez concluido, escribe 'Demonstración' y desarrolla la segunda parte. Este es, por otra parte, el único lugar en que se puede ver que Nemarius concebía esta segunda parte como una *demonstración*. Según indica Heghes refiriéndose a un trabajo de Wertheim, el 'procedimiento de los árabes' coincide paso a paso con el de la proposición II-28 del libro de *Álgebra al-Fakhri* de al-Karajī, que, a su vez, sigue el de la proposición 1-25 de *La Aritmética* de Diófanto. Como Nemarius no pudo conocer el libro de Diófanto, esto puede ser un indicio de que conociera el de al-Karajī. En la edición resumida del *al-Fakhri* que he podido consultar (Woepcke 1853) es difícil apreciar esta coincidencia paso a paso.

bien los convierten en los números y relaciones de la hipótesis de alguna proposición anterior, y

3) El cálculo de un ejemplo con números concretos.

En el enunciado, como en *La Aritmética* de Diofanto, nunca aparecen números concretos. En el argumento, a diferencia de lo que sucede en Diofanto, tampoco aparecen números concretos, y, además, las cantidades de las que se habla son designadas a menudo con letras.⁸ En el ejemplo numérico, los números están escritos casi siempre en el sistema de numeración romano.⁹

Las definiciones, lo que ha sido dado, el análisis

El libro, como he dicho, comienza abruptamente con tres definiciones que son las siguientes:¹⁰

Un número ha sido dado cuya cantidad se conoce.

Un número ha sido dado en relación a otro si la razón de él al otro ha sido dada.

Una razón ha sido dada si su denominación¹¹ es conocida.

Lo que se define, por tanto, es qué significa 'haber sido dado' para los objetos que van a aparecer en el libro, que son de dos tipos: números y razones. Un número puede ser dado, o ser dado en relación a otro: la segunda definición sirve de puente entre las otras dos.

8. Este uso de letras para designar las cantidades ha sido subrayado como un rasgo algo nuevo de este texto. Mas adelante discutiré cuál es a mi entender el uso particular que se hace de las letras. Aquí solo quiero señalar que Nemourius no las usa en más de un tercio de las proposiciones —9 de 29 en el libro I, 33 de 28 en el II, 12 de 23 en el III y 8 de 13 en el IV— y, como puede verse, en los libros que tratan de proposiciones no las usa en más de la mitad. Por otro lado, nunca las usa en el enunciado de las proposiciones. En todo caso, esto hecho no es exclusivo de este texto: también se presenta, por ejemplo, en el tratado de aritmética elemental escrito por Nemourius, *De elementis arithmetice artis*. Aunque no conocemos ninguna edición crítica de este texto, he- mos comprobado este extremo en el ejemplar que se conserva en la Biblioteca de la Universitat de València, catalogado como el manuscrito 211v.

9. Hace a que Nemourius había escrito un libro *Demonstratio de algorismo*, sobre el sistema de numeración árabe.

10. *Numerus datus est cuius quantitas nota est. Numerus ad alium datus est cum ipse ad alium est proportio data. Data est ratio cum ipse denominatio est cognita.*

11. La denominación de una razón era su valor, que en el texto de Nemourius aparece expresado mediante números especiales como los que cataloga Nicómaco de Gerasa en el siglo I en su *Aritmética*: 'el mayor es el sesquitercio del menor' (razón 1/3), o con descripciones de la razón 'uno contiene al otro el mismo y un tercio' (razón 1/3) que, incluso, podían formarse con sumas de cuantías a la manera egipcia: 'uno con tanto y otro tanto y la mitad de la mitad hace el otro' (razón 3/4, expresada como $1 + 1 + 1/2 + 1/2 + 1/2$).

Este comienzo se corresponde con el del libro de Euclides *Data*¹². En efecto, también en éste, el comienzo es una lista de definiciones (15 en vez de 3) en las que lo que se define no son objetos matemáticos o propiedades de éstos, sino lo que significa que algo haya sido dado: más precisamente, Euclides no define lo que es 'haber sido dado', sino que define 'haber sido dado en especie', 'haber sido dado en magnitud' y 'haber sido dado en posición', las tres formas en que pueden darse los objetos geométricos.¹³ Marinus de Neápolis, en el siglo V, escribió un comentario¹⁴ al ἀριθμῆμενον de Euclides en el que hace patente la necesidad de definir el término δαδόμενον ya que en la época era objeto de interpretaciones diversas y de controversia: hay quien mantenía que lo que ha sido dado es lo que ha sido determinado [τεταγμένον], como una recta está determinada por dos puntos; otros, que es lo que ha sido conocido [γνώριμον], otros, lo racional [ῥητόν], esto es, que es conmensurable con la unidad y, por tanto, se puede expresar como múltiplo, parte o partes de ella; otros, lo que ha sido obtenido [πρόσθητον], y otros, alguna combinación de lo anterior. Marinus, tras discutir en detalle cada uno de esos términos y las relaciones de extensión entre ellos, concluye que la definición más adecuada es la que identifica lo que ha sido dado con lo conocido que ha sido obtenido, 'siendo 'lo conocido' el género y 'lo que ha sido obtenido', la diferencia específica'.

Precisar qué significa lo dado tiene importancia además para examinar la relación de ambos libros, el *Data* de Euclides y el *De Numeris Datis* de Nemorianus con el análisis Marinus, para escribir su comentario al texto de Euclides, se trazó un programa con el que lo encabeza: 'Para empezar es necesario determinar qué es lo que ha sido dado; luego, decir cuál es la utilidad de su estudio; y, en tercer lugar, con qué ciencia se relaciona'. Ya he hecho referencia a su discusión sobre lo primero, acerca de la utilidad de su estudio, Marinus es conciso

12 El título original del libro de Euclides que se cita aquí también por su título latino *Data* es ἀριθμῆμενον. Esa palabra es el participio pasado pasivo del verbo 'dár' y, por tanto, no significa 'datos' o simplemente 'dado', sino 'que ha sido dado'; en la traducción del texto de Nemorianus he conservado a menudo, al traducir el latín 'datus', este significado pasivo y pasado que Euclides quiso darle al título de su libro, aun a costa de forzar el castellano.

13 La definición de Euclides de lo que es haber sido dado para una razón no puede ser la misma que la de Nemorianus, ya que éste está tratando con números y Euclides con magnitudes geométricas: así la segunda definición de Euclides es: 'Una razón ha sido dada cuando podemos encontrarle una que sea la misma'.

14 Una traducción francesa de este comentario, hecha por Maurice Michaux, está incorporada por Jean Bard (con modificaciones) a su introducción a la edición de Albert Dimechard de las obras de Euclides tal como las estableció y tradujo Peyrard en 1819.

y directo: 'su conocimiento es necesario para lo que llaman el *Campo del Análisis*'; y el mismo Pappus, a quien Marinas se refiere, debía de pensar algo parecido, ya que en su *Synagógē* o *Colección Matemática* incluyó el libro de Euclides en la relación de libros que componían el *Campo del Análisis*. Mahoney (1968) encuentra que lo contenido en esa relación de libros es útil para el análisis en diversos sentidos: cuando analiza el *Data* considera que "el objetivo de la obra es mostrar que, en una situación matemática dada, los datos proporcionados fijan necesariamente otras cantidades en el problema; esto es, que esas últimas están dadas también implícitamente"; otros libros le parecen que proporcionan técnicas para amplificar los datos de un problema o técnicas para analizar los datos de un problema con el fin de examinar la posibilidad de obtener lo que éste se propone. Puede decirse, como hace Hughes en la introducción a su edición del texto de Néstorarius, que las proposiciones establecidas en él son útiles para el análisis como lo es una caja de herramientas. Desde ese punto de vista, lo que es útil del libro son sus resultados: cualquiera que haya de resolver un problema aritmético y, para ello, esté utilizando el análisis, necesita reducir lo desconocido a datos: las 115 proposiciones de *De Numeris Datis* le proporcionan otros tantos atajos en el camino del análisis, ya que si se encuentra en las condiciones enunciadas en una de ellas ya sabe que se puede reducir a datos y cómo hacerlo, a condición de tenerlas todas en la memoria o tener el libro a mano. Pero si se quiere, además, que el libro sirva como un ejercicio en el arte del análisis, que proporcione técnicas de análisis, no hay que retener de él sus resultados o, dicho de otra manera, los enunciados de las proposiciones, sino que hay que observar los mecanismos de análisis que en él se usan, y estos mecanismos aparecen en la segunda parte de las proposiciones, en los argumentos.

Ahora bien, tal como lo concibe Pappus, el análisis es distinto según se realice para probar un teorema o para encontrar la solución de un problema, y lo dado sólo aparece en el análisis problemático, no en el análisis teórico. En efecto, en el famoso texto del libro VII de la *Colección matemática* en que Pappus describe los dos tipos de análisis, puede verse que el curso del análisis en uno y otro caso tiene rasgos comunes: partir de lo que se busca o ha sido propuesto y pasar a través de sus consecuencias sucesivas hasta algo aceptado; pero, una vez se ha llegado a algo *aceptado*, lo aceptado se examina con criterios distintos: si el análisis trata de demostrar un teorema, hay que ver que lo aceptado a que se ha llegado sea *verdadero*; si se trata de un análisis problemático, que sea *posible y obtenible*, es decir, lo que los ma-

temáticos llaman *dado*.¹⁵ Esta diferencia entre algo verdadero y algo dado, como aquello en donde ha de terminar el análisis, se deriva naturalmente de la distinción entre teorema y problema, que Euclides muestra al terminar unas proposiciones con la fórmula 'lo que había que demostrar' y otras con la fórmula 'lo que había que hacer', y que fue discutida por el mismo Pappus en el prefacio al libro III de la *Colección Matemática* y por Proclo en sus *Comentarios al libro primero de Los Elementos de Euclides*.¹⁶

Los resultados que se enuncian en el *Data* y el *De numeris datis* son útiles pues para el análisis problemático. Si se quiere examinar además el alcance de uso de las técnicas de análisis que en ellos se emplean, habrá que examinar si lo que se hace es análisis teórico o problemático. Euclides parece considerar a las proposiciones de los *Data* como teoremas, ya que al menos la proposición 1 termina con la fórmula 'lo que había que demostrar', que es con la que en *Los Elementos* concluyen los teoremas. Sin embargo, Heath [1921] observa que

las proposiciones de los *Data* de Euclides no determinan realmente la cosa o la relación que se muestra que ha sido dada, sino que prueban meramente que pueden ser determinadas una vez los hechos planteados en la hipótesis sean conocidos; si la proposición estableciera que una cierta cosa es así o así [...], sería un teorema; si nos dirigiera a encontrar la cosa en vez de a probar que ha sido 'dada', sería un problema; así que muchas proposiciones de la forma de *Data* pueden enunciarse alternativamente en la forma de teoremas o de problemas.

En el caso de las proposiciones de *De Numeris Datis*, su tercera parte, el ejemplo con números concretos —que no tiene equivalente en el libro de Euclides— es, de hecho, un problema; ahora bien, no es en esa tercera parte donde se desarrolla el núcleo del análisis, sino en la segunda y en ésta lo que se hace es establecer que un enunciado hipotético es verdadero: parece pues que el análisis habrá de funcionar a la manera propia de los teoremas. Pero los enunciados de *De Numeris Datis*, a diferencia de los teoremas, no pretenden decir nada sobre cómo

15 Este caso de Pappus, por volver a la discusión de Marinus, muestra que el significado de lo dado como posible y obtenible no era comúnmente aceptado, sino que era el significado propio del lenguaje de 'los matemáticos'.

16 Las ediciones de Pappus y Proclo que he consultado son las que figuran en la bibliografía, que no incluyen el texto griego. He consultado también los fragmentos en griego de ambos textos, referentes al análisis y a la naturaleza de los problemas, que están recogidos en Thomas 1957.

es una cosa, sino que si ciertas cosas —números, razones o relaciones entre unos y otros— han sido dadas, otras también están dadas: con lo que una vez se dé efectivamente lo que se ha supuesto como dado, se podrá encontrar lo que el enunciado establece que también está dado: las proposiciones de *De Numeris Datis* aparecen pues como teoremas sobre la posibilidad de solución de (clases de) problemas —esto es lo que se enuncia en su primera parte y se prueba en su segunda parte—, acompañados de un problema efectivamente resuelto que funciona como paradigma de la clase —esto es lo que aparece en la tercera parte, en la que el procedimiento de solución adopta siempre forma algorítmica—.

Hughes pretende que el análisis tal como aparece en el libro de Nemorarius anticipa las tres partes del análisis (cetélica, porística y rética o exagética) que formulará Vieta en su *Introducción al Arte Analítico* Girant [1983], al revisar la edición de Hughes de *De Numeris Datis*, afirma en contra de la opinión de éste, por un lado, que 'la mayoría de las demostraciones de Jordanus no parecen ajustarse a la concepción de Pappus del análisis' porque no se ve que acaben en 'algo aceptado como resultado de la síntesis',¹⁷ y, además, que tampoco le parece que pueda ponerse en paralelo lo que hace Nemorarius con las tres partes del análisis a la manera de Vieta, ya que, aunque efectivamente parece que hay un equivalente a la rética de Vieta en la tercera parte de las proposiciones de Nemorarius en que se muestra el cálculo con un ejemplo, Girant duda de que esto forme parte de una metodología analítica consciente y piensa que más bien se debe a la necesidad de mostrar que lo establecido efectivamente funciona, ya que no se ha dado una demostración geométrica de que sea verdadero. Mi descripción del contenido de *De Numeris Datis* no persigue sancionar fidelidades ni buscar precursores o establecer prioridades, si el análisis se concibe como 'un cuerpo en continuo crecimiento de técnicas de resolución de problemas relacionadas entre sí' —eso es lo que se propone demostrar Mahoney [1968] para lo que él llama el análisis geométrico griego—, interesa entender cuáles son esas téc-

17. Sin entrar a discutir el argumento de Girant, que es otro, uno que habría que tener en cuenta que, así como en el caso del *Dato de Euclides*, que trata de lo que ha sido dado en geometría, las síntesis están en *Los Elementos*, Nemorarius podía utilizar los resultados de sus *Elementos de Aritmética* —*De Elementis Arismetice Artis*— para apoyar los análisis de *De Numeris Datis*: aunque no haga ninguna referencia explícita a las proposiciones de este libro. Ahora bien, si se quiere ver las proposiciones de *De Numeris Datis* como teoremas algebraicos, las síntesis algebraicas sólo se presentarán siglos más tarde en los *De Algebraicorum Recognitione et Emendatione Tractatus Duo* de Vieta.

nicas y cómo vienen condicionadas o engendradas por los objetos a los que se pretenden aplicar y el sistema de signos o los sistemas de signos en que se expresan y se realizan. Algo de eso he apuntado ya en general, en lo que sigue examinaré con esa intención el detalle de parte de las proposiciones del libro I y de tres proposiciones del libro IV que equivalen a las tres formas normales de al-Khwārizmī para las ecuaciones cuadráticas.¹³

La proposición I-1

En la edición de Hughes, la proposición I-1 aparece, como todas las demás, en tres lenguajes: la edición del texto en latín, una traducción al inglés y una traducción simbólica. Usaré esta primera proposición para mostrar cómo cada una de las tres versiones dice cosas distintas.

El texto latino:

Si numerus datus in duo dividatur quorum differentia data erit utrumque eorum datum.

El texto inglés y una traducción al castellano

If a given number is separated into two parts whose difference is known, then each of the parts can be found. [Si un número dado es separado en dos partes cuya diferencia es conocida, entonces cada una de las partes puede ser encontrada]

El texto simbólico:

$$x + y = a, x - y = b.$$

Del latín al inglés (o castellano) el término 'datus' ha pasado a ser sucesivamente 'given' ('dado'), 'known' ('conocido') y 'found' ('encontrado'). Hughes ha optado explícitamente por una traducción libre que hace la lectura más fácil, pero que en ocasiones puede introducir matices que no están presentes en el texto latino: en este caso, desaparece la homogeneidad que en el texto latino produce la repetición del término 'datus', cuya importancia ya hemos señalado en la discusión del apartado anterior. Una traducción al castellano más literal

13. Como aquí no voy a entrar en el detalle de las proposiciones que tratan sobre razones y proporciones, no quiero dejar de señalar que en algunas de estas proposiciones (por ejemplo, II-23) Nemarius parece operar globalmente con las ecuaciones, cosa que no sucede cuando trata con números. El que esto suceda precisamente con las proposiciones hace que no pueda evitar traer a colación la 'regla soberana' que Viete enuncia en la *Introducción al arte analítico*, la que, en ese libro, dice que es de suma importancia en el análisis y, en otro, le servirá para establecer las similitudes: 'una proporción puede decirse que es aquello a partir de lo cual se constituye una ecuación; una ecuación aquello en lo que se resuelve una proporción'.

sería: 'Si un número que ha sido dado se divide en dos, cuya diferencia ha sido dada, serán dados uno y otro'.

La distancia entre el texto latino y su traducción simbólica es mucho mayor y más importante para nuestro análisis. Basta, para percetarse de ello, hacer el experimento de traducir inversamente el texto simbólico al castellano, como si no se hubiera éste previamente. Una traducción posible sería: 'Encontrar dos números, dadas su suma y su diferencia'. Aquí ha desaparecido el número que se divide en dos partes, para ser reemplazado por dos números que se suman, y, sobre todo, el enunciado ha pasado a ser el de un problema, en vez de ser el de un teorema.

Que textos escritos en lenguajes distintos no tengan el mismo significado aunque pretendan ser traducción el uno del otro es una afirmación demasiado general: lo que interesa observar es cuáles son los cambios de significado que se producen y cómo éstos pueden estar detrás de las acciones que naturalmente se desencadenan para abordar cada uno de los textos. Así, para quien lee el texto simbólico y domina ese lenguaje, resulta natural operar directamente sobre los símbolos sin hacer referencia en el transcurso de las acciones a los significados que esos símbolos tienen en el otro texto del que provienen. Lo que hace Nemorarius, sin embargo, es muy distinto. La segunda parte de la proposición I-1, el argumento, transcurre como sigue:

La parte menor y la diferencia hacen la mayor. Así que la parte menor con tanta igual a sí misma y con la diferencia hacen el todo. Quitada, por tanto, la diferencia del todo, quedará dado el doble de la menor. Que dividido, la parte menor habrá sido dada. Así como la mayor.¹⁹

Aquí, cada cantidad que interviene se nombra por su significado: 'la parte menor', 'la diferencia', 'la mayor' y 'el todo' y las relaciones entre los números se establecen gracias a las relaciones entre los significados que tienen en el texto. Nemorarius no usa letras en esta proposición porque tiene nombres para todas las cantidades con las que se encuentra en el curso del análisis.²⁰

19. *Et minor portio et differentia faciunt maiorem. Tunc minor portio cum sibi equali et cum differentia faciunt totum. Sublata ergo differentia de toto remanet duplum minoris autem. Quis diviso, erit minor portio data. Sicut et maior.*

20. El uso de letras puede considerarse por consiguiente como un recurso y no una parte constitutiva del lenguaje en que Nemorarius aborda las demostraciones de las proposiciones.

Las proposiciones I-3, 4, 5 y 6

Estas cuatro proposiciones están estrechamente relacionadas unas con otras. Formalmente, todas ellas comienzan con un "número que se divide en dos partes", luego establecen que algunas relaciones entre las partes (o el propio número) han sido dadas, y la proposición afirma que, en esas condiciones, las partes también han sido dadas (y el número, si es el caso). Esta estructura global la comparten con la mayor parte de las proposiciones del libro primero, de modo que para referirse a las proposiciones con facilidad es útil adoptar una notación que la refleje.

Los significados básicos de los números que aparecen son los que he nombrado a propósito de [·], que se pueden representar así:

- m : la parte menor
- M : la parte mayor
- s : el todo (o la suma)

Las relaciones entre las partes que aparecen en estas primeras proposiciones son las que siguen, representadas también de forma que pueda recordar su significado:

- d : la diferencia entre las partes
- p : el producto de las partes
- s_c : la suma de los cuadrados de las partes

Expresadas con esta notación,²¹ estas primeras proposiciones enuncian lo siguiente:

- I-1: s y d dados $\Rightarrow m$ y M dados
- I-3: s y p dados $\Rightarrow m$ y M dados
- I-4: s y s_c dados $\Rightarrow m$ y M dados
- I-5: d y p dados $\Rightarrow s, m$ y M dados
- I-6: d y s_c dados $\Rightarrow s, m$ y M dados

Examinemos ahora el argumento de Nemorarius para probar I-3, esquematizándolo pero manteniendo el tipo de notación y expresiones que utiliza:²²

21. Obsérvese que con esta notación que introduzco para representar el texto de Nemorarius los enunciados de las proposiciones conservan la forma de *secretas*, a diferencia de lo que sucede con la que usa Hughes.

22. Casi todas las observaciones y discusiones que siguen sólo se pueden hacer con esta condición, y, para ello, es preciso recurrir al texto latino, ya que la traducción al inglés

- [1] Sea abc el número dado, dividido en ab y c .
- [2] ab por c haga d , dado
- [3] abc por si mismo haga e
- [4] El cuádruple de d sea f
- [5] Quitado f de e queda g
- [6] Y g será el cuadrado de la diferencia de ab y c
- [7] Extrágase la raíz de g y sea h
- [8] Y h será la diferencia entre ab y c
- [9] Como b ha sido dado, c y ab habrán sido dados.²¹

La intención del argumento está clara: lo que se ha probado es que x y p dados $\Rightarrow d$ dado, con lo que 1-3 se ha reducido a 1-1. El argumento no ha continuado hasta establecer la manera de calcular m y M , sino que se ha detenido al establecer como dadas las relaciones de la hipótesis de una proposición ya probada y Nemorarius se ha limitado a concluir lo que dice en [9]. Esta reducción a proposiciones menores va a ser lo que Nemorarius va a hacer a lo largo del libro sólo en la tercera parte de cada proposición, en que se resuelve un problema con números concretos, continuará hasta calcular los valores de las cantidades que, en esa tercera parte, se quieren encontrar y no sólo saber que es posible calcularlas.²⁴

Ahora bien, si la forma general del argumento está clara, el detalle trascrito así resulta enigmático: no se ve sin más por qué el número inicial se representa con tres letras,²⁵ ni qué permite que, una vez se ha terminado en [5] de construir cantidades, se afirme que son ver-

de Hughes es demasiado liberal. Las traducciones que yo presento aquí, en ser literales y siendo en alguna ocasión sólo el esquema del texto latino, están hechas con la intención de preservar al máximo las características del lenguaje de Nemorarius que son pertinentes para lo que es objeto de indagación en este artículo. El lector puede recurrir también directamente al texto latino, que incluyo en las notas.

21 *Si numerus datus abc datus in ab et c. eritque ab in c fiat d datus. Itemque ex abc in se fiat e. Sumatur itaque quadruplus d. qu. sit f, quo dempto de e remaneat g. et ipse erit quadratum differentiae ab ad c. Extrahatur ergo radix g et sit h. eritque h differentia ab ad c. Cuiusque sit b datum. erit et c et ab datum.*

24 Hughes no suele ser muy preciso al alabar en la traducción simbólica lo que él llama la 'reducción a la forma canónica', por lo que respecta a dónde termina realmente el argumento de la segunda parte de las proposiciones. Así, 1-7 se reduce a 1-3 en vez de lo que dice Hughes, 1-9 a 1-7, 1-13 a 1-12, 1-16 (una parte) a 1-17 a 1-7, 1-18 a 1-20 a 1-7, etc. A mi entender, el querer expresar esas formas canónicas mediante ecuaciones le obliga en ocasiones a no ceñirse al argumento de Nemorarius.

25 Esto no puede observarse en la traducción inglesa de Hughes, ya que esta escribe [1] así: "Let the given number a be separated into x and y ."

- [1] Sea abc el número dado, dividido en ab y c .
- [2] ab por c haga d , dado
- [3] abc por sí mismo haga e
- [4] El cuádruple de d sea f
- [5] Quitado f de e queda g
- [6] Y g será el cuadrado de la diferencia de ab y c
- [7] Extráigase la raíz de g y sea h
- [8] Y h será la diferencia entre ab y c .
- [9] Como b ha sido dado, c y ab habrán sido dados.²³

La intención del argumento está clara: lo que se ha probado es que x y p dados $\Rightarrow d$ dado, con lo que 1-3 se ha reducido a 1-1. El argumento no ha continuado hasta establecer la manera de calcular m y M , sino que se ha detenido al establecer como dadas las relaciones de la hipótesis de una proposición ya probada y Nemorarius se ha limitado a concluir lo que dice en [9]. Esta reducción a proposiciones anteriores va a ser lo que Nemorarius va a hacer a lo largo del libro sólo en la tercera parte de cada proposición, en que se resuelve un problema con números concretos, continuará hasta calcular los valores de las cantidades que, en esa tercera parte, se quieren encontrar y no sólo saber que es posible calcularlas.²⁴

Ahora bien, si la forma general del argumento está clara, el detalle trascrito así resulta enigmático: no se ve sin más por qué el número inicial se representa con tres letras,²⁵ ni qué permite que, una vez se ha terminado en [5] de construir cantidades, se afirme que son ver-

de Hughes es demasiado liberal. Las traducciones que yo presento aquí, en sus literales y siendo en alguna ocasión sólo el esquema del texto latino, están hechas con la intención de preservar al máximo las características del lenguaje de Nemorarius que son pertinentes para lo que es objeto de indagación en este artículo. El lector puede recurrir también directamente al texto latino, que incluyo en los márgenes.

23 *Su numerus datus abc dividitur in ab et c. unque ex ab in c fiat d datus. nemque ex abc in se fiat e. Sumatur autem quadruplus d, qui sit f, quo sumpto de e remanet g, et ipse erit quadratum differentiae ab ad c. Extrahatur ergo radix g, et sit h, eritque b differentia ab ad c. Cumque sit b datum, erit et c et ab datum.*

24 Hughes no suele ser muy preciso al elaborar en la traducción simbólica lo que él llama la "reducción a la forma concreta", por lo que requiere a dónde termina realmente el argumento de la segunda parte de las proposiciones. Así, 1-7 se reduce a 1-3, en vez de lo que dice Hughes, 1-9 a 1-7, 1-13 a 1-12, 1-16 (una parte) a 1-17 a 1-7, 1-18 a 1-20 a 1-3, etc. A mi entender, el que se dispone a esas formas concretas mediante reducciones le obliga en ocasiones a no definir el argumento de Nemorarius.

25 Esto no puede observarse en la traducción inglesa de Hughes, ya que este escribe [1] así: "Let the given number a be separated into x and y ".

daderas las relaciones entre las cantidades construidas que están en [6], [7] y [8].

Las letras se introducen por orden alfabético para designar las cantidades que sucesivamente van apareciendo, tanto si ya han sido dadas como si no.²⁶ Dos letras yuxtapuestas indican la suma de las cantidades que representan y no hay ningún signo especial para ninguna operación aritmética ni para ninguna relación entre cantidades. Así, cuando se quiere designar una cantidad que es el resultado de una operación con cantidades ya designadas con letras, sólo cabe escribir una expresión que combina las letras con el lenguaje natural ('quitado f de c ') e introducir una letra nueva (g). El significado de las letras a medida que se van introduciendo es el que les da la expresión a la que se refieren. Así, se puede reconstruir la primera parte del argumento de *Nemorarius* haciendo referencia al significado de las cantidades: eso es lo que muestro a continuación en dos columnas.²⁷

- | | |
|---|--|
| [1] Sea abc el número dado,
dividido en ab y c | bc es el todo (t), ab es la parte mayor (A), c es la parte menor (m) |
| [2] ab por c haga d , dado | d es el producto de las partes (p) |
| [3] abc por sí mismo haga e | e es el cuadrado del todo (t^2) |
| [4] El cuadruple de d sea f | f es cuatro veces el producto ($4p$) |
| [5] Quitado f de e queda g | g es $t^2 - 4p$ |

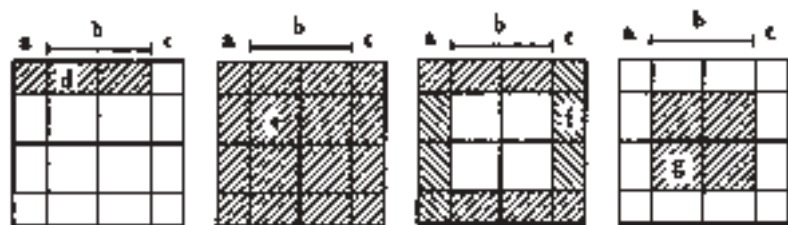
La línea [6] del argumento es de otra índole: en ella lo que se hace es afirmar que g tiene otro significado, además del que se le acaba de dar en la línea [5]. 'Y g será el cuadrado de la diferencia de ab y c '. Esta afirmación no está fundada en nada que se establezca en

26. Esto también puede observarse en la traducción inglesa de Hughes, que distingue lo que él llama 'las incógnitas' de las demás cantidades, distinguiéndolas con las letras x e y , cosa que nunca hace *Nemorarius*.

27. Tengo que advertir que en la columna de la derecha las letras que se usan entre paréntesis (t , d , p) son abreviaturas de su significado (la suma o el todo, la diferencia, el producto) y que las otras letras son las que usa *Nemorarius* en esa proposición con el significado que en ella tienen. Este doble uso de las letras, que voy a mantener a lo largo de este texto, solo tropieza en el caso de la d , que, si es la que está entre paréntesis, es siempre la diferencia, pero si es la d del texto de una proposición tiene cada vez un significado, por ejemplo, en esta ocasión 'el producto de las partes'. El contexto indica de qué d se trata en cada caso.

el nivel del propio texto del argumento, sino en el recurso a una relación entre cantidades que ni siquiera se menciona, la relación que se escribe $s^2 - 4p = a^2$, en la notación que estoy utilizando. Las líneas [7], 'Extraigase la raíz de g y sea b ', y [8], 'Y b será la diferencia entre ab y c ', nos informan de algo que tampoco se ha mencionado anteriormente, a saber, que b es la diferencia entre ab y c , con lo que, de hecho, a y c son iguales y ambas letras designan la parte menor.

Así que, la designación inicial del número dado como abc parece venir dictada por la conveniencia de tenerlo descompuesto desde el principio como suma o yuxtaposición de la parte menor, la diferencia y otra vez la parte menor, y que la parte mayor aparezca como la menor más la diferencia. Todo ello, puede verse con mucha más claridad, si se interpretan letras y relaciones en el lenguaje de la 'geometría de las áreas' o del 'álgebra geométrica'. Eso es lo que ilustran las figuras siguientes:



En el último de estos 'cuádruples cuadrados' es fácil leer g con los dos significados pertinentes para establecer la relación que Nemorarius usa, pero no menciona. Además, puede verse por qué el número dado se designa con abc : los números, como en Euclides, son segmentos (o números de otras especies, planos o sólidos); su suma se representa naturalmente por la yuxtaposición de las letras que designan los segmentos (o las áreas) correspondientes; las relaciones pertinentes tienen su fundamento en relaciones entre áreas.

Porque pues que Nemorarius, aunque escribe el argumento en un sistema de signos en el que sólo aparece el lenguaje natural y letras, ha debido razonar en otro sistema de signos que incluye también figuras del tipo de las que he presentado,²⁸ ya que, al menos para mí, es difícil interpretar lo que escribe sin tener presente los significados que sus

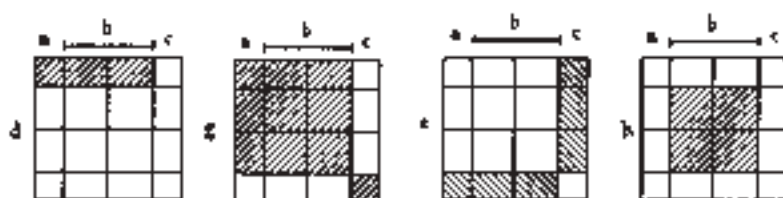
28. No quiero decir que Nemorarius utilizara precisamente la figura que yo he elaborado, sólo que este 'cuádruple cuadrado' es un artefacto didáctico para reconstruir los argumentos. De hecho, en uno de los manuscritos que Hughes utiliza para establecer el

signos tienen cuando se traducen al sistema de signos más complejo en el que he supuesto que se realizan los razonamientos. Los argumentos de 1-4, 1-5 e 1-6 me proporcionan más pruebas de esta afirmación.

En efecto, en 1-4, en la que lo que ha sido dado es x y x_c , el argumento no comienza desgranando de nuevo las cantidades e introduciendo las letras desde la x , sino que, tras decir 'de la misma manera que antes',²⁹ continúa así:

- [1] Si realmente g ha sido conocido [la suma de los cuadrados, x_c]
 [2] e , que es el doble de una parte por otra [$2p$], también será conocido.
 [3] Y substraído e de g quedará h
 [4] h es el cuadrado de la diferencia
 [5] Extraída su raíz, al ser conocida, todos habrían sido dados.³⁰

El argumento de nuevo reduce las relaciones dadas a las de 1-1 y se detiene ahí. Aquí se nombran sólo las letras a las que se les ha cambiado el significado con respecto al que tenían en 1-3, y, de nuevo, se usan relaciones sin mencionarlas de ninguna manera en [2] lo que justifica que e esté dado es la relación no mencionada $2p = x^2 - x_c$, y el doble significado de h en [3] y [4] viene dado por la relación $a^2 - x_c = 2p$. Las figuras siguientes ilustran estos cambios de significado y las relaciones no mencionadas.



texto de Nemostris hay figuras, pero Hughes no las incorpora al texto que establece porque seguramente no las considera parte integrante del texto original de Nemostris, sino sólo de algún comentarista.

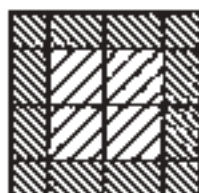
29. *Modo praemisso.*

30. | si enim g fuerit notus, erit et e notus, qui est duplex unus in anteriori. Subtrahatur e de g remanet h quedatum differentiae, cuius radix extracta cum et nota erunt omnia data.

Tanto en 1-5 como en 1-6, Nemorarius da por supuesto que las letras se refieren a las mismas cantidades que en 1-4. Así el argumento de 1-5, proposición en la que las cantidades dadas son d y p , comienza diciendo 'manténgase la disposición anterior'³¹ —lo que puede tomarse como una clara referencia a que las letras tienen el mismo significado que antes o, incluso, que la 'disposición' en la figura subyacente es la misma— para seguir así:

- [1] b , que es la diferencia de las partes, sea dado
- [2] d , que es el producto de ellas, también
- [3] el doble de d es r
- [4] h es el cuadrado de la diferencia
- [5] el doble de r súmese a h y sea f
- [6] f será el cuadrado de abc y será dado
- [7] así que abc ha sido dado³²

Excepto la letra f que no se había usado en 1-4, las demás aparecen no en orden, solo recordando su significado. De nuevo, se usa una relación que no se menciona para establecer el doble significado de f : $4p = d^2$, en [5] y s^2 en [6]. La figura siguiente ilustra esta relación:



Finalmente, en el argumento de 1-6, proposición en la que las cantidades dadas son d y s , también se recuerda lo anterior al comenzar, al usar el pasado 'era':

- [1] El cuadrado de ambas juntas era g , que sea dado,
- [2] quítese de él h dado, cuadrado de la diferencia, y quedará e dado

³¹ *Mantentur respectu dispositio*

³² [...] et b , differentia partium, sit data, et similiter d , qui est productus ex eis, cuius duplum e est. Et e duplicato addatur h , qui est quadratum differentiae, et componatur s f , qui erit quadratus abc et similis, quare et abc datus est

- [3] e es el doble del producto de una en otra
 [4] y sumado e a g resultará f
 [5] f es el cuadrado del todo
 [6] Extraída la raíz de f habrá sido dado todo abc .¹¹

En este argumento vamos a encontrar el uso de relaciones sin mencionárlas para los dos significados de e en [2] y en [3] ($xc - d^2 = 2p$) y de f en [4] y [5] ($xc + 2p = s^2$).

El cuadro siguiente resume el significado de las letras mencionadas en estas cuatro proposiciones.

I-3	I-4	I-5	I-6	significado
abc	abc	abc	abc	el todo o la suma (s)
ab				la parte mayor (A)
c				la parte menor (m)
b	b	b	b	la diferencia (d)
d		d		el producto (p)
	e	e	e	el doble del producto ($2p$)
f				el cuadruple del producto ($4p$)
e		f	f	el cuadrado del todo (s^2)
	g	g	g	la suma de los cuadrados de las partes (s_c)
g	h	h	h	el cuadrado de la diferencia (d^2)

La clave de los argumentos de las cuatro proposiciones ha sido el uso de relaciones que no se mencionan y que permiten asignar dos significados distintos a alguna de las letras que aparecen. Esas relaciones han servido para reducir los cuatro casos a I-1. La tabla siguiente muestra cómo lo que se supone dado en cada una de las proposiciones conduce, a través de las relaciones pertinentes, a las condiciones de la hipótesis de I-1, esto es a s y d dados.

33. *Quadrata eorum convincta erunt g, que sit datus, ab qui tollatur h quadratus differentiae, similiter datus, et remaneret e datus, qui est ab plus unum et n alterum, additotusque e ad g fiet f, quadratus totius. Extracta ergo radice f erit totus abc datus.*

Proposición	datos	relaciones	reducción a I-1
I-3	s, p	$d^2 = s^2 - 4p$	s, d
I-4	s, s_c	$2p = s^2 - s_c, d^2 = s_c - 2p$	s, d
I-5	d, p	$s^2 = 4p + d^2$	s, d
I-6	d, s_c	$2p = s_c - d^2, s^2 = s_c + 2p$	s, d

En la tercera parte de las proposiciones, en la que se enuncia un problema con números concretos y se resuelve, las relaciones que se han usado en el argumento se encadenan para mostrar mediante los cálculos del ejemplo un algoritmo que permite resolver efectivamente los problemas similares. Así, en el problema de I-3, como se ha reducido a I-1 mediante la relación $d^2 = s^2 - 4p$, Nemorarius calcula d a partir de s y p , como lo permite esa relación ($d = \sqrt{s^2 - 4p}$) y luego m , siguiendo I-1, es decir, $m = \frac{1}{2}(s-d)$; o, expresado de un golpe, calcula m a partir de s y p mediante

$$m = \frac{1}{2}(s - \sqrt{s^2 - 4p}).$$

Esa fórmula que he escrito interpretando lo que hace Nemorarius en el cálculo del problema en una notación que no es la suya, viene expresada por él como una regla algorítmica ejemplificada con números concretos; así el texto del problema es como sigue:

Seis 10 dividido en dos números, y el producto de uno por otro resulte 21, cuya cuadruple es 84, quítese del cuadrado de 10, que es 100, queda 16, cuya raíz extráigase, que será 4 y esta es la diferencia, que quítese de 10 y lo que queda, que es 6, demóstrase. Y la mitad será 3, y eso es la parte menor, y la mayor, 7.¹⁴

El cuadro siguiente muestra cuáles son las fórmulas correspondientes a estas cuatro proposiciones, equivalentes a las reglas algorítmicas que aparecen en sus terceras partes.

14. Si x divídase en números dos, aique ex factu unum erunt in alium factum, cuius quadruplum et ipsum est summa solvitur de quadrato x hoc est 6, et remanent in summa radix extrahatur, que erit 4 et ipse est differentia ipse quod solvitur de x et reliquum, hoc est 6, dimidietur. Etique reliquum in, et que est minor portio et maior in.

Prop.	Datos	Fórmula que reduce a I-1	Fórmula final
I-3	s, p	$d = \sqrt{s^2 - 4p}$	$m = \frac{1}{2}(s - \sqrt{s^2 - 4p})$
I-4	s, s_c	$d = \sqrt{s_c - (s^2 - s_c)}$	$m = \frac{1}{2}(s - \sqrt{s_c - (s^2 - s_c)})$
I-5	d, p	$s = \sqrt{4p + d^2}$	$m = \frac{1}{2}(\sqrt{4p + d^2} - d)$
I-6	d, s_c	$s = \sqrt{s_c + (s_c - d^2)}$	$m = \frac{1}{2}(\sqrt{s_c + (s_c - d^2)} - d)$

La proposición I-7

El enunciado es el siguiente: "Si se divide un número en dos partes, de las cuales una ha sido dada, y el producto de la otra por sí misma y por la que ha sido dada es un número dado, el número dividido también habrá sido dado".³⁵ Lo que podemos expresar con la notación anterior así: ' M y $m(m+M)$ dados $\Rightarrow s$ dado'.

Esta proposición es importante en la organización general del libro ya que a ella se reducen muchas otras proposiciones. Por otro lado, si se traduce al lenguaje del álgebra el enunciado equivale a la ecuación $x(x+a) = v$ o $x^2 + ax = v$, que es la primera de las formas normales de al-Khwārizmī, y que reaparece en el libro cuarto, proposición IV-8, formando una serie con las otras dos formas normales de al-Khwārizmī, sin que Memorarius parezca percatarse de que haya relación alguna entre ambas proposiciones, como se verá en la coda de este texto.

El argumento transcurre de la siguiente manera:

- [1] Sea el número dividido en a y b , b dado
- [2] a por sí mismo y por b , esto es, por todo ab resulte d , dado
- [3] Añádase también c a ab , y sea c igual a a ,
- [4] de modo que todo abc esté dividido en ab y c
- [5] Con lo que ab por c es d , dado
- [6] y la diferencia entre ab y c , es decir, b es dado
- [7] abc y c serán dados, e igualmente a y ab ³⁶

35 Si dividatur numerus in duo quorum unum est datum, et non dato cetero in se et in datum provenient numerus datus, erit et numerus qui dicitur fuerit datus.

36 Si numerus divisus in a et in b sitque b datus sitque a in se et in b , hoc est in totum ab , proveniat d qui est datus. Addeatur autem c vel ab et ipse sit equalis a , ut sit totus abc divisus in ab et c . Quia igitur et ab in c fit d datus, atque differentia ab et c , scilicet b , est datus, erit abc et c datus, scilicet et a et ab .

La manera en que aparecen las letras apunta a que de nuevo Nemorarius está haciendo referencia a la disposición anterior que muestra la figura

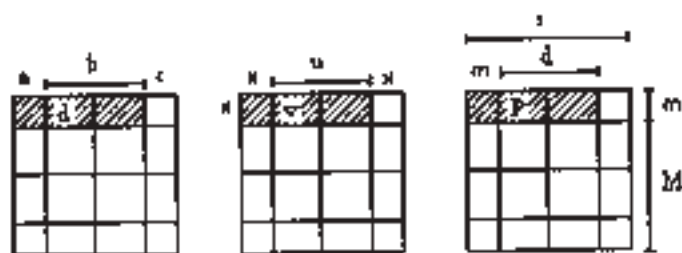


Lo singular de este caso es que el número que se divide no es abc , sino ab , pero en [3] se le añade c 'igual a a '³⁷ con el fin de poder recomponer abc e reinterpretar las cantidades del enunciado con el significado que tienen en [1-5]: el número inicial se convierte en la parte mayor, la parte desconocida en la parte menor, la parte conocida en la diferencia entre las partes y el otro número dado (el producto de la parte desconocida por sí misma y por la otra) en el producto de las partes. Esta interpretación permite identificar los números dados con los que aparecen en la hipótesis de 1-5 (diferencia y producto de las partes) y afirmar por tanto en [7] que la suma y las partes están dadas. El cuadro siguiente relaciona las letras que aparecen en el argumento, el significado que tienen según el enunciado, el significado que tienen en la interpretación que permite identificar las cantidades dadas con las de la hipótesis de 1-5, la expresión de este segundo significado en la notación anteriormente introducida y una traducción al lenguaje simbólico de las ecuaciones

las letras del argumento	significado en el enunciado	significado en la interpretación	expresión en la notación introducida	expresión en el lenguaje "aritmético"
a	la parte no dada	la parte menor	m	x
b	la parte dada	la diferencia	d	u
ab	el número que se divide	la parte mayor	md	$x+u$
c	un número igual a a	la parte menor	m	x
d	la parte no dada por sí misma y por la parte dada, la otra cantidad dada	el producto	p	$y(x+u)u$ $x^2+ux=0$
abc	el número que se divide más la parte no dada	el todo	s	

37. El que una misma cantidad se designe explícitamente con dos letras diferentes a y c es una muestra del uso que hace Nemorarius de las letras como marcas de las cantidades que va componiendo a lo largo del argumento, cantidades que, de alguna manera, tiene representadas en un lenguaje que no muestra y que parece tener las características del lenguaje euclidiano para los números.

Las figuras siguientes ilustran las correspondencias entre las notaciones y el significado que adoptan en el 'cuadruple cuadrado'



Finalmente, esta interpretación se refleja en la tercera parte de la proposición, en que el ejemplo concreto se resuelve aplicando la regla algorítmica correspondiente a I-5, esto es,

$$m = \frac{1}{2} (\sqrt{4p \cdot d^2} - d),$$

o, usando las letras de la reducción al lenguaje cartesiano,

$$x = \frac{1}{2} (\sqrt{4v + u^2} - u).$$

Proposiciones que se reducen a I-7

En el libro I hay varias proposiciones que Memorarius reduce a la proposición I-7. El enunciado de I-7 puede esquematizarse así: un número dividido en dos partes, una dada y otra no, tal que la parte que no ha sido dada multiplicada por sí misma y por la parte que ha sido dada es un número dado. Para realizar la reducción a I-7 lo que hace Memorarius es construir a partir de las cantidades dadas en la hipótesis del enunciado una cantidad (que estará dada) y que puede interpretarse también en el sentido que tiene la segunda cantidad dada en el enunciado de I-7, es decir, como algo que no ha sido dado, por sí mismo y por algo que ha sido dado, pero sin referencia ya a ningún número inicial que se divida. La hipótesis de la proposición I-7 se usa así como si fuera algo parecido al molde formal $x(x + u) = v$, o $x^2 + ux = v$.

Examinaremos algunas de las proposiciones en que Memorarius utiliza esta reducción al molde formal de I-7, en concreto las cinco primeras en que lo hace, I-9, I-11, I-15, I-16, I-17, y la última del libro, I-29, que es especial. En el cuadro siguiente se resume cuáles son las cantidades dadas en cada proposición, cómo se construye a partir de ellas la cantidad v , qué forma adopta la reducción a I-7, cuál es en ella la cantidad dada u , y qué relaciones se usan para pasar del significado de v producto de su construcción al significado del molde

formal algo que no ha sido dado por sí mismo y por 'algo que ha sido dado'.

Prop.	Cantidades dadas	r	Forma de la reducción	x	Relaciones usadas
I-9	$s, sd+M^2$	$s^2+(sd+M^2)$	M^2+2sM	$2r$	$2M=r+d$ $r=2M-2sM$
I-11	$s, sd+p$	$s^2-(sd+p)$	w^2+em	s	$s=d+2e$ $ms=mb+em^2$
I-15	$s, s+d$	$4s+d-[s^2-(s+d)]$	d^2+2d	2	$2s_1=s^2-s^2$
I-16	$s, p+d$	$2(p+d)-[s^2-2(p+d)]$	$(d-4)^2+4(d-4)$	4	$1Ver\ m.10f$
I-17	$s, p/d$	s^2	$s^2+4(p/d)d$	$4(p/d)$	$s^2=d^2+4p$
I-29	$s, sm-M^2$	s^2	M^2+sM	s	$1Ver\ m.10f$

Aunque todas estas proposiciones comportan el esquema que acabo de mostrar, la manera en que en cada uno de los argumentos se establece los dos significados de la cantidad dada que permiten recurrir al molde de I-7 difiere sustancialmente de un caso a otro.

Así, en I-9, Nemomius construye la cantidad $s^2 + (sd + M^2)$ primero directamente introduciendo letras por orden alfabético para nombrar las cantidades presentes:

ab dividido en *a* y *b*, cuya diferencia *c*, y *ab* por *e* resulte *d*, y *a*, que es la parte mayor, por sí misma resulte *e*, y todo de estará dado. Y *ab* por sí mismo resulte *f*. Así que toda *def* está dado.³⁸

Una vez construida la cantidad que él designa por *def* a partir de cantidades dadas, afirma sin más explicación que '*abc* es el doble de *a*',³⁹ esto es, que el todo con la diferencia es igual al doble de la parte mayor ($s+d=2M$, en la notación que he introducido), y, a partir de esta relación deriva otro significado para su *def*. La derivación, traducida a un lenguaje que no es el de Nemomius, puede esquematizarse así: $s+d=2M$

38. *Esto ab divinus in a et b, quorum differentia c, atque ab in c fiat d, et de a, qui est maior, in se fiat e, atque totus de abus. Sed et ab in se fiat f. Quare totus def abus est.*

39. [*Quia abc duplex est a [...]*]

$\Rightarrow s^2 - s d - s \cdot 2M \rightarrow s^2 + s d = 2 s \cdot 2M \rightarrow s^2 + s d + M^2 = M^2 + 2 s \cdot 2M$.
 Con lo que Nemorarius concluye, como *def* ha sido dado y el doble de *ab* ha sido dado, *a* será dado y, por tanto, *b*.⁴⁰

En I-11, Nemorarius no se preocupa de construir primero la cantidad correspondiente a la *v* del molde formal, no utiliza ni una sola letra en el argumento y comienza directamente a partir de una relación que menciona explícitamente. El texto del argumento, acompañado de una traducción a la notación introducida, es el siguiente:

Llamo el todo es igual a la $s + d + 2m$
 diferencia y al doble del menor,

el todo por si mismo es el por la $s^2 = s(d - 2m)$
 diferencia y el doble del menor

Pero el menor por el todo es lo $ms - mM + m^2$
 mismo que por el mayor y por el mismo.

Por tanto, si se quita del cuadrado del $s^2 + (sd - mM) = m^2 + ms$
 todo lo que hace el todo en la diferencia
 y el menor en el mayor, quedará el menor
 por si mismo y por el todo dado.⁴¹

En I-15, no hay más argumento que la afirmación de que es manifiesto que $(sc + d) \cdot [s^2 - (sc + d)]$ es igual a $d^2 + 2d$ ('dos veces la diferencia y el cuadrado de ella misma'. Nemorarius no usa ninguna letra en esta proposición, nombrando las cantidades por su significado) y que esta última cantidad es la misma que 'la diferencia por si misma y por dos',⁴² y la conclusión 'por consiguiente, la diferencia será dada'.⁴³

40. *Quiaque def sit datum sed et duplum ab, erit et a datum et idem b*

41. *Cum sit autem totum ea differentia et duplo minus dividendum comparatur, tantum erit totum in ea, quanta sit semel in differentiam et minor parvo bis in ipsum. Sed minus et totum, tantum est quantum in maiorem et in se. Si ergo quod sit ex toto in differentiam cum ea, quod in maiore dividendum in reliquam saltemur de quadrato totius, remanebit quod sit ex minus in se et in totum datum. Sic ergo ex premissis et ipsum datur erit et reliquum*

42. Para que encaje en el molde de I-7, Nemorarius no puede detenerse en la primera expresión. Yo estoy escribiendo s^2 tanto para lo que Nemorarius dice 'el cuadrado de *s*', como para 'el por *s*', pero, como en este caso, a menudo Nemorarius distingue entre las cosas, indicando explícitamente el paso de la una a la otra.

43. *Fit de quadrato totus si detractum fuerit manifestum vel relinqui minus detracto, quantum est differentia hic cum quadrato totius. hoc est, quod sit ex ipso in se et in huiusmodi quod sit datum. Quia et differentia dato erit*

1-16 es más complejo y más interesante. Transcribo el argumento de nuevo en dos columnas, una con el texto de *Nemorarius* esquematizado y la otra con una traducción del estilo de las anteriores.

Sea ab el número dividido	a
a por b mas la diferencia sea e	$p + d$
el doble de lo anterior sea d	$2(p + d)$
ab por ab sea e	a^2
e menos d sea f	$a^2 - 2(p + d)$
Si f fuera menor que d , véase cuánto	$a^2 - 2(p + d) < (p + d)$
Si fuera 4 , la diferencia sería 2	Si $2(p + d) \cdot [a^2 - 2(p + d)] = 4$, entonces $d = 2$
Si fuera 3 , la diferencia sería 3 u 1 ,	Si $2(p + d) \cdot [a^2 - 2(p + d)] = 3$,
asi que no se podría determinar	entonces $d = 3$ o $d = 1$
Si f fuera igual que d , la diferencia sería 4	Si $a^2 - 2(p + d) = 2(p + d)$, entonces $d = 4$
Si f fuera mayor que d , veamos cuánto	$a^2 - 2(p + d) > 2(p + d)$
y sea g	$a^2 - 2(p + d) = 2(p + d)$
g será el producto del resto de la diferencia y el doble de dos, por si mismo y por eso doble ⁴⁴	$(d - 4)(d + 4 + 4)$
	(Ver nota)

El centro del argumento reside en ese examen de las posibilidades que pueden presentarse para la diferencia entre $a^2 - 2(p + d)$ y $2(p + d)$ y qué pasa con la diferencia entre las partes en cada una de ellas

44. Sit ab numerus divisus et quod sit ex a .n b adita differentia sit c, ut ipsum duplicet: sit d. Quadratum autem situr sit e de quo detracto d remanet f. Qui si fuerit minor d, videatur quanto. Quia si uti differentia erit duo. Si minus, differentia erit tres vel unum. Nud hoc determinare non potest. Si equales fuerint d et f, differentia erit unum. Si vero f excedit d, videatur quanto sique g. Et si que g, quod sit ut ducto dicit, quo differentia excedit duplum haurit in se et in illud duplum. Quare ex ipso dato erit, et tota differentia a ad h. dicitur

Nemorarius no muestra de dónde proceden los números que da para la diferencia entre las partes: una posible reconstrucción es la que sigue

$$1) \text{ Cuando } s^2 - 2(p-d) < (p+d),$$

$$2(p+d) - [s^2 - 2(p+d)] = 2p + 2d - s^2 + 2p + 2d = 4p + 4d,$$

$$\text{pero } 4p + 4d = -d^2,$$

$$\text{así que, finalmente, } 2(p+d) \cdot [s^2 - 2(p+d)] = 4d \cdot d^2.$$

Hughes dice en su comentario que Nemorarius resuelve ahora la ecuación $4d - d^2 = t$, para varios valores de t . A mi entender es más plausible que tanteara simplemente los valores enteros de d que hacen que $4d - d^2 > 0$, y diera así los valores para ambas diferencias 4, que viene de $d=2$, y 3, que viene de $d=1$ o de $d=3$.

$$2) \text{ Cuando } s^2 - 2(p+d) = 2(p+d),$$

$$s^2 - 4p = 4d,$$

$$\text{pero } s^2 - 4p = d^2,$$

$$\text{así que } d^2 = 4d,$$

$$\text{y } d = 4.$$

3) En los dos casos anteriores han aparecido los valores de d 1, 2, 3 y 4, a partir de 5, $s^2 - 2(p+d) > 2(p+d)$ y entonces $s^2 - 2(p+d) - 2(p+d) = s^2 - 4p - 4d = d^2 - 4d$,

que Nemorarius escribe finalmente $(d-4)(d-4+4)$ para que se corresponda con el molde formal de la hipótesis de I-7 'algo que no ha sido dado por sí mismo y por algo que ha sido dado', en este caso $d-4$ y 4.

Por otro lado, si el problema correspondiente a esta proposición 'encontrar dos números dadas su suma, s , y la suma de su producto y su diferencia, $p+d$ ', se resuelve en el lenguaje del álgebra simbólica, el discriminante de la ecuación de segundo grado correspondiente es $d^2 - 4d + 4$, lo que permitiría interpretar de otra manera los tres casos que distingue Nemorarius, pero esa interpretación introduciría elemen-

los extraños a lo que Nemorarius está haciendo. En efecto, como el enunciado de la proposición es un teorema y no un problema, no cabe plantear las condiciones de posibilidad de la solución ni introducir ningún *diorsismos* que las haga explícitas: lo que se da para encontrar los números desconocidos no son números arbitrarios —arbitrariedad que podría conducir a que el problema fuera imposible—, sino que, al contrario, se tiene dado un número dividido realmente en dos partes, con lo que, como las partes existen, no hay que preocuparse por condiciones de posibilidad.⁴⁵ Lo que a Nemorarius le preocupa es de otra índole, a saber, que no pueda saber cuál es la división que efectivamente se ha hecho del número dado, porque tiene dos posibilidades, lo que sucede en el caso en que $4d-d^2-1$.

El argumento de I-17 no es tan complejo, pero vale la pena mostrarlo por lo fulminante: como lo que ha sido dado es *p:d*, a partir de la relación ya usada en otras ocasiones x^2-d^2+4p , Nemorarius reescribe $4p$ como $d \cdot 4p/d$, para encontrar en esa misma relación el molde de I-7, como puede verse en el cuadro anterior.

Finalmente, la proposición I-29, que es la que cierra el libro I, es singular por varios motivos. En primer lugar, lo que se da en la hipótesis no es una cantidad, sino una relación: el producto del todo por la parte menor es igual al cuadrado de la parte mayor ($sw = M^2$), es decir, una relación equivalente a la que define la división de un segmento en media y extrema razón. En segundo lugar, como consecuencia de la relación implicada, el enunciado no afirma que las partes estarán dadas, sino que estarán dadas *ad proximum*. Esto es totalmente ajeno a la tradición aritmética griega y no encaja, por otra parte, con el resto de las proposiciones de este libro, en las que los números aunque los hayamos visto representados como segmentos a la manera euclídea, son números. Sin embargo, parece que Nemorarius se deja llevar por la posibilidad de encajar las condiciones de una situación tan famosa como la división de un segmento en media y extrema razón en el molde formal de I-7 para afirmar que las partes de esa división —efectuadas

45. En general, Nemorarius no introduce *diorsismos* equivalentes a los discriminantes de las ecuaciones de segundo grado que se pueden escribir como traducción al lenguaje del álgebra simbólica de sus proposiciones. El que la explicación de ello sea la que he esbozado puede apoyarse examinando por ejemplo algunas de las proposiciones en que Euclides trata de la aplicación elíptica de áreas. Así, la proposición VI-28 de *Los Elementos*, que es un problema, que contiene un *diorsismo* que es equivalente a que el discriminante sea positivo, pero la proposición II-5, que es un teorema, no lleva ningún *diorsismo*. En II-5, se habla de partes de una figura que está efectivamente dividida y se trata de probar que ciertas relaciones entre ellas son verdaderas; en VI-28, no se habla de partes de una figura, sino de figuras independientes, y se trata de hacer algo, luego cabe que no pueda hacerse. Además, las proposiciones del Libro que tratan de la aplicación elíptica de áreas (58 y 85) tampoco llevan *diorsismos*.

en un número y no un segmento— están dadas, ya que sabe cómo calcularlas gracias a la regla algorítmica correspondiente a 1-7.

La reducción es, de hecho, muy simple: como $sm = M^2$ y $s^2 = s(m + M)$, $s^2 = M^2 + sM$, estando dados s y s^2 , lo que corresponde al molde $x^2 + ux = v$, o algo que no ha sido dado, por sí mismo y por algo que ha sido dado, y Nemorarius puede concluir sin más preocupaciones que las partes están dadas.

La regla algorítmica del problema de 1-7 se corresponde con la fórmula

$$x = \frac{1}{2} (\sqrt{4v + M^2} - M),$$

que, en este caso, se convierte en

$$x = \frac{1}{2} (\sqrt{4s^2 + s^2} - s)$$

En la tercera parte de la proposición, Nemorarius plantea el problema "dividase 10 en dos partes tales que el todo por una parte sea igual a la otra parte por sí misma" y aplica el algoritmo correspondiente a esa fórmula para resolverlo. Al hacer los cálculos concretos obtiene 500 para $4s^2 + s^2$ y dice 'extraigase su raíz *ad proximum*, y será 22 $\frac{1}{2}$ ', tras lo que sigue aplicando el algoritmo hasta obtener 6 $\frac{1}{2}$ para la parte mayor.⁴⁶

Cualquier interpretación de lo que hace aquí Nemorarius es muy arriesgada. El número 10 no puede dividirse de esa manera, si es un número, y Nemorarius ha estado tratando durante todo el libro I con números.⁴⁷

Si es una magnitud, Nemorarius debe saber que la parte mayor de esa división no es conmensurable con ella.⁴⁸ La consideración formal de la relación $x^2 + ux = v$ como un molde en el que x es una cosa —*shay'*— que puede ser tanto número como magnitud, y de la regla algorítmica que permite obtener x , también como una regla aplicable a cualquier cosa, permite olvidarse de tales dificultades, pero atribuirle a Nemorarius esa concepción algebraica no me parece coherente con lo que se deriva de su tratamiento de los objetos en otras proposiciones del libro.⁴⁹

46. Verbo gratia: *x dividatur in duo ita quod sit una in alterum fit, quantum reliquum sit se. Itaque x in se facit x , cuius dupli duplum sumatur, et erunt $4x^2$. Itaque addatur ut solet quadratum x et erunt $5x^2$. Cuius radix extrahatur ad proximum, et erit $22 \frac{1}{2}$ et tertio de quo tollatur x , et reliquum medietas erit $6 \frac{1}{2}$ et ipsum erit maior portio cuius ductenda est in se.*

47. Dicho de otra manera, esto no puede ser un problema aritmético, en el sentido en que lo son los problemas de *La Aritmética* de Diofanto (que, por otro lado, Nemorarius no menciona).

48. Pero, como es conmensurable en cuadrado con ella, en la tradición de Euclides es que es racional, no es irracional. Y, por otra lado, antes de Euclides se calculaba en casos similares como la raíz *ad proximum*, por ejemplo, en un famoso pasaje de *La República* de Platón.

49. Ver un esquema del conjunto del libro I en el Anexo.

Algunas conclusiones provisionales

El aspecto general de las proposiciones de este libro ha quedado ya ilustrado en los apartados anteriores.

Los enunciados tratan de un número dividido en dos partes. El número o alguna de las partes y alguna(s) cantidad(es) construida(s) a partir de ellas han sido dadas. Se trata de probar que las partes (y el número, si es el caso) están también dadas.

En los argumentos, las cantidades se nombran en unas ocasiones por su significado y en otras mediante letras.⁵⁰ Cuando hay letras, éstas son marcas para designar las cantidades que se van construyendo y aparecen por orden alfabético (o bien con arreglo a una 'disposición anterior'), sin distinguir las cantidades que han sido dadas de las que no de ninguna manera.⁵¹ No hay ninguna operatividad sintáctica con las letras, excepto la yuxtaposición para indicar la adición, así, cuando se construye una cantidad a partir de otras ya designadas mediante cualquier operación que no sea la adición, es preciso introducir una nueva letra para designarla, sin que puedan combinarse las letras correspondientes para ello (por ejemplo, para designar a por α , no hay ninguna manera de aprovechar la α hay que introducir una β). Además, una misma cantidad puede aparecer representada por más de una letra. Cada letra no representa un número, sino la instancia de aparición de un número en el curso del argumento. El uso de las letras es pues equivalente al de los libros aritméticos de *Los elementos* de Euclides: dos segmentos iguales en una figura están designados por letras distintas, la yuxtaposición de letras es la de segmentos, el conjunto de las letras que aparecen en el curso de un argumento representan 'disposiciones' de los números (o los segmentos). Las relaciones entre las cantidades no pueden pues obtenerse en el nivel sintáctico del sistema de signos (o subsistema de signos) constituido por las letras, sino que

50. En concreto, Nisiorarius no usa letras en las proposiciones 1, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 17, aunque en alguna de ellas tiene que recurrir a nombres realmente complejos para designar las que le aparecen. En los libros II y III, como tratan de proporciones, le es más fácil nombrar las cantidades como 'la primera proporcional', etc., por lo que no usa letras en un mayor número de proposiciones (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 13), 15, 16, 17, 18 y 19 del libro II; 1, 2, 3, 4, 10, 11, 14, 15, 16, 18, 20 y 23 del libro III). En el libro IV no las usa en las proposiciones 2, 7, 21, 22, 23, 32, 33 y 34.

51. En el libro IV, hay cinco proposiciones (27 a 31) que presentan una excepción a esta norma general. En ellas, Nisiorarius usa los términos del algebra raíz [*radix*], y cuadrado [*quadratus*], y reserva la letra u para la raíz o introduce por orden alfabético las que le hacen falta para las cantidades que aparecen, excepto cuando aparece el cuadrado, que designa con la letra z .

han de obtenerse recurriendo a su significado o a su representación en otro sistema de signos que no aparece explícitamente.

El análisis que se desarrolla en los argumentos ha de hacerse por tanto examinando el significado de las cantidades y construyendo alguna o algunas que puedan verse con dos significados. Los significados que están presentes son el todo (v), la parte mayor (ab), la parte menor (m), la diferencia de las partes (d), el producto de las partes (p) y otros derivados de éstos (suma de los cuadrados de las partes, *s.* etc.) Ciertas relaciones entre esas cantidades —que casi nunca se mencionan y nunca se demuestran sino que se dan por aceptadas—⁵² se usan para ver los dos significados y para derivar que, si las cantidades de la hipótesis están dadas, también lo están las de la hipótesis de alguna otra proposición anterior ya demostrada, con lo que las partes o el número también estarán dados. En ocasiones, hay que reinterpretar el significado que las cantidades tienen en el enunciado de la proposición con el fin de traducirlas a las cantidades de otra proposición. Esta reinterpretación puede verse, en ocasiones, como el uso de un molde formal.

Las técnicas concretas de análisis son muy variadas y dependientes de cada proposición en concreto.

Finalmente, la tercera parte de cada proposición presenta un problema resuelto mediante la regla algorítmica que se desprende del encadenamiento y el despliegue de las relaciones usadas en el análisis en el argumento de esa proposición, y de las relaciones usadas en los argumentos de las proposiciones a que dicho análisis ha reducido la proposición en cuestión, si es el caso. Esa regla algorítmica se describe en su realización con números concretos, pero no usa las propiedades particulares de los números en cuestión, por lo que el ejemplo es paradigmático.

Coda: tres proposiciones del libro IV

Las proposiciones 8, 9 y 10 del libro IV se corresponden exactamente con las tres formas normales de al-Khwārizmī para las combinaciones posibles de números, raíces y cuadrados. Esta correspondencia está presente desde el propio enunciado de las proposiciones ya que, en ellos, Nemorarius no habla de un número, sus partes y cantidades construidas a partir de éstas, sino que usa los términos raíz [*radix*],

52. Esas relaciones de *Nemorarius* aquí ni se mencionan, las da por aceptadas ya que el mismo ha demostrado muchas de ellas en su *De Elementis Aristotele Aris.*

y cuadrado [quadratus], que vienen claramente de los términos de al-Khwárizmí raíz [*rad*], y cuadrado [*mal*].⁵³

Así, el enunciado de IV-8 es 'Si un cuadrado, sumándole su raíz multiplicada por un número dado, hace un número dado, él también estará dado'.⁵⁴ que podemos traducir al lenguaje simbólico así: $x^2 + ax = y$

El argumento, esquematizado, discurre del siguiente modo

- [1] Sea *a* el cuadrado,
- [2] su raíz *b*,
- [3] multiplicada por *cd*,
- [4] *c* y *d* son cada uno la mitad de *cd*,
- [5] y *b* por *cd* resulte *e*,
- [6] y sea *ae* dado.
- [7] Como *bcd* por *b* resulta *ae*.
- [8] el cuadrado de *d* añadido a *ae* se haga *ae'*
- [9] y *ae'* será el cuadrado de *bc*
- [10] Como *ae'* está dado, *bc* estará dado.
- [11] Restado *c*, quedará *b* dado
- [12] y así *a* estará dado.⁵⁵

Como advertimos al examinar por primera vez el argumento de I-3, lo que Nemonius escribe no muestra por qué en [3] designa al número dado que multiplica a la raíz con dos letras yuxtapuestas, *cd*, en vez de una, ni por qué en [4] estipula que esas dos letras son cada una la mitad, y, sobre todo, no muestra qué le permite afirmar en [9] que *ae'*, que acaba de construir en [8], tiene otro significado, que es lo que constituye la clave del argumento: de nuevo hay una relación que se usa sin mencionarla. Pero, en este caso, a diferencia de lo que he podido hacer en el examen de las proposiciones del libro I, no cabe recurrir a los significados de todo, parte, diferencia, etc., ni a relaciones entre cantidades con esos significados.

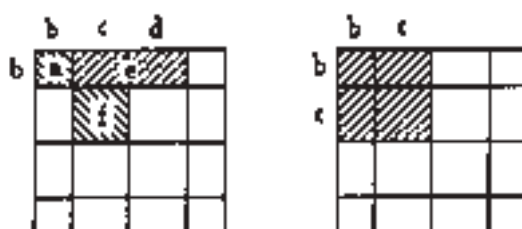
53 Siguiendo el artificio de Rashed escribo cuadrado, con la letra *c* inicial en cursiva, para traducir el árabe *mal* y distinguir así este término primitivo del álgebra de al-Khwárizmí del cuadrado geométrico o *quadratus* para el que al-Khwarizmi usa la palabra *murabá'*.

54 Si quadratus cum additione radice suae per datum numerum multiplicatus datum numerum faceret, ipse etiam datus erit.

55 Si quadratus a, radice eius b multiplicata per cd, ut sit c et d sui eius medietas, eque sit h in cd fit e, sitque ae datum. Quia igitur bcd recenditur b multiplicata facti ae quadrato d coniuncto ut se fiat ae'. Eratque aet, quod fit ex bc in se. Et utique si aet datus, ut et bc datus. Subtracto igitur a remanet b datus et sic a datus erit.

Es posible, sin embargo, representar las letras del argumento de Nemorinus en el 'cuádruple cuadrado'. Entonces, la relación clave que permite demostrar la proposición aparece como una relación entre áreas.

En efecto, la afirmación contenida en [9] equivale a la igualdad de las áreas

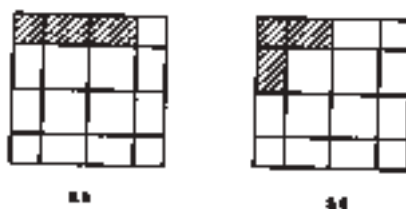


Pero esa disposición de áreas es idéntica a la que aparece en la proposición II-6 de *Los Elementos de Euclides*³⁶ —como puede verse siguiendo el enunciado de esa proposición de *Los Elementos* y las partes de la figura correspondientes en la proposición de Nemorinus en el cuadro a dos columnas que sigue— y el enunciado de Euclides afirma precisamente que la relación que aquí usa Nemorinus es verdadera

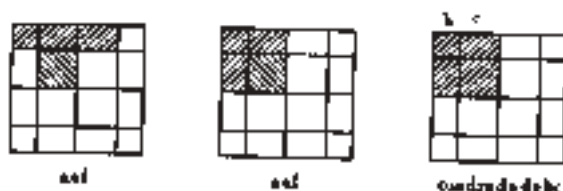
Si una línea recta se corta en dos partes iguales	ca
y si se le añade perpendicularmente una recta,	b
el rectángulo comprendido bajo la recta entera	
con la recta añadida,	e
y bajo la recta añadida,	a
con el cuadrado de la mitad de la recta entera,	f
es igual al cuadrado descrito con	
la recta compuesta de la mitad de la	
recta entera y la recta añadida como	
una única recta	el cuadrado de toda la

36. La aplicación de áreas que los griegos llamarán *hiperbólica* porque el rectángulo que se aplica a la recta 'sobra o cubre más'.

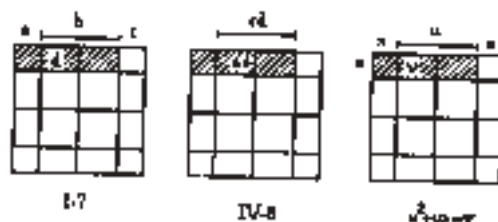
La demostración de Euclides se basa en la relación de igualdad entre el rectángulo y gnomon de la figura siguiente, basada en la igualdad de los pampletomas, que permite colocar ac de dos formas.



Con lo que



Por otro lado, el enunciado de esta proposición traducido al lenguaje del álgebra simbólica es el mismo que el de la traducción a ese lenguaje de la proposición I-7, que antes hemos examinado: en ambos casos, $v^2 + uv = v$.



Sin embargo, Neonorarius no parece reconocer esa identidad formal, ya que para probar IV-8 no recurre a una reinterpretación del enunciado para reconstruir el molde formal de I-7 —como vimos que hacía a menudo en el libro I—, sino que desencadena un análisis totalmente a propósito para IV-8, que no la reduce a otra proposición anterior, y ese análisis recurre a unas relaciones que no son las utilizadas en I-7. Más aún, como consecuencia de ello, la regla algorítmica que des-

pliega en el problema paradigmático y que corresponde al análisis efectuado en el argumento, es distinta de la regla algorítmica de I-7.⁵⁷ Así que, lo que desde el lenguaje del álgebra simbólica es la ecuación $x^2 + vx = v$, se resuelve de forma distinta en el texto de *Nemorarius*, según se trate de un problema sobre números y sus partes (I-7) o sobre raíces y cuadrados (IV-8).⁵⁸

Prop.	Enunciado	Argumento	Regla
I-7	un número dividido en dos partes, una dada y otra no, tal que la parte que no ha sido dada multiplicada por sí misma y por la parte que ha sido dada es un número dado	Reducción a I-5 Diferencia y producto dados	$x = \frac{1}{2}(\sqrt{4v+u^2} - u)$
IV-8	un cuadrado, sumándole su raíz multiplicada por un número dado, hace un número dado	Reducción a aplicación hipotética de áreas	$x = \sqrt{v + \left(\frac{u}{2}\right)^2} - \left(\frac{u}{2}\right)$

Las proposiciones IV-9 y IV-10 se corresponden con las otras dos formas normales de al-Khwārizmī y también están enunciadas en los términos primitivos del álgebra de al-Khwārizmī, número, raíz y cuadrado. Los argumentos también recurren a relaciones entre áreas y las reglas algorítmicas son equivalentes a las dadas por al-Khwārizmī. En lo que sigue muestro de forma esquemática la proposición IV-9;⁵⁹ la proposición IV-10, que equivale a $ax + v = x^2$, puede examinarse de forma similar.

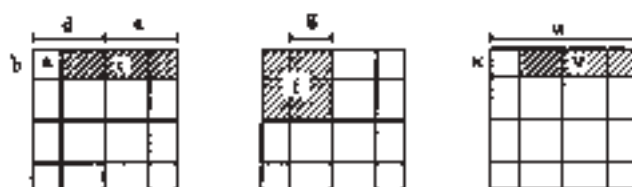
El enunciado de IV-9 es equivalente a la ecuación $x^2 + v = ax$.

Las letras que usa en el argumento se disponen en el 'cuadruple cuadrado' como muestra la figura

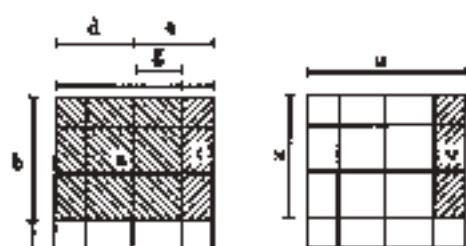
57. Las expresiones algebraicas son equivalentes, lo que visto desde el lenguaje del álgebra simbólica es algo obvio, pero en el texto de *Nemorarius* esto no puede verse, por que son reglas algorítmicas que representan la serie de operaciones que hay que realizar.

58. Ilievup [1988] interpreta esta doble aparición de la ecuación $x^2 + vx = v$ de forma diferente, para ser coherente con su interpretación general de *De Numeris Datis* como tratado de aritmética teórica, que demuestra y transforma el álgebra árabe, hacia entonces una *ingeniería científica*, integrándola como tal aritmética teórica en el *quadratum latinum*.

59. Digo de todo la complicación que para *Nemorarius* supone el que haya dos posibles soluciones y sólo exponga lo que corresponde a una de ellas. Como hay dos posibilidades, *Nemorarius* no puede decir en el enunciado que la raíz y el cuadrado "estarán dados", sino sólo *contingit dupliciter assignari*.

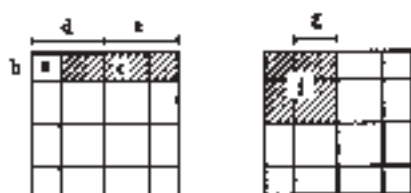


O bien así

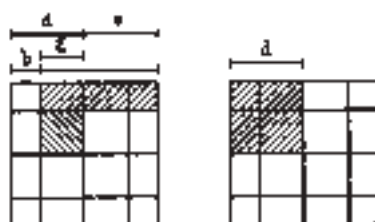


El argumento esquematizado es:

- [1] Sea igual que antes a el cuadrado,
- [2] su raíz b ,
- [3] c el número dado que se suma
- [4] de el número dado por el que multiplicado b resulta ac ,
- [5] d , la mitad de de ,
- [6] y f el cuadrado de d .
- [7] Y la diferencia entre b y d , sea g .

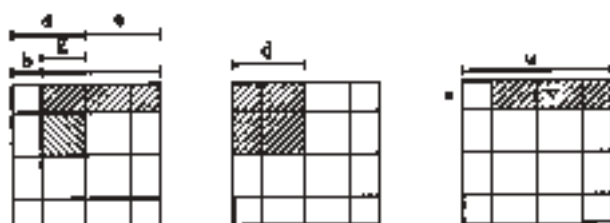


- [8] Luego, ya que b por dos veces d resulta ac ,
- [9] la suma de a y f superará a ac en el cuadrado de g .



- [10] E. igualmente quitado a de ambos,
 [11] f superará a c en el cuadrado de g .
 [12] Quitado g de d , puede quedar b .
 [13] y añadido g a d , puede resultar b .
 [14] Así que a se asignara de dos maneras⁶⁰

Y la relación clave es equivalente a la proposición II-5 de *Los Elementos de Euclides*⁶¹



- Si una línea recta de
 se corta en partes iguales a y e
 y en partes desiguales⁶² b
 el rectángulo bajo los segmentos c

60 *Si enim extra quadrato a radice b, numerus datus additus e, angulo de datus in quo b datus facit ac, cuius medietas d, et ipse quadratus f, usque differentia d ad u in g. Quia gatur h in d bis facit ac, additur a et f super un quadratum g. Itaque a un angulo dempto addit f super e quadratum g. Dempto vero g de u pariet numerus b et addito g ad u pariet facit b quare dupliciter a in g datur a*

61 La aplicación de áreas que los griegos llamaron *aléptica*, porque el rectángulo que se aplica a la recta "falta o se queda corto"

62 Las dos soluciones dependen de cual de las dos partes desiguales sea la raíz. Aquí se representado el caso en que b es la parte menor. Numerosus define g como "la diferencia entre d y d' y esa represento en él significa que no sabe cuál de las dos cantidades b y d es mayor, de modo que b será d más o menos g ."

desiguales de la recta entera

con e. cuadrado de la recta colocada
entre las secciones

el cuadrado de g

es igual al cuadrado de la mitad de la recta entera

f

Que Euclides demuestra también mediante una igualdad entre rec-
tángulo y gnomon.



La solución del problema paradigmático $x^2 + 8 = 6x$, que corres-
ponde al análisis efectuado en el argumento, es la siguiente.

La mitad de 6, que es 3,

$\frac{u}{2}$

multiplicada por sí, resulta 9,

$\left(\frac{u}{2}\right)^2$

que añade 1 sobre 8,

$\left(\frac{u}{2}\right)^2 - v$

cuya raíz es 1,

$\sqrt{\left(\frac{u}{2}\right)^2 - v}$

que será la diferencia

$\left|x - \frac{u}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{u}{2}\right)^2 - v}$

quitada y añadida a 3, tendremos

2 y 4, cuyos cuadrados son 4 y 16.

$x = \left(\frac{u}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{u}{2}\right)^2 - v}$

Alládase 8 a uno y otro, y resultan
12 y 24, que es lo que hace 6 en 2 y
en 4, según lo que se había propuesto.⁶³

Así que la regla algorítmica es

$$x = \left(\frac{u}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{u}{2}\right)^2 - v}$$

Esta regla sólo puede aplicarse cuando

$$\left(\frac{u}{2}\right)^2 > v,$$

pero Nemorarius tampoco introduce en esta ocasión ningún diorismo para tener en cuenta este hecho. Como ya he indicado en la nota 27 cabe explicar esta ausencia de diorismo porque Nemorarius ha enunciado un teorema, como Euclides en la proposición II-5 de *Las Elementos*, y no un problema. Al-Khwárizmí, sin embargo, que enuncia su proposición correspondiente como un problema, sí que discute el discriminante y precisa que si

$$\left(\frac{u}{2}\right)^2 = v,$$

entonces la raíz del cuadrado es igual a la mitad de las raíces, sin excedente ni disminución, y que, si

$$x = \left(\frac{u}{2}\right)^2 < v,$$

'entonces el problema es imposible'.⁶⁴

He querido mostrar con el examen de estas proposiciones cómo Nemorarius no reconoce como iguales proposiciones que, expresadas en el lenguaje del álgebra simbólica, resultan serlo. Y que esto no sólo tiene como consecuencia que las enuncie como proposiciones distintas, sino que el significado que asigna a las cantidades que construye en el argumento, los mecanismos de análisis que utiliza y las reglas algorítmicas que encuentra son muy diferentes. Esas proposiciones no

63. *Partis prima. Sit quadratus, qui cum additione unius faciat numerum, quem radice sua per se multiplicato producat. Ideo dicitur ergo vi, quod est vi, ut se dicitur factu x, qui addit unum facit vii, cuius radice constat, quod est differentia completa et radice tenentem habebimus duo de vii, quorum quadrata quatuor et xvi. Utique quatuor additum vii et factu xii et xvi quod sunt se dicitur totum in duo et quatuor, prout dicitur quod proponitur factu vii.*

64. La edición del álgebra de al-Khwárizmí que he manejado ha sido la de Rosen. Aquí he tenido en cuenta también la traducción al francés que hace Rashid de este fragmento en *L'Algebre selon al-Khwárizmí*, recogida por Rashid (1984a).

solo aparecen como iguales en el lenguaje del álgebra simbólica, sino también en la representación que yo he hecho en el —cuadruple cuadrado—. Cabe pensar que o bien Memorarius no tuvo presente ninguna representación geométrica, lo que me parece altamente improbable, o bien consideraba que las proposiciones trataban sobre objetos distintos, y esto le hacía no considerar la posibilidad de relacionarlas. He apuntado que en estas proposiciones del libro IV Memorarius habla de los objetos del álgebra de al-Khwārizmī y no de números y sus partes, y quizá es la naturaleza de los objetos de lo que Memorarius no puede desprenderse. Pero para poder decir algo más preciso sobre esto habría que examinar en detalle las proposiciones de los libros II y III, que tratan de proporciones, y la totalidad de las proposiciones del libro IV en que aparecen raíces y cuadrados: ésa es una tarea que pienso abordar en la continuación de esta indagación.⁶¹

61. Sólo quiero añadir que en el libro IV aún hay otro tipo de objetos: las proposiciones 19 a 22 hablan de losos y cuadrados. Y, por ejemplo, en IV-19, cuyo enunciado equivale a que el producto y la suma de cuadrados hayan sido dados, lo que se puede reducir a 1-3 de forma fulminante con la relación $s^2 = s_r + 2p$. Memorarius recurre en el argumento a establecer proporciones. No puedo dejar de pensar que lo hace porque son *la dos* y *no números*.

Prop.	Datos	Ecuaciones	Resol.	Forma de la reducción ¹	Regla algorítmica
[3]	s, d	$x+y=s$ $x-y=d$	dir.	Relación $2m+d=s$	$m = \frac{1}{2}(s-d)$
[5]	s, p	$x+y=s$ $xy=p$	[1]	$d = \sqrt{s^2 - 4p}$	$m = \frac{1}{2}(s - \sqrt{s^2 - 4p})$
[4]	s, s_1	$x+y=s$ $x^2+y^2=s_1$	[1]	$d = \sqrt{s_1 - (s^2 - s)}$	$m = \frac{1}{2}(s - \sqrt{s_1 - (s^2 - s)})$
[1-5]	d, u	$x-u=s$ $xy=p$	[1]	$s = \sqrt{2(p) + d^2}$	$m = \frac{1}{2}(\sqrt{2(p) + d^2} - d)$
[6]	d, s_1	$x-y=s$ $x^2+y^2=s_1$	[1]	$s = \sqrt{s_1 + (s - d^2)}$	$m = \frac{1}{2}(\sqrt{s_1 + (s - d^2)} - d)$
[7]	M, ms	$x(x+u)=p$ $x^2+ux=v$	[1-5]	Interpretación: $M \rightarrow u, ms \rightarrow p$	$m = \frac{1}{2}(\sqrt{2(2ms) + M^2} - M)$ $s = \frac{1}{2}(\sqrt{2(2ms) + u^2} - u)$
[6]	$s, sd+md^2$	$x+y=s$ $(x+y)(x-y)+y^2=sd$	dir.	Relación $sd+md^2=6d^2$	$M = \sqrt{r}$
[9]	$s, sd+Md^2$	$x+y=s$ $(x+y)(x-y)+x^2=sd$	[7]	$M \rightarrow x$ $2s \rightarrow u$ $s^2+r \rightarrow v$	$M = \frac{1}{2}(\sqrt{2(2s) + r} + (2s)^2 - 2s)$
[10]	$s, sd+sd^2$	$x+y=s$ $(x+y)(x-y)+x^2+y^2=sd$	dir.	Relación $sd+s^2=2Md^2$	$M = \frac{1}{\sqrt{2}}r$
[11]	$s, sd+yp$	$x+y=s$ $(x+y)(x-y)+x^2+y^2=yp$	[7]	$M \rightarrow x$ $s \rightarrow u$ $s^2-r \rightarrow v$	$m = \frac{1}{2}(\sqrt{2(s^2 - r)} + s^2 - s)$

1-13	$s, p+d^2$	$x+y=s$ $x^2+y^2-(x-y)^2=r$	1-1	Las relaciones $s^2-s=2p$, $yzp+d^2-s$ conducen a $d = \sqrt{\frac{1}{3}[r-(s^2-r)]}$	$m = \frac{1}{2} \left[s - \sqrt{\frac{1}{3}[r-(s^2-r)]} \right]$
1-13	$s, p+d^2$	$x+y=s$ $xy+(x-y)^2=r$	1-12	Relación $2(p+d^2)=s^2-10^2$	$m = \frac{1}{2} \left[s - \sqrt{\frac{1}{3}[2r-(s^2-2r)]} \right]$
1-14	s, d^2c	$x+y=s$ $x^2-y^2=r$	dir.	$s^2-d_1=2m^2+2p$ $m^2+p=3me$	$m = \frac{1}{2}(s^2-d_1)$
1-15	s, s^2+d	$x+y=s$ $x^2-y^2+(x-y)^2=r$	1-7 (1-1)	$d \rightarrow x$ $2 \rightarrow y$ $r-(s^2-r) \rightarrow z$	$d = \frac{1}{2} \left[\sqrt{2[2r-(s^2-r)]} + 2^2 - 2 \right]$ $m = \frac{1}{2} \left[s - \frac{1}{2} \left[\sqrt{2[2r-(s^2-r)]} + 2^2 - 2 \right] \right]$
1-16	$s, p+d$	$x+y=s$ $xy+(x-y)r$	1-7 (1-1)	Tres casos; uno de ellas. $d \rightarrow x$ $d \rightarrow y$ $2r-(s^2-2r) \rightarrow z$	$d = s - \frac{1}{2} \left[\sqrt{2[2r-(s^2-2r)]} + 4^2 - 4 \right]$ $m = \frac{1}{2} \left[s - \left[4 + \frac{1}{2} \left(\sqrt{2[2r-(s^2-2r)]} + 4^2 - 4 \right) \right] \right]$
1-17	$s, p/d$	$x+y=s$ $\frac{xy}{x-y} = r$	1-7 (1-1)	$d \rightarrow x$ $4r \rightarrow z$ $s^2 \rightarrow v$	$d = \frac{1}{2} \left[\sqrt{2[2r^2] + (4r)^2 - 4r} \right]$ $m = \frac{1}{2} \left[s - \frac{1}{2} \left[\sqrt{2[2r^2] + (4r)^2 - 4r} \right] \right]$
1-18	$s, 4c/d$	$x+y=s$ $\frac{x^2+y^2}{s-y} = r$	1-5	La interpretación $2s_1/d \rightarrow s$ y $d \rightarrow m$ y la relación $s^2+d^2=2s_1c$ dan $s^2 \rightarrow p$	$m = \frac{1}{2} \left[s - \sqrt{(2r)^2 - 4s} \right]$

I-19	$s, M/m$	$x+y=s$ $x/y=r$	dis.	$m \frac{M}{m} - M$	$u = \frac{s}{r+1}$
I-20	$s, \frac{M}{m} + \frac{m}{M}$	$x+y=s$ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = r$	I-3	Proporciones conducen a $p = \frac{y^2}{r+2}$	$m = \frac{1}{2} \left(s - \sqrt{s^2 - 4 \frac{p^2}{r+2}} \right)$
I-21a	$s, \frac{r}{m} + \frac{m}{M}$	$x+y=s$ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = r$	I-3	La relación $\frac{1}{s} s^2 = \left(\frac{r}{m} + \frac{1}{M} \right) mM$ conduce a $p = \frac{sr}{r+1}$	$m = \frac{1}{2} \left(s - \sqrt{s^2 - 4 \frac{sr}{r+1}} \right)$
I-22a	$s, \frac{r}{m} + \frac{m}{M}$	$x+y=s$ $\frac{r}{x} + \frac{1}{y} = r$	I-3	Proporciones conducen a $p = \frac{r^2}{r+1}$	$m = \frac{1}{2} \left(s - \sqrt{s^2 - 4 \frac{r^2}{r+1}} \right)$
I-23	$s, \frac{r}{m} + \frac{1}{M}$	$x+y=s$ $\frac{r}{x} + \frac{1}{y} = r$	I-15	Proporciones conducen a $\frac{M}{m} = \frac{r}{r+1}$	$m = \frac{s}{r+1}$
I-24	$s, s, \frac{M}{m} + \frac{1}{n} \times \frac{m}{M} = r$	$x+y=s$ $x + \frac{1}{n} \times \frac{y}{m} = r$	I-7	Tres casos; uno de ellos: $\frac{1}{n} \times \frac{M}{m} \rightarrow x$ $\frac{1}{n} \times \frac{m}{M} \rightarrow y$ $s + \frac{1}{n} \times r \rightarrow u$ $\frac{1}{n} \times r \rightarrow v$	$M = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{1}{n} r \right)^2 + \left(s + \frac{1}{n} r \right)^2} - \left(s + \frac{1}{n} r \right) \right]$
I-25	$s, \frac{1}{m} + \frac{m}{M}$	$x+y=s$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = r$	I-24	Dividendo r por 1	$M = \frac{r}{2} - \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{1}{m} r \right)^2 + \left(s + \frac{1}{m} r \right)^2} - \left(s + \frac{1}{m} r \right) \right]$

1-26	$s, t, w,$ $\frac{M}{s} - \frac{m}{t} = \frac{w}{s}$	$x+y=5$ $\frac{x}{t} + \frac{y}{w} = r$	dic.	$M \cdot n \cdot \frac{M}{t - bt} = \frac{M}{t}$	$M = t \cdot \frac{s-w+r}{1-3w}$
1-27	$s, t, w,$ $\frac{M}{s} > \frac{m}{t} = \frac{w}{s}$	$x+y=5$ $\frac{x}{t} \times \frac{y}{w} = r$	1-3	Commutatividad de la multiplicación. $p = n \cdot t \cdot s$	$m = \frac{1}{2} (5 - \sqrt{5^2 - 4rst})$
1-28	$s, t, w,$ $\frac{M}{s} / \frac{m}{t} = \frac{w}{s}$	$x+y=5$ $\frac{x}{t} / \frac{y}{w} = r$	1-19	Commutatividad de división y multiplicación. $M = 1 \cdot \frac{t}{st} = \frac{t}{s}$	$M(n, m) = \frac{s}{1 + 1 \cdot \frac{r}{w}}$
1-29	$s, sm = M^2$	$x+y=3$ $xy = r^2$	1-7	$M \rightarrow x$ $s \rightarrow 1$ $s^2 \rightarrow 0$	$M = \frac{1}{2} (\sqrt{2(2s^2) + s^2} - s)$

1 Cuando la cantidad dada en el enunciado no es una de las que tienen nombre en la notación, sea que es una expresión compuesta, la he designado por r .

2 Los casos dependen de si $2-4s^2-2r$ es positivo, negativo o cero

3 Los casos dependen de si r es positivo, negativo o cero

Referencias

- ANFKOMBA, Adel. 1978. "L'algèbre arabe aux IX^e et X^e siècles: Aperçu général". *Journal for the History of Arabic Science* 2: 66-100.
- EUCLEIDES. 1819. *Les éléments*. En: *Les œuvres d'Euclide*. Traduites intégralement par F. Peyard, Paris: C. J. Farny. (Nouveau tirage avec une introduction par Jean Itard. Paris: Albert Blanchard, 1966).
- FLILOY, Eugenio y ROJANO, Teresa. 1984. "La aparición del lenguaje aritmético-algebraico". *Educación matemática* V: 1-16.
- GRANT, Edward. 1983. "Review of *Jordanus de Nemore. De Numeris Datis*. A critical edition and translation by Barnabas Hughes". *Historia Mathematica* 10: 125-129.
- HEATE, Thomas. 1921. *A History of Greek Mathematics*. Oxford: Clarendon Press. (Re-edition, New York, NY: Dover, 1981.)
- HOYRUP, Jens. 1988. "Jordanus de Nemore, 13th Century Mathematical Innovator: an Essay on Intellectual Context, Achievement, and Failure". *Archive for History of Exact Sciences* 38: 307-363.
- HUGHES, Barnabas H. (editor). 1981. *Jordanus de Nemore. De Numeris Datis*. Berkeley, CA: University of California Press.
- KILIAN, Carolyn, y FLILOY, Eugenio. 1989. "El aprendizaje del álgebra euclidea desde una perspectiva psicológica". *Enseñanza de las ciencias* 7: 229-240.
- MARONEY, Michael S. 1968. "Another Look at Greek Geometrical Analysis". *Archive for History of Exact Sciences* 6: 218-248.
- MAKINUS. 1966. "Introduction" aux *Données* d'Euclide. [Véase Euclides (1919)].
- MORROW, Glenn R. 1970. *Proclus. A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- PAPBUS D'ALEXANDRIE. 1933. *La Collection Mathématique*. Bruges: Desclée de Brouwer. (Traducción, introducción y notas de Paul Vanhecke). (Nouveau tirage. Paris: Albert Blanchard, 1982.)
- PARADIS, Jaime y MALET, Antoni. 1989. *La genesi dell'algebra simbolica*. Vol. 1. *Los orígenes del álgebra: de los árabes al Renacimiento*. Barcelona: PPU.
- RASHID, Rashid. 1984a. *Entre arithmétique et algèbre: Recherches sur l'univers des mathématiques arabes*. Paris: Les Belles Lettres.
- RASHID, Rashid (editor). 1984b. *Deuxième Les Arithmétiques*. Livres IV, V, VI et VII. Paris: Les Belles Lettres.
- ROSEN, Frédéric. 1831. *The algebra of Mohammed Ben Musa*. London: Oriental Translation Fund.
- THOMAS, Ivor. 1957. *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- WINTER, T. Richard (editor). 1985. *François Viète. The Analytic Art*. Kent, OH: The Kent State University Press.
- WOPCKE, Franz. 1853. *Fabius de Fakhro*. Paris: Imprimerie Impériale. (Reimpression en Wiesbaden: Georg Olms Verlag, 1982.)

Luis Puig, licenciado en matemáticas y doctor en psicología, es profesor titular de escuela universitaria en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València. Entre sus publicaciones cabe mencionar *Cónicas* (ICE, Valencia, 1979) [con el Grupo Cero], *Problemas aritméticos escolares* (Síntesis, Madrid, 1989) [con Fernando Cerdán] y *Hocking, Writing and Arithmetic* (Universitat de València, 1993) [con Jenaro Talens].

