Matemáticas [medievales]

Michael S. Mahoney

El desarrollo de las matemáticas en la Europa medieval, período que abarca desde el siglo VI hasta el siglo XV, muestra claramente cómo la matemática depende del contexto cultural dentro del cual se desenvuelve. Las culturas bárbaras que sustituyeron al dominio romano en el siglo V no poseían una tradición matemática que les fuera propia; en matemáticas, como en casi todas las actividades, siguieron las directrices establecidas por los romanos. Pero los romanos mismos tuvieron poco interés en las matemáticas, el cual no iba más allá de las aplicaciones prácticas a los negocios y la agrimensura. Los pensadores romanos que deseaban aprender las matemáticas teóricas de Euclides, Arquímedes o Apolonio, lo hacían de la misma manera en que aprendían la filosofía de Platón o de Aristóteles —escritos en el idioma griego— y con profesores griegos. Aún así las matemáticas teóricas de los griegos no recibieron el apoyo de las tradiciones intelectuales características de los romanos, con el resultado de que aquellos pocos que aprendieron la materia no hicieron contribuciones a ella. Los hábitos griegos asociados al pensamiento matemático tuvieron un impacto pequeño, casi nulo, sobre la cultura romana, y la matemática griega permaneció en griego hasta el final del imperio.

En matemáticas, por lo tanto, heredar de los romanos era heredar nada que fuera más allá de los rudimentos de cálculos aritméticos en el ábaco y de mediciones geométricas aplicables de manera inmediata a la agrimensura y a la arquitectura. Los fragmentos de la matemática griega que Boecio (murió en 524/525) intentó presentar al traducir la aritmética de Nicómaco de Gerasa y una porción de los *Elementos* de Euclides, constituyen no una medida de lo poco que de matemáticas sobrevivió a la caída del Imperio, sino de lo poco que había existido antes de dicho evento. Las nuevas culturas no sólo adolecieron de los textos matemáticos de la antigüedad clásica, sino que, hecho importante, no heredacon ninguna tradición intelectual que los hiciera concientes de sus carencias.

Por ello, cuando los textos estuvieron disponibles en traducciones hechas a partir de los originales en griego y en árabe en los siglos XII y XIII éstos plantearon problemas fundamentales de comprensión y asimilación. Sin preparación para leerlos, los eruditos medievales debieron aprender casi de la nada y sin maestros. En cierto sentido aprendieron pronto y bien. En otro sentido nunca lograron alcanzar dicho aprendizaje. Esto se debió a que leían los textos bajo la óptica de sus propias preocupaciones intelectuales: la unión de la fe y la razón (un problema difícil que se complicó por la introducción simultánea de la filosofía aristotélica), la educación del clero, la autoridad tan efectiva lograda por la Iglesia y el Estado. Por lo tanto, la matemática medieval adquirió su estilo tan peculiar en el período que cubre de mediados del siglo XI a mediados del siglo XV. Por sí misma raramente cultivada, la matemática sirvió para fines filosóficos, prácticos y pedagógicos, y por lo tanto su propio desarrollo técnico fue en gran medida dictado por estos fines. Para poder apreciar los logros de la matemática medieval uno debe tener en mente este contexto. El hacerlo le ahorrará a uno el sentimiento de decepción que se experimenta cuando, por ejemplo, se observa el impacto tan pequeño producido por la traducción al latín de la obra de Arquímedes.

El hacerlo así mostrará claramente cuándo finaliza el período medieval de la historia de la matemática, a saber, a finales del siglo XV y principios del XVI, cuando las traducciones al latín hechas por los humanistas de los escritos matemáticos griegos, estimularon la unión de forma y contenido; dicho de otra manera, cuando los matemáticos europeos empezaron a pensar, una vez más, en la terminología griega. Más aún, el contexto explica por qué la matemática no tuvo un centro institucional único y la unidad disciplinaria que ello implica, sino que, en cambio, fue desarrollada, de muy diversas maneras por una gran variedad de practicantes.

Ábaco y Agrimensor: los primeros siglos

Un estudiante de una escuela monástica o catedralicia de, digamos, el siglo IX, que quisiera aprender la aritmética y la geometría del cuadrivium, tenía a su disposición muy poco material para llevar a cabo el aprendizaje. Con la *Arithmeticae institutiones de Boecio* y el *De computo vel loquela digitorum* del Venerable Beda, (muerto en 735), habría agotado la literatura sobre la aritmética de su tiempo, aun cuando no todas las técnicas. Del primer trabajo, una traducción parafraseada de la *Arithmetica* de Nicómaco de Gerasa, podía aprender lo más elemental de la teoría pitagórica de los números: números pares e impares; primos; perfectos, abundantes y deficientes; números figurados; nombre y clases de razones numéricas (ver más adelante); aritmética, geometría, armonía, y otras cuestiones. Por lo general, Boecio simplemente presentó proposiciones, ofreciendo poco a manera de demostraciones y menos aún en cuanto a técnicas para investigaciones posteriores. En contraste, Beda enseñó una técnica, la cual había existido durante siglos como tradición oral y que finalmente él asentó por escrito.

El contar con los dedos, técnica aún utilizada por los mercaderes del cercano y el lejano oriente, consiste en representar números mediante configuraciones de los dedos y la palma de la mano. En el sistema de Beda uno puede contar hasta 9999. Aun cuando uno puede llevar a cabo las operaciones aritméticas básicas con resultados que alcancen ese límite, en el medievo el uso más común de la técnica no involucraba números grandes ni operaciones complicadas. Primeramente, Beda enseñó la técnica como parte de su procedimiento para determinar las cambiantes fechas de las Pascuas y las festividades dependientes de ellas; era la manera más sencilla para que los monjes llevaran la cuenta de su calendario religioso. En segundo lugar, el contar con los dedos y el llevar a cabo cálculos con la técnica antes mencionada, completaba al más efectivo y común medio de hacer cálculos de la antigüedad y gran parte de la Edad Media: el ábaco.

Nuestro estudiante del siglo IX no poseía un texto del cual aprender el uso del ábaco. Hasta el siglo XI, tanto el ábaco como el contar con los dedos formaban parte de un conjunto de técnicas transmitidas oralmente y practicadas en gran medida por los mercaderes y los administradores gubernamentales. Mucho después de la aparición de los primeros textos, los cuales estaban dirigidos a un público erudito, el uso común del instrumento continuó siendo una tradición oral. Esta tradición existió paralelamente a las técnicas asentadas por escrito del manejo del algoritmo indio-arábigo, que de hecho aún se utilizan en muchas partes del mundo.

El ábaco romano utilizado a principios de la Edad Media superó las dificultades del sistema numérico romano. Esto se logró mediante el uso de una representación decimal de los números que era estrictamente aditiva y daba valor a las posiciones ocupadas por los dígitos. En ambas representaciones, la pequeña basada en la mano y la grande basada en un tablero, ésta consistía de varias columnas que contenían potencias sucesivas de 10 contadas a partir de la derecha y empezando con el 1. El dígito que en particular ocupaba cada columna era representado mediante piedras pequeñas (calculi, de ahí calculare, "calcular"), cada una contando como 1 o, en algunas versiones, como 5, cuando eran colocadas sobre una línea horizontal dibujada a través de las columnas. La adición sólo requería que los números fueran agregados por columnas y luego reagrupar aquellos en que el total excediera de 9; la resta seguía el patrón inverso, igualmente simple. La multiplicación requería dos pasos suplementarios: Primero, calcular por separado los subproductos de dígito por dígito (mediante la adición sobre el tablero o por referencia a una tabla de multiplicación de 9×9 o también mediante el cómputo con dedos); segundo, determinar la columna adecuada en la cual colocar el producto de otras dos columnas (por ejemplo, columnas de 10's por columnas de 100's = columnas de 1000's). Una vez colocados los subproductos proporcionaban directamente el resultado final, necesitando a lo más ser reagrupados. Por ejemplo, $496 \times 23 = 11\,408$, resulta de la sucesión de operaciones que se presenta en la figura 1. La división era una operación ligeramente más complicada y se conformaba de acuerdo a dos patrones básicos: la "división dorada", que se calculaba directamente con el divisor, y la "división de hierro", que proporcionaba el divisor al siguiente múltiplo de 10 o 100, lo cual hacía sumando el producto de subcociente y suplemento al remanente antes de cada sucesiva subdivisión.

Al expresar las fracciones en términos de la base duodecimal del sistema romano de pesos y medidas, los usuarios antiguos y medievales podían manejar a los números fraccionarios como si fuesen enteros. Algunos tableros tenían columnas separadas encabezadas por las varias subdivisiones de los "as" (la unidad de medida básica), pero los cálculos con todos los tableros requerían

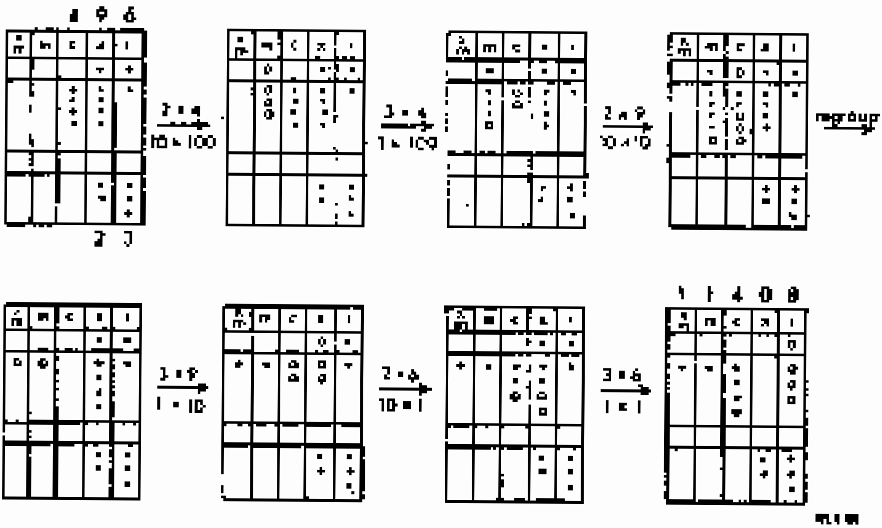

Figura 1.

de tablas suplementarias de productos y equivalencias; claro está que el reagrupamiento se hacía duodecimalmente en lugar de decimalmente.

Los primeros textos sobre el ábaco se escribieron a finales del siglo x, con el fin de ser utilizados en escuelas monásticas como a las que asistió nuestro estudiante. Aquellos textos revelaban, tanto por omisión como por énfasis, los puntos difíciles en el aprendizaje del uso del instrumento y en el entendimiento de sus principios. Las reglas de la aritmética posicional de base 10 —por ejemplo, reagrupando y pasando a la siguiente columna los productos de potencias de 10, o tomando prestado en el caso de la resta— constituyeron el principal obstáculo, debido en particular a la ausencia de una conceptualización clara de la estructura subyacente al sistema mismo. El obstáculo se hizo más pronunciado cuando los textos cambiaron al sistema duodecimal. En su mayor parte los tratados sobre el ábaco fueron sólo colecciones de reglas y ejemplos, con escasos o nulos intentos de dar justificaciones.

Muchos de aquellos tratados contenían la contribución más original que el medievo hizo al ábaco. En algún momento de las décadas de los 970's a los 980's, Gerberto de Aurillac, quien posteriormente pasó a ser el Papa Silvestre II (muerto en 1003), inventó o copió de los árabes residentes en España un ábaco con "ápices" o fichas. Cada "ápice" portaba un número del 1 al 9 en la forma arábiga-occidental y era utilizado como símbolo en lugar del correspondiente número de "calculi". Por ejemplo, el número 1683, que en el viejo modelo del ábaco requería de 24 ó de 12 piedras (en el último caso el ábaco agrupaba de 5 en 5), en el nuevo modelo utilizaba sólo 4 "ápices". Sin embargo, la mayor simplicidad en la representación se lograba a costa de una mayor complejidad en las operaciones. Las sumas ya no surgían directamente de agregar los sumandos; ahora debía uno conocer las sumas de los números simbolizados y reemplazar los "ápices" de una columna por un "ápice" que indicara esa cantidad.

También en el campo de la geometría nuestro estudiante se enfrentaba a carencias. Casiodoro señaló que Boecio tradujo al latín los *Elementos* de Euclides. Para el año 800 sólo quedaban algunos fragmentos —que en su mayoría se limitaban a enunciar definiciones, postulados, axiomas y teoremas de los libros I hasta el IV y éstos habían sido insertados en una colección de libros sobre agrimensura conocidos como el "ars gromatica" (de "groma", poste de agrimensor). Escritos durante los últimos años del Imperio, pero seguramente describiendo técnicas conocidas durante siglos, los textos se centraban en la medición de áreas de figuras planas con formas tanto regulares como irregulares y en las propiedades de figuras sólidas más sencillas. Reflejando una tradición tecnológica, más que matemática, hacían un uso holgado de aproximaciones sin ningún intento de demostración o de justificación constructiva. Algunos textos simplemente eran catálogos de sistemas de pesos y medidas.

Fueron los "agrimensores", más que Euclides, quienes determinaron los lineamientos del pensamiento geométrico de la Edad Media. La misma etimología de "geometría" enfatizó el carácter métrico de sus propósitos, y lo que ha sobrevivido del modelo griego no basta para justificar mediante el ejemplo la existencia de una geometría "teórica" más abstracta. Así las cosas, a principios del siglo XI, Gerberto intentó explicar a su alumno Adelboldo, más tarde Obispo de Utrecht, por qué el área de un triángulo equilátero de lado 30 difería del número triangular del mismo lado; Franco de Liège consideró el recortar un ángulo de pergamino y reacomodar las piezas en un cuadrado logrando así la cuadratura del círculo; y dos hombres, Ragimboldo de Colonia y Radulfo de Liège, intercambiaron opiniones sobre lo que podría entenderse por "ángulo exterior" de un triángulo, sobre si 7:5 o 17:12 era la *razón* correcta en que se encontraba la diagonal de un cuadrado respecto de su lado y también discutían el significado de "pies lineales", "pies cuadrados", y "pies sólidos" (pedes recti, pedes quadrati, pedes solidi). De las mismas escuelas monásticas y de la catedral Lotharingiana de la cual provenían estos hombres vino la edición mixta del "ars gromatica" de Euclides y el ábaco de Gerberto que circuló por siglos como *La Geometría* de Boecio; su compilador mostró la misma falta de sensibilidad a la naturaleza de la geometría griega, característica del periodo.

Entre los siglos VI y XI, de la matemática se sabía poco y se le cultivaba aún menos. Más importante que esta falta de actividad, sin embargo, era la ausencia de cualquier tradición histórica que se remontara a la matemática griega. A donde quiera que tendiese la matemática medieval, seguramente lo hacía en dirección distinta de la griega. La aparición de traducciones de nuevos textos griegos durante el siglo XII podría haber alterado las tendencias del momento, pero no podía ser el factor principal que minara los nuevos derroteros. La Europa latina había empezado a desarrollar sus propios hábitos de pensamiento.

Nuevos textos, nuevos problemas

Tres obras traducidas del árabe al latín en el siglo XII dieron un nuevo ímpetu a la matemática, de paso determinando su contenido temático fundamental para los siguientes siglos: *El álgebra* y *La aritmética* de Al-Jwarismi, y los *Elementos* de Euclides. Otros escritos traducidos durante los siglos XII y XIII contribuyeron a las investigaciones que surgieron a partir de los tres textos ya mencionados, pero ninguno causó un impacto semejante.

El tratado sobre cálculos con los numerales hindús de Al-Jwarismi (ca. 825) puede haber sido la primera aritmética que empleó símbolos separados para los números del 1 al 9 (más un símbolo para el 0 como señalador de posición) en un sistema posicional de base 10 y que describió técnicas aritméticas adecuadas al sistema. Con toda certeza fue una versión de este tratado la que introdujo el sistema en la Europa Latina, donde fue bautizado como algorismus ("algorismo", origen del término actual "algoritmo"), término que proviene de una degeneración del nombre del autor. Ni el texto árabe original ni su traducción al latín (hecha antes de 1143) han sobrevivido, pero tres versiones latinas escritas poco después de esa traducción nos dan una buena idea sobre su contenido. Iniciaba haciendo una presentación de los símbolos y dando una explicación, con ejemplos, del sistema posicional; a continuación hacía una exposición detallada, también con ejemplos, de operaciones combinadas: adición, resta, duplicación, división entre dos, división, elevar al cuadrado, sacar raíz cuadrada.

Como ya ha sido mencionado, la representación simbólica utilizada en un sistema posicional no era del todo nueva para los matemáticos europeos. Estaba implícita en el ábaco con "ápices" de Gerberto, donde las columnas del tablero daban un significado tangible a la noción del valor derivado de la posición. Para alguien familiarizado con el ábaco, las operaciones de la aritmética escrita no serían del todo extrañas. Por ejemplo, el ábaco de Gerberto ya había entrenado a sus usuarios para mentalmente hacer uso de las tablas de adición y multiplicación, que era uno de los obstáculos fundamentales que aparecían al utilizar símbolos en lugar de grupos de unidades. Más aún, Al-Jwarismi y sus sucesores latinos inmediatos iniciaron la transición del ábaco al papel mediante el simple procedimiento de adaptar las técnicas de un lado para ser utilizados en el otro. Por ejemplo, la duplicación y la división empezaban siempre con los dígitos que representaban los valores más altos, y añadiendo los que correspondieran a los valores a la izquierda ya calculados cuando los subproductos excedían a diez; el proceso de sacar mitad se iniciaba con el dígito que representaba menor valor añadiendo 5 a la derecha cada vez que tocara el turno a un dígito impar. Estos eran los hábitos de quienes hacían uso del ábaco. Y había que añadir los que consistían en hacer desaparecer, o más adelante tachar, no sólo los resultados intermedios sino también el multiplicando y el dividendo, los cuales en el viejo algoritmo fueron reemplazados gradualmente por los productos y cocientes que respectivamente resultaban de las operaciones. De esta manera el producto 496×23 se llevaba a cabo de acuerdo al siguiente esquema:

$$\frac{496}{23} \rightarrow (2 \cdot 4 = 8) \rightarrow \frac{8496}{23} \rightarrow (3 \cdot 4 = 12) \rightarrow \frac{9296}{23} \rightarrow$$

$$\text{(cambiando el multiplicando)} \rightarrow \frac{9296}{23} \rightarrow (2 \cdot 9 = 18) \rightarrow \frac{11096}{23} \rightarrow$$

$$(3 \cdot 9 = 27 \rightarrow \frac{11276}{23} \rightarrow \text{(cambiando el multiplicando)} \rightarrow \frac{11276}{23} \rightarrow$$

$$(2 \cdot 6 = 12) \rightarrow \frac{11396}{23} \rightarrow (3 \cdot 6 = 18) \rightarrow \frac{11408}{23} ;$$

$$496 \times 23 = 11408$$

El texto de Al-Jwarismi fue el prototipo de los dos algoritmos medievales con mayor popularidad, el *Carmen dealgorismo* de Alejandro de Villa Dei (murió alrededor de 1240) y el *Algorismus vulgaris* de Juan de Holywood (conocido como Sacrobosco) (murió en 1244 o 1256). El primero, redactado alrededor del año 1202, aparentemente estaba dirigido al mismo tipo de lector que los trabajos de Beda, y versificando el texto de Al-Jwarismi para facilitar su memorización, presentaba al nuevo algorismo como una herramienta para el cálculo de las festividades movibles. El segundo, escrito alrededor de 1240 para ser utilizado como parte del material curricular de las nuevas universidades, mostró aspectos más teóricos al incluir material de la *Arithmetica* de Boecio, introdujo cambios en el orden de presentación de las operaciones con combinaciones y amplió las descripciones y los ejemplos ilustrativos. Llegó a ser, durante siglos y en parte gracias a los comentarios de Pedro de Dacia que se le agregaron (1291), el modelo de texto universitario. No fue sino hasta finales del siglo XV y principios del XVI, cuando proliferaron distintas escuelas de aritmética mercantil, que las técnicas de Al-Jwarismi gradualmente cedieron el lugar a las formas modernas de cálculos escritos, las cuales retienen y se apoyan en resultados intermedios, y sin necesidad de borraduras, aunque con una dependencia mayor respecto de cálculos mentales.

Para el ábaco no se había desarrollado ningún método directo que permitiera manipular las fracciones comunes, y los primeros algoristas heredaron la obvia preferencia por los sistemas convencionales que reducían fracciones a enteros. Con la aparición en Europa de la astronomía greco-arábiga, el sistema sexagesimal de grados, minutos y segundos, reemplazó al sistema romano como el sistema convencional más común entre los eruditos. Aún así limitaciones comunes no podían ser evadidas, en especial cuando el uso cada vez más frecuente de la algoritmia favorecía la aparición de más fracciones que no poseían una representación sexagesimal finita. Si bien de manera más lenta que en el caso de la aritmética de *números enteros*, para la época en que Johannes de Linariis escribió su *Algorismus de minutiis* (ca. 1340), los trabajos sucesivos de varios autores medievales dieron como resultado la hoy común notación de *numerador sobre denominador* (las palabras mismas datan del medioevo) separados por una línea (vírgula), y los ahora familiares procedimientos para combinar fracciones.

En tanto que la aritmética de Al-Jwarizmi fue ampliamente comprendida y resultó fuente de inspiración para investigaciones posteriores, la geometría de Euclides fue acogida de manera totalmente distinta. Como ya se mencionó, los hombres de ciencia en la Edad Media no poseían antecedentes que les permitieran comprender la obra de Euclides. Su primera tarea fue comprenderla, aunque, a pesar de su reputación, los *Elementos* de Euclides no resulta ser un libro de texto elemental ni autoexplicativo, especialmente en lo que concierne a los últimos libros, los cuales tratan los problemas sobre cocientes y proporciones, teoría de números y magnitudes inconmensurables. Resultaba que el latín del medioevo (y, para el caso, también el latín clásico) carecía de los términos teóricos que se requerían para hacer traducciones exactas; en ocasiones también adolecía de términos comunes, tales como el que correspondía "rhombus" (una transliteración griega que sustituyó al término arábigo "elmuayn" en el siglo XVI). Si a ésto se le agregan dos versiones árabes distintas de los *Elementos*, tres traductores diferentes del latín y varias versiones no coincidentes de las obras de cada uno de ellos, uno puede tener la idea de los problemas que surgieron en el proceso de asimilación de la geometría griega durante los siglos XII y XIII.

La geometría teórica de la Edad Media se caracterizó no por las investigaciones originales que al respecto se llevaron a cabo, sino por el proceso de asimilación que primeramente generó. De hecho se ha convertido en un lugar común el decir que ningún teorema nuevo data de dicho periodo, y más de un historiador ha mostrado su desilusión por los resultados tan pobres logrados con una herencia tan rica. Sin embargo, el mero hecho de tratar de entender la geometría griega era una labor ardua para los eruditos medievales. Para ellos resultaba algo extraño, y no sólo en el sentido lingüístico, sino en otras muy diversas formas, algo que no sucedió en el caso de la aritmética. El resultado de ello fue, a pesar de que los autores medievales aprendieran a hacer construcciones geométricas y a demostrar teoremas geométricos, que no siempre comprendieron las sutilezas de los *Elementos* de Euclides ni las razones subyacentes. Por ello en ocasiones sucedía que si bien, en cuanto a intención se sometían a los cánones matemáticos griegos, en la práctica éstos eran violados (algunas veces de manera muy original) por los matemáticos medievales.

Más aún, el objetivo que se perseguía con el aprendizaje de la geometría en la Edad Media no era el llevar a cabo investigaciones en estos temas, se buscaba adquirir los conocimientos que permitieran entender las citas de carácter geométrico de Aristóteles y de los Padres de la Iglesia, o también el ser capaces de manejar las matemáticas relacionadas con la óptica y la astronomía, o mejorar los instrumentos de medición y las rutinas asociadas a su uso. El nivel de conocimientos geométricos necesario para estas labores era relativamente bajo; de hecho lo que se requería era una especie de ingenio de tipo lógico o práctico. Resulta entonces que los logros de carácter geométrico en el medioevo deben ser planteados ya sea en términos de los esfuerzos por orientar la geometría con propósitos didácticos, o en cuanto a su uso ingenioso en otras disciplinas.

Desde mediados del siglo XII circulaban en Europa dos versiones de los *Elementos* de Euclides: la excelente traducción de la obra completa de Euclides hecha por Gerardo de Cremona a partir de la versión árabe de Ishaq ibn Hunayn, revisada por Thabit ibn Qurra, y la no tan exacta traducción (Adelardo I) de Adelardo de Bath, basada en la versión árabe de al-Hajjaj. A pesar de la existencia de estos trabajos, los geómetras medievales en general hicieron uso de versiones incompletas de las obras de Euclides: una versión reducida de la traducción de Adelardo que incluía definiciones, axiomas, postulados y teoremas sin demostración (Adelardo III; Roger Bacon la llamó "editio specialis"). A finales de la década de 1250-60 Campanus de Novara amplió y editó estas tardías versiones; su trabajo en poco tiempo se impuso como la más prestigiada versión medieval de los *Elementos*, manteniendo su autoridad hasta el siglo XVI

En un estudio reciente, John E. Murdoch ha señalado las principales características de la tradición asociadas a Adelardo y a Campanus. Con todo y sus pequeñas diferencias respecto del original, se le considera muy cercana a éste. Pocos teoremas fueron omitidos, y las omisiones pronto fueron localizadas y eliminadas en los casos en que resultara necesario para la demostración de otros teoremas. El orden de los teoremas de Euclides fue esencialmente el mismo; los pocos cambios que se hicieron alteraron la elegancia de la obra, no su coherencia lógica. Con una sola excepción que se considera importante, a saber, la definición de razones iguales en el libro 5 (ver más adelante), ningún malentendido importante afectó el propósito original de las proposiciones ni causó confusión en el carácter de la argumentación..

De hecho, más que el contenido matemático, lo que en realidad interesaba a Adelardo y a Campanus era la manera de argumentar. Para apreciar la relevancia de este hecho basta recordar que los *Elementos* penetraron en el pensamiento escolástico acompañados de la *Analítica Posterior* de Aristóteles, la cual los consideraba como modelo de conocimiento demostrado científicamente. Por lo tanto se puede decir que las variaciones en las demostraciones y los esquemas de demostración de las versiones de Campano y de Adelardo III, junto con los agregados hechos tanto a los principios como a las proposiciones, se concentraban en la estructura lógica de los *Elementos*: la forma adoptada por los teoremas y sus demostraciones; su relación con otros teoremas, contemplados éstos como teoremas recíprocos, corolarios y teoremas análogos propios de otros dominios de la ciencia; su lugar dentro del trabajo global y su pertinencia respecto de otras temáticas ajenas a la geometría. De manera similar, los principios fundamentales fueron revisados con todo cuidado, tanto en sí mismos como con el propósito de entender en general lo que son los principios fundamentales. Los comentarios de la obra de Euclides se enfocaron sobre la adecuación, la independencia mutua y la prioridad epistemológica de definiciones, axiomas y postulados, y en la forma como se utilizaban en las demostraciones que les seguían.

Lo que los matemáticos árabes descubrieron al intentar usar los *Elementos* en el esclarecimiento de nuevas problemáticas (por ejemplo, los postulados de continuidad necesarios para llevar a cabo la cuadratura mediante el método exhaustivo), lo encontraron con frecuencia los autores latinos del medioevo al tomar los

Elementos y examinar su estructura lógica y al hacer revisiones que se utilizarían en los cursos universitarios. De hecho, el propósito del análisis lógico de los *Elementos* fue el de hacer que esta obra fuera accesible para los estudiantes. El lenguaje mismo de las demostraciones, los comentarios y los agregados de la tradición Campanus-Adelardo revela esta preocupación. En la mayor parte de las proposiciones, el estudiante se entera de sus relaciones con las proposiciones que las preceden inmediatamente, de cualquier problema que surge en su construcción, de todo lema o postulado subsidiario requerido por la demostración, pero que no había sido mencionado con anterioridad, o de características peculiares de la misma demostración (por ejemplo, el uso de formas de inferencia poco comunes), de las similitudes que la proposición o su demostración pudieran tener con otras proposiciones o demostraciones (por ejemplo, la comparación entre los libros 5 y 7), y de interesantes o importantes corolarios. Prolifera el uso de la primera o de la segunda persona en el discurso matemático. La segunda persona aparece con frecuencia en tono imperativo, como si dirigiera una construcción, y en ocasiones el tono adquiere un carácter casi conversacional. Adelardo y Campanus no eran investigadores en el área de las matemáticas que se dirigieran a otros colegas; más bien eran profesores que compartieron sus conocimientos con los estudiantes.

Más allá de los *Elementos* de Euclides, muy poco de la geometría griega estaba al alcance de los lectores medievales. De los pocos trabajos matemáticos de Arquímedes que fueron traducidos al árabe, sólo la *Medición del Círculo* y algunos teoremas contenidos en *De las espirales* llegaron a Europa; en el caso particular de los teoremas mencionados, éstos aparecían en un tratado sobre mediciones (ver más adelante) que, por ser Banu Musa su autor, tomó en latín el título *Verba filiorum*. Por esa época, y bajo el título de *Liber de curvis superficiebus Archimenidis*, circuló un escrito de un tal Johannes de Tinemue; esencialmente era una paráfrasis del libro I de la obra *Esfera y Cilindro*, tomada posiblemente de una fuente bizantina. A pesar de que para 1269 Guillermo de Moerbeke había traducido casi en su totalidad la obra de Arquímedes que aún estaba disponible sólo en griego, su esfuerzo no tuvo grandes consecuencias, y la mayor parte de los autores medievales siguieron conociendo a Arquímedes a través de versiones anteriores. Aquellos autores trataron a Arquímedes tal y como lo habían hecho con Euclides; de hecho, utilizaron a Euclides para estudiar a Arquímedes. Es decir, concentraron su atención en la estructura lógica de los métodos y demostraciones de Arquímedes, con frecuencia tomando de los *Elementos* los pasos intermedios y las justificaciones formales que Arquímedes suponía sus lectores conocían. Por ello, el que posiblemente sea el tratamiento más complicado (una *Circule quadratura* escrita en 1340 probablemente por Jean de Meurs), para encontrar la línea recta cuya longitud coincide con la circunferencia de un círculo dado (proposición 1 de *Medición del Círculo*), hacía uso de dieciséis de las primeras dieciocho proposiciones contenidas en *De las espirales*. La sofistificación, sin embargo, residía en observar que la proposición I de *Medición del Círculo* presuponía esa construcción y que además ésta era presentada en *De las espirales*. Resumiendo: si en el París de mediados del siglo XIV algunos matemáticos conocían y entendían los trabajos de Arquímedes, de hecho ninguno los utilizó de manera creativa.

Al discutir el impacto causado por la obra de Arquímedes sobre las matemáticas europeas, Clagett ha señalado la separación consciente que se hizo después de la aparición de los escritos griegos entre técnicas empíricas y conocimientos teóricos. Aún así, ya con anterioridad los autores medievales habían empezado a distinguir entre las estructuras abstractas del objeto de estudio y sus aplicaciones. A principios del siglo XII, Hugo de San Víctor, al comentar sobre la diferencia establecida en su *Didascalicon* entre ciencias teóricas y ciencias prácticas, dividió a la geometría en dos partes, una teórica, de carácter especulativo y que procedía "sólo mediante consideraciones racionales" ("sola rationis speculatione"), y una práctica, o parte activa, que hacía uso de instrumentos. En su *Practica geometriae*, donde se introdujeron los títulos genéricos tradicionales para este tipo de trabajos, disertó sobre la medición de alturas ("altimetría"), áreas ("planimetría"), y volúmenes esféricos ("cosmimetría"). La geometría que utilizaba en estos problemas rara vez iba más allá de lo enseñado por los agrimensores y, de igual forma que los escritos de los autores Lotharingianos del siglo XI, revelaba una inocencia fundamental respecto de los más elementales conocimientos teóricos que fueran más allá de la medición de triángulos rectos. Aún así, Hugo añadió a la lista de instrumentos del "agrimensor" esa herramienta de origen greco-arábigo que se dice introdujo Gerberto en Europa: el astrolabio.

Aproximadamente un siglo después, Robertus Anglicus de Montpellier (1270), introdujo otro instrumento de origen árabe: el cuadrante. Ni la descripción de la construcción del instrumento ni los usos a que se destinaba representaron un avance notable en sofisticación matemática respecto del tratado de Hugo. Por ejemplo, al señalar las líneas curvas que representan las 12 horas en que "artificialmente" se divide el día entre la salida y la puesta del sol, parece ser que Robertus supuso el manejo de los conocimientos incluidos en los libros I y 3 de los *Elementos*, pues pedía la construcción de un triángulo isósceles para el cual daba la base, un lado (que se extendía indefinidamente), y el ángulo entre ellos. Pero al no dar ningún indicio de su real construcción, y por sus constantes referencias al manipuleo de los compases, queda la impresión de que su manera de trabajar era mediante tanteos. Esta impresión adquiere fuerza cuando el lector recibe la instrucción de dividir primero el cuadrante en dos mitades, luego cada mitad en tres partes iguales, cada tercio a su vez debe ser dividido en otras tres partes iguales, cada tercio a su vez debe ser dividido en otras tres partes iguales, y finalmente cada subdivisión debe ser partida en cinco. Es patente que no sólo hay escasez de construcciones geométricas, sino que además se pide una construcción que resulte imposible llevar a cabo dada la herramienta de que se dispone; Robertus aparentemente no se dio cuenta de que dividir un ángulo dado en tres partes iguales, por no decir en cinco, planteaba problemas muy especiales para el geómetra.

No fue sino hasta la primera mitad del siglo XIV que los *Elementos* de Euclides influyeron en el estilo y el contenido de la geometría práctica. La *Practica geometriae* (1346) de Dominicus de Clavasio, además de presentar un tercer instrumento, el gnomon o cuadrado geométrico, unió de manera explícita el objeto de estudio con su fundamentación teórica. Debido a que, por ejemplo, todos los instrumentos y las técnicas de la geometría práctica se basaban en resultados sobre triángulos semejantes y, por lo tanto, en la teoría de proporciones, el tratado de Dominicus principiaba con cuatro "suposiciones" sobre proporciones y sobre cómo calcular los términos desconocidos de las proporciones. Cada empleo de un instrumento en el proceso de solución de un problema de medición (Dominicus mantuvo la tradición que dividía las técnicas de medición en altimetría, planimetría, y estereometría) iba acompañado de una "demostración de su práctica" fundamentada en los *Elementos* de Euclides. El estilo global trae reminiscencias de la tradición de Campanus y Adelardo, sugiriendo que Dominicus estaba aparentemente preocupado por imitar un modelo lógico de exposición. Ocasionalmente esa preocupación entró en conflicto con el contenido de su obra, como sucedió en la construcción 15 del libro 2, donde confundió el cálculo del área de un polígono regular, dado uno de sus lados, con la construcción de un polígono similar dada en los *Elementos* VI.18. Sin embargo no se confundió respecto del círculo. A pesar de que según los *Elementos* XII.2 los círculos son proporcionales a los cuadros construidos sobre sus diámetros, su medida "absoluta" era teóricamente inalcanzable:

> La *razón* de la circunferencia de cualquier círculo respecto de su diámetro es un triple sesquiséptimo (proporción) o algo muy cercano, . . . ya que no se ha demostrado la incidencia de una *razón* entre la circunferencia respecto de un diámetro. Por lo tanto, cuando hablo de medir un círculo con un cuadrado, no pretendo estar hablando de algo que pueda demostrar, sino que sólo intento enseñar cómo encontrar el área de tal manera que no se cometa un error apreciable.

El tratado de Dominicus representa el punto culminante de la tradición de la geometría práctica que se origina en el "ars gromática". Sus técnicas agotaron las posibilidades de medición derivadas del uso exclusivo de triángulos semejantes y proporciones. Los desarrollos posteriores de la geometría del álgebra, arte arábigo que llegó a Europa en el siglo XII, y posteriormente del surgimiento de la trigonometría, la cual fue una contribución en gran parte original de los matemáticos del siglo XV.

Además de escribir la primera aritmética que utilizaba números indúes, Al-Jwarizmi recopiló un texto que llegó a ser el prototipo de todo trabajo árabe o latino relacionado con el álgebra. En efecto, así como proporcionó su propio nombre a la aritmética (algoritmia) también el título de su libro álgebra proveyó de nombre a ese arte. Llamándose en el original *Kitab al-mukhtasar fi-l-hisab al-jabr wal-mudabalah* (*Libro sucinto de cálculos efectuados mediante perfeccionamiento y balanceo*), en latín se convirtió simplemente en *Algebra*. De las tres partes que le constituían originalmente, sólo dos fueron llevadas a Europa, y ambas llegaron por separado. Por estas razones hubo de pasar algún tiempo antes de que los sabios latinos se dieran cuenta de que las dos partes se complementaban.

La primera parte, traducida por Roberto de Chester en 1146 y por Gerardo de Cremona algunas décadas más tarde, contenía las soluciones de seis tipos de problemas que con la simbología moderna se expresan mediante las ecuaciones (1) $ax^2 = bx$, (2) $ax^2 = b$, (3) $ax = b$, (4) $ax^2 + bx = c$, (5) $ax^2 + c = bx$, y (6) $bx + c = ax^2$, donde a, b y c son números racionales positivos. A pesar de que Al-Jwarizmi no utilizó símbolos (de hecho también expresó los números mediante palabras), su uso generalizado de ciertos vocablos, tales como "shay" (cosa) o "jidhr" para lo desconocido, "mal" (riqueza) para su cuadrado, y "dirhám" (una moneda común) para la unidad conocida, le permitió presentar el paradigma en términos generales antes de ilustrarlo con ejemplos. Este no es el lugar adecuado para discutir las fuentes de Al-Jwarizmi o la continuidad de tradición algebráica desde los tiempos babilónicos, pero es necesario tener en cuenta que los ejemplos que discute al principio y al final del texto tienen por sí mismos importantes historiales que rebasan el marco de una sola cultura. Una vez planteadas reglas para resolver las seis formas, Al-Jwarizmi presentó demostraciones geométricas de las reglas utilizadas en las formas (4)–(5)–(6); sus reglas evidencian la influencia del libro 2 de los *Elementos*. Después de una substanciosa discusión de la multiplicación binomial, tanto para números que han sido escritos explícitamente con sumas de decenas y unidades (¿para reforzar el concepto de aritmética decimal, o para mostrar que el álgebra es una forma de aritmética?) como para sumas y diferencias de números y "cosas", tomó un número (que varía en las distintas versiones) de ejemplos resueltos mediante el uso de las seis reglas. La primera parte concluye con una breve presentación de la "regla de tres" para resolver problemas a través de encontrar el cuarto término proporcional a tres valores dados como, "si diez cuestan seis, ¿cuánto cuestan ocho?".

La segunda parte, que se integra a la tradición árabe de "ilm al-misaha" o "ciencia de la medida", abordaba problemas similares a los de las geometrías prácticas que aparecieron posteriormente, haciéndolo de manera más sofisticada en cuanto al lenguaje matemático utilizado. En particular añadió el álgebra a las herramientas del "mensurator" y, por lo tanto, a los problemas comunes de los cálculos de alturas, áreas y volúmenes; agregó los asociados a la división de áreas y volúmenes y la determinación de longitudes a partir de combinaciones de dimensiones. El texto original de Al-Jwarismi siguió restringido a su versión en árabe, pero una versión más amplia, debida a Abraham bar Hiyya (conocido en latín como Savasorda), fue traducida en 1145 por Platón de Tívoli. El título con que se le conoció fue *Liber embadorum* (*Libro de Areas*). Material muy similar, que incluía un uso más amplio de las técnicas algebraicas, llegó a Europa a través de la traducción de Gerardo de Cremona del *Liber in quo terrarum et corporum continentur mensurationes* (*Libro que contiene las medidas de tierras y cuerpos*). Por brevedad se le llama *Liber mensurationum* (*Libro de medidas*), de cuyo autor Abu Bakr, poco se sabe. La tercera parte del álgebra de Al-Jwarismi, que se ocupa de la repartición de herencias, no fue traducida, aunque secciones de ella posiblemente sean encontradas en los trabajos de Leonardo Fibonacci (ver más adelante).

Aun cuando frente a los ojos de la modernidad ese material pueda parecer impresionante, aparentemente atrajo poca atención su versión latina durante los primeros dos o tres siglos. No sólo existen pocos manuscritos de estos trabajos, sino que, hecho aún más importante, son menos los matemáticos de los siglos XII, XIII y XIV que muestran estar familiarizados con ellos. Las obras *Quadripartitum numerorum* y *De arte mensurandi*, escritas ambas por Jean de Meurs a mediados del siglo XIV, podrían representar excepciones importantes de esta regla. Esta observación se fundamenta en el conocimiento de la obra de Al-Jwarismi y de Fibonacci mostrado en la parte del 3 del *Quadripartitum*, y por su familiaridad con los trabajos de Abu Bakr y Arquímedes, patente en la segunda parte del capítulo 5 y los capítulos 6-12 del *Arte mensurandi*. Ambos textos eran muy diferentes de los que usualmente escribían los maestros universitarios.

Con su énfasis en la utilidad que representaba para los comerciantes y los agrimensores, el álgebra de Al-Jwarismi fracasó en su intento de llamar la atención de los maestros de las facultades y aparentemente permaneció en el mercado fundamentalmente como una tradición oral. No fue sino hasta finales del siglo XV, en Leipzig, que esta tradición hizo su aparición en una clase universitaria, plasmada, por otra parte, en textos de la época. A pesar de que desde Hugo de St. Víctor existía una tradición erudita sobre geometría práctica y del esfuerzo de Dominicus de Clavasio por dar al tema un fundamento teórico, parece ser que la literatura que versaba sobre mediciones siguió, al igual que el álgebra, una vía de difusión ajena a la de las universidades. Así fue como, por ejemplo, apareció alrededor de 1400 la traducción del tratado de Dominicus, seguramente como respuesta a las demandas de un auditorio con necesidades de carácter práctico.

Los límites de la originalidad

Los dos matemáticos más destacados de principios del siglo XIII, Leonardo Fibonacci de Pisa y Jordano de Nemore, ilustran qué tanto de la matemática de origen griego y árabe se conocía en esa época y qué tan originales podían ser los europeos durante el proceso de su asimilación. Igualmente, la sorprendente falta de seguidores en los dos siglos posteriores enfatiza la orientación tan peculiar de la matemática medieval.

Hablar de Leonardo es utilizar superlativos; intentar abarcar con una mirada breve la envergadura y variedad de su obra matemática es una tarea inútil. Nacido alrededor de 1180, hijo de un rico mercader pisano, Leonardo aprendió el oficio de mercader ejercitándolo de puerto en puerto, desde Argelia hasta Bizancio; durante este periodo también aprendió las matemáticas puras y prácticas contenidas en las fuentes árabes y latinas que se encontraban a su disposición. En su *Liber abbaci* (1202; revisado en 1228), introdujo en Europa la aritmética de los árabes y de los hindúes aportando una ruta alternativa a las traducciones de Al-Jwarizmi. Leonardo, sin embargo, rebasó con mucho las técnicas del cálculo, presentando un espectro muy amplio de problemas aritméticos, tanto de carácter práctico como recreativo, que fueron resueltos mediante su ingenio y un poco de álgebra. Los últimos capítulos de su libro se centran en el álgebra, considerándola como una técnica sistemática para resolver problemas; abarcando no sólo los resultados de Al-Jwarizmi, sino también los del menos conocido Al-Karaji. En su *Practica geometriae* (1220), Leonardo combinó la práctica de la "ars gromatica" y de la "ilm al-misaha" con los fundamentos teóricos de Euclides y las ingeniosas manipulaciones de Arquímedes. En este trabajo, el cálculo de la altura de una torre utilizando el cuadrante aparece junto a la duplicación del cubo, tal y como la presentaron Arquitas, Platón (según lo señaló Eutocnio a través de Banu Musa), y Filón de Bizancio (a través de una fuente que estuvo a disposición de Jordano); la división de áreas por métodos clásicos acompañaba a la inscripción de un rectángulo y un cuadrado en un triángulo equilátero mediante el uso del álgebra; la teoría euclidiana de los irracionales (libro 10) aparecía justamente después de la aritmética de pesos y medidas comunes.

Sin embargo, fue en su *Flos* y en su *Liber quadratorum* (ambos datan de aproximadamente 1225) que Leonardo mostró su verdadero temple. En el primero examinó la ecuación (aquí aparece en simbología moderna) $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ (el mismo problema aparece en el *Álgebra* de Al-Jwarismi), y mostró, mediante el uso habilidoso de la teoría euclidiana de irracionales cuadráticos, que la solución no era en números de este tipo, y que tampoco era un entero o un racional y a continuación presentó, sin que fuera deducida o demostrada, la solución sexagesimal $x = 1; 22, 7, 42, 33, 4, 40$, la cual rebasa el valor real en 1⅚ partes en 60. En su segundo trabajo se mostró a la altura de Diofanto, y sin rival hasta el siglo XVII en el uso de la teoría de números para encontrar una solución general de racionales para el sistema $x^2 + 5 = y^2$, $x^2 - 5 = z^2$, o $y^2 - x^2 = x^2 - z^2 = 5$, donde el valor particular de 5 fue reemplazado por un parámetro sobre el que Leonardo estableció condiciones de solubilidad.

Es posible que nunca se sepa dónde aprendió Jordano (al. 1200) las matemáticas que lo hicieron el segundo hombre en cuanto a conocimientos acerca del tema en Europa. De hecho sólo se le conoce a través de sus trabajos. De éstos, el más grande y tal vez el más original es el *De numeris datis*. En él, al estudiar las técnicas algebraicas lineales y cuadráticas de los escritores árabes y de Leonardo, Jordano pasó de ejemplos numéricos y preceptos retóricos a un simbolismo literal que, aun cuando no fue completo técnica y conceptualmente como el posterior sistema de François Veite (*Inartem analyticem isagoge*, 1591), sí representó un paso en esa dirección. Sus logros quedan mejor ilustrados con un ejemplo del texto de Jordano:

> (I, 7) Si un número es separado en dos [números], de los cuales sólo uno está dado, pero si el [número] no dado, multiplicado por sí mismo y por el ya dado resulta un número dado, el número original queda también establecido. Divídase el número en *a* y *b*,

y sea b el dado; hagamos que d, el cual está dado, resulte del producto de a consigo mismo y con b, es decir, del producto con el total ab. Añádase c a ab y, hágase [e] igual a c de tal forma que abc sea divisible por ab y por c. Ya que el producto de ab con c resulta d, y la diferencia entre ab y c está dada y es b, por lo tanto abc y c quedarán especificados; de igual manera a y ab [estarán determinados]. Como ejemplo de esta operación supóngase que 6 es uno de los números, y que del producto del otro por sí mismo y por 6 resulta 40, cuyo doble, 80, es duplicado, y [el resultado] será 160, al cual se añade el cuadrado de 6, es decir, 36, sumando 196, cuya raíz [cuadrada] es 14, de la cual, cuando se le quitan 6 y al remanente se le saca mitad, resulta que 4 es el otro número que se buscaba. Y el todo dividido será 10, la suma de 6 y 4.

Aun cuando era algo claramente original, éste fue un logro que se podría calificar de mixto. El simbolismo parece haberse originado en el uso de sólo una letra para denotar segmentos de línea que usualmente eran descritos mediante sus puntos extremos. Cabe señalar, por ejemplo, que c, siendo igual a a, sería un segmento de línea diferente, y por lo tanto requeriría de un símbolo diferente. Por lo menos aquí todavía resulta algo innecesariamente complicado. El símbolo e no es necesario para llevar a cabo la reducción del problema original a una de las formas standard de sistemas simultáneos de variables mezcladas que aparecen en el álgebra tradicional; de hecho, con un simbolismo más adecuado el resultado deseado se obtendría de manera inmediata a partir del planteamiento del problema. Finalmente, Jordano no operaba sobre los símbolos ni con ellos. Estos eran esencialmente una manera abreviada de expresar proposiciones. En los casos en que el simbolismo operacional moderno pasaría de $xy = a$, $x - y = b$, vía

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

a valores explícitos para x e y en términos de a y de b, Jordano tuvo que recurrir a un ejemplo numérico específico al cual trató con un procedimiento que manejó como receta. Por esta razón se dice que la segunda parte de la demostración no ilustra a la primera, sino que la complementa.

Aún así, el tratamiento simbólico de Jordano era original para su época, y esta misma originalidad permea claramente sus otros trabajos. Además de un *Algorismus* semejante al de Al-Jwarizmi, escribió un libro, *De triangulis*, en el cual, además del material que también se encuentra en la *Practica geometriae* de Leonardo, y cuyo origen finalmente se remonta a las fuentes griegas y árabes, presentó (IV.20) la trisección del ángulo (dos soluciones tomadas de Banu Musa y la suya propia basada en parte en una proposición de la *Óptica* de Ibn al-Haytham), el teorema de Herón para calcular el área de un triángulo a partir de sus tres lados, dos soluciones al problema de encontrar dos medias proporcionales (IV.22), y una cuadratura del círculo que difería en lo esencial del enfoque arquimedeano. La *Arithmetica* de Jordano, posiblemente el más conocido de sus trabajos, llevó la sustancia de los libros sobre aritmética de Euclides (*Elementos* VII-IX) a la nueva temática, la cual hasta entonces había estado dominada por la presentación mucho menos técnica de Boecio.

Pero ni Leonardo ni Jordano tuvieron seguidores, ya fuese en su época o en el siglo siguiente. Leonardo se convirtió en el maestro de la aritmética árabe-hindú que se enseñaba en las "scuole d'abaco" italianas desde el siglo XIV, y varios de los problemas en el *Liber abbaci* y sus otros trabajos pasaron a formar parte de la miríada de textos con problemas que circularon. Sin embargo los problemas y las técnicas más sofisticadas permanecieron sin ser utilizados hasta que los resucitaron los algebristas italianos del siglo XV. Una vez revitalizados fueron traducidos como "arte della cosa", el cual había convertido las abreviaturas de los términos técnicos "res" (φ), "census" (₰), "cubus" (ℓ), y los que le seguían, en cuasi-símbolos (el término algebraico "cosa", como la palabra italiana misma, derivada de "causa", la cual Leonardo había utilizado como sinónimo de "res"). Este simbolismo abrumó al sistema algebráico de Jordano, que parece ser fue entendido por pocos y utilizado por menos. Leonardo y Jordano brillaron en las décadas que siguieron a la introducción de las matemáticas greco-árabes. Debido a circunstancias especiales, claras en el caso de Leonardo, y desconocidas en el de Jordano, tuvieron toda esta matemática a su disposición, la aprendieron de sus maestros y la cultivaron de acuerdo a su propia tradición. Pocos compartieron estas circunstancias tan especiales. Para la mayoría de los pensadores medievales las matemáticas eran algo para maravillarse y para pensar, algo para ser editado y revisado para su uso en el salón de clase. Eran también un terreno que podría ser examinado en busca de nuevas percepciones que otorgaran nuevos conocimientos a la lógica y la filosofía. Brevemente, eran algo sobre lo que se debía hablar. Aquellos que de hecho lo hicieron no tuvieron un auditorio que los escuchara.

Hacia un desarrollo autónomo

Durante el siglo XIV las matemáticas medievales pasaron de una etapa de asimilación de los textos árabes y griegos a una de desarrollo independiente del material contenido en esos textos. Como ya ha sido enfatizado en varias ocasiones, este desarrollo no se llevó a cabo a lo largo de los mismos lineamientos seguidos por los matemáticos griegos y árabes; en lugar de ello siguió las rutas marcadas por los intereses y demandas peculiares de la Europa medieval. Estos factores dictaron no sólo la temática que se cultivaría, sino también el tipo de tratamiento que recibiría. Como lo sugirió John E. Murdoch, la teoría medieval de razones y proporciones podría servir como ejemplo representativo. Nació de las circunstancias tan peculiares bajo las cuales se introdujeron en Europa las matemáticas árabes y griegas, tomó un derrotero sólo posible ante la ausencia de una tradición que gozara de cierta continuidad, y, finalmente, iba dirigida hacia un propósito de carácter filosófico.

Los *Elementos* de Euclides contienen dos teorías distintas sobre razones y proporciones, lo que refleja dos etapas históricas de desarrollo y dos dominios de aplicabilidad. La teoría más antigua, contenida en el libro 7, procede de las primeras doctrinas pitagóricas y es válida sólo para razones de enteros. Se basa en la noción de que todos los números tienen una medida común, esto es, una unidad, y que por lo tanto uno puede determinar la igualdad de dos razones, o también la proporcionalidad, mediante un proceso finito de conteo. Para ser precisos: (*Elementos*, VII. def. 20) "Los números son "proporcionales" cuando el primero es el mismo múltiplo, o la misma parte, o las mismas partes, del segundo, que el tercero es del cuarto". Esto es, $(A, B) = (C, D)$ si y sólo si cuando (para algunos enteros m y n), $mA = nB$, entonces $mC = nD$. Debido a que tanto A como B son números, siempre existirá un par m, n tal y como lo demuestra Euclides en los *Elementos* VII.4.

La última teoría representa la ingeniosa solución que Eudoxio de al problema surgido de la existencia de magnitudes geométricas, tales como la diagonal y el lado de un cuadrado, los cuales poseen una razón entre ambos no expresable mediante enteros, esto es, para la cual no existen enteros m y n que la satisfagan. Utilizando una variante del principio que subyace a su famoso "método exhaustivo", planteó una definición a partir del hecho de que el método pitagórico para determinar la igualdad de una razón involucraría una búsqueda sin fin de la medida común: (*Elementos*, V, def. 5)

> Se dice que las magnitudes "guardan la misma proporción", la primera respecto de la segunda y la tercera respecto de la cuarta, cuando dados cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera, y cualquier equimúltiplo de la segunda y la cuarta, los primeros equimúltiplos exceden, son iguales, o son menores, que los últimos equimúltiplos tomados en el orden correspondiente.

Esto es, $(A, B) = (C, D)$ si y sólo si para cualesquiera m y n, $mA \gtreqless nB$ si y sólo si $mC \gtreqless nD$. Mediante esta definición y su empleo en los teoremas del libro 5, Eudoxio superó las dificultades del infinito, del continuo y de los números inconmensurables; esto lo llevó a cabo haciendo uso de un conjunto potencialmente infinito de elementos discontinuos para así poder aproximarse a manejar una medida común. Esto en sí fue un logro notable, y como tal fue apreciado por Euclides.

Sin embargo, ni los matemáticos árabes ni los europeos lo apreciaron en la misma medida. Algunos escritores árabes se quejaron de su dificultad y buscaron la manera de reemplazarlo, otros lo defendieron, pero a fin de cuentas ninguno lo entendió. Los matemáticos europeos simplemente lo ignoraron, habiendo errado el camino debido en parte al carácter espúreo de la cuarta definición que aparece en el libro 5, la cual no sólo falló en reemplazar la definición genuina, sino que tergiversó el significado de la definición 5. Incapaces de apreciar la temática a través de la óptica de Euclides o de Eudoxio, los escritores latinos la estudiaron a través de las lentes distorsionadas de la *Aritmética* de Boecio; remitiéndose a los primeros conceptos pitagóricos declararon que "son iguales aquellas razones (cocientes) cuyas denominaciones son iguales". Pero, ¿cómo se determina la denominación de una razón? Siguiendo el breve tratado de Jordano la respuesta es: "la denominación de una razón de esto a aquéllo es lo que resulta de dividir esto entre aquéllo". En su *De proportione* el *proportionalitate*, Campano de Novara estuvo de acuerdo, palabra por palabra, con esta definición.

Como lo señala el término "denominación", con esta división cada razón recibía un nombre, y dicho nombre dependía de la clase en la que la razón caía. Si en la razón (A, B), resulta que $A = B$, ésta era la "razón de igualdad"; si $A > B$, era "una razón de desigualdad menor". Dentro de los casos de desigualdad mayor, si $A = mB$, entonces (A, B) era, en general, una "razón múltiple", en particular una "razón de orden m" (para $mA = B$, (A, B) era una razón de suborden m"). Si A contenía una sola vez a B con un residuo mayor que 1, (A, B) era una "razón superparticular"; específicamente, $(3, 2)$ era una "razón sesquialterada", $(4, 3)$ una "sesquitercia", $(5, 4)$ una sesquicuarta", y así sucesivamente. Si A contenía una vez a B con un residuo mayor que 1, (A, B) sólo era una "razón superseparante"; ejemplos específicos son $(5, 3)$ que se denomina "tercio superbiseparante", $(8, 5)$ es "quinto supertriseparante", y así sucesivamente. Cuando A contenía a B más de una vez, (A, B) caía en la clase de razones "superparticular múltiplo", con nombres específicos que se formaban de la manera correspondiente. La mayoría de los textos medievales que versaban sobre razones y proporciones dedicaban una sección relativamente grande a este esquema de clasificación, y en la literatura que corresponde a un periodo que se inicia a finales de la Edad Media y que corre hasta finales de siglo XVII, las razones se expresaron como su denominación, y no como pares de números.

Si el concepto de denominación involucraba por una parte la idea de que una razón es un ente especial, una relación (habitudo) entre dos cantidades en lugar de una cantidad por sí misma, por otra parte, operacionalmente borraba esa distinción. Esto se debe a que cuando las cantidades en una razón eran tomadas primeramente como números, y cuando estos números eran divididos por otro, el resultado tenía que ser un número. De este modo, en el *De numeri datis* (II,2), Jordano multiplicó un término de la razón por la denominación de la razón, para así encontrar el otro término, y en (II,3) dividió 1 por la denominación de una razón, para con ello determinar la denominación de la razón inversa. En resumen, se puede decir que mediante el procedimiento de denominación las razones podían ser manipuladas con la aritmética de fracciones. El resultado a corto plazo fue una aritmetización de la teoría de razones y proporciones que evadía o ignoraba los aspectos sutiles de esa teoría. A largo plazo el resultado fue que la denominación favoreció la extensión del concepto de número para incluir las fracciones como razones respecto de la unidad, y, ultimadamente para incluir cualquier cantidad ligada a una cantidad unitaria mediante una razón o relación definible en modos especificados.

Sin embargo el proceso de denominación no superó los obstáculos respecto del problema de las razones irracionales o razones de inconmensurables. Algunos autores argumentaron que dichas razones no tenían denominación, otros señalaron que estas eran "mediatas" en lugar de "inmediatamente denominadas". Esta última distinción, aparentemente planteada por primera vez por Tomás Bradwardino (murió en 1349) y más tarde desarrollada por Nicole Oresme (murió en 1382), parece ser que adolecía de un significado operacional específico; a esto se debe que a pesar de que la razón de la diagonal de un cuadrado respecto de su lado era llamada "mitad de una razón doble", Bradwardino y Oresme discrepaban en lo referente a qué era la denominación mediata y qué era la inmediata. Se concluye entonces que a pesar de que los escritores medievales podían nombrar cosas, su procedimiento para hacerlo no se basaba ni proporcionaba un mayor entendimiento sobre la estructura matemática de los entes nombrados.

Más aún, durante la época en que Oresme estaba escribiendo su *De proportionibus proportionum* había dos tipos de razones que eran denominadas. Los escritores medievales habían combinado dos definiciones de importancia secundaria contenidas en el libro 5 de los *Elementos* con la teoría musical tradicional y con un teorema proveniente de fuentes árabes (aunque su planteamiento se remontaba a los tiempos de Menelao) para desarrollar una teoría de la razón compuesta, también llamada razón de razones. Sobre este tema, y posiblemente más acentuadamente que en cualquier rama de la matemática, mostraron tanto la habilidad para explorar con profundidad los conceptos como la preocupación que albergaban acerca de temáticas que rebasaban a las matemáticas.

Comenzaron el trabajo con información inadecuada. A pesar de que Euclides había mencionado la combinación de razones, señalando en particular que en la proporción continuada $(A, B) = (B, C) = (C, D)$ la razón (A, C) es el duplicado de la razón

(A,B) y (A,D) su triplicado (ver definiciones 9,10), y que "paralelogramos equiangulares guardan uno respecto del otro la razón compuesta por las razones de sus lados" (VI, 23), no utilizó ni desarrolló más allá este concepto. La astronomía matemática le encontró mejores usos, como por ejemplo en el teorema de transversalidad de Menelao, el cual señala que en la figura 2 $(AG, AE) = (GD, DZ)(BZ, BE)$ y $(GE, AE) = (GZ, ZD)(DB, BA)$. Bajo esta forma aparece el teorema en el Almagesto de Ptolomeo, y en un comentario sobre este trabajo, Teón de Alejandría añadió otros cuatro casos que involucraban diferentes combinaciones de lo seis segmentos de línea. Los escritores árabes aumentaron el número de casos; a pesar de ello al estudiar el teorema no perdieron de vista su contexto trigonométrico. Por

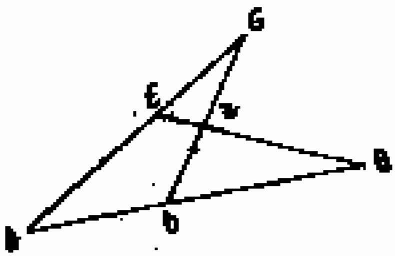

Figura 2.

el contrario, de entre los primeros escritores europeos sólo Leonardo Fibonacci reconoció y transmitió este contexto. Los que más influencia tuvieron, Jordano y Campano, aún a pesar de trabajar en contacto con las fuentes árabes, optaron por la ya degenerada teoría de razones asociada a la tradición de Euclides y Boecio, debido, se piensa, a razones de lenguaje y estilo de presentación. Para Jordano, "el obtener o componer una razón a partir de razones significa la denominación de la razón mediante la multiplicación de las denominaciones de las razones". La noción conceptualmente vaga de "componer" dos relaciones para obtener una tercera había llegado a ser la cuestión operacionalmente clara y sencilla de multiplicar dos fracciones, y, a través de la noción de denominación, la razón compuesta siguió las huellas de la razón sencilla en su paso del contexto geométrico al aritmético, para no regresar sino hasta el surgimiento de la trigonometría en el siglo XV.

Como ya ha sido señalado, los pensadores medievales gustaban de llevar las ideas hasta sus límites, y por ello el uso que Bradwardino hizo de las razones compuestas en la ciencia del movimiento provocó un desarrollo de la matemática, el cual pronto llevó a las razones compuestas a ser algo más que una simple aplicación de la aritmética de fracciones. El traducir la nueva teoría a la aritmética hubiera requerido del concepto del exponente racional, para el cual Oresme y sus contemporáneos carecían por completo del simbolismo adecuado, además de poseer sólo un conocimiento elemental de las nociones básicas. De cualquier manera no hizo falta que Oresme tradujera esta teoría a conceptos aritméticos. Tanto su matemática como sus propósitos no matemáticos hicieron posible un tratamiento más abstracto. En la reseña que sigue lo único anacrónico es el simbolismo, y este ha sido diseñado con el cuidado necesario para no introducir conceptos ajenos a la teoría de Oresme.

Oresme inició su presentación de *De proportionibus proportionum* suponiendo que los lectores sabían cómo encontrar la igualdad de dos razones (A, B) y (C, D) y que también sabían, partiendo de Euclides, que dos razones (A, B) y (B, C) formaban la razón compuesta (A, C); en símbolos esto se planteaba como $(A, B) + (B, C) = (A, C)$. El componer, por lo tanto, tenía una operación inversa de división o descomposición, ya que para cualquier valor C entre los términos de una razón (A, B) resultaba que $(A, B) = (A, C) + (C, B)$; el que la C existiera, por lo menos en lo que respecta a magnitud, era algo que suponían todos los autores desde los tiempos de Campanus. Claramente cualquier razón podía ser aumentada: dado (A, B), simplemente un valor $C > A$ o $D < B$: entonces $(C, D) > (C, B) > (A, B)$. Aunque Oresme no lo dijo explícitamente, cualquier razón puede ser disminuida de manera similar). Para componer, es decir, "sumar" cualesquiera dos razones (A, B) y (C, D), uno determina la cantidad E tal que $(C, D) = (B, E)$, o la cantidad F tal que $(A, B) = (F, C)$ (la existencia de la cuarta proporcional es otra suposición explícita de los matemáticos medievales); por lo tanto $(A, B) + (C, D) = (A, B) + (B, E) = (A, E) = (F, C) + (C, D) = (F, D)$. La "resta" se lleva a cabo mediante el obvio procedimiento inverso.

Ya que dos razones pueden ser sumadas, una razón puede sumarse a sí misma tantas veces como se quiera, de tal manera que se puede definir $n(A, B) = (A, B) + (A, B) + \ldots + (A, B)$ para n términos. De manera similar, encontrando m-1 medias proporcionales entre los términos de cualquier razón (A, B), uno puede dar un significado preciso al múltiplo inverso $1/m(A, B)$. Gracias a esto también la expresión $n/m(A, B)$ tiene un significado preciso. Por lo tanto, si $(C, D) = n/m(A, B)$, (n, m) podía ser llamada la "razón de las razones (C, D) y (A, B)". Según Oresme (como lo interpreta Grant), (C, D) o $n/m(A, B)$ es denominado de manera inmediata por (A, B) y de manera mediata por (n, m).

Con estos antecedentes Oresme contaba con lo necesario para llevar a cabo el proyecto principal del capítulo 4 de su tratado, a saber, una presentación de la Regla de Bradwardino que mostrara que es la única versión internamente coherente de la proposición aristotélica sobre fuerzas, resistencias y velocidades. Si la razón (V_2, V_1) es la razón de las razones (F_2, R_2) y (F_1, R_1) o $(F_2, R_2) = V_2/V_1\,(F_1, R_1)$, entonces las aseveraciones hechas por Aristóteles en su *Física* quedan validadas. Con todo, entre los antecedentes y la discusión física aparecían dos capítulos, y es claro que Oresme tenía la intención de incluir dos capítulos posteriores, los cuales desde entonces fueron separados del texto. Su propósito apuntaba mucho más allá de la Regla de Bradwardino. Intentaba establecer —para las razones compuestas— criterios de conmensurabilidad análogos a los de los casos sencillos, con el propósito final de construir una base dialéctica con la cual refutar a la astrología.

A lo largo de la discusión de los capítulos 2 y 3, Oresme procede a comparar las cantidades sujetas a una adición y las razones sujetas a composición que ha presentado en la segunda mitad del capítulo 1. Ya que una cantidad continua es infinitamente divisible, así también resulta serlo cualquier razón de cantidades continuas; por ser los números finitamente divisibles también lo es cualquier razón de números. Las razones pueden ser racionales o irracionales; el primer caso se refiere a cuándo los términos son conmensurables y el segundo a cuando no lo son. Así también las razones de razones pueden ser racionales o irracionales, dependiendo de la conmensurabilidad de las razones que las constituyen. Por último, así como Euclides aportó en los libros 7 y 10 un conjunto de criterios para determinar la conmensurabilidad de cantidades, tanto discretas como continuas, así también uno puede establecer criterios similares para las razones de razones, tal y como lo hizo Oresme.

El concepto de conmensurabilidad descansa en el de "parte", y a final de cuentas en el de "unidad". Se dice que una cantidad A es una "parte", o "parte alícuota", de la cantidad B si y sólo si para algún entero n resulta que $nA = B$. Se dice que A es "varias partes" de B si y sólo si existe alguna cantidad C que es parte tanto de A como de B; es decir, C es una unidad común a A y B. Para Euclides, A y B son conmensurables si y sólo si una de ellas es parte o partes de la otra. De igual manera las razones compuestas permiten que para ellas se utilicen las mismas definiciones: (A, B) es parte de (C, D) si y sólo si para algún n, $n(A, B) = (C, D)$, o si y sólo si la razón de razones (C, D) y (A, B) es una razón múltiple. Se dice que (A, B) corresponde a partes de $C, D)$ si y sólo si existe una razón unidad común a ambos, esto es, si y sólo si existe alguna (E, F) tal que $(A, B) = m(E, F)$ y $(C, D) = n(E, F)$, por lo que resulta que $(A, B) = n/m(C, D)$. Dos razones son conmensurables si y sólo si una es parte o partes de la otra.

Las diversas proposiciones de los capítulos 2 y 3 establecen primero las maneras en que las razones racionales e irracionales pueden ser descompuestas y luego las condiciones bajo las cuales las razones son conmensurables una respecto de la otra. La discusión se apoya fuertemente en la *Arithmetica* de Jordano y en los *Elementos* VII-IX de Euclides para dar criterios de la existencia y el número de medias proporcionales entre enteros. A pesar de que habría sido posible establecer un conjunto similar de condiciones para las razones irracionales, Oresme no intentó hacerlo y sólo agregó algunos comentarios en el capítulo 4. Una razón es que las condiciones de conmensurabilidad entre racionales de hecho aportaban los elementos que Oresme necesitaba. Estas condiciones aparentemente limitaban tanto el número de razones conmensurables— por ejemplo, (3, 1) es inconmensurable con (2, 1), como también lo son (5, 1), (6, 1), (7, 1) y así sucesivamente que (Proposición III.10).

> Dadas dos razones desconocidas es muy probable (verosimile) que sean inconmensurables una respecto de la otra; y si muchas [razones] desconocidas son propuestas, lo más probable (verisimilimum) es que unas y otras sean inconmensurables entre sí.

Por lo tanto, como lo señaló Oresme aquí y en otros escritos, es muy poco probable que las hasta entonces desconocidas razones exactas de los movimientos planetarios sean conmensurables. Pero la astrología se basa en la conmensurabilidad de esos movimientos, pues de no ser así resulta entonces que los ciclos de conjunción y oposición serían destruidos. Por lo tanto, la astrología queda, en el mejor de los casos, en una situación sospechosa desde el punto de vista científico.

La original teoría matemática de Oresme tuvo poco impacto o influencia; sólo dos autores, Alvarus Thomas y Georg Lockert, parecen haber sido sus seguidores, y es probable que Lockert lo haya conocido mediante algún intermediario. Pero esto no debería oscurecer la sofisticación y profundidad de pensamiento evidente en su tratado. Y tal sofisticación y profundidad tampoco debería oscurecer los propósitos no matemáticos de la teoría. Para Oresme, como para la mayoría de sus contemporáneos del medievo, las matemáticas servían para fines ajenos a los suyos propios.

Oresme probablemente fue el mejor matemático de su tiempo, y en la misma categoría de Leonardo y Jordano, se le considera como uno de los mejores de la Europa medieval. Su contemporáneo Jean de Meurs podría haberlo igualado en amplitud de conocimiento, mas no en originalidad. Y ninguno tan bueno o mejor —Regiomontanus por ejemplo—, aparecería por otro siglo. Pero Regiomontanus perteneció a otra época, una en la que Apolonio, Diofanto y Pappus empezaron a circular en griego, una época en la que el creciente interés de la astronomía técnica propició el desarrollo de la trigonometría a partir de las fuentes árabes y griegas, época en que las prácticas aritméticas y algebráicas de mercaderes e ingenieros —parte importante de una tradición oral— estaban siendo asentadas en libros de texto para facilitar su circulación. El astrónomo (que con frecuencia era llamado "matemático"), el "maestro d'Abaco", el "Rechenmeister", el "cossista" (prácticamente del "arte della cosa", el "ars rei et census" o álgebra), reemplazaron a los maestros en artes de la universidad en su papel de figuras importantes de las matemáticas; sus necesidades de técnicas mejoradas y los reclamos por soluciones a nuevos problemas desviaron a las matemáticas de los caminos del didacticismo y el uso filosófico, llevándolas a las del desarrollo interno. Estas fueron las matemáticas del Renacimiento, las que culminarían en la brillantez del siglo XVII. Con ello llegaba el fin de las matemáticas medievales.