Peirce: entre la lógica y las matemáticas

Ivor Grattan-Guinness

RESUMEN

Se discuten algunas consideraciones en el contexto y transfondo de las contribuciones de Peirce a la lógica algebraica; se indican algunas de las similitudes y diferencias entre esta tradición y aquella de la lógica matemática. Por ejemplo, el tipo de *lógica matemática* que él desplegó en su lógica no fue la variedad cantoriana la que estudió como una parte (fundamental) de las matemáticas sino una versión de las relaciones del todo y la parte. Los puntos de vista de Peirce sobre las matemáticas y (su versión de) la lógica son evaluados. También se reporta una carta de 1870 escrita por su padre donde lo presenta con De Morgan.

ABSTRACT

Some considerations are offered on the context and background to Peirce's contributions to algebraic logic; similarities and differences between this tradition and that of mathematical logic are indicated. For example, the sort of *set theory* which he deployed in his logic was not Cantorian variety'which he studied as a (foundational) part of mathematicsbut a version of part/whole relationships. Peirce's views on the relationship between mathematics and (his sort of) logic are appraised. A letter of 1870 written by his father and introducing him to De Morgan is reported.

Se ofrecen algunas consideraciones sobre el contexto y los antecedentes de las aportaciones que hizo Peirce a la lógica algebraica, se indican las semejanzas y las diferencias entre esta tradición y la de la lógica matemática. Se valoran las ideas de Peirce sobre la relación entre las matemáticas y (su clase de) lógica.

[illegible]

1. Introducción

> La utilidad [de la lógica de Boole] consiste en que nos da una concepción clara de las relaciones lógicas, tanto de tipo simple como intricado. [...] Fue la aplicación que de su álgebra lógica hizo Boole a la doctrina de las probabilidades lo que demostró que no era simplemente una idea brillante, sino que tenía una gran y verdadera importancia para la lógica. [...] Eso fue antes de la época de Weierstrass; es decir, antes que aparecieran los estilos actuales de razonamiento matemático [...]
> Al mismo tiempo que Boole, otro matemático, Augustus DeMorgan [sic], empezó una importante serie de trabajos en lógica [...] Como matemático, De Morgan carecía de la genialidad de Boole, pero sus ideas eran de una notable lucidez. Fue él quien descubrió la lógica de las relaciones, la cual posee una gran importancia; y dio una formulación muy completa de una importante clase de razonamiento necesario que había sido ignorado totalmente. [...]
> Y llegamos así a los autores contemporáneos. Sin duda el más profundo de los que he mencionado es Alfred Bray Kempe. [...]
> Otro grupo de hombres que han hecho aún más por la lógica ofreciéndonos pensamientos mucho más profundos son aquellos que estudiaron los números infinitos, tanto los ordinales como los que expresan multitud. El doctor Georg Cantor ha sido el más destacado de todos ellos [...]
>
> C.S. Peirce (NEM, 4:124-127)

Durante largos años he sido un gran admirador de los logros de Peirce en lógica y en filosofía. Para que mis consideraciones no rebasen los límites del propósito de mi intervención, por "lógica" entenderé siempre sólo el sentido técnico del término y las matemáticas con las cuales se relaciona. No me ocuparé de sus intereses lógicos más amplios (donde, por ejemplo, podrían plantearse cuestiones como la creatividad matemática dentro del contexto de su origen) ni con las áreas tan diversas de las matemáticas en que él trabajó en una u otra ocasión.

Entre las principales áreas de mis trabajos de investigación histórica se encuentra la historia de las matemáticas y de la lógica matemática; me serviré de estos antecedentes para presentar la mayor parte de los siguientes comentarios. Haré hincapié en el contexto y en la prehistoria de la obra de Peirce. En la siguiente sección haré distinción entre la lógica matemática y el álgebra, tradición dentro de la cual se inscribe la obra de Peirce. En la sección 3 efectuaré comparaciones entre ambas tradiciones, concediendo especial importancia a los temas matemáticos. Y luego, en la sección 4, abordaré la cuestión de la relación que Peirce veía entre las matemáticas y la lógica. Para mayores detalles consúltese mi trabajo (1991b), del cual ésta es una síntesis.

A lo largo de esta exposición la evolución del pensamiento de Peirce no se examina con mucha profundidad; en la mayor parte de los temas explicados no parece haber realizado cambios notables de estrategia, aunque su punto de vista y su conocimiento se enriquecieron y ampliaron con el transcurso de los años. Entre las referencias obligadas se cuentan las tres principales ediciones de sus escritos, abreviadas en el texto y en las notas al pie de página como "CP", "NEM" y "W".

2. Lógica algebraica y lógica matemática

Distinguiré lógica "algebraica" de lógica "matemática", usando ambos términos en su sentido moderno[1]; los dos *se utilizaron* durante el siglo XIX y después, pero con otras acepciones y se agregaron entonces otros adjetivos como "formal" y "simbólico". La principal lección es que durante el siglo XIX surgieron dos tradiciones en lógica que se servían de las matemáticas (una expresión intencionalmente ambigua, que servía para excluir otras tradiciones como las lógicas kantiana y neohegeliana, en que se consideraban las matemáticas pero no se manifestaban).

2.1 Álgebra y lógica. La lógica renació en forma impresionante y rápida en Gran Bretaña tras la publicación de los *Elements of logic* de Whately en forma de libro (1826); pronto aparecieron nuevas ediciones del libro y comentarios acerca de él [el propio Peirce se interesaría en la lógica al leer una edición de Whateley (NEM 4:vii)]. En particular, la lógica y el álgebra iban a interactuar de modos importantes en dos distinguidos matemáticos ingleses.

2.2 Augustus DeMorgan (1806-1871) se ocuparía de las ecuaciones funcionales, y de hecho en su trabajo de 1836 escribió la primera explicación general de sus propiedades.[2] Un ejemplo simple de tales ecuaciones es

$$F(m+n) = F(m) + F(n), \tag{1}$$

para todos los valores de m y n, y donde la tarea consistía en encontrar F, no m o n. Esto requería técnicas especiales y en realidad el tema era un verdadero reto en aquella época. No sólo dio origen a resultados propios de la disciplina, sino también a dos términos perdurables en el álgebra: "distributivo" y "conmutativo", propuestos por el matemático francés Servois (1814), precisamente dentro de este contexto. La distributividad de las funciones de hecho se definió mediante (1), generalizable a cualquier número finito de variables con argumentos m, n ...; la conmutatividad está dada por

$$F(G(m)) = G(Fm)) \qquad \text{(para todos los valores de } m). \qquad (2)$$

Aquí el punto de interés es que la estructura de la teoría era semejante a la lógica de relaciones que DeMorgan iba a presentar por primera vez en su trabajo de 1860: conmutatividad (o no conmutatividad), la búsqueda de la relación o relaciones inversas, y así sucesivamente. Aunque no explicó los nexos entre esas dos teorías, éstos son bastante evidentes y se advierten a lo largo del desarrollo de la lógica algebraica.

2.3 George Boole (1815-1864) fue uno de los principales matemáticos ingleses que cultivó los métodos de los operadores diferenciales, sobre todo en la solución de las ecuaciones diferenciales. La teoría de los operadores diferenciales (que se remonta al siglo XVIII) se basa en la reinterpretación del cociente de los diferenciales dy/dx como $(d/dx)y$, la operación de diferenciación d/dx sobre la función y. Para mejorar la notación, la letra "D" denotaba al operador. En un trabajo de 1844, Boole propuso los principios básicos que debían obedecer las funciones de estos operadores: dos de ellas eran la distributividad y la conmutatividad y la tercera era la "ley de índices":

$$D^m D^n = D^{m+n}, \quad \text{donde } m \text{ y } n \text{ son cualesquiera enteros positivos} \qquad (3)$$

Tres años más tarde, en su primera publicación sobre lógica, Boole (1847) propuso tres leyes fundamentales aplicables a los objetos y sujetos x, y. . . (operaciones mentales, colecciones o condiciones de verdad de las proposiciones, según diversas interpretaciones) que cumplían su álgebra booleana. Dos de ellas eran la distributividad sobre sujetos y la conmutatividad, y la tercera era la "ley de índices" inicialmente en la forma general

$$x^n = x \text{ (con } n \text{ un entero} \geq 2) \qquad (4)$$

y más tarde en el caso especial $x^2 = x$. La semejanza entre la teoría matemática y la lógica no podía haber sido formulada con mayor claridad. Y, como en el caso de De Morgan, la analogía conservaría su importancia en la tradición de la lógica algebraica. En efecto, tales semejanzas surgirán en varios de los puntos que se discutirán en la sección 3.[3]

Las siguientes etapas de gran trascendencia en el desarrollo de la lógica algebraica incluyen las importantes modificaciones al sistema de Boole propuestas a partir de 1864 por W.S. Jevons (1835-1882) (véase mi 1991a), así como la combinación de las teorías de De Morgan y las de Boole por Peirce y E. Schröder (1841-1902), en especial a partir del importante trabajo de Peirce (1870) sobre las relaciones [véase a Barone (1966) y a Dipert (1980)].

2.4. *Lógica matemática*. A.L. Cauchy (1789-1857) propuso una disciplina del "análisis matemático" en la cual el cálculo, la teoría de funciones y la convergencia de series fueran unificados bajo el encabezado común de los límites.[4] El objetivo principal era mejorar el grado de rigor de esas áreas, y vale la pena mencionar aquí un aspecto en particular: Cauchy mejoró grandemente la lógica inherente a especificar las condiciones necesarias y/o suficientes bajo las cuales los teoremas debían considerarse verdaderos.

Peirce estaba conciente de tales aspectos de la obra de Cauchy. "Iniciada paulatinamente con Cauchy a principios del siglo XIX", escribió en cierta ocasión, "se ha introducido una vasta reforma en la lógica de las matemáticas que aún no termina" (NEM, 4:157). En otros pasajes, en un ensayo de 1893, juzgó la fortaleza y las limitaciones de Cauchy como protológico en los siguientes términos: "A Cauchy se le califica frecuentemente de mal lógico porque cometió muchas equivocaciones lógicas. Es verdad que lo hizo, pero a pesar de ello sabía razonar mejor que otros que avanzaron con paso vacilante y que nunca erraron el camino porque se limitaron a seguir la senda trazada por otros" (CP 4.151).

Poco a poco el enfoque de Cauchy fue ganando aceptación sobre las alternativas contrarias. En particular, fue adoptado por K. Weierstrass (1815-1897) en las clases que impartió en la universidad de Berlín desde fines de la década de 1860, y ejerció una influencia enorme. Conviene mencionar aquí tres tendencias básicas.

En primer lugar, con base en algunos problemas concernientes a las series de Fourier, G. Cantor (1845-1918) desarrolló su teoría de conjuntos, inicialmente con dichos fines matemáticos, pero luego en un marco de referencia más amplio, con el fin de abarcar partes básicas de las matemáticas, tales como la aritmética y, con ello, el análisis matemático propiamente dicho. En segundo lugar, G. Peano (1858-1932) introdujo en el análisis un lenguaje formal más refinado; junto con sus seguidores creó elementos esenciales de la lógica matemática, entre ellos el cálculo de predicados con cuantificación, con colecciones manipuladas con los medios cantorianos [Bottazzini (1895); Grattan-Guinness (1986); Rodríguez-Consuegra (1991), cap. 3]. En tercer lugar, B. Russell (1872-1970) unificó ambos temas al generalizar la lógica de Peano con su propia lógica de relaciones (cosa que los "peanistas" no habían hecho) y luego fue más allá que Cantor al afirmar que la teoría de conjuntos tenía aquí sus propios fundamentos. Este fue su "logicismo", es decir, la tesis de que las matemáticas están contenidas dentro de esta forma de la lógica.[5]

3. Semejanzas y diferencias entre las dos tradiciones

> La expresión actual *lógica matemática* es ambigua pues puede interpretarse como que significa las matemáticas de la lógica o la lógica de las matemáticas.
>
> Johnson (1972:151)

En la presente sección reseñaré algunos aspectos de la lógica algebraica y de la lógica matemática, con el propósito de proponer algunos puntos de vista acerca de la primera que vale la pena estudiar más a fondo. Tomo cada tradición en su forma "establecida", tal como aparece, respectivamente, en las obras de Peirce de 1890 y en el trabajo *Vorlesungen* de Schröder (que empezaron a aparecer por aquella época) y los *Principia mathematica* de Whitehead/Russell de 1910-1913. No examinaré los orígenes históricos de las diversas ideas y nociones. En los casos de semejanza en un aspecto también son evidentes las diferencias y viceversa; no he intentado en absoluto verificar el equilibrio con lujo de detalles. Sin embargo, algunos aspectos son más profundos que otros y empiezo con los tres de mayor importancia.

3.1 Nexos con las matemáticas. La inspiración de estas dos tradiciones en lógica procedentes de diversos campos de las ramas de las matemáticas dio origen a muchas diferencias. En lógica algebraica se subrayaron las *leyes* (entre ellas la distributividad y la conmutatividad, lo mismo que la de asociatividad) y se usaron (más en el caso de Schröder que en el de Peirce) las propiedades de dualidad del teorema (- pares). Se mostraron analogías: + tenía propiedades como la conjunción "o", × como las de la conjunción "y", el cero se asemejaba a una contradicción, y así sucesivamente. Las conexiones se volvían más estrechas en el mundo en expansion de las álgebras de aquella época, en que los sistemas empleaban más de una conectiva, números hipercomplejos, etc. (Novy 1973). En todo esto resultó sumamente fecunda la influencia que el padre de Peirce tuvo sobre él.

Una parte especialmente notable de la lógica de Peirce, de la cual no conozco ninguna analogía en la lógica matemática, es el sistema icónico de 1902 para los dieciséis conectivos binarios.[6] Normalmente un álgebra es un sistema de objetos, *con* conectivas que siguen ciertas leyes de composición; pero aquí los conectivos mismos son los objetos con principios icónicos que cumplen la función, podríamos decir, de conectivos de segundo orden. Por supuesto, vemos a Peirce vincular su lógica con su "semiótica" en este pasaje. Y vale la pena establecer que al inicio cita a De Morgan, quien también recurrió al lenguaje de los signos cuando clasificó varias clases de silogismos.[7]

En lógica matemática se pusieron de relieve los *axiomas* y también las propiedades de completez que se buscaban. Tales esperanzas tan sólo estaban implícitas en el sentido de que las distinciones de teoría/metateoría se hallaban ausentes en prácticamente todas las lógicas de la época (punto que se explicará en la subsección 3.5), pero la esperanza persistía pese a todo. Conviene subrayar la importancia de los axiomas, porque apenas a fines del siglo XIX la axiomática empezó a surgir como un movimiento muy significativo dentro de las matemáticas. Más aún, los principales estímulos no provenían de la lógica sino de las geometrías (euclidianas y no euclidianas) y de las álgebras abstractas (Cavaillès 1938). A propósito, estos temas le interesaban a Peirce de manera casuística, y no figuraban entre sus principales preocupaciones.

3.2 Teorías de colecciones. Empleo aquí la palabra "colecciones" como término neutral para abarcar conjuntos y clases reunidos en un marco común. Como casi todas las lógicas del siglo XIX, la lógica algebraica desarrolló versiones de lo que con el tiempo ha venido a conocerse con el nombre de "teoría de parte-todo", una concepción básicamente extensionalista de una colección que se basa en una relación de subconjuntos. Corresponde a la "inclusión impropia" en la lógica matemática, donde la teoría de las colecciones descansaba sobre el *Mengenlehre* de Cantor. En ese trabajo se distinguían la inclusión propia y la impropia, y se distinguía más aún, de la pertenencia de un individuo a un conjunto de la pertenencia de un conjunto a un conjunto de conjuntos, y así sucesivamente.

Surgieron así varias distinciones correlacionadas. Me limitaré a mencionar la que existe entre el conjunto vacío, el número cero y nada, distinción que sigue siendo bastante oscura en la lógica algebraica. (En particular, no se ha dilucidado la situación de la clase vacía: si las colecciones realmente son extensionales, entonces en realidad no debería haber nada.) Aquí no se trata meramente de una diferencia técnica: da origen a importantes diferencias en la interpretación de muchas ideas lógicas, como se verá en la subsección 3.3. El joven de 18 años N. Wiener (1894-1964), no tuvo en cuenta estos puntos cuando comparó la lógica de las relaciones en Schröder y en Whitehead/Russell y demostró (correctamente, por lo demás) la existencia de una semejanza mucho más estructural entre ellas: Russell lo criticó con severidad sobre estas bases (véase mi trabajo, 1975).

Desde luego se paga un precio por alcanzar este poder adicional: las famosas paradojas, que han de ser la preocupación central de cualquier trabajo en la esfera de la lógica-matemática. En cambio, los lógicos algebraicos podrían prescindir de ellas ya que la mayor parte no puede construirse en sus sistemas.[8]

También diferían las aplicaciones dadas a la teoría de conjuntos. Para ejemplificar esto en un caso importante, recordemos que tanto Cantor como Peirce hicieron notables aportaciones a la comprensión de la continuidad, pero que sus puntos de vista sobre la relación entre continuidad y los infinitesimales eran muy distintos. La concepción de aquél sobre el continuo abarcaba la concepción estándar sobre los números racionales e irracionales, excluyendo explícitamente los infinitesimales: llegó a afirmar la imposibilidad de contar con una prueba de su existencia. Al expresar esta esperanza amplió la opinión de la mayor parte de sus colegas weierstrassianos de que los infinitesimales no eran necesarios (línea de pensamiento que también adoptó Russell). Por el contrario, Peirce sostuvo que eran un elemento indispensable de la continuidad y, mediante la construcción de conjuntos-potencia (que al parecer descubrió de manera independiente de Cantor), describió los medios de construir "colecciones supermultitudinarias" dentro de las cuales estaban contenidos.[9]

Mientras que Peirce mostró mucho interés por la teoría cantoriana de conjuntos, e hizo notables aportaciones a ella y a teorías afines (como los sistemas axiomáticos de enteros), su lógica sigue funcionando con la teoría de parte-todo que acabamos de mencionar. Al parecer vio la *Mengenlehre* (sistema o teoría de cantidades) como parte de las matemáticas en cuanto a sus fundamentos (compárense estas observaciones de 1908 con P.E.B. Jourdain en NEM 3:879-888); por el contrario, para Russell la *Mengenlehre* (teoría de cantidades) constituía un componente esencial de la lógica matemática y, en efecto, recibió un tratamiento mucho más completo en su *Principia mathematica* que cualquier otra rama de las matemáticas. En otras palabras, Peirce continuaría la obra de Cantor; Russell tuvo que asimilarla.

3.3 Lógica básica. Ambos sistemas desarrollaron los cálculos de proposiciones y los cálculos de predicados de funciones de una y de más variables con cuantificación. Las semejanzas son naturalmente numerosas y hasta notables; pero los diversos enfoques que se adoptaron con respecto a las colecciones influyeron en el carácter de los conceptos lógicos en cuestión: en lógica algebraica son a menudo extensionales (aunque también se admitieron las interpretaciones intencionales), mientras que en lógica matemática la intencionalidad solía predominar. No estoy considerando aquí los progresos del logicismo después de la Primera Guerra Mundial, época en que la extensionalidad gozó de gran aceptación.

Tal vez la diferencia más notable se refiere a la cuantificación, en que la respectiva interpretación del caso universal y del caso existencial como conjunciones y disyunciones infinitas, con las analogías algebraicas de los productos y sumas infinitos y de los símbolos "Σ" y "Π", es muy representativo de las influencias algebraicas señaladas en las subsecciones 2.1 y 3.1. La dualidad (a la que nos hemos referido en la subsección 3.1) apareció también en los arreglos de los cuantificadores. En cambio, los lógicos matemáticos rara vez hicieron algún uso especial de la dualidad. Otra diferencia reside en lo siguiente: en la lógica algebraica la igualdad era una conectiva primaria, aunque en uno de sus trabajos (1870), Peirce prefería el símbolo "$-\!\!<$" para expresar la cópula, con su interpretación como implicación (CP 3.47, 165-170 o bien W 3.360, 4:166-170). Por el contrario, en lógica matemática la equivalencia *nunca* tuvo el mismo rango (aunque también se utilizaban las definiciones de identidad). Volveremos a hablar de este punto en la subsección 4.4.

Ambas tradiciones lógicas trabajaron normalmente con sistemas clásicos bivalentes; Peirce sobresale por su simpatía por otros tipos de lógica, lo mismo modales que de valores múltiples. El segundo caso ejemplifica con gran claridad el enfoque algebraico de Peirce, posiblemente recogiendo una sugerencia de De Morgan y de Boole, extendió la ley (4) de este último en la forma factorizada

$$x(1-x)=0 \qquad \text{a la versión} \qquad (x-f)(x-v)(x-z)=0, \tag{5}$$

donde "v" y "f" eran verdaderos y falsos, respectivamente, y "z" era un nuevo caso disponible (véase, por ejemplo, NEM, 4:118-123). Russell tenía conceptos de necesidad y posibilidad, pero no influyeron de manera significativa en su lógica, y además se mostró reticente ante la propuesta de una lógica modal que MacColl hizo en la década de 1900 (a la cual tampoco Peirce pareció responder).

Por último, ambas tradiciones mostraban gran interés por los nombres; pero mientras que los lógicos matemáticos ponían de relieve la diferencia entre los nombres y las descripciones definidas (en parte por motivaciones propias de las matemáticas y, en el caso de Russell, también por las paradojas), Peirce se inclinó hacia la semiótica (que contiene una teoría de los nombres propios). Ese interés no despertó mucho entusiasmo entre los lógicos matemáticos, pese a hacerse hincapié en la urgente necesidad de contar con una buena notación en matemáticas y de que Peano y Russell construyeron un excelente sistema lineal. La notación de la teoría de árboles de Frege es también un buen diseño planar; ha sido injustamente objeto de muchas críticas.

3.4 *Distinción entre teoría y metateoría*. Entre los lógicos de este periodo, solo Frege tomó en serio la distinción, y aun así no siempre lo tuvo en cuenta. No sólo no se encuentra en Peano ni en Russell, sino que además su concepto de lógica es de tal generalidad que impide operar a la metateoría. En consecuencia, gran parte del contenido de la lógica matemática es incoherente: la implicación se confunde con la inferencia, elementos de lenguaje se mezclan con objetos denotados [12], y así sucesivamente. Seguramente también en Peirce hay fusiones de este tipo, pero al parecer no han atraído la atención de sus historiadores. Algunas veces se introduce la distinción sin una discusión explícita; por ejemplo, los procedimientos de decisión basados en las gráficas de existencias (a propósito, ninguna analogía de ellas ha despertado el interés de los lógico-matemáticos) son en realidad metateóricos.

3.5. *Popularidad o aceptación general*. En términos generales se revelan dos mundos distintos, a pesar de que su contenido y su finalidad tienen muchos aspectos en común. A fines de la década de 1900 ambos estaban activos, pero el de orientación matemática empezaba a eclipsar al de orientación algebraica como una lógica donde las matemáticas desempeñaban un papel decisivo. [Sobre este punto véase a Putnam (1982) por lo que concierne a Peirce]. En mi opinión, las diferencias señaladas en las subsecciones 3.2 y 3.3 explican en gran medida dicho eclipsamiento: las cuestiones examinadas en la lógica matemática eran más *específicas* que las planteadas por los algebristas. No resulta difícil imaginar al lector de Peirce o de Schröder en aquella época (e incluso mucho después): admirando la genialidad de sus sistemas pero preguntándose por el fin de todo ello. Aquí, al final de esta sección, se da un ejemplo representativo de la clase de percepción que tengo en mente tomado de un renombrado estudioso y ¡además norteamericano! (Weinberg 1965: 117):

> La visión contemporánea de las relaciones proviene sobre todo del desarrollo de la lógica de las relaciones por Charles Peirce, Schröder y, más específicamente, Frege [sic] y Russell. A este último le debemos, más que a cualquier otro filósofo, una idea clara de la naturaleza e importancia de las relaciones.

Así, Frege recibió un gran reconocimiento (posiblemente por su noción de los antecedentes —una importante aportación a la lógica de las relaciones, aunque haya sido la única); en cambio, De Morgan ni siquiera consiguió una mención. No obstante tiene muchas cosas de valor que decirnos, según veremos ahora una vez más.

4. Ideas de Peirce sobre lógica y matemáticas, y sobre matemáticas y lógica.

> Sabemos que los matemáticos muestran el mismo desinterés por la lógica que los lógicos por las matemáticas. Los dos ojos de la ciencia exacta son las matemáticas y la lógica; la secta matemática aparta el ojo lógico y la secta lógica aparta el ojo matemático; ambas piensan que ven mejor con un ojo que con dos.
>
> De Morgan (1868: 71)

Esta observación tan profunda debida a eminente matemático y lógico "de un ojo" nos sirve para iniciar nuestras consideraciones. El logicismo de Russell tenía por objeto incluir "todas" las matemáticas. El hecho de que haya fracasado rotundamente en su intento no nos incumbe por ahora; pero todavía queda por plantear la relación entre la lógica algebraica de Peirce y sectores de la matemática. La relación puede examinarse en dos partes: las matemáticas aplicadas a la lógica y la lógica aplicada a las matemáticas (donde los dos sentidos de "aplicado" tal vez no sean idénticos).

4.1 *Matemáticas aplicadas a la lógica*. Esta postura viene de Boole, que realizó "Un análisis matemático de la lógica", para citar el título de su primer libro (1847); y este punto de vista mantuvo su vigencia entre sus sucesores, Peirce entre ellos. En De Morgan la situación fue parecida, a pesar de las diferencias de contenido: se sirvió de notaciones matemáticas, o por lo menos de sistemas simbólicos, en su lógica (algunos ejemplos se dieron en la subsección 31.), expuso analogías, señaló que ciertos sistemas lógicos eran conmutativos (o de otra índole), etc. Peirce, heredero de las concepciones de ambos, siguió y amplió ambas clases de líneas de razonamiento aportando algunas técnicas matemáticas de su propia invención: en particular, sus gráficas de existencia se inspiraron en ideas de topología (o de prototopología). Desde su punto de vista, 'la lógica formal no es más que la aplicación de las matemáticas a la lógica' (CP, 4.228, de 1902).

Pero hay dificultades lógicas (para nosotros, metalógicas) en su aplicación. En particular, era indispensable suponer que estas teorías matemáticas eran consistentes, a fin de que la aplicación valiera la pena; pero se corre el peligro de una "vuelta en rizo", porque se presupone una noción lógica en un álgebra utilizada en lógica. En Boole, por ejemplo, se daba por sentada la consistencia o congruencia, porque posiblemente la relacionaba con su suposición de que $0 \neq 1$ (y otras propiedades más para distinguir el 0 del 1). En De Morgan la situación era todavía menos clara: aplicó las álgebras a su lógica, pero no explicó las consecuencias de esta condición de consistencia. Más aún, recuérdese que en la subsección 3.3 se dijo entonces que se ignoraba la distinción entre teoría y metateoría, lo que podía convertir al rizo en una espiral.

4.2 *La lógica aplicada a las matemáticas*. En casos individuales es posible advertir esto: por ejemplo, la aplicación que hace Peirce de la lógica de relativos a los errores de observación (W 3:114-118 de 1870) o a la geometría abstracta de Cayley (NEM 2:638-640). Pero esta relación es difícil de clasificar en forma general. No sólo involucra de los modos de razonamiento en las teorías matemáticas, sino también el lugar (si lo hay) de objetos matemáticos en esa lógica.

En primer lugar, la comparación con la lógica matemática resulta sumamente reveladora, aun cuando el programa logicista no funcionara adecuadamente. En particular, la teoría de conjuntos era (o debía ser) parte de esa lógica: ¿qué decir, por ejemplo, de las colecciones de la lógica de Peirce? ¿El carácter o condición de formar parte y el de ser una colección pertenecen a las matemáticas, a la lógica o a ambas disciplinas?

Una vez más, Peirce pensó que las premisas de las matemáticas eran hipotéticas, y esto lo llevó a distinguir las matemáticas de la lógica fundándose en que la lógica es categórica (CP 4.233, de 1902; NEM 2:595); pero seguramente esta distinción se encuentra dentro de la lógica, no entre ella y otro tema. Tal vez nos hallemos ante un caso en que es evidente la fusión de la teoría y la metateoría mencionada en la subsección 3.4. En los demás pasajes de su obra asumió la prometedora orientación de que una misión para la lógica era analizar las conclusiones necesarias en cuanto tales (CP 4.239, de 1902); pero cabe preguntarnos: ¿pueden utilizarse en ese proceso las teorías matemáticas? Y si pueden usarse, ¿cómo han de emplearse?

4.3 Igualdad e identidad. Naturalmente, para Peirce, el álgebra desempeñaba un papel central en estas cuestiones. Un pasaje, de 1873, lo muestra con absoluta claridad: donde la "lógica puede considerarse como la ciencia de la identidad" (de indiscernibles, en la tradición que principia con Leibniz) junto a "una ciencia paralela de la igualdad, que es la matemática o ciencia de la cantidad" (W 3:92). Aquí se subraya el empleo de analogías, como se señaló en la subsección 3.2, igualdad de cantidades en álgebra, identidad en lógica (no obstante la primacía ya asignada a "=<" que, a propósito, se mencionó en la subsección 3.3). Su interés por la semiótica aumenta los nexos; pero ¿qué clase de nexos están siendo creados? Desde luego, Peirce sabía muy bien que el álgebra, y las matemáticas *a fortiori*, abarcaban algo más que el simple estudio de la cantidad (W 3:83-84, y también de 1873), de manera que adoptó otra definición.

4.4 Necesidad y ...? La inspiración vino de la monografía que el padre de Peirce le dedicó al "álgebra lineal asociativa" (B. Peirce 1870; y sobre ella véase a Pycior 1979). Benjamin Peirce (1809-1880) comenzó su texto principal definiendo las matemáticas como "la ciencia que extrae conclusiones necesarias", e inmediatamente después puntualizó que esta definición era más general que las ordinarias (que recalcaban las "relaciones cuantitativas") y que las "relaciones cualitativas", "de las cuales Boole da un buen ejemplo", poseía un *status* independiente.

Charles aceptaría con entusiasmo esta filosofía de las matemáticas [por ejemplo, CP 3.558 de 1898 y 4.229 de 1902 (inmediatamente después del comentario citado en la subsección 4.1)]. En efecto, en 1881 mandó imprimir la litografía en una revista de matemáticas con sus propias notas (algunas de ellas han sido reimpresas ahora en W 4:312-327). Aparte de las evidentes resonancias relativas a las álgebras y a las relaciones, de inmediato surgen dos cuestiones.

En primer lugar, para nosotros la palabra "necesario" va ligada a posibilidad; pero en aquella época el nexo *más* estrecho era con probabilidad, que se refería (entre otras cosas) a la creencia y, por lo mismo, se mezclaba con la psicología, ciencia descriptiva cuyo equivalente normativo era la lógica (de ahí el empleo de "necesario"). Tales nexos se expresaron de manera muy clara en Boole y en De Morgan, quienes escribieron trabajos sobre probabilidad y también sobre lógica. De hecho, el libro de De Morgan (1847) se titulaba "Lógica formal o el cálculo de inferencia, necesaria y probable". Y el segundo libro de Boole (1854) incluía la frase "las leyes del pensamiento en que se fundan las teorías matemáticas de la lógica y las probabilidades".[11] En uno de sus primeros escritos sobre lógica, Peirce llegó a afirmar en 1867 que "El uso principal del cálculo de la lógica de Boole se encuentra en sus aplicaciones a la probabilidad" (CP 3.1; o bien W 2:12).

Una consecuencia para la lógica es la siguiente: la probabilidad maneja valores que fluctúan entre 0 y 1, y la lógica es una especie de caso extremo: ¿Entonces en ella son cantidades legítimas los valores 0 y 1, y no sólo estados que distinguen? ¿Es la cantidad, incluyendo los enteros, aceptable dentro de la lógica algebraica? ¿O nos encontramos otra vez en el rizo que resulta de aplicar las matemáticas aplicadas a la lógica?

En segundo lugar, Peirce escribió su tratado dentro de una tradición del álgebra en que De Morgan desempeñó un papel central y en la que se trazaba una distinción entre la forma y el contenido de una teoría algebraica (Pycior 1983, 1987). Una consecuencia de tal filosofía fue que las conclusiones necesarias (o deducciones) se realizaban exclusivamente a partir de la forma.[12] Así pues, para entender la postura de Peirce es preciso examinar más a fondo esta categoría.

4.5 *Forma*. El papel de la forma ejemplifica otra analogía con el álgebra que ha sido mencionada antes; en efecto, a menudo se creía que la lógica se ocupaba de la forma del razonamiento independientemente del lenguaje en que se expresaba. Sin embargo, esa analogía ha ido debilitándose pues el lugar del lenguaje dentro de la lógica comenzó a adquirir importancia a partir de Whately, y el interés ha crecido al introducir los cálculos de predicados (de varias clases) en la lógica. Por otra parte, el hincapié en la forma sin duda despertó el interés por la lógica de las relaciones; tal vez no sea una mera coincidencia el hecho de que tres de sus cuatro fundadores pertenecían a la tradición de la lógica algebraica.

Además, la importancia de la forma en las matemáticas fue defendida con firmeza por el británico A. B. Kempe (1849-1922), aficionado a las matemáticas y a la filosofía, en un magnífico trabajo (1886) publicado con la Royal Society "sobre la teoría de la forma matemática". No suscitó mucho interés entre los lógico-matemáticos, pero Peirce contestó de inmediato con una carta[13] dirigida a Kempe, en la que lo alentaba a publicar una "Nota" breve (1887) que incluyera algunas modificaciones.

El trabajo de Kempe (1886) contenía una amplia gama de consideraciones sumamente generales respecto a los objetos matemáticos; por ejemplo, trabajaba con "montones o pilas" (1886:7) que ahora reciben el nombre de "multiconjuntos" y que son más generales que la teoría cantoriana de los conjuntos, puesto que permiten que un objeto pertenezca simultáneamente a varios conjuntos.[14] Se trata de una extensión importante porque sus consideraciones generales a menudo incluían "unidades distinguidas y no distinguidas" (pero sin que se ofreciera una teoría explicativa de la identidad) y los tipos de "pluralidad" que podrían constituir. La parte dedicada a la lógica seguía las orientaciones booleanas referentes a las "clases" que componen el "conjunto completo" (1886: 63-70). La forma, para citar un enunciado bastante más claro que aparece en un trabajo posterior, es lo que "queda" cuando se dejan de lado "las peculiaridades y características especiales de los individuos y de las relaciones".[15]

Este proceso de dejar de lado ciertos elementos se asemeja a los procesos identistas de abstracción de la naturaleza y del tipo de orden a partir de conjuntos que Cantor ideó para "definir" los números cardinales a partir de conjuntos generales. En efecto, la aproximación global de Kempe es original en una época (con excepción de Cantor) en que se daba un lugar prominente a las colecciones de diversas clases (y de las que no he dado una descripción muy completa). En (1894: 15) lo llevó a esta definición "provisional" de las matemáticas: *la ciencia por la cual investigamos las características de un objeto del pensamiento que se deben a la concepción de que está integrado por individuos y pluralidades, unos que difieren y otros que no difieren.*

Si las ideas de Kempe sobre la forma concuerdan con las de Peirce, al menos en parte, podríamos llegar a la conclusión de que la filosofía de este último referente a las conclusiones necesarias era una extensión de la posición de su padre, la cual estaba orientada hacia temas relacionados con las álgebras, y estaba dirigida hacia una afirmación general acerca de las matemáticas como algo sin importancia. La aproximación más cercana a esta posición que he establecido aparece en un trabajo publicado en 1908, en donde Peirce insiste una vez más en que las matemáticas exigen el razonamiento necesario; admite que requieren de una capacidad de invención muy profunda y de una enorme imaginación, y que la "originalidad no es un atributo de la *materia* de la vida [...], sino que es una cuestión de la *forma* (CP 4.611); pero ni siquiera aquí se indicaron claramente algunas relaciones esenciales.

Además, también existe la interpretación de la cuantificación (subsección 3.3) sobre si y cuándo es aplicable a las matemáticas. En efecto, al parecer requiere de la existencia de los objetos sobre los que tiene lugar, como en la lógica matemática donde en realidad el estado ontológico de los conjuntos cantorianos (y los conjuntos de conjuntos, y los conjuntos de ...) representa un problema muy serio para el logicismo. Los escritos que Peirce dedicó a la cuantificación en *lógica* no parecen profundizar totalmente en esta cuestión (Dipert 1984), prescindiendo además de la importancia que tiene en relación con las matemáticas. Tal vez algún manuscrito suyo espera el momento de ser descubierto y publicado, para contribuir a aclarar un aspecto importante pero hasta ahora poco conocido de su filosofía de las matemáticas.

4.6 Comentarios finales. En primer lugar, según se dijo en la sección 1, se plantea aquí la cuestión de la relación de las matemáticas (y el razonamiento matemático) con la lógica técnica de Peirce, no con la lógica en un sentido más amplio. En segundo lugar, cabe la posibilidad de que nunca haya tenido una posición definitiva, posibilidad muy probable en alguien que comenzó tantas cosas y llevó a término tan pocas. Por último, una cuestión central es determinar en qué medida las matemáticas han de relacionarse con la lógica. Sospecho que aquí la influencia del álgebra, aunque útil para poner de relieve las leyes y las formas (y, sin duda, un estímulo para el desarrollo de la lógica algebraica de las relaciones), se tornó demasiado dominante y limitó el alcance de su posición. De ser así, se manifestaría una semejanza con la lógica matemática. En efecto, según se vio en la subsección 2.2, la postura de Russell de incluir las matemáticas en su lógica estaba demasiado vinculada al análisis matemático y a la teoría de conjuntos como para resultar convincente.

Notas

1. Por ejemplo, la frase ''lógica matemática'' fue acuñada por De Morgan en 1858 (véase su 1966:78), pero sirvió para distinguir entre la lógica que usaba matemáticas de la lógica filosófica puramente prosódica (expresión que también es suya). Como veremos en la subsección 2.1, su propia lógica era parte de la tradición algebraica. ''Álgebra booleana'' no era entonces una frase común, aunque Peirce algunas veces la empleó (con la grafía inglesa ''boolean'' en vez de la actual ''boolian'') y también la frase más común ''el álgebra de la lógica''. A menudo la lógica matemática se llamaba ''logística'' en la primera parte de este siglo, cuando la posición de Russell empezaba a madurar y empezaban a conocerse los escritos de Peano y de su escuela (no se olvide que Peano se acercó mucho al logicismo pero sin adherirse completamente a él). Algunas indicaciones de las diferencias entre ambas tradiciones pueden observarse en Styazhkin (1969); pero este autor habla sólo de la ''lógica matemática'' en su título; véase mi trabajo (1990a), caps. 3, 4 y 10.
2. Sobre estas dos álgebras de las ecuaciones funcionales y de los operadores diferenciales, véase respectivamente a Dhombres (1986) (donde, sin embargo, el ensayo de De Morgan sólo se menciona) y Koppelman (1971); sobre la prehistoria francesa de ambas, véase mi trabajo (1990a), caps. 3, 4 y 10.
3. Un estudio general sobre las aportaciones hechas por De Morgan se encuentra en P. Heath in De Morgan (1966); para los logros de Boole, véase a MacHale (1985).
4. Sobre esta historia véase, por ejemplo, mi (1990a), especialmente los capítulos 10 y 11, y también a Bottazzini (1986). Ambas historias explican también el desarrollo actual del análisis de variable compleja, pero no trataré de él aquí.
5. Naturalmente no he hablado de algunos factores significativos: el lugar de Grassmann en el pensamiento de Peano; el papel desempeñado por Dedekind, sobre todo en Cantor; Frege y su olvido; y el lugar que corresponde a Whitehead, quien comenzó su obra partiendo de la lógica algebraica en la década de 1890 (véase el pie de página 18), pero luego se dedicó a la lógica matemática bajo la influencia de Russell. Más detalles de esto se incluyen, por ejemplo, en mi trabajo (1977), Vuillemin (1968), Lowe (1985), Winchester y Blackwell (1988) y Rodríguez-Consuegra (1991). En mi trabajo (1990b) se hace una reseña de las investigaciones sobre el trabajo de Russell en el campo de la lógica y de la filosofía.
6. NEM 3:272-275 contiene un pasaje donde aparecen los 16 conectivos, ubicados en un recuadro completo. A este texto se le dieron apenas seis líneas del pie de página en CP 4:261. Obsérvense otras presentaciones tipográficas de Peirce en 4:268-273.
7. Estos patrones notacionales son evidentes en el libro de De Morgan (1847), caps. 5 y 7, pero se aprecian mejor en su serie de artículos: véase (1966), especialmente, pp. 12-30, 41, 158-163 (entre ellos, un ''zodiaco'' lógico), 245, 316-322. Se supone que Peirce vio al menos algunos de estos textos.

8. Sin embargo, la paradoja del mentiroso sería construible si los valores de verdad se considerasen como parte del sistema. En sus primeros escritos Peirce pretendió concluir, a partir de la paradoja, que "toda proposición afirma su propia verdad" (CP 5.340, de 1868; compárese 2.618 de 1901, un artículo del *Dictionary* de Baldwin). No es muy satisfactoria la aproximación de Schröder, a través de variedades "inconsistentes" y su tipo de teoría asociada (véase mi trabajo 1975: 124-126).
9. Peirce bosquejó su teoría de los infinitesimales en varias épocas y con diversos grados de detalle. Su trabajo (1870) sobre la lógica de los relativos y contenía una parte sobre los casos "infinitesimales" (CP 3.110-311, W 2:395-408). Entre los trabajos posteriormente publicados y los inéditos, véase especialmente CP 3.563-570 de 1900; NEM 3:87-89, 120-126, 4:55-56. Un comentario sobre esto se encuentra en Dauben (1982).
10. Por supuesto que Russell conocía muy bien la distinción entre una frase y su "significado", como (desafortunadamente) la llamaba.
11. En el caso de Boole había otros nexos entre lógica y probabilidad, tales como los eventos compuestos y las combinaciones booleanas de los eventos simples. Venn detalló los nexos, sobre todo en su tratado (1866) dedicado a la probabilidad. En Hailperin (1988) se trata de la historia de la lógica de la probabilidad (es decir, la consecuencia lógica en un marco probabilístico).
12. En su llamada *Algebra Universal*, Whitehead (1898) adoptó una postura similar respecto a las conclusiones necesarias, aunque tampoco aquí ofreció una explicación amplia. Pero no rindió un gran tributo a Peirce en su libro, y en la página 155 incluso rechazó la necesidad de una lógica de las relaciones. Recuérdese que, en la nota 9, se dijo que se hallaba entonces en su fase prerusselliana.
13. Examiné el *Nachlass* (reducido) de Kempe en 1975 en la Historical Manuscripts Commission en Londres, cuando estaba siendo ordenado allí; actualmente se conserva en la Record Office de West Sussex, Chichester (Mss. NRA 17595). Contiene algunas cartas interesantes escritas por Peirce en 1905, pero no la carta que se menciona en el texto. Kempe se refiere otra vez a ella, dando la fecha de 17 de enero de 1887, al contestar (1897) a un trabajo que el año anterior Peirce había escrito sobre los relativos (CP 3.456-552; los editores no mencionan la respuesta de Kempe).
Hay también una carta de 1885 enviada por G.G. Stokes (en calidad de secretario de la Royal Society), en la cual se mencionan los comentarios de árbitros y se recomienda cambiar el título que se había empleado en la versión publicada (1886); el título difiere un poco del de su resumen (1885), que ya había sido publicado. Kempe aludió a esos informes en el primer pie de página de (1886). Los comentarios y sugerencias se conservan en los archivos de la Royal Society (mss. RR 9.287-288). Sus autores son Cayley (más conocedor de las partes algebraicas que de las otras, sugiere el título la relación de una parte de la geometría, confundido ante la lógica, se queja de la falta de claridad) y Sylvester (que elogia la filosofía pero que también se desconcierta ante la falta de claridad). Vale la pena señalar que el *Nachlass* de Kempe contiene varias cartas de Sylvester.
14. Hailperin (1986) interpreta algunas partes de la versión del álgebra booleana en términos de multiconjuntos con signos (donde se admiten las medidas negativas de pertenencia).
15. Kempe (1894:8-9, p. 66. Se cita la definición de Peirce); también en (1897:455). Las aportaciones de Kempe se indican en las primeras páginas de Vercelloni (1989).