Mathesis 10 (1994) 273-289
Impreso en México. Derechos reservados © 1994 por UNAM ISSN 0185-6200

La filosofía de la matemática de Albert Lautman

Fernando Zalamea

Resumen

Albert Lautman (1908-1944) es uno de los filósofos de la matemática más originales del siglo XX. En este trabajo enfatizamos los aportes críticos y filosóficos de Lautman sobre el desarrollo de la matemática moderna, acentuamos su crítica, dirigida al hacer matemático, en detrimento de otras críticas de la época, dirigidas a la fundamentación lógica de las matemáticas. Estudiamos conceptos muy idiosincrásicos de Lautman (alrededor de sus 'esquemas de génesis' y 'esquemas de estructura') y mostramos cómo éstos se reflejan en cruciales métodos posteriores de la teoría de modelos y de la teoría de categorías. Finalmente, siguiendo las enseñanzas de Lautman, elaboramos un 'mapa' de una región prominente del pensamiento matemático (hipótesis del continuo), mostrando cómo la interacción de diversos planos estructurales y la 'resolución de opuestos' sirven para explicar algunas partes de la creatividad matemática.

Abstract

Albert Lautman (1908-1944) is one of the most original mathematical philosophers of the century. We draw attention on the philosophical insights that he elucidated in modern mathematical thinking (topology, differential geometry, analytic and algebraic number theory, modern algebra, etc.). We study Lautman's idiosincratic concepts ('genetic schemes', 'structural schemes') and show how they are fully realized in what, later, would become crucial methodologies of model theory and category theory. Finnally, following Lautman's philosophical critique, we draw a 'map' of 20th century work around the continuum hypothesis, showing how a blending of structural insights and Lautman's 'resolution of opposites' can be used to explain some trends in mathematical creativity.

El filósofo de la matemática se encuentra, muy a menudo, cercano de los desarrollos y de las enseñanzas de la lógica matemática. Los instrumentos lógicos de análisis son requeridos de forma natural en su formación; más aún: si, por interés intrínseco o por influencia de las escuelas predominantes, prevalece en su camino una visión analítica sobre una sintética entonces su preocupación por los fundamentos de la matemática adquiere gran preponderancia. Así, muy *grosso modo*, pero cubriendo la mayoría de los casos, el filósofo de la matemática resulta ser, en realidad, un filósofo de la lógica.[1]

Resulta, pues, raro el caso de un filósofo de la matemática genuinamente interesado en entresacar, filtrar y criticar los procesos de acción y de creación del 'working mathematician'.[2] Albert Lautman (1908-1944) es, tal vez, el más brillante ejemplo que ha producido nuestro siglo de un filósofo de la matemática realmente atento, realmente preocupado por los desarrollos modernos de la matemática. Su descripción, estudio y crítica de meticulosos ejemplos en geometría diferencial, topología, álgebra abstracta y análisis funcional, entre muchos otros, con los cuales establece precisas pautas de génesis, acción, reacción y estructuración en los haceres matemáticos contemporáneos, se constituyen en un enfoque totalmente original a la filosofía de la matemática. Leer la inmensa riqueza de la matemática contemporánea 'desde adentro' es algo que se ha conseguido en muy contadas ocasiones. Lautman lo logró con incisiva consistencia y profundidad, y con una tal proyección hacia el futuro que su obra, leída medio siglo después, sirve, hoy, como fecunda guía para recorrer algunas amplias líneas de respiro de la investigación actual en matemáticas.

1. Un ejemplo paradigmático lo tenemos en la aún muy apreciada recopilación de Benacerraf y Putnam [1983]: en una selección de 28 artículos de eminentes filósofos de la matemática, *cualquier* mención a la matemática moderna (ecuaciones diferenciales parciales, análisis funcional, topología algebraica, teoría avanzada de números, geometría algebraica y/o diferencial, etc.,) brilla por su ausencia. Algunos de los nombres más apreciados en filosofía de la matemática: Frege, Russell, Gödel, Quine, Dummett, Kreisel, Putnam, Benacerraf, etc., son todos filósofos de la lógica matemática y dejan de lado la inmensa riqueza (y dificultad) filosófica de la matemática contemporánea en acción.
2. Ciertamente, tenemos en español la obra de Javier de Lorenzo, siempre atenta a la multiplicidad de los haceres matemáticos, siempre tratando de estar en armonía con los hondos estratos, las 'profundas temporalidades' de la invención matemática. Su preocupación por cobijar críticamente múltiples ramales de la matemática contemporánea sigue siendo, sin embargo, una excepción que confirma la regla.

I. El lugar de Lautman

El hecho de que la obra de Lautman no sea de muy fácil acceso ha dificultado su justa valoración. Lo esencial del pensamiento de Lautman se encuentra en sus disertaciones principal y complementaria, requisitos para el doctorado de filosofía, defendidas en París en 1937: *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques* y *Essai sur unité des sciences mathématiques dans leur développement actuel*. Las tesis se publicaron en forma de libro por el editor Hermann en ese mismo año y se reeditaron, junto con unos pocos artículos adicionales, en 1977 véase [Lautman 1977] en la bibliografía). La edición original y la reedición ya han desaparecido del mercado y, que sepamos, la obra de Lautman no ha sido aún traducida a otro idioma.[3]

El difícil acceso a los trabajos de Lautman, junto con la temprana muerte que le impediría desarrollar otros aportes en filosofía de la matemática, son tristes factores que han limitado la herencia de Lautman. Jacques Herbrand (1908-1931), Jean Cavaillès (1903-1944) y Albert Lautman, íntimos y queridos amigos, constituyeron un trío de impetuosas mentes, cuyas repentinas y trágicas muertes aún no cesan de lamentarse.[4] Herbrand, en matemáticas y lógica matemática, Cavaillès, en filosofía de la lógica matemática, Lautman, en filosofía de la matemática, han dejado huellas indelebles en los campos del conocimiento que abordaron. Sus aportes habrían sido del todo notables si hubiesen gozado de más tiempo entre nosotros. Lautman fue alumno de Cavaillès en la *École Normale*, de donde se graduó en 1930; Cavaillès, en su correspondencia, comentaba desde entonces que Lautman se hallaba "lleno de ardor por la filosofía matemática" [Ferrières 1982, 54].

Las dos palabras fundamentales sobre las cuales se concentra el pensamiento de Lautman, y que aparecen en los títulos de sus tesis de grado, son 'estructura' y 'unidad'. La matemática, según Lautman, vive gracias a sus solidaridades estructurales:

> la solidaridad del todo y de sus partes, la reducción de propiedades de relación o propiedades intrínsecas, el paso de la imperfección a lo absoluto son ensayos de organización estructural que confieren a los entes mate-

---

3 *Mathesis* 5 (4) dedica un número completo a la filosofía de las matemáticas en Francia (Couturat, Herbrand, Cavaillès, Lautman), en el cual sin embargo sólo se traducen de Lautman un artículo conjunto con Cavaillès (véase [Lautman y Cavaillès 1939]) y un corto panfleto "Matemáticas y realidad".

4 Herbrand, muerto en un accidente de alpinismo; Cavaillès y Lautman, fusilados por sus actividades de resistencia contra la ocupación alemana. Una noticia biográfica sobre Herbrand fue escrita por Lautman y Chevalley en el momento de su muerte [Herbrand 1968, 13].

> máticos un movimiento hacia la plenitud por el que puede decirse que existen

[Lautman 1977, 81]. La matemática es ritmo y superación entre armazones: las descomposiciones estructurales inducen a la formación de 'mixtos' —mediaciones entre los diversos polos de la construcción— quienes, a su vez, soportan el resorte dinámico de la creación. "Los contrarios no se oponen sino que son susceptibles de componerse entre ellos para formar los mixtos que constituyen las matemáticas" [Lautman & Cavaillès 1939, 575]; "el paso de la esencia a la existencia resulta ser un lazo entre la descomposición estructural de un ser y la existencia de otros seres que esa descomposición hace nacer" [Lautman 1977, 99].

La edificación de la matemática es detalladamente estudiada por Lautman como proceso genético entre esencia y existencia. Considerando, en la base, a la lógica como "teoría general de las relaciones que unen las consideraciones estructurales a las afirmaciones de existencia" [Lautman 1977, 87], es mediante una regulación y constante superación de los entramados teóricos como van superponiéndose entes matemáticos, hasta adecuar maximalmente sus relaciones con el entorno. En esta articulación del hacer matemático —con numerosos ejemplos en teoría algebraica y analítica de números, álgebra abstracta, topología, funciones de variable compleja, geometría diferencial, etc.—, cada entorno estructural genera conceptos, funciones, números, todo un universo de seres matemáticos, el cual, tratando de asimilar los polos de tensión de la estructura, da lugar a los mixtos, sostenes del andamiaje. Estos mixtos, a su vez, originan nuevos entornos y dominios donde pueden situarse no ya como mixtos sino como entes primarios que dan lugar a la iniciación de otro ciclo genético. Es una visión de la matemática que obliga a una percepción unitaria y a una práctica dinámica del conocimiento.

La originalidad de la matemática se encuentra, según Lautman, en su doble movimiento dialéctico, el crecimiento pendular de las teorías, por un lado, y la oposición de los grandes temas que encarnan en cada teoría —finitos, infinito, discreto vs. continuo, local vs. global— por otro lado. "Las teorías matemáticas son susceptibles de una doble caracterización, una basada en el movimiento propio de esas teorías, la otra sobre los nudos de ideas que se encarnan en ese movimiento" [Lautman 1977, 149]. La percepción ágil de Lautman lo lleva a esclarecer el controvertido papel de la lógica matemática en esos años ('logicismo', 'formalismo' e 'intuicionismo' venían de ser redimensionados por los resultados de Gödel). Para Lautman, dada la movilidad del hacer matemático, "toda tentativa lógica que pretenda dominar a priori el desarrollo de las matemáticas desconoce por lo tanto la naturaleza esencial de la verdad matemática, ya que ésta se encuentra ligada a la actividad creadora del espíritu y participa de su carácter temporal" [Lautman 1977, 140]. Lautman anticipa así una de las grandes conquistas de la lógica matemática a partir de los años 1950: el haber adaptado sintaxis, cálculos, semánticas, metodologías, al entorno de los conceptos a estudiarse, detectando, gracias a los avances en teoría de modelos, un sustrato lógico natural para cada clase de problemas o cada clase de estructuras semánticas, sustrato que de ninguna manera puede asumirse a priori.

Lautman concreta su filosofía de la matemática en una combinatoria de configuraciones: los objetos y su posición en las estructuras, las relaciones, los mixtos; de ahí que los ajustes, regulaciones, correlaciones, superposiciones parciales de las estructuras resulten ser motor de progreso para el conocimiento matemático. Pero este análisis interno debe ser también reflejo de una más vasta empresa, donde se encuentran metafísica y matemáticas [Lautman y Cavaillès 1939, 577]:

> [s]e ve así cuál debe ser la tarea de la filosofía matemática e, incluso, de la filosofía de las ciencias en general. Se trata de edificar la teoría de las ideas y ello exige tres tipos de investigación: los que surgen de lo que Husserl llamaba *eidética* descriptiva, es decir, la descripción de esas estructuras ideales encarnadas en las matemáticas y cuya riqueza es inagotable. El espectáculo de cada una de estas estructuras es más que un ejemplo nuevo que se aporta para apoyar una misma tesis, pues no está excluido que sea posible —y allí reside la segunda tarea de la filosofía matemática— establecer una jerarquía de las ideas y una teoría de las génesis de unas a partir de las otras, como lo había previsto Platón. Queda, en fin, la tercera de las tareas anunciadas, rehacer el *Timeo*, es decir, mostrar, en el seno de las ideas mismas, las razones de su aplicación al universo sensible.

Como veremos a continuación, la riqueza inagotable de las descripciones de Lautman, en sus recorridos por la matemática moderna, no tiene aún parangón en otros textos de la filosofía de la matemática. Por otro lado, la dinámica precisa de muchos idiosincráticos conceptos de Lautman (sus 'nociones', 'ideas', 'mixtos', 'saturaciones', 'pegamientos', 'resolución de opuestos', etc.) provee, con una fuerza hasta ahora inigualada, un panorama muy fiel de la 'alta' creatividad en matemáticas.

2. Los 'esquemas de génesis'

En la segunda parte de su tesis principal, Lautman encara el problema de la creación y de la conceptualización en matemáticas. A partir de detalladas consideraciones sobre el programa de Hilbert y la lógica matemática (de la cual comentaba: "la verdadera lógica no es *a priori* con respecto a las matemáticas, la lógica requiere de una matemática para existir" [Lautman 1977, 48]) Lautman organiza una 'filosofía de las génesis matemáticas'. Su 'teoría de las relaciones entre esencia y existencia' difiere del logicismo formalista y del constructivismo intuicionista y "su alcance supera con mucho el dominio de la lógica" [Lautman 1977, 89]. Por un lado Lautman[5] enlaza el problema de la no-contradicción de un sistema de axiomas con su posible satisfacibilidad; por otro lado, se preocupa por las demostraciones 'estructurales' de no-contradicción, al estilo de la prueba de Gentzen.[6] El vaivén entre diseño sintáctico (demostración, definibilidad) y realización semántica, sirve de apoyo a una teoría más general, que abarca todo el campo de las matemáticas, en la cual 'forma' y 'materia' se compenetran, se llaman y viven la una de la otra: "la esencia de una forma realizándose en el seno de una materia que ella crearía, la esencia de una materia haciendo nacer las formas que su estructura dibuja" [Lautman 1977, 95].

La génesis de los seres matemáticos, que cobran vida propia desgajándose de las estructuras madre, sobre cuyo tejido van excretándose como perlas adheridas a sus conchas, lleva a la incisiva dinámica de la matemática en acción. Las construcciones técnicas que permiten ir generando nuevos entes matemáticos dependen de un alto grado de completitud, de saturación, de maximalidad en las estructuras: "el movimiento no es posible sino cuando la estructura del ser, de donde procederán otros seres, ha sido llevada antes a un cierto estado de perfección" [Lautman 1977, 73]. Esto explica la envoltura de edificios sucesivos que tiene que ir creando la matemática en sus procesos de

---

5. La influencia de su amigo Herbrand debe haber sido aquí decisiva. Herbrand acababa de demostrar la consistencia de un fragmento importante de la aritmética [Herbrand 1931] (al mismo tiempo que Gödel demostraba la imposibilidad de probar la consistencia de la aritmética usual).
6. Aquí es ahora explícita la influencia de Cavaillès: véase [Lautman 1977, 93]. Lautman tenía extraordinarios maestros de los cuales poder aprender (incluyendo a Claude Chevalley en la [illegible]). De Lautman dice Dieudonné: "había adquirido sobre las matemáticas de los años 1920-1930 una visión mucho más extendida y precisa que la que tenían la mayor parte de los matemáticos de su generación, a menudo estrechamente especializados, puedo atestiguarlo en lo que a mí mismo concierne" [Lautman 1977, 15].

conocimiento; la abstracción, lejos de resultar gratuita, es una de las líneas de tensión naturales, necesarias, que tienden a saturar el saber. Ese proceso hacia la plenitud hace que se desgajen, de las estructuras acabadas, nuevos desarrollos conceptuales, éstos, en un nuevo posicionamiento, necesitarán de otros ambientes que los cotejen e impulsen hacia su nuevo devenir.

Los teoremas de existencia en la teoría de funciones algebraicas y en la teoría de cuerpos de clase [Lautman 1977, 96-101] sirven de ejemplo a las concepciones de Lautman. Las estructuras inducen a la existencia de seres abstractos en sus dominios. Una de las inquietudes de Riemann alrededor de sus 'superficies de Riemann' era la de si toda superficie podía construirse como la 'superficie de Riemann' de una adecuada función algebraica. Ese es un problema relacionado con la topología de la superficie, con un invariante fundamental de su topología —el género— y con el número de integrales abelianas finitas que pueden calcularse sobre la superficie. Lautman esclarece ese 'momento insensible' en el que se opera el paso de la *estructura* de la superficie a la *existencia* de las integrales: la superficie en sí esconde demasiadas singularidades, pero al *recortarla* canónicamente vía dominios de funciones potenciales (secciones), surgen funciones uniformemente continuas y finitas —integrables— en igual número al género de la superficie [Lautman 1977, 99]:

> ... cuando las secciones vuelven simplemente conexa a la superficie, tienen un valor topológico; cuando obligan a saltos en las variables de algunas expresiones funcionales, reparten desde entonces a las integrales sobre la superficie. El paso de la esencia a la existencia resulta ser así un lazo entre la descomposición estructural de un ser y la existencia de otros seres que esa descomposición hace nacer.

Por otro lado, Lautman muestra cómo los teoremas de existencia en la teoría de cuerpos de clases están estrechamente ligados con descomposiciones de clases de ideales en el cuerpo de base. Un teorema fundamental de la teoría asegura que si el número de clases de ideales en k (cuerpo de base) *es par* entonces existe $\mu \notin k$ tal que $k(\sqrt{\mu})$ es cuerpo de clases. Un tal teorema muestra, de nuevo, cómo la existencia de un ser surge de la aparentemente lejana descomposición estructural de su dominio de base.

Después de estos, y otros, ejemplos, en los cuales surge *directamente* un concepto o un ente matemático a partir de la descomposición estructural de un dominio previo, Lautman precisa aún más el complejo panorama de la creatividad matemática [Lautman 1977, 106]

> [a]lgunas génesis matemáticas no se dejan sin embargo describir por los esquemas anteriores. Obedecen a esquemas más complejos en los cuales el paso de un género a otro necesita considerar *mixtos* intermedios entre el dominio y el ser buscado, el rol mediador de estos mixtos consiste en que su estructura imita aún a la del dominio sobre el cual se superponen, mientras que sus elementos son ya del género de los seres que nacerán sobre ese dominio.

Entre otros más, dos hermosos ejemplos discute Lautman para enfatizar la importancia de los mixtos en matemáticas. Primero, alrededor de la teoría de ecuaciones integrales, en donde se oponen el continuo (dominio de variación de las variables) y lo discreto (las soluciones integrales), Lautman [Lautman 1977, 109-117] describe el rol fundamental de los espacios de Hilbert de dimensión infinita: el espacio de Hilbert es ese mixto, fundamental en el proceso de solución, en donde se incorporan el continuo (topología del espacio) y lo discreto (descomposiciones estructurales de los subespacios). El encanto y la riqueza de los espacios de Hilbert consiste, sin duda, en ese carácter mixto, encarnación de ideas y metodologías de amplio respiro en análisis y en álgebra. Segundo, alrededor de la teoría de funciones de variable compleja, Lautman [1977, 117-121] muestra cómo el teorema de representación conforme se consigue, en la prueba de Montel, a través del mixto formado por las familias normales de funciones analíticas, mixto que a su vez cobra existencia gracias a una natural descomposición del dominio a representarse.

En las pocas investigaciones que tuvo el tiempo de realizar después de sus tesis de doctorado, Lautman incorpora otro estrato más en la génesis de los conceptos matemáticos. En sus *Nouvelles recherches sur la structure dialectique des mathématiques* (1939) [Lautman 1977, 203-229], Lautman introduce sus muy idiosincráticas 'nociones' (*e.g.* finito, local, continuo, etc.) e 'ideas' (=oposiciones entre nociones; *e.g.* lo infinito es lo no finito, lo global se obtiene por pegamiento de lo local, lo continuo completa lo discreto, etc. —nótese que puede haber muchas otras oposiciones 'no estándar', como: lo infinito es lo no acotable, etc.—). Luego propone otro nivel más de génesis matemática: la génesis de lo 'existente' a partir de la 'idea'. Según Lautman, las 'ideas' encarnan constantemente en las construcciones matemáticas; dualidades importantes (por ejemplo, el uso indispensable de herramientas continuas versus discretas en teoría de números) son fuente de creatividad. A Lautman le fascinaba la posibilidad de proponer relecturas platónicas dentro de la inmensa complejidad de la matemática contemporánea. Resulta asombroso observar cómo sus esquemas son efectivamente aplicables para la comprensión de problemas altamente no triviales en la conceptualización matemática actual (véase, por ejemplo, la sección 4 de este artículo).

Algunos aspectos de los esquemas-iconos[7] de Lautman han sido recuperados (independientemente) por posteriores desarrollos técnicos en la teoría de modelos y en la teoría de categorías. El primer esquema de génesis —existencia de un objeto a través de la descomposición estructural del ambiente que lo ve nacer— puede 'leerse' en uno de los principales teoremas de la teoría de modelos: la construcción, al estilo Henkin, de un modelo $\mathfrak{A}$ para un conjunto consistente Σ de fórmulas en primer orden; en la prueba Henkin de completitud, el universo sintáctico de los términos se estructura a los ojos de Σ y una adecuada descomposición maximal de ese universo asegura la existencia del modelo $\mathfrak{A}$. El segundo esquema de génesis —existencia del objeto a través de apropiados 'mixtos'— ha reencarnado en la visión moderna del teorema de Lowenheim-Skolem, un resultado de los años 1920 que ya conocía Lautman, pero que la teoría moderna de modelos ha revigorizado, situándolo en lugar central de sus consideraciones; con el teorema de Lowenheim-Skolem se asegura, para teorías (en lenguajes usuales) satisfacibles en algún dominio infinito, la existencia de modelos en *todos* los estratos de cardinalidad infinita; la prueba procede a través de un 'mixto' crucial de la teoría de modelos: el teorema de compacidad. El tercer esquema de génesis —existencia de un objeto a través de la adecuada filtración de una 'idea' (en el sentido preciso de Lautman esbozado en el parágrafo anterior)— se ha convertido en uno de los motores constantes de creación y de control en la teoría de categorías. Teoremas de dualidad generales, en categorías abstractas, se realizan en categorías concretas, los objetos que existen en esas categorías concretas surgen así de una dualidad mucho más amplia, una oposición, una 'idea' lautmaniana (por ejemplo, un anillo de polinomios —visto como objeto libre en una adjunción— encarna la 'idea' de que "las disimetrías pueden simetrizarse").

---

7. Para Peirce, los iconos eran el reflejo condensado de verdades imprevistas; igualmente, los esquemas de Lautman trascienden fácilmente los ámbitos en los que se insertan. Según Peirce, "una propiedad altamente distintiva del icono es que mediante la observación directa del mismo pueden descubrirse otras verdades relativas a su objeto distintas a las que bastan para determinar su construcción [...] La utilidad de las fórmulas algebraicas consiste precisamente en esa capacidad de develar verdades imprevistas ..." [Peirce 1893]

3. Los 'esquemas de estructura'

Comenta Dieudonné cómo, en los años 1930, no era nada común poseer una visión unitaria de las matemáticas [Lautman 1977, 16-17]. Los fundamentos lógicos de la disciplina, basados entonces en la teoría de conjuntos y en la lógica clásica de primer orden, eran aún de conocimiento muy restringido; por otro lado, después del conceptualmente fundamental pero técnicamente muy defectuoso *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead, los intentos globales de reconstrucción de la matemática, como el que empezaría a realizar el grupo Bourbaki en los años 1940, eran aún panacea del futuro. Esa visión unitaria, excepcional para la época, fue siempre muy clara para Lautman. La unidad de las matemáticas, la constante interrelación de técnicas y la superposición de teorías para atacar los problemas de la matemática, era para Lautman un rasgo sobresaliente de la matemática moderna. Los avances exponenciales en la investigación matemática, en los últimos cincuenta años, hacen que, en la práctica, ya ningún matemático pueda poseer una percepción precisa de la totalidad de su ciencia. Sin embargo, teóricamente, conceptualmente, la matemática moderna es 'una'; constantemente hay que estar transgrediendo las fronteras de las subespecialidades para adquirir una mediana comprensión del fondo de un determinado problema. Lautman, por medio de sus 'esquemas de estructura', ha descrito y criticado, mejor que ningún otro filósofo o matemático, esa cosmovisión unitaria de las matemáticas.

En la primera parte de su tesis principal, *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques*, Lautman estudia las "condiciones que debe poseer la estructura de un ser matemático para que en el seno de ese ser reine como una solidaridad orgánica" [Lautman 1977, 40]. El lenguaje muy a menudo vitalista de Lautman no es casual; infunde en la edificación aparentemente lógica y ascética de la matemática toda una dimensión dinámica y evolutiva que, en realidad, es mucho más acorde a los procesos analógicos y estéticos de la investigación en matemáticas. Lautman [Lautman 1977, 31-48] analiza un primer vaivén estructural de gran importancia en matemáticas: la dualidad entre lo local y lo global. De lo local se espera acceder a lo global 'pegando' relaciones sólidas entre los ambientes locales, que se hayan podido caracterizar en su especificidad; de lo global se espera acceder a lo local detectando el comportamiento funcional de la parte a partir de un conocimiento de la estructura total. Lautman estudia en detalle la doble percepción de las funciones de variable compleja desde el punto de vista global y desde el punto de vista local. A la concepción global de Riemann (el valor de la función proporcionado en forma integral, gracias al teorema de Cauchy, en un ambiente global simplemente conexo) se le opone, en primera instancia, la concepción local de Weierstrass (valor otorgado por serie de potencias en una vecindad local del punto); sin embargo, el método de 'prolongación analítica' de Weierstrass permite, en general,[8] pegar las aproximaciones locales y acceder a lo global. Una constatación fundamental de la teoría de funciones de variable compleja advierte, así, de la gran riqueza que se obtiene al insertar a la teoría en una 'resolución de oposiciones' entre lo local y lo global. Con otros ejemplos en geometría diferencial, topología y análisis funcional, Lautman [Lautman 1977, 40-48] precisa la importancia estructural del vaivén entre lo local y lo global.

Basándose en una cuidadosa descripción de "propiedades de estructura y propiedades de situación en topología algebraica", Lautman [Lautman 1977, 55-56] estudia el problema de la caracterización topológica de ciertas figuras por medio de 'invariantes' sobre los cuales se posee un control combinatorio más preciso (*e.g.* grupos).[9] Las propiedades de estructura (como ser una curva cerrada) son independientes del espacio ambiente; las propiedades de situación codifican las relaciones que la figura sostiene con las demás figuras del espacio. Una esperanza importante del *Analysis situs* (término debido a Leibniz) era la de determinar lo que se refiriera a la 'situación' por medio de un 'análisis' de propiedades estructurales adecuadas. Alexandroff y Hopf [1935, 449] describen en los siguientes términos al teorema de dualidad de Alexander, una de las más incisivas realizaciones del *Analysis situs*

> [e]l teorema de dualidad de Alexander pertenece, sin duda alguna, a los descubrimientos más importantes de la topología de estos últimos años. Todo lo que sabemos de las propiedades de situación de los poliedros y de los conjuntos cerrados en los espacios con varias dimensiones se reduce a él. Las propiedades de situación de un conjunto F en un espacio R son, ante todo, las propiedades de estructura del espacio complementario R-F; además, el teorema de dualidad nos enseña a determinar esas pro-

---

8. El siguiente comentario de Lautman [1977, 82, nota 2] da otra medida más de la envidiable información que poseía sobre las matemáticas de su época: "En realidad, el estudio global y el estudio local no nos llevan a resultados estrictamente equivalentes. El Sr. Borel ha demostrado, con el descubrimiento de clases de funciones cuasi-analíticas, que la clase de funciones de Cauchy (Riemann) es más extendida que la clase de funciones de Weierstrass". El descubrimiento de Borel puede verse como un obstáculo a un proceso de globalización; surge así en el proceso de 'resolución' de una 'idea' lautmaniana.
9. Nótese que dentro de la topología algebraica se encuentra otra 'idea' lautmaniana: resolver lo continuo dentro de lo discreto.

> piedades, en el caso de un poliedro dentro de un espacio euclídeano, usando los números de Betti y los grupos de torsión.

Lautman encuentra así otro vaivén estructural, muy activo en la matemática: la oposición de propiedades intrínsecas y propiedades inducidas, oposición que, al resolverse parcialmente en algunos de los desarrollos de la matemática moderna (como en la topología algebraica), llama dialécticamente a una unidad de métodos y conceptos. La 'dialéctica', para Lautman, es una dialéctica platónica, reelaborada utilizando las distinciones de Heidegger alrededor del 'ser' y lo 'existente' [Lautman 1977, 203-212]. Comenta Lautman en 1939:

> [l]es podrá parecer extraño, a aquellos que están acostumbrados a separar la ciencias 'morales' de las ciencias 'exactas', el ver reunidos, en un mismo trabajo, reflexiones sobre Platón y Heidegger y comentarios sobre la ley de reciprocidad cuadrática o la repartición de los números primos. Esperamos haber mostrado que esta aproximación entre metafísica y matemáticas no sólo no es contingente sino que es necesaria.

En su lectura de *¿Qué es la metafísica?* de Heidegger, Lautman encuentra un análisis de "cómo la producción de nociones relativas a la existencia concreta nace de un esfuerzo de comprensión de los conceptos más abstractos" [Lautman 1977, 205]. Mientras la verdad del ser es una verdad ontológica, relativa a la esencia, la verdad de lo existente es una verdad óntica, relativa a las situaciones efectivas de la existencia concreta. Lo existente se revelaría, entonces, a partir de una comprensión de la estructura de su ser. La distinción heideggeriana entre esencia y existencia da lugar, luego, a un análisis de la esencia, que termina tranformándose en una teoría general de las génesis que se refieren a lo existente. Si adecuamos las frases anteriores a las ideas de Lautman sobre la creación en matemáticas (sus 'esquemas de génesis', construidos en 1937, antes de que Lautman conociera la obra de Heidegger) resulta claro el entusiasmo que debió sentir Lautman al toparse con el pensamiento del filósofo alemán.

Los 'esquemas de estructura' estudiados por Lautman pueden clasificarse en tres grandes grupos: la solidaridad del todo y de sus partes, la interconexión entre propiedades de relación y propiedades intrínsecas, el tránsito de la imperfección a lo absoluto: "ensayos de organización estructural que confieren a los seres matemáticos un movimiento hacia la plenitud por el que puede decirse que existen" [Lautman 1977, 81]. Los anteriores esquemas corresponden a concepciones profundamente arraigadas en los desarrollos posteriores de la teoría de categorías (años 1950 en adelante, Eilenberg, MacLane, Lawve', etc.). En una categoría, todo objeto, por definición, no sólo está ligado a su entorno sino que depende de ese entorno: hay una constante solidaridad entre el todo y sus partes. En una categoría, un objeto 'vive'[10] en un universo relacional: los objetos deben verse como 'cajas negras' que son bombardeadas por rayos de luz, y es sólo a través de los *reflejos* del bombardeo como se puede caracterizar el 'contenido' de la caja. Dependiendo de la categoría en la cual los situemos, los objetos de la matemática se encuentran en perpetuo tránsito: por ejemplo, las propiedades universales de un producto tensorial adquieren un carácter de 'plenitud' a medida que nos acercamos a una categoría de módulos, pasando, por ejemplo, a través de las categorías de conjuntos, semigrupos, grupos, anillos, etc. Por otro lado, la teoría de categorías se ha constituido en una herramienta matemática muy sofisticada que logra, en buena medida, *demostrar* la unidad de las matemáticas. Podemos concluir, así, que los 'esquemas de estructura' de Lautman han sido plenamente (e independientemente) recuperados por el punto de vista categórico, gracias a los virajes sintéticos de la matemática entre los años 1950 y 1970.

4. Un mapa según la 'proyección de Lautman'

Son conocidas las distorsiones que ofrece, en cartografía, la proyección clásica de Mercator. El uso de otras múltiples proyecciones (ortográficas, estereográficas, gnomónicas) permite obtener visiones menos rígidas. De manera similar, una filosofía de la matemática perseguida desde una 'proyección analítica' ha causado ya demasiadas distorsiones. En lo que sigue, realizamos un mapa de una región prominente del pensamiento matemático, que requiere de una proyección diferente para asegurar su fiel 'representación'. Se trata de una proyección que desearíamos llamar la 'proyección de Lautman'.

La hipótesis del continuo ha sido uno de los problemas más fructíferos del siglo. Su gran complejidad ha obligado a la creación de un verdadero arsenal de métodos de ataque, su profundidad ha hecho reevaluar muchas veces los fundamentos que se han creído tener sobre la noción de conjunto. Refiriéndonos al 'mapa' esquemático que aparece en la página 15, es interesante situar algunos de los incisivos desarrollos a los que ha motivado la hipótesis del continuo, dentro de los esquemas de génesis y de estructura de Lautman. Los primeros

10. Se trata de una terminología vitalista muy propia de los investigadores en teoría de categorías. Un objeto es observado de maneras muy diversas, dependiendo de la categoría en la que esté 'viviendo' en el momento de la observación. Los términos categóricos coinciden aquí con los términos de Lautman.

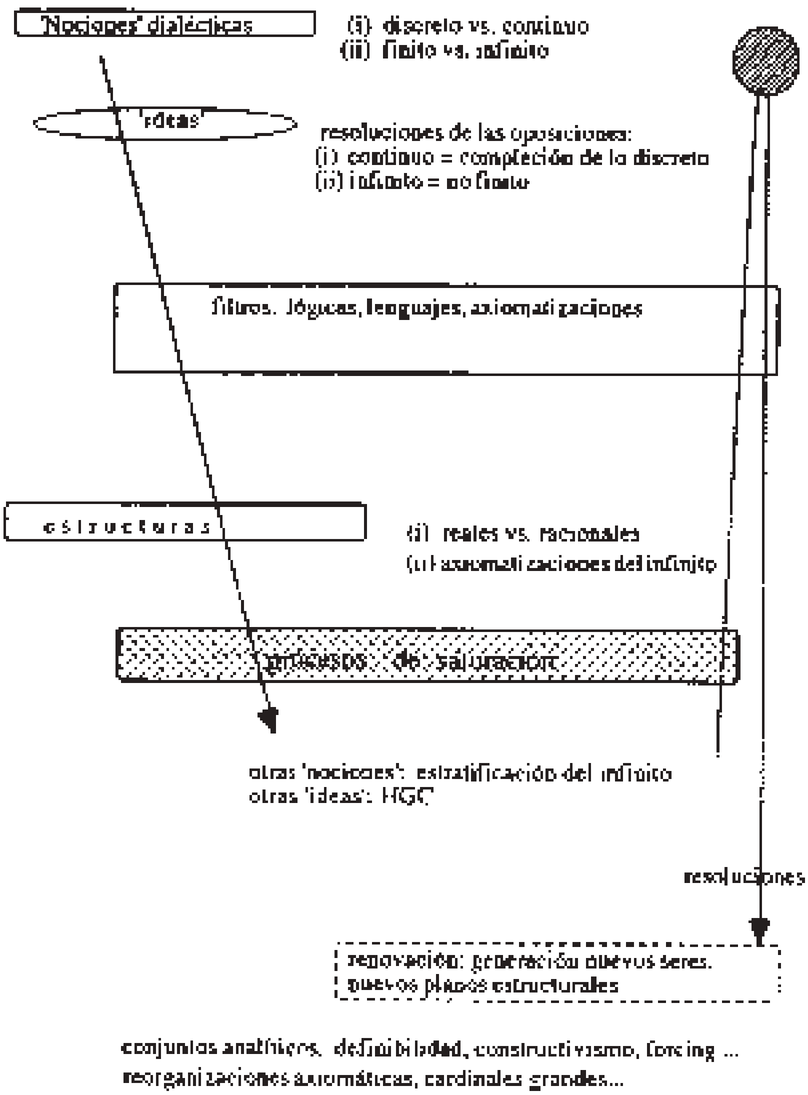
resultados de Cantor, acerca de la no enumerabilidad de los reales, muestran la presencia de una 'idea' lautmaniana: oposición entre discreto y continuo. Una primera manera de 'resolver la oposición' es adentrarse en las partes del continuo: por un lado, caracterizando al discreto racional (fundamental teorema de Cantor sobre la $\aleph_0$-categoricidad de los órdenes lineales densos, donde introduce el utilísimo método del 'back-and-forth'), por otro lado, precisando las interrelaciones de tamaño y topología en el continuo (demostración de Cantor de que la hipótesis del continuo vale al restringirse a la clase de subconjuntos cerrados de la recta real). En el proceso de resolución de la primera 'idea' se obtienen así nuevos métodos (tamaño vía correspondencia, topología) y nuevos entes (tipos de orden, conjuntos cerrados). Éstos cobran toda su verdadera dimensión sólo cuando alcanzan la 'saturación' lautmaniana. El 'back-and-forth' cantoriano es un preciso método de saturación de la información parcial que se posee en las estructuras; a su vez, el intento de extender la demostración de la hipótesis del continuo, a clases cada vez más inclusivas de subconjuntos de los reales, alcanza su punto de saturación con los conjuntos analíticos de Suslin. Esa saturación, ese bloqueo, ese obstáculo intrínseco, dará lugar a una reorganización axiomática, en la que entra a jugar un papel decisivo el axioma de determinación de Martin.

Otra manera de 'resolver' la 'idea' que opone discreto y continuo, no es ya adentrándose en 'recortes' locales del continuo, sino 'leyéndolo' globalmente desde afuera. Este camino lleva al establecimiento de un esqueleto ordenado para medir el transfinito: se generan así ordinales y cardinales. Es fundamental, luego, manejar una aritmética básica en la escala. Limitantes rápidamente reconocidas (teorema de König) aseguran que el tamaño del continuo no puede situarse en determinados puntos del esqueleto. La observación externa de la hipótesis del continuo no avanza mucho, hasta cuando se obtiene un método general de extensión de modelos: el 'forcing' de Paul Cohen. Precisamente, el forcing es un método para saturar modelos dentro de los cuales quedan aún 'grados de libertad'. Posteriormente, otro intento para forzar el status de la hipótesis del continuo, consiste en extender la escala del transfinito de manera natural (cardinales grandes: inaccesibles, medibles, compactos, supercompactos, Woodin, Mahlo, etc.) y deducir, del comportamiento de los estratos gigantescos del universo conjuntista, un posible comportamiento del estrato continuo.

De esta manera se ve cómo los procesos de existencia están muy estrechamente ligados con los esquemas de estructura: hay un vaivén constante entre planos estructurales y axiomáticos, realizaciones en esos planos, posteriores saturaciones, saltos de nivel (*e.g.* un cardinal inaccesible satura el universo conjuntista usual, pero no es sino el comienzo de la escala de los cardinales grandes), reorganización de los planos, etcétera.

Volviendo a la 'encarnación' lautmaniana de las 'ideas', es instructivo notar el rol múltiple de los conjuntos analíticos[11] en las consideraciones acerca de la hipótesis del continuo. Los conjuntos analíticos surgen primero como contraejemplos a un teorema de Lebesgue; su existencia se asegura a través de una oposición. Son luego utilizados como clase de conjuntos para los cuales vale la hipótesis del continuo restringida; saturan así positivamente una línea de trabajo local. Posteriormente, estudiando su estructura y sus modos de generación, se encuentra una muy estrecha relación con los procesos de definibilidad en la lógica de primer orden. En el nuevo plano estructural proporcionado por la lógica, sirven para jerarquizar detalladamente varios niveles de constructubilidad. Las 'nociones' e 'ideas' así generadas adquieren una nueva vida. Martin desarrolla una teoría descriptiva y efectiva de conjuntos en la que, por un lado, la clase de los conjuntos analíticos sirve de '*test*' para controlar nuevos axiomas y, por otro lado, los métodos lógicos asociados con la estructuración de los conjuntos analíticos sirven para crear nuevos modelos, generar nuevos seres. Los esquemas de génesis y de estructura de Lautman se encuentran aquí, plenamente validados.

11. El nombre procede de los desarrollos en serie de potencias de las funciones analíticas de variable real. No hay ninguna relación con lo 'analítico' y sus muchas acepciones en filosofía.


'Nociones' dialécticas
(i) discreto vs. continuo
(ii) finito vs. infinito
'ideas'
resoluciones de las oposiciones:
(i) continuo = compleción de lo discreto
(ii) infinito = no finito
filtros: lógicas, lenguajes, axiomatizaciones
estructuras
(i) reales vs. racionales
(ii) axiomatizaciones del infinito
procesos de saturación
otras 'nociones': estratificación del infinito
otras 'ideas': HGC
resoluciones
renovación: generación nuevos seres,
nuevos planos estructurales
conjuntos analíticos, definibilidad, constructivismo, forcing ...
reorganizaciones axiomáticas, cardinales grandes...

Referencias

ALEXANDROFF, P. y HOPF, H. 1935. *Topologie*. Berlin: Springer. [Contenido en Lautman 1977, 62-64.]

BENACERRAF, P. y PUTNAM, H. 1983. *Philosophy of mathematics. Selected readings*. Cambridge: Cambridge University Press.

FERRIÈRES, G. 1982. *Jean Cavaillès. Un philosophe dans la guerre*. Seuil, Paris.

HERBRAND, J. 1967. "On the consistency of arithmetic", Contenido en: J. van Heijenoort. *From Frege to Gödel*. Cambridge: Harvard University Press, 618-628.

HERBRAND, J. 1968. *Écrits logiques*. Paris: Presses Universitaires de France.

LAUTMAN, A. 1977. *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, 10/18. Paris: Union générale d'Éditions.

LAUTMAN, A. y CAVAILLÈS, J. 1989. "El pensamiento matemático". *Mathesis* 5: 561-577.

PEIRCE, C. S. 1895. "Que las proposiciones categóricas e hipotéticas son en esencia una", en: C.S. Peirce. Un hombre, un signo. Barcelona: Crítica: 1988, p. 146.

Fernando Zalamea (1959, Bogotá) es profesor asociado en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia. Ph. D. (1991) de la Universidad de Massachusetts (Recursión en Categorías). Ensayista (libro sobre Bajtín) y crítico cultural (reseñas semanales en la prensa colombiana). Dirige, desde 1992, un Seminario de Historia de la Lógica Matemática.