La experiencia del caos

Santiago Ramírez[1]

El espacio fase

Una de las ideas más fértiles para el estudio del comportamiento de sistemas dinámicos es la introducción del aparato conceptual del espacio fase, el cual se construye como un espacio con tantas dimensiones como "grados de libertad" tenga el sistema. En el caso del péndulo, por ejemplo, nos encontramos con dos variables "libres": velocidad y posición. Esta se mide por medio del ángulo que el péndulo forma con la vertical y su rango es $0 \leq \theta < 2\pi$. La velocidad se considera negativa si el movimiento es según las manecillas del reloj y positiva en el caso contrario. El espacio fase, por lo tanto, es de dimensión 2 (fig. 1). Una trayectoria en el espacio fase es un conjunto de posiciones y velocidades posibles del objeto "real".

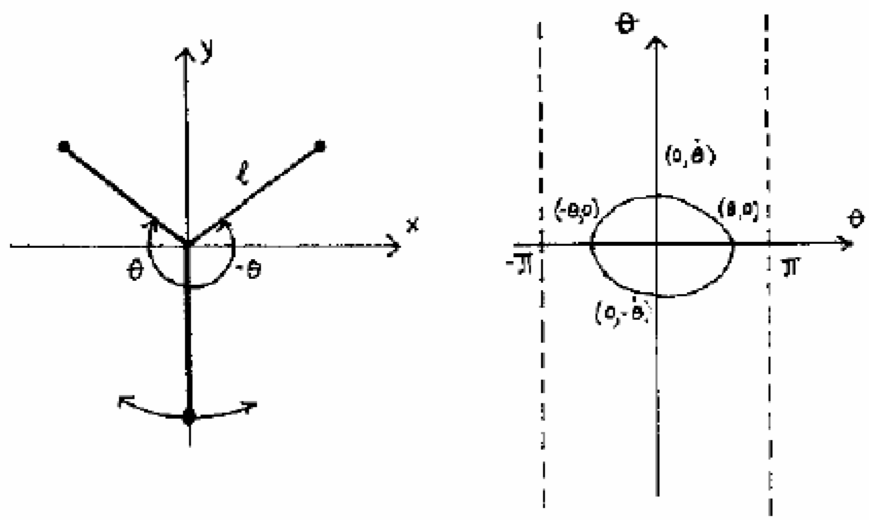

Figura 1. El espacio fase del péndulo simple

Mathesis 7 (1991) 159-170

Es fácil ver que para diferentes niveles de energía obtenemos órbitas diferentes en el espacio fase y que es imposible que el objeto real pase de una a otra. De hecho, si suponemos que la energía permanece constante y la expresamos en función de la posición y la velocidad, obtenemos las ecuaciones de las órbitas, es decir, en este caso, el conjunto de puntos del espacio fase que satisfacen la ecuación que determina, para un nivel dado de energía, al sistema.

La segunda ley de Newton establece que

$$F = md^2x/dt^2 \tag{1}$$

escribiendo $\theta = x/l$

$$x = l\,\theta$$

$$d^2x/dt^2 = ld^2\theta/dt^2$$

tomando la componente pertinente y sustituyendo en (1),

$$mld^2\theta/dt^2 = mg sen\theta,$$

de donde

$$d^2\theta/dt^2 + g/l sen\,\theta = 0.$$

Para θ pequeña.

$$\theta \sim sen\,\theta$$

Si $w^2 = g/l$,

$$d^2\theta/dt^2 + w^2\theta = 0 \quad .$$

que tiene la solución

$$\theta(t) = A cos\,(wt + \delta)$$

$$d\theta/dt = -Aw sen\,(wt + \delta)$$

y

$$(d\theta/dt)^2/(Aw)^2 + \theta^2/A^2 = cos^2(wt + \delta)\, sen^2\,(wt + \delta) = 1$$

que es una elipse.

Figura 2. El atractor de Lorenz.

El espacio fase muestra otra peculiaridad: la existencia de un punto fijo que representa un estado de equilibrio estable (0,0). En otros casos, se encontrarán puntos del espacio fase que representan estados de equilibrio (estable o inestable) o trayectorias que representan movimientos que se repiten continuamente (periódicos).

Al introducir la fricción, la estructura del espacio fase se altera notablemente. Las órbitas ya no son cerradas, sino que todas confluyen a un mismo punto, a saber, en el origen (posición 0, velocidad 0). Este punto central "atrae" a las órbitas que ahora son "espirales". En efecto, la fricción disipa la energía y esta disipación se manifiesta como una desplazamiento hacia el origen.

En 1963, Lorenz describió un atractor cuyo comportamiento no era habitual. A este tipo de órbitas en el espacio fase se les llamó "atractores extraños" (Ruelle y Takens). Se trataba de una especie de espiral doble que nunca se intersectaba a sí misma, pero que se mantenía confinada en una región acotada del espacio fase (fig. 2).[2]

Constantes de caos

El estudio de las transiciones de un estado a otro –el estudio de la transición de fases, especialmente lo que Feigenbaum llamó "el camino a la turbulencia"–, condujo, como antes a Mandelbrot, a reconsiderar un conjunto más o menos disperso de ideas, unas más nuevas que otras. En particular, fueron de gran interés las propuestas de Kadanoff, según las cuales todas las transiciones de fase *seguían las mismas reglas*.

Mitchell Feigenbaum había nacido en Brooklyn. Hijo de un químico, decidió desde pequeño estudiar ingeniería eléctrica. En 1964 ingresó al Massachusetts Institute of Technology (MIT) y en 1970 obtuvo su doctorado en física. De ahí pasó a la Universidad de Cornell y al Instituto Politécnico de Virginia.[3] Los elementos para la construcción de una leyenda, de una mitología del descubrimiento científico, se reproducen y se han recolectado minuciosamente. Independientemente de la aparente facilidad con que se presenta, James Gleick, reportero del *New York Times*, se dedicó a popularizar la leyenda del caos y produjo *Chaos, the Making of a new science*, que pronto se convirtió en un éxito de librería y en programa de televisión. Mitchell Feigenbaum es el personaje central de una especie de novela que no deja de reproducir la crítica ancestral con que la ciencia ha enfrentado tanto a las exigencias de la burocracia como a los administradores de un quehacer que se ha transformado, a pesar de los científicos mismos, en empresa. Mitchell Feigenbaum no había publicado nada cuando fue contratado para trabajar en Los Alamos National Laboratory, escuchaba a Mahler y leía el *Fausto* de Goethe. Gleick lo describe en los siguientes términos:

> Cuando Feigenbaum empezó a pensar acerca de la no linearidad en Los Alamos, se dió cuenta de que su educación no le había enseñado nada útil[4] ...

El trabajo de Feigenbaum, tratando de omitir la mayor cantidad posible de tecnicismos, propone el siguiente análisis:[3]

Consideremos una relación

$$\begin{aligned} x_o &= k \\ F_1(x_o) &= x_1 = rf(x_o) \\ F_{n+1}(x_o) &= x_{n+1} = rf(x_n) \end{aligned} \qquad (2)$$

en donde $f\colon [0,1] \to [0, 1]$, $x_0 = k \in [0,1]$ es el *valor inicial* y $r \in [0,1]$. Lo más importante de esta relación es que se trata de una *relación recursiva*.

Un punto x_o es un punto *fijo de periodo 1* de F si existe N tal que $F^k(x_o) = x_o$ para $k > N$.

Consideramos ahora puntos x_ϵ en una vecindad de x_p. Si la sucesión $\{F^i(x_\epsilon)\}_i$ (para casi todo x_ϵ) converge a x_p, decimos que x_p es un *punto fijo estable* o un *atractor de periodo 1*. Al conjunto $\{x \in [0,1] \mid \{Fi(x)\}^i$ converge a $x_p\}$ le llamamos *cuenca de atracción de x_p*.

Decimos que x_a es ó un *punto fijo inestable* si para casi toda x_ϵ en una vecindad de x_a, $\{F^i(x_\epsilon)\}_i$ no converge a x_a.

Es evidente que si un atractor existe, el comportamiento de F es independiente del valor inicial x_o, sin embargo, el comportamiento de F, en principio, depende de f y de r.

Si el comportamiento de F para $r > b^2$ es tal que no *existen atractores*, pero F tiene un ciclo periódico de periodo 2 (es decir, los valores de $F_i(x_o)$ oscilan,

$$i.e. \text{ para } n > N, x_n = \begin{cases} x_{p1} & \text{si } n \text{ es par} \\ x_{p2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

decimos que el periodo de F se ha duplicado en $b_2 \cdot x_{p1}$ y x_{p2} son puntos fijos de F^2 $(F^2 = F \circ F)$

$$\text{i.e.,} \qquad F(F_1(x_{p1})) = F^2{}_1(x_p) = x_p$$

$$\text{y} \qquad F(F(x_{p2})) = F^2(x_{p2}) = x_{p2}.$$

x_{p1} y x_{p2} no son puntos fijos de F. $\{x_{p1}, x_{p2}\}$ es un *2-ciclo* para F. Nuevamente, cabe definir, como se hizo antes, el carácter estable ó inestable de un 2-*ciclo* y, con ello, el concepto de *atractor de periodo 2*.

Si reiteramos el proceso, obtenemos un punto b_4 y la función F^4 y las nociones de 4-*ciclo* y de *atractor de periodo 4*, etc.

Desde 1978, Feigenbaum se pregunta si la forma de las ecuaciones (2) provee información cualitativa independientemente de f, es decir, se pregunta por el modo en que el comportamiento del sistema depende de la función f. Desde 1978, la conjetura de Feigenbaum asegura que el papel de f consiste solamente en establecer la escala. Si para una f fija, i se incrementa b_k $(k = 2^i)$ para producir un 2^{i+1} ciclo, la estructura se reproduce en una escala Á veces menor, donde

$$\alpha = 2.5029078750957...$$

Feigenbaum conjetura una segunda constante:

$$\delta = \lim_{n\to\infty} b_{n+1}-b_n/b_{n+2}-b_{n+1}$$

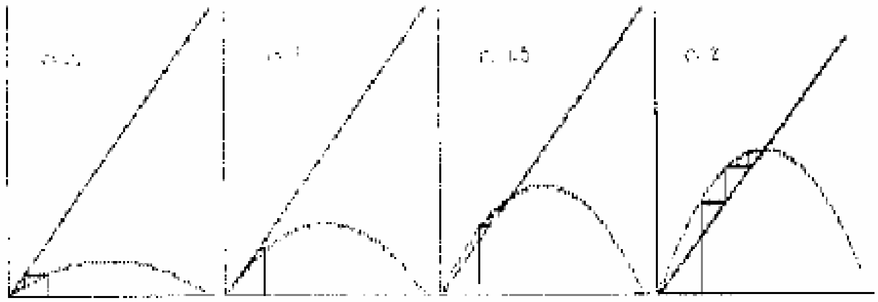

Figura 3.1.

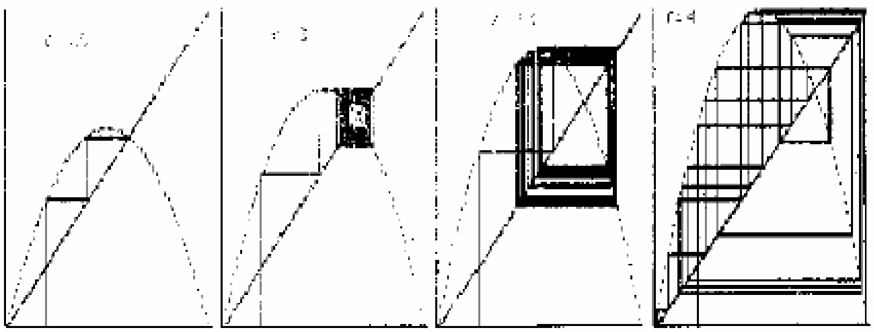

Figura 3.2.

donde

$$\delta = 4.6692016091029...$$

Se conjetura, además, la existencia de una función universal (independiente de f) g que implica a α y δ de "manera fundamental".

Casos particulares

Si la conjetura se supone cierta, entonces basta con estudiar el caso más simple; Feigenbaum considera el siguiente:

$$f(x)=4rx(1-x) \tag{3}$$

que le permite generar x_i a partir de un valor inicial x_0 y llega a conclusiones que son, desde entonces, bien conocidas:

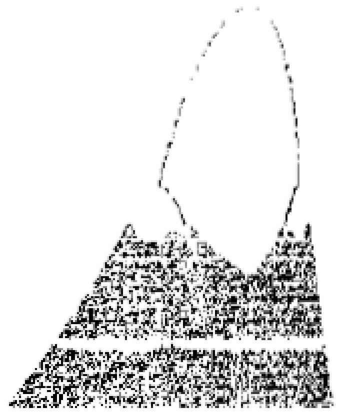

Figura 4.

1. Para $0 \leq r < 1/2$, x^* es un atractor mientras que y^* no lo es (es un *repulsor*).
2. Para $0 \leq r < 3/4$, $x = 0$ es un punto fijo inestable. $x = 1/2$ es estable, es un atractor de período 1.
3. Para $3/4 < r \leq 1$, no hay puntos fijos atractores de periodo 1. De hecho en $r = 3/4$ nos encontramos con una bifurcación del periodo.
4. Para $r \sim 3.43/4$ tenemos una nueva bifurcación y lo mismo para $r \sim 3.54/4$ (figs. 3.1 y 3.2).

Si graficamos el valor de r contra los de x_i dados por la ecuación (3) obtenemos la gráfica $\{(r,\{x_i,\ i=1,\ldots,k\}\ \ 0 \leq r \leq 1\}$ que nos muestra los puntos de bifurcación (figura 4).

La función universal

Estos valores se pueden aproximar exactamente (más allá de la evidencia empírica) por medio de la función

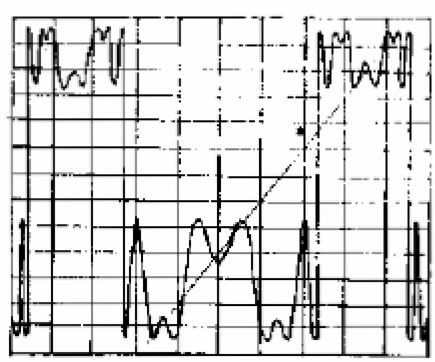

Figura 5. La función g_1.

$$f^2(x) = f(f(x)) = 4rf(x)(1-f(x)) = 4r[4rx(1-x)](1-[4rx(1-x)])$$

El esquema recursivo es:

$$f^{2n+1} = f^{2n} \circ f^{2n} \tag{5}$$

que nos permite definir una operación que actúa sobre funciones para producir funciones.

Ahora procedemos a buscar un punto fijo estable para la operación recursiva definida en (5) en un espacio de funciones. El papel que en las ecuaciones del tipo (3) jugaba el valor inicial x_0 va a ser desempeñado por la función "inicial" f, mientras el papel de la función f en (3) lo desempeña ahora la operación definida en (5). Si podemos resolver este problema y mostrar la existencia de dicho punto fijo, como en la situación previa, resulta irrelevante la f inicial.

El punto fijo está dado por la ecuación:

$$g_1(x) = \lim_{n \to \infty} (-\alpha)^n f^2 (r_{n+1}, x/(-\alpha)^n)$$

y g_1 es universal (es independiente de f) y nos da la ubicación de los ciclos duplicados (la figura 5 muestra 15 elementos del 2^n-*ciclo* más próximo a 0 y α =2.502907875 ...

Se trata de un teorema cuyas implicaciones en la resolución de problemas clásicos son muy poderosas; sin embargo, al margen de esta utilidad, la teoría del caos ofrece un conjunto muy sugestivo de paradojas filosóficas y de respuestas a problemas ancestrales. Por ejemplo, durante un buen número de años los procesos desordenados se trataban desde el punto de vista estadístico en el que se abandonaba toda pretensión de predicción causal en el sentido mecanicista.

El concepto de azar, que se utilizaba como concepto central para dar cuenta de estos procesos resultaba demasiado vago (en el sentido de Bachelard) y suscitaba una infinidad de problemas de orden metafísico y epistemológico. Ciertos procesos aparentemente aleatorios (tales como el que permite generar "números al azar" en una computadora) solo son aparentes (para generar dichos números simplemente se corre el punto decimal en un número racional cuyo periodo sea suficientemente grande) y pueden calificarse, más bien, como "seudoaleatorios". La teoría del caos muestra de manera sorprendente que "algunos esquemas simples para producir números erráticos se comportan de manera idéntica a algunos procesos calificados de erráticos de los fenómenos naturales". La característica de estos sistemas de fenómenos naturales (desde el comportamiento de poblaciones de camarones hasta los ritmos cardiacos) es que, al variar de manera imperceptible alguno de los parámetros que determinan el comportamiento, éste transita de lo simple a lo caótico, de lo periódico a lo no-periódico. Una primera posibilidad es que el "camino" al caos está sembrado de "bifurcaciones" del periodo. El resultado de Feigenbaum muestra que, en el *límite*, hay una solución universal que es común a todos aquellos fenómenos que sufren bifurcación. La determinación de las constantes α y δ indica que las propiedades cualitativas pueden determinar propiedades cuantitativas y permiten, además, estudiar los casos más complejos paradigmáticamente eligiendo el caso más simple, es decir, se logra un tipo de resultado que implica que los problemas difíciles tienen la misma solución que los problemas fáciles. La universalidad implica que sistemas diferentes se comporten de manera idéntica, se trata de la universalidad de ciertas estructuras del mundo real, de una universalidad, en fin, que ha sido elsueño de la ciencia desde Platón.

Ciertamente, se podría ser más radical siendo más cauteloso: la teoría del caos muestra que la pretensión de generalidad de la ciencia anterior apuntaba más hacia la generalidad del concepto que hacia la generalidad del objeto. En efecto, la teoría del caos no solamente permite un progreso indudable desde el punto de vista metodológico, sino que implica una nueva visión del mundo, del cuerpo, del concepto de medida, en fin, del sujeto humano.

El caos –principio y origen que toda teología (y toda metafísica) ha superado mediante la oportuna intervención de un principio divino o de la "astucia" del espíritu hegeliano–, en manos de físicos y matemáticos, puede tener en sí mismo una estructura, posee una "estabilidad" que lo coloca en el mismo plano "natural" del reposo y del movimiento circular aristotélicos y reduce de manera considerable el número de fenómenos que, en sentido estricto, pueden seguirse considerando "azarosos".

Desde otro punto de vista, la introducción del "efecto mariposa" transforma el *modo de problematizar la naturaleza*: si hasta ahora –y la prueba de ello es la proliferación del discurso "ecológico"– la pregunta había sido en torno de las *causas del desequilibrio*, hoy la pregunta debe ser la que cuestiona el inverosímil estado de equilibrio: ¿cómo es posible el equilibrio? En cierto modo, se trata de un desplazamiento epistemológico(!) parecido al que efectuara Galileo cuando dejó de preguntarse por las causas del movimiento para plantearse la pregunta acerca del reposo. Sin embargo, la teoría del caos no escapa del viejo sueño de Parménides: si el caos es estable, los fenómenos, previamente concebidos como erráticos, aleatorios o cualquier denominación igualmente vaga e imprecisa, tienden a desaparecer; la teoría del caos tiene tanto más éxito cuanto es capaz de ofrecer una visión fija del mundo. Visión en que lo que está condenado a desaparecer es la estabilidad –concebida como la eterna repetición de lo mismo– para dejar su lugar a una eterna repetición de lo diferente. Pero, a fin de cuentas, una eterna repetición en donde habría de prevalecer lo caótico, concebido ahora no como concepto originario, sino como una nueva escatología apropiada y congruente con la multitud de visiones con que el pensamiento humano recibe un nuevo milenio. El propio sujeto humano, su salud, la imagen misma de su cuerpo, ya no puede seguir siendo la de la bifurcación finita, sino la de esa bifurcación universal límite que va a permitir la aparición reiterada –borgesiana– de la misma estructura fractal, una y otra vez. La angustia de un infinito diverso hoy cede frente a la angustia de la infinitud permanentemente igual a sí misma.

Nuestro problema es un problema de filosofía matemática, por ello cabe la pregunta acerca del carácter matemático de la teoría del caos. Independientemente de que la metodología es una metodología matemática (que no basta para caracterizar "lo matemático"), nos encontramos con una serie de elementos bastante más importantes para poder afirmar que se trata de una teoría legítimamente matemática:

i) Desde el punto de vista genético, la teoría del caos recurre, para su propia sorpresa (y para nuestra "vergüenza")[6], a conceptos y a objetos que los matemáticos ya habían descrito: curvas de Peano, conjuntos de Cantor, dimensiones de Hausdorff, etc., habían formado parte de una "teratología matemática" de la fauna nativa de ese famoso paraíso cantoriano. La teoría del caos descubre que aquel paraíso de Cantor no es un mundo imaginario producto del ingenio de la escuela polaca o de los delirios incontrolados de la teoría de conjuntos. Más bien, el mundo vuelve a mostrarse (y no por primera vez) como imagen de un pensamiento habitual entre los matemáticos que hoy podrían reclamar una capacidad profética. De hecho, puede afirmarse, como hace Feigenbaum,[7] que "la presencia del numero α es una prueba forzosa para saber si una ecuación del tipo (2) es, o no, un modelo correcto." Desde el punto de vista metodológico nos encontramos frente a un caso extraordinariamente claro de lo dialéctica matemática de Cavaillès, en la que el sentido "puesto" demanda una actualización (función paradigmática) y en la que el acto operado demanda un sentido (función temática);[8] método también, de la transformación de la paradoja en concepto[9] como en los casos de Lorenz y de Mandelbrot; método, en fin, inagurado por Klein en el *Programa de Erlangen* que permite definir lo "fractal" como invariante de ciertas transformaciones.

En efecto, el sentido de aquellos objetos patológicos había sido estrictamente crítico, es decir, habían funcionado como cotas o limitaciones para las teorías en donde se producían; su existencia obligaba a refinamientos de la teoría existente o a decisiones axiomáticas (por ejemplo, a decidir axiomáticamente acerca de la existencia o inexistencia de conjuntos medibles), pero no eran actos matemáticos que formasen parte esencial de una teoría. La teoría del caos es la teoría que articula y otorga un sentido a esos actos (hechos) matemáticos que funcionaban como "actos demandantes" de sentido, mismo que encuentran al ser, en el sentido de Wittgenstein, integrados coherentemente en la teoría.[10]

Al mismo tiempo, hay un sentido (el sentido universal) demandante: pide una actualización, una visión del mundo como experiencia del caos. Caos que no es la descripción *verdadera* del mundo, sino que el mundo, hoy, puede ser experimentado como una instancia del caos: el caos organiza –paradójicamente– al mundo del próximo milenio y es la marca de nuestra modernidad para la que los límites del mundo se experimentan como los límites del lenguaje y como los límites de la ética.

Hoy, en fin, el mundo puede volver a ser aristotélico o platónico, newtoniano o cuántico; su límite es nuestra elección, elección que es –como sostenía Cavaillès– la elección de la rebelión y que la teoría del caos reivindica.

Notas

1. El autor quiere reiterar su reconocimiento a la paciencia y sugerencias de Rafael Martínez y de Guillermo Zambrana. Sus ideas atraviesan buena parte de este trabajo.

2. Existe un programa, FRACTINT, accesible a todo público que permite tener una visión bastante clara, entre otros, del atractor de Lorenz. La figura que aquí se presenta fue generada con dicho programa. Copias del mismo están a disposición de quien lo desee en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias.

3. Los trabajos centrales de Feigenbaum son: "Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations", *Journal of Statistical Physics*, Vol. 19, No. 1, (1978); "The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations", *Journal of Statistical Physics*, Vol. 21, No. 6, (1979); "Universal Behavior in Nonlinear Systems", *Los Alamos Science* 14-27 (1980).

4. Feigenbaum (1980), p. 50.

5. Hay otras "rutas" al caos: Landau, Ruelle, etc.

6. La anotación entre paréntesis es el resultado de una afortunada corrección de Rafael Martínez.

7. Feigenbaum (1978), p. 29.

8. Cavaillès, J., *Sur la logique et la théorie de la science*, p. 27. En referencia a la construcción recursiva de las funciones que aparecen en la ecuación (5), se trata de una situación casi idéntica a la que describe Cavaillès: "Las nuevas operaciones que intervienen aportan la evidencia de su realización sobre las operaciones –o actos– anteriores.", *op. cit.*, p. 37.

9. Ramírez, S., El *desconocido número cinco*, tesis de doctorado en filosofía, 1990.

10. Zambrana, G., *La demostración en Wittgenstein*, tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 1991.