Problemas isoperimétricos en el cálculo variacional de Euler y Lagrange

Craig G. Fraser

RESUMEN

Los problemas clásicos isoperimétricos figuraron prominentemente a principios del siglo XVIII en las investigaciones de los Bernoulli: James I y John I. Jugaron un papel importante en la evolución histórica del cálculo variacional de Euler en los 1730s y 1740s y fueron analizados en el capítulo IV de su *Methodus inveniendi Lineas Curvas* (1744).

El algoritmo de Lagrange de los 1760s resultó en una reorganización fundamental del cálculo de variaciones. A pesar que su teoría fue en general exitosa y adoptada extensamente, no proveyó una explicación completamente satisfactoria de los problemas isoperimétricos. Este ensayo examina sus escritos sobre esta materia de 1755 a 1806 con peculiar atención a las concepciones contemporáneas de análisis y deducción matemática. Sus investigaciones proporcionan un caso de estudio históricamente interesante de cómo una teoría matemática lucha con elementos internos técnicamente espinosos.

ABSTRACT

The classical isoperimetrical problems figured prominently in the early eighteenth-century researches of James I and John I Bernoulli. They played an important role in the historical evolution of Euler's variational calculus in the 1730s and 1740s and were analyzed in the eighth chapter of his *Methodus inveniendi Lineas Curvas* (1744).

Lagrange's algorithm of the 1760s resulted in a fundamental reorganization of the calculus of variations. Although his theory was generally successful and widely adopted, it did not provide a fully satisfactory explanation of isoperimetrical problems. The paper examines his writings on this subject from 1755 to 1806 with attention to contemporary conceptions of analysis and mathematical deduction. His researches provide an historically interesting case study of how a mathematical theory struggles with internal technically intractable elements.

Mathesis 8 (1992) 31-53

Introducción

Los historiadores han documentado el desarrollo principal del cálculo variacional en el siglo XVIII. No obstante que tenemos una idea general de este tema, en la literatura no existe un relato históricos coherente de las investigaciones más especializadas, llevadas a cabo durante el periodo sobre problemas de extremalización bajo restricción.[1] Concentrándonos en el trabajo de Leonhard Euler y Joseph Louis Lagrange entre los años 1738 y 1806, el presente estudio intenta identificar y delinear conjuntamente los diferentes cabos sueltos alrededor de esta historia.

Además de la importancia histórica para el inicio del cálculo variacional, las investigaciones discutidas iluminan más generalmente el cambio de teoría en matemáticas. Proporcionan un ejemplo de cómo se forma una teoría matemática, cómo cambia su carácter en el curso de su desarrollo y cómo se incorpora y adapta a nuevas ideas. Indican a su vez el grado de sofisticación teórica lograda dentro del análisis alrededor del año 1800 y señalan la creciente internalización que caracterizaría a esta área en el siglo XIX.

Antecedentes matemáticos

El problema básico del cálculo de variaciones es encontrar la función $y = y(x)$ de entre una clase de funciones que maximice o minimice a una integral definida dada, de la forma

$$\int_a^b f(x,y,y')dx \qquad (y' = dx/dy), \tag{1}$$

Quizá el ejemplo más simple de este problema sea el encontrar la curva más corta que une dos puntos en el plano (una línia recta). Una condición necesaria que debe satisfacer la función de extremalización es la ecuación llamada de Euler o de Euler-Lagrange,

$$\partial f/\partial y - d/dx\,(\partial f/\partial y') = 0, \tag{2}$$

obtenida primero por Euler en una memoria publicada en los Comentarios de la Academia de Ciencias de San Petersburgo en 1741.

El problema básico puede ser modificado de manera que la clase de funciones de extremalización potenciales también satisfagan una condición de la forma

$$\int_a^b g(x,y,y')dx = \text{constante}. \tag{3}$$

Con esto se obtienen los llamados problemas isoperimétricos que figuran prominentemente en los inicios del cálculo de variaciones.[2] El ejemplo clásico es hallar la curva de perímetro dado que acota el área máxima (un círculo). La solución de estos problemas involucran una aplicación de la "Regla de Euler", presentada por primera vez en una memoria de San Petersburgo en 1738. Esta regla afirma que la extremalización de (1) relativa a (3) conduce a la misma ecuación que el problema de extremalizar la integral

$$\int_a^b (f + \lambda g)dx, \tag{4}$$

donde λ es una constante (algunas veces llamada "multiplicador" o "coeficiente indeterminado") y donde no existe ahora condición adicional.

El problema básico puede ser modificado de otra manera si se considera una integral variacional de la forma

$$\int_a^b f(x,y,y',z)\,dx\,, \tag{5}$$

donde la variable z en el integrando es expresada a su vez en términos de una integral

$$z = \int_a^x g(x,y,y')\,dx\,. \tag{6}$$

Uno puede desear suponer más generalmente que g contiene a z:

$$z = \int_a^x g(x,y,y',z)\,dx\,. \tag{7}$$

Un ejemplo es el problema de la braquistócrona en un medio resistivo en el cual el tiempo de descenso es proporcional a $\int_a^b (1/v)\sqrt{1+y'^2}\,dx$. La velocidad v en este caso satisface una relación auxiliar de la forma $v(dv/dx) = g - R(v)\sqrt{1+y'^2}$ donde g es la aceleración debida a la gravedad y R es alguna función de v que mide la resistencia. [La variable v toma el lugar de z en (7)]. En el contexto moderno este tipo de ejemplo representa un caso de la teoría asociada con el "problema de Lagrange", que es de naturaleza muy general. Euler lo consideró por primera vez en su memoria del año 1741, pero la solución que obtuvo no fue correcta. El análisis correcto lo publicó en su *Methodus Inveniendi Curvas Lineas* de 1744, donde de hecho, el problema consiguió cierta prominencia. El mostró, por ejemplo, que la extremalización de (5) con z dada por (6) conduce a la ecuación

$$\partial g/\partial y \int_x^b \partial f/\partial z \, dx - d/dx\,(\partial g/\partial y' \int_x^b \partial f/\partial z \, dx) + \partial f/\partial y - d/dx\,(\partial f/\partial y') = 0 \tag{8}$$

Esto último puede ser visto como un ejemplo de extremalización de la integral $\int_a^b f(x,y,y',z)dx$, sujeta a la condición diferencial $g(x,y,y') - z' = 0$. Esto puede ser considerado como un ejemplo de una regla más general de multiplicadores. Lagrange en sus *Leçons sur le calcul des fonctions* de 1806 fue el primero en visualizar la teoría en esta forma. Empezó con una formulación del problema original sin condiciones que resulta cuando más de una variable dependiente es introducida en el integrando f. De este modo, el problema de extremalización

$$\int_a^b f(x,y,y',z,z')\,dx. \tag{9}$$

conduce a las dos ecuaciones de Euler

$$\partial f/\partial y - d/dx(\partial f/\partial y') = 0,\ \partial f/\partial z - d/dx(\partial f\ \partial/\partial z') = 0 \tag{10}$$

Supóngase ahora que existe una condición diferencial de la forma

$$h(x,y,y',z,z') = 0. \tag{11}$$

La extremalización de (9) sujeta a (11) conduce a las mismas ecuaciones que el problema de extremalizar.

$$\int_a^b (f + \lambda h)\,dx \tag{12}$$

donde $\lambda = \lambda(x)$ es una función de x (un "multiplicador de Lagrange") y donde no se tiene condición adicional. En el ejemplo de Euler ya mencionado $h(x,y,y',z,z') = g(x,y,y') - z'$ (tamaño estándar) y las ecuaciones (11) se transforman en

$$\begin{aligned} \partial f/\partial y - \lambda\partial g/\partial y - d/dx\,(\partial f/\partial y' - \lambda\,\partial g/\partial y') &= 0, \\ \partial f/\partial z + d/dx\,(\lambda(x)) &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

las cuales para $\lambda(b) = 0$ se reducen a la ecuación (8).

Problemas isoperimétricos (1738-1766)

Aunque las ecuaciones (2) no aparecieron sino hasta 1744, la base de la teoría de Euler fue presentada en una memoria publicada tres años antes. El enfoque estuvo basado en la idea de perturbar la curva en una sola ordenada, evaluando el cambio resultante en la integral variacional e igualando la expresión obtenida a cero. Considerando un arco de comparación obtenido de la curva de extremalización propuesta incrementando la ordenada y por la pequeña cantidad $b\beta$, Euler mostró que la diferencia entre la integral (1) a lo largo de las curvas dadas y las de comparación es una expresión de la forma $P(b\beta)dx$. Dado que se supone que la curva dada es la que extremaliza (1), tenemos que $P(b\beta) = 0$ o simplemente $P = 0$, es su ecuación.

Supongamos ahora que existe una condición adicional de la forma (3). Sea $R(b\beta)dx$ la variación de la integral en (3) cuando la ordenada y se incrementa por $b\beta$. Ya que el arco de comparación ahora debe satisfacer (3), ya no es posible obtenerlo de una curva dada variando una sola ordenada. Para analizar el problema de extremalizar (1) sujeta a (3), Euler [1738-§18] supuso entonces que dos ordenadas "consecutivas" son variadas por las cantidades $b\beta$ y $c\gamma$. El problema variacional lleva en este caso a las relaciones

$$\begin{aligned} &P(b\beta) + (P + dP)(c\gamma) = 0 \\ &R(b\beta) + (R + dR)(c\gamma) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Eliminando $b\beta$ y $c\gamma$ de (14) Euler obtuvo la ecuación diferencial

$$RdP = PdR, \tag{15}$$

cuya integral es $P + aR = 0$, donde a es una constante. Esta es precisamente la "regla de Euler".

Posteriormente en la memoria de 1738 (§32-33), Euler consideró el caso en el cual se tienen dos condiciones auxiliares en forma de integral

$$\begin{aligned} &\int_a^b g(x,y,y')dx = (\text{constante})_1 \\ &\int_a^b h(x,y,y')dx = (\text{constante})_2. \end{aligned} \tag{3'}$$

Sean $P(b\beta)dx$, $p(b\beta)$ y $\pi(b\beta)$ las variaciones en $\int_a^b f dx$, $\int_a^b g dx$ y $\int_a^b h dx$, respectivamente, cuando y es incrementada por $b\beta$. Para obtener un arco de comparación que satisfaga (3'). Euler hizo variar tres ordenadas "consecutivas" por las pequeñas cantidades $b\beta$, $-c\gamma$ y $d\delta$. Su procedimiento variacional conduce en este caso a

$$
\begin{aligned}
P \cdot b\beta - (P + dP)\,c\gamma + (P + 2dP + ddP)\,d\delta &= 0,\\
p \cdot b\beta - (p + dp)\,c\gamma + (p + 2dp + ddp)\,d\delta &= 0,\\
\pi \cdot b\beta - (\pi + d\pi)\,c\gamma + (\pi + 2d\pi + dd\pi)\,d\delta &= 0.^{*}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Eliminando las cantidades $b\beta$, $c\gamma$ y $d\delta$, Euler obtuvo la ecuación diferencial

$$
\begin{aligned}
pd\pi ddP - \pi dp ddP + \pi dP ddp - Pd\pi ddp \,+\\
+\, Pdp dd\pi - pdP dd\pi = 0
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Euler concluyó: "*Ex qua integrata reperitur $P + mp + n\pi = 0$, in qua m et n quantitates quascunque constantes designant*".

Aunque $P + mp + n\pi = 0$ satisface (17), Euler no mostró realmente que la integración de (17) conduce a tal relación. En este contexto su análisis es esencialmente incompleto: una situación que está en contraste con el caso anterior de una sola condición auxiliar, donde $P + aR = 0$ que se sigue inmediatamente de $RdP - PdR = 0$ por la regla del cociente. En su estudio subsecuente de problemas isoperimétricos en 1741 y 1744 Euler nunca mejoró el análisis presentado; así en su principal tratado de 1744 simplemente hizo notar que $P + mp + n\pi = 0$ satisface (17).[3] No obstante que el requisito de demostración parecería haber estado disponible por los principios contemporáneos del cálculo, él no fue capaz o, probablemente, tuvo aversión a dar los detalles necesarios.[4]

Los escritos variacionales posteriores de Euler, contienen avances analíticos extremadamente importantes. En un problema dado sería necesario calcular las expresiones P, p y π anteriores para obtener las ecuaciones diferenciales variacionales. Para este propósito, Euler, en la memoria de 1738, preparó tablas dando estas expresiones para varios integrandos. Sus esfuerzos constituyeron un paso importante para una síntesis de la teoría, lo cual fue logrado en su artículo de 1741.[5] Dada una expresión Z que dependa de x, y y $p = dy/dx$, consideró la relación

* El símbolo "d" en "$d\delta$" es únicamente notacional y no está relacionado con la diferencial característica d como aparece en "dP", "$dd\pi$", etc.)

todas las curvas para las cuales A tiene un valor específico, entonces $\alpha A + \beta B$ es un máximo o un mínimo a lo largo de la curva considerada, sin aplicarse ahora restricción alguna a la clase de curvas de comparación. El carácter cuestionable de este razonamiento es evidente.

El cálculo variacional inicial de Lagrange basado en su famoso algoritmo δ fue presentado a Euler en una carta de 1755 y de manera más completa en dos memorias publicadas en *Miscellanea* de la Sociedad de Turín en 1762 y 1773. Una de las características particulares más sorprendentes de estos escritos es la ausencia de toda mención de los problemas isoperimétricos. El silencio de Lagrange indica que en esta etapa estaba interesado principalmente en la presentación de su algoritmo δ como un método matemático significativo, en lugar del desarrollo sistemático del tema sobre la nueva base propuesta. Aunque los problemas con condiciones auxiliares en forma de integral, no planteaban un reto mayor a su teoría, tampoco fueron ejemplos clásicos particulares para reforzarla.

Un poderoso sentido algorítmico y algebraico guió a Lagrange en la comprensión del cálculo de variaciones. Para reproducir la obtención de Euler de la regla del multiplicador se hubiera requerido expresar $\int Zdx$ como una suma de la forma $\ldots + Zdx + Zdx + Z'dx + \ldots$. Que tal concepción era matemáticamente consistente con la adopción del método δ, es evidente en el trabajo subsecuente de Euler y otros investigadores de la época.[6] A pesar de que estos autores aceptaron la innovación de Lagrange y de hecho enfatizaron el carácter analítico del nuevo cálculo, continuaron considerando a la integral como una suma. Para ellos los procedimientos de la teoría no fueron —a diferencia de Lagrange— entendidos exclusivamente en términos de relaciones algorítmicas.[5]

En su memoria de 1766, *Elementa Calculi Variationum*, donde utiliza por primera vez el algoritmo δ, Euler presentó al final una breve discusión de los problemas isoperimétricos. Consideró el problema de encontrar entre todas las relaciones de x y y (nótese que ahora hace referencia a relaciones y no a curvas) la que hace que la integral $\int_0^a Udx$ sea un máximo o un mínimo, sujeta a la condición auxiliar $\int_0^a Vdx$ = constante. A través del proceso δ estableció las siguientes dos ecuaciones

$$(V)\delta y + (V)'\delta y' + (V)''\delta y'' + (V)'''\delta y''' + \ldots = 0$$
$$(A)\delta y + (A)'\delta y' + (A)''\delta y'' + (A)'''\delta y''' + \ldots = 0, \qquad (18)$$

donde

$$(V) = \partial v/\partial y - d(\partial v/\partial y')/dx, \quad (A) = \partial U/\partial y - d\,(\partial U/\partial y')/dx = 0,$$

y

$$(V)',\ (V)'',\ (V)''',\ \ldots,\ (A)',\ (A)'',\ (A)''',\ \ldots$$

son los valores de (V) y (A) respectivamente en las ordenadas y', y'', y''', ... Euler reconoció que si $(A) = n(V)$, donde n es un constante, entonces las ecuaciones (18) son equivalentes y que esta equivalencia es obtenida en el problema variacional de extremalizar $\int_0^x (U - nV)\,dx$ sin condiciones.

Escritores del siglo XIX citaron argumentos similares a éste para hacer plausible la "regla de Euler".[8] Considérese la notación $[f]$ para denotar $\partial f/\partial y - d(\partial f/\partial y')/dx$. Considérese el problema isoperimétrico usual de extremalizar

$$\int_a^b f(x,y,y')\,dx$$

sujeta a la condición auxiliar

$$\int_a^b g(x,y,y')\,dx = \text{constante.}$$

Por medio de la regla $\delta(dy/dx) = d(\delta x)/dx$, una integración por partes y la suposición de que los extremos no cambian, se obtiene

$$\int_a^b [f]\ \delta y\,dx = 0,\ \int_a^b [g]\ \delta y\,dx = 0$$

Si $[f] = \lambda\,[g]$ (λ una constante), entonces estas ecuaciones son equivalentes y esta equivalencia puede ser obtenida en el problema de extremalizar $\int_a^b (f - \lambda g)\,dx$ sin condiciones.[9]

Tal argumento no aparece en las memorias de Lagrange y ciertamente parece que no estuviera de acuerdo con el carácter formalista y el enfoque concentrado de su teoría. Tal vez vale la pena enfatizar la atención marginal que recibieron los problemas isoperimétricos en los escritos de Euler en los que empleó al algoritmo δ. En la memoria anteriormente mencionada el tema es relegado a pocas secciones finales. Sólo se menciona de manera breve en sus escritos variacionales subsecuentes y no aparece en su tratado más extenso *De Calculo Variationum* de 1770.

Dado el lugar prominente que ocuparon los problemas isoperimétricos en los escritos de Jakob y Johan Bernoulli, su creciente importancia subordinada hacia el medio siglo de existencia de la teoría es notable. La esencia matemática de la investigación de los Bernoulli estuvo centrada en el análisis detallado de problemas individuales. No obstante que los ejemplos específicos continuaron ocupando un lugar importante en el cálculo variacional de Euler, también se ve en su trabajo la emergencia de una estructura teórica del tema. Se había iniciado un cambio alejándose de problemas como esos hacia un estudio de la teoría generada por ellos. La reorientación del tema que ocurrió con el establecimiento del cálculo δ de Lagrange reforzó el énfasis prevaleciente sobre la generalidad analítica. En este nivel de desarrollo la cuestión de las condiciones auxiliares en forma de integral no fue una de las de mayor interés o complejidad matemática.

El "problema de Lagrange" (1741-1773)

En su memoria de 1741 Euler atacó el problema de extremalizar integrales de la forma $\int_a^b f(x,y,y',z)dx$, (5) donde $z = \int_a^x g(x,y,y')dx$ (6).[10] El problema es tratado de una manera más completa y con mayor generalidad en su *Methodus Inveniendi*, el capítulo tres está dedicado en su totalidad a este tema.[11] De lo más notable es que Euler obtuvo una solución completa en términos de ecuaciones diferenciales para dos problemas que describen el movimiento de un cuerpo en un medio resistivo. En el primero se requiere encontrar la curva que une dos puntos en un plano vertical a lo largo del cual un cuerpo pesado debería estar confinado a moverse para alcanzar la velocidad terminal máxima. En el segundo, el problema de la braquistócrona, se requiere encontrar la curva a lo largo de la cual el cuerpo descenderá en el menor tiempo posible. Con el tratado de Euler el "problema de Lagrange" se convirtió en una parte central de la matemática variacional, ocupando de hecho un lugar considerablemente más importante que los problemas isoperimétricos históricamente venerables.

La teoría de Euler estaba basada en la idea de perturbar la curva $y = y(x)$ en una sola ordenada, evaluando el cambio resultante en la integral variacional e igualando a cero la expresión obtenida. Cuando el integrando era de la forma $f(x,y,y')$ el cambio completo podía ser calculado localmente en la vecindad de la ordenada alterada dada. Cuando el integrando era de la forma $f(x,y,y',z)$ con $z = \int_a^x g(x,y,y')dx$, se hizo necesario considerar el cambio en la integral variacional sobre el rango completo de valores desde x hasta b.

El procedimiento de Euler fue muy complejo notacionalmente y difícil de calcular, especialmente cuando fue aplicado a los ejemplos con derivadas de órdenes superiores $y'', y^{(3)}, y^{(4)}, \ldots$ en el integrando. El algoritmo δ de Lagrange efectuó, de manera inmediata y dramática, una simplificación de la teoría. Basado en una técnica en la cual todas las ordenadas fueron variadas simultáneamente, se utilizó la integración por partes para llegar a un proceso variacional global que fue particularmente adecuado para manejar los ejemplos del capítulo tres del *Methodus Inveniendi*.[12]

Es importante notar que ni Euler ni Lagrange trataron el ''problema de Lagrange'' como uno de extremalización bajo restricciones. La nueva variable z en el integrando fue considerada como una función de x,y,y', y el proceso variacional fue extendido para calcular la variación adicional introducida por z en la integral. En los ejemplos más generales que estos autores consideraron, las ecuaciones diferenciales fueron siempre obtenidas por el cálculo directo de las variaciones requeridas.

Euler usó el adjetivo ''absoluto'' para problemas en los cuales no existían condiciones isoperimétricas, y ''relativo'' para aquéllos en los cuales tal condición estaba presente. Las integrales variacionales donde aparecen expresiones de la forma (6) o (7) en el integrando siempre fueron consideradas por él como ejemplos de un problema absoluto.

En ninguno de sus escritos, obtuvo Euler la regla isoperimétrica de su memoria de 1738, a partir de la teoría asociada al ''problema de Lagrange''.[13] No obstante que en la teoría moderna es claro que lo que aparece en una ecuación como la (8) es un multiplicador, él no pudo haber tenido conocimiento de este hecho.[14] Para que así ocurriera, se habría requerido al mes un poco del desarrollo general de la teoría variacional para el caso de dos variables dependientes y sus derivadas en el integrando de la integral variacional. Euler reconoció en el *Methodus Inveniendi* que el centro analítico de la teoría era independiente de cualquier interpretación geométrica particular. El contenido de este tratado estuvo, sin embargo, motivado completamente por ejemplos geométricos y aplicaciones, y ninguno de éstos sugirió la introducción de variables múltiples dependientes.

La situación es menos clara en los escritos de Euler posteriores a 1775, en los cuales se esforzó conscientemente por formular la teoría independientemente de la geometría. En su estudio *De Calculo Variationum*, publicado en 1770 como un apéndice del tercer volumen de su *Institutionum Calculi Integralis*, consideró integrales variacionales de la forma (9) y ecuaciones derivadas como (10). No obstante Euler nunca consideró ejemplos en los cuales la segunda variable dependiente z esté dada por una relación de la forma (6), (7) u (11). En vez de esto, investigó integrales como $\int_a^b f(x,y,y',z,z',v)dx$ en las cuales la nueva variable v está dada por $v = \int_a^x g(x,y,y',z,z')dx$. Las ecuaciones variacionales resultantes fueron obtenidas de una manera análoga a la primera obtención de (8).

Aunque Euler fue el creador del cálculo de variaciones, su conceptualización de éste fué esencialmente limitada. Su sentido de síntesis y su intención de generalidad fueron confinados en gran parte al estudio de las formas generales que aparecen en la obtención de las ecuaciones diferenciales de problemas individuales. El tipo de consideraciones que habrían motivado un tratamiento unificado de los multiplicadores requirió, al mismo tiempo, de ideas nuevas así como de mayor sentido del desarrollo teórico del que él poseía.

Síntesis en las '*Leçons sur le calcul des fonctions*' de Lagrange (1806)

Los primeros escritos variacionales de Lagrange consistieron de exposiciones concentradas que intentaban esclarecer el poder de su algoritmo δ y las posibilidades de la conceptualización formal y abstracta del cálculo variacional. En sus dos últimos estudios, *Théorie des fonctions analytiques* (1797) y *Leçons sur le calcul des fonctions* (1806, 2a. ed.) inició una sistemática formulación digresiva del cálculo diferencial e integral y del cálculo variacional. Estos escritos se caracterizaron por la notación distintiva que adoptó, así como por la manera en que los patrones formales fueron identificados y empleados en el desarrollo deductivo de la materia. El principio que guiaba completamente estos estudios fue el evitar los infinitesimales, definiendo los procesos en términos de procedimientos algebraicos y algoritmos.

La *Théorie* [1797, 200-220] contiene una breve indicación de los resultados del cálculo variacional, que fueron desarrollados de una manera exhaustiva en las *Leçons* 21 y 22, [1806, 401-501] ofrecida por Lagrange como un ''*traité complet du calcul des variations*''. La lección 21 incluye una discusión sobre la integrabilidad de las funciones, la obtención de las ecuaciones variacionales básicas y un bosquejo de la historia del tema. En la lección 22, Lagrange presentó su método de variaciones ''*déduite de la considération des Fonctions*''. Su definición de la variación y la notación que emplea se describen en [Fraser 1985]. En términos de las convenciones notacionales del presente ensayo, su forma de plantear los problemas con condiciones auxiliares es como sigue.[15]

Lagrange primero consideró el caso en el cual existe más de una variable dependiente z en el integrando de la integral variacional, como en (9). Por medio de su proceso variacional obtuvo la relación

$$\delta f = [f]_y\,\delta y + [f]_z\,\delta z + d/dx(\partial f/\partial y'\;\delta x) + d/dx(\partial f/\partial z'\;\delta z), \tag{19}$$

donde $[f]_y$ y $[f]_z$ denotan $\partial f/\partial y - d(\partial f/\partial y')/dx$ y $\partial f/\partial z - d(\partial f/\partial z')/dx$. En el problema variacional la integral o ''primitiva'' de δf entre a y b se supone que es cero. De este hecho obtuvo las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} [f]_y\delta x + [f]_z\delta z = 0 \quad &\text{(a)}\\ \partial f/\partial y'\;\delta y\,\big|_b^a + \partial f/\partial z'\;\delta z\,\big|_b^a = 0\,. \quad &\text{(b)} \end{aligned} \tag{20}$$

Si se supone que no existe ninguna relación entre x y y, (20)(a) se reduce a

$$[f]_y = 0,\ [f]_z = 0. \tag{10}$$

Ahora, considérese el caso cuando x y y están relacionadas por una expresión de la forma $F(x,y,z) = 0$. Lagrange hizo $\delta F = (\partial F/\partial y)\delta y + (\partial F/\partial z)\delta z = 0$ y utilizó esta ecuación para eliminar δy y δz de (20)(a)

$$[f]_y\,(\partial F/\partial z) = [f]_z\,(\partial F/\partial y). \tag{21}$$

Del proceso anterior se tiene que (21) y $F = 0$ son las ecuaciones del problema variacional.

Si además se supone que la relación auxiliar F también involucra las derivadas de y y z con respecto a x: $F(x,y,z,y',z') = 0$, en principio sería posible seguir el mismo procedimiento mostrado en la derivación de (21). Lagrange sugirió que podría ser más simple utilizar el método de los multiplicadores, introducidos por él en su *Méchanique Analitique*

[1788, 44-58] para investigar el equilibrio estático de los cuerpos. Su procedimiento puede ser ilustrado por el caso del equilibrio de una sola partícula (con ordenadas espaciales x, y y z) sobre la cual actúa una fuerza externa (con componentes X, Y y Z). Lagrange consideró como condición de equilibrio la relación $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0$, donde δx, δy y δz son desplazamientos virtuales de la partícula consistentes con las restricciones presentes. Si no hay restricciones al movimiento entonces δx, δy y δz son independientes y se obtienen las ecuaciones de equilibrio $X = Y = Z = 0$. Suponiendo que la partícula está condicionada a moverse únicamente en la superficie $F(x,y,z) = 0$, se toma la ecuación $\delta F = (\partial F/\partial x)\delta x + (\partial F/\partial y)\delta y + (\partial F/\partial z)\delta z = 0$, se multiplica por la constante λ para después sumar el resultado a $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0$ y se obtiene

$$X\,\delta x + \lambda\partial F/\partial x\;\delta x + Y\delta y + \lambda\,\partial f/\partial y\;\delta y + Z\delta z + \partial F/\partial z\;\delta z = 0 \tag{22}$$

La introducción del multiplicador nos permite suponer que δx, δy y δz son independientes. Por tanto las ecuaciones de equilibrio son $F = 0$ y

$$\begin{aligned} X + \lambda\,\partial F/\partial x &= 0 \\ Y + \lambda\,\partial F/\partial y &= 0 \\ Z + \lambda\,\partial F/\partial z &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

El método de los multiplicadores probaría ser una herramienta poderosa del análisis variacional. Para comprender cómo llegó Lagrange a este método es significativo notar que la idea subyacente se originó en la mecánica. En el problema estático los términos $\lambda(\partial F/\partial x)$, $\lambda(\partial F/\partial y)$ y $\lambda(\partial F/\partial z)$ en (23) tienen una interpretación física natural como fuerzas de restricción. Dado que la restricción está dada matemáticamente por una ecuación de la forma $F = 0$, de hecho sería razonable considerar una expresión analítica para estas fuerzas en términos de F. De esta manera uno sería llevado a un procedimiento de solución distinto al usual que es directo y el cual involucra la eliminación de las variables desconocidas.

En la *Théorie* [1797, 197-198] Lagrange indicó cómo el método de los multiplicadores podría ser usado en el cálculo ordinario para resolver problemas de extremalización bajo restricciones. Su procedimiento es el que se usa comúnmente hoy día en el cálculo multivariable. El siguió un acercamiento análogo en las *Leçons* [1806, 462-469] a problemas variacionales con condiciones auxiliares de la forma $F(x,y,y',z,z')$

$= 0$. Consideró la variación $\delta F(x,y,y',z,z')$, la multiplicó por el multiplicador $\lambda(x)$ (ahora función de x) y expresó el resultado en la forma

$$\lambda \delta F = [\lambda F]_y \delta y + [\lambda F]_z \delta z + \\ + d/dx(\lambda \cdot \partial F/\partial y' \cdot \delta y) + d/dx(\lambda \cdot \partial F/\partial z' \cdot \delta z) \qquad (24)$$

Sumando $\int_a^b \delta f dx = 0$ y $\int_a^b \lambda \delta F dx = 0$ llegó a las ecuaciones

$$\int [f + \lambda F]_y \delta y + [f + \lambda F]_z \delta z = 0 \qquad (a)$$
$$(\partial f/\partial y' + \lambda\, \partial F/\partial y')\delta y \Big|_a^b + (\partial f/\partial z' + \lambda\, \partial f/\partial z')\delta z \Big|_a^b = 0. \qquad (b) \qquad (25)$$

Asimismo afirmó que en virtud de la introducción del multiplicador ahora puede suponerse que δz y δy son independientes. Por tanto las ecuaciones variacionales del problema son $F(x,y,y',z,z') = 0$ y

$$[f + \lambda F]_y = 0$$
$$[f + \lambda F]_z = 0 \qquad (26)$$

Lagrange anotó que el procedimiento es generalizable al caso cuando se tiene más de una ecuación de restricción presente al introducir multiplicadores adicionales.

La regla del multiplicador presentada por Lagrange proporcionó una poderosa y versátil herramienta del análisis variacional. Lo ilustró con una versión más general de un resultado que había figurado prominentemente en el Capítulo Tres del *Methodus Inveniendi* de Euler así como en sus primeros escritos.[16] Dada una ecuación de la forma $F(x,y,y',z,z') = 0$, el problema es encontrar la relación entre y, z y x que minimiza o maximiza a z, evaluando entre valores específicos de x. El problema variacional se convierte entonces en extremalizar $\int_a^b z' dx$ sujeta a la condición $F = 0$. (El ejemplo clásico es el de encontrar la curva que une dos puntos en un plano vertical a lo largo del cual una partícula pesada que se mueve a través de un medio resistivo debe estar restringida a seguir para alcanzar la velocidad máxima v. Se supone que la resistencia es una función de la velocidad. En este ejemplo $z = 1/2\, v^2$ y la relación auxiliar $F = 0$ es $z' = g - R(z)\sqrt{1 + y'^2}$, donde g es la aceleración debida a la gravedad y $R(z)$ es la función de z que mide la resistencia).[17] Siguiendo la regla del multiplicador considérese la integral variacional $\int_a^b (z' + \lambda F) dx$. Entonces $\partial(z' + \lambda F)/\partial y = \partial \lambda F/\partial y$, $\partial(z' + \lambda F)/\partial y' = \partial \lambda F/\partial y'$.

$\partial(z' + \lambda F)/\partial z = \partial\lambda F/\partial z$, $\partial(z' + \lambda F)/\partial z' = 1 + \partial\lambda F/\partial z'$ y las ecuaciones (26) se transforman en

$$\lambda\, \partial F/\partial y - d/dx(\lambda\, \partial F/\partial y') = 0$$
$$\lambda\, \partial F/\partial z - d/dx(\lambda\, \partial F/\partial z') = 0.$$

La derivación anterior es diferente y más simple que la que apareció en los primeros escritos de Lagrange.[13] Ya que esto último resultó ser una revisión radical y una simplificación del tratamiento de Euler en su *Methodus Inveniendi*, se observa que entre 1744 y 1806 hubo tres soluciones matemáticas distintas para este tipo de problema.

Posteriormente en la *Leçon* 22 Lagrange [1806, 469–470] prosiguió con el clásico problema isoperimétrico de extremalizar $\int_a^b f(x,y,y')dx$ (1) sujeta a $\int_a^b g(x,y,y') =$ constante (3). Mostró que su método de los multiplicadores conduce a la "regla de Euler". Tomó $Z = \int_a^x g(x,y,y')$ (6) y la consideró como una condición diferencial auxiliar de la forma $z' - g(x,y,y') = 0$ en la extremalización de (1). De acuerdo con la regla del multiplicador, la integral variacional en consideración es

$$\int_a^b (f + \lambda(z' - g(x,y,y'))dx. \tag{27}$$

La variación total de (27) es

$$\int_a^b ((\partial f/\partial y - \lambda\, \partial g/\partial y - d/dx\,(\partial f/\partial y' - \lambda\, \partial g/\partial y'))\delta y\; + $$
$$+ [- d/dx(\lambda)]\delta z)dx + (\partial f/\partial y' - \lambda\, \partial g/\partial y')\delta y\,\Big|_a^b + \lambda\delta z\,\Big|_a^b. \tag{28}$$

Las ecuaciones (26) en este caso son

$$\partial f/\partial y - \lambda\, \partial g/\partial y - d/dx(\partial f/\partial y' - \lambda\, \partial g/\partial y') = 0, \quad - d/dx(\lambda) = 0. \tag{29}$$

La segunda de estas ecuaciones implica que λ es una constante. La condición isoperimétrica implica que $\delta z(b) - \delta z(a) = 0$. Por tanto, (28) es idéntica a la variación total de $\int_a^b (f - \lambda g)dx$ (4), donde λ es una constante y no se supone ninguna condición auxiliar. Se ha mostrado que la extremalización de (1) sujeta a (3) es equivalente al problema de extremalizar (4) sin condiciones. Esta es precisamente la "regla de Euler" para problemas isoperimétricos. Es evidente que la regla puede ser generalizada a problemas con más de una condición auxiliar al introducir multiplicadores adicionales.

Hacia el final de *Leçons*, Lagrange consideró varios problemas en los cuales los puntos finales de la curva de extremalización pueden variar. (Este tema ha ocupado desde 1773 un lugar importante en su cálculo variacional). Aunque estas investigaciones no estuvieron directamente relacionadas con la cuestión de extremalizar bajo restricción, vale la pena hacer notar que él utilizó su método de multiplicadores para obtener las ecuaciones diferenciales para el problema de la braquistócrona en un medio resistivo.

Conclusión

La regla del multiplicador introdujo en el cálculo de variaciones una orientación teórica ausente en los primeros escritos de Lagrange. Ello proveyó de una unificación natural de dos tipos de problemas —el problema isoperimétrico y el "problema de Lagrange"—, hasta ahora desconectados en la matemática variacional, y también dió la base para una teoría integrada de considerable poder deductivo.

La idea de un multiplicador surgió del trabajo de Lagrange en Mecánica. Sus investigaciones variacionales subsecuentes, las cuales llevó a cabo a la edad de 70 años, ilustraron cómo una fuente externa podría estimular y reorientar el desarrollo de una teoría matemática. Estas investigaciones también muestran una sensibilidad hacia cuestiones concernientes a la constitución interna de la teoría en sí misma. El cálculo de variaciones había evolucionado en sus escritos hasta el punto en que adquirió estructura e identidad propias. Ahora tenía sentido considerar la organización deductiva del tema y explorar la conexión entre sus distintas partes.

Posdata: El método de los multiplicadores en el cálculo variacional posterior

Las investigaciones de Lagrange sobre problemas de extremalización bajo restricciones se realizaron desde una perspectiva de fundamentación más amplia que fue distintivamente de carácter algebraico.[29] La revolución conceptual iniciada en el análisis por Cauchy en la década de 1820 puso en tela de juicio su perspectiva general así como muchos de los razonamientos específicos que había empleado. Durante el siglo XIX algunos escritores continuaron entendiendo la matemática variacional en términos de los conceptos y métodos del cálculo formal y de operadores.[20] El programa de Cauchy, sin embargo, finalmente se consolidó en el cálculo de variaciones, en los escritos de las décadas de 1870 y 1880 de Karl Weierstrass, Paul Du-Bois Reymond, Adolph Mayer y otros.

Mayer [1886] fue el primero en intentar una demostración general de la regla del multiplicador, aunque hubo algunas dificultades en su demostración.[21] La obtención de la regla, que generalmente llegó a ser aceptada, es la que aparece en [Bolza 1909, 551-553]. Considérese el problema de extremalizar $\int_a^b f(x,y,y',z,z')dx$ sujeta a la relación auxiliar $F(x,y,y',z,z') = 0$. Multiplíquese $F = 0$ por la función $\lambda(x)$ e intégrese de a a b y tómese la variación de la ecuación resultante, $\delta \int_a^b \lambda F dx = 0$. Súmese a $\delta \int_a^b f dx = 0$ para obtener $\delta \int_a^b \lambda F dx = 0$. A través de una integración por partes y suponiendo que no cambian los extremos del intervalo se llega a $\int_a^b([f + \lambda F]_y \delta y + [f + \lambda F]_z \delta z)dx = 0$. Sea $\lambda(x)$ una solución de la ecuación $[f + \lambda F]_z = 0$. La ecuación integral precedente se convierte en $\int_a^b [f + \lambda F]_y \delta y dx = 0$. Debido a que la variación δy es arbitraria se puede ahora hacer uso del llamado "lema fundamental del cálculo de variaciones" y concluir que $[f + \lambda F]_y = 0$; obteniéndose así las ecuaciones variacionales (26).

Aunque las técnicas y concepciones del análisis real reemplazaron la comprensión algebraica de Lagrange del cálculo variacional, los autores modernos continúan reconociendo la intuición teórica evidente en su método de los multiplicadores. Mayer [1886, 74] calificó al método como el verdadero fundamento de la teoría, y Pars [1962, 238], más recientemente, ha hecho incapié en su poder deductivo y versatilidad.[22]

Agradecimiento

Deseo agradecer a Edward Barbeau sus valiosos comentarios acerca del tema de los multiplicadores de Lagrange.

Notas

1. Se citan resultados específicos en Kneser [1904] y Bolza [1909] y trabajo selecto se describe con detalle en Woodhouse [1810], Carathéodory [1952], Goldstine [1980] y Fraser [1985]. Lagrange [1806] sigue siendo una buena fuente para la historia de la teoría en el siglo XVIII.
2. En el siglo XVIII el término "problema isoperimétrico" fue utilizado algunas veces para referirse de una manera general a todo lo que posteriormente se llamaría cálculo de variaciones. Así, el título completo de [Euler 1744] es: "Método para descubrir líneas curvas que muestren alguna propiedad de máximo o mínimo, o la solución del proble-

ma isoperimétrico tomado en su sentido más amplio''. Lagrange [1806] escribe del ''famoso problema de isoperímetros ... tomado en toda su extensión'' para referirse al cálculo de variaciones. En el presente estudio el término va a ser utilizado de una manera más restringida para referirse a problemas variacionales en los cuales están presentes ecuaciones auxiliares en forma de integral que involucran límites fijos de integración.

[El adjetivo ''isoperimetric'' incidentalmente se debe a un término del inglés americano, que aparece por ejemplo en [Osgood 1925] y [Goldstine 1980]. ''Isoperimetrical'' por el contrario es usado por Woodhouse [1810] y Pars [1962] y aparece con varios ejemplos de uso en el *Oxford English Dictionary*. La variante americana refleja posiblemente la influencia del alemán ''isoperimetrisch''.]

3. Carathéodory [1952, xxvi] considera este punto como defecto substancial del *Methodus Inveniendi* de Euler. Lagrange [1806, 432] cuando considera la cuestión en su bosquejo histórico del cálculo de variaciones en las *Leçons* progresa poco más allá que Euler. Escribe ''comme cette équation $fP + aQ + bR = 0$ en su totalidad contient deux constantes arbitraires a et b, il s'ensuit qu'elle sera nécessairement l'intégrale complète de l'équation du second ordre dont il s'agit''.
4. La integración de (17) puede hacerse como sigue. (La prueba fue desarrollada por el autor). Se reescribe (17) en la forma

$$ddP(pd\pi - \pi dp) + ddp(\pi dP - Pd\pi) + dd\pi(Pdp - pdP) = 0.$$

Multiplicando esta ecuación por p y notando que

$$p\pi dP - pPd\pi = P(\pi dp - pd\pi) + \pi(pdP - Pdp),$$

se obtiene

$$pddP(pd\pi - \pi dp) + Pddp(\pi dp - pd\pi) +$$
$$+ \pi ddp(pdP - Pdp) + pdd\pi(Pdp - pdP) = 0$$

Esta ecuación puede ser reescrita como

$$\frac{pddP - Pddp}{pdP - Pdp} = \frac{pdd\pi - \pi ddp}{pd\pi - \pi dp}$$

ó

$$\frac{d(pdP - Pdp)}{pdP - Pdp} = \frac{d(pd\pi - \pi dp)}{pd\pi - \pi dp}.$$

De la integración se obtiene la relación $pdP - Pdp = \alpha(pd\pi - \pi dp)$, donde α es una constante. Esta relación puede ser escrita en la forma

$$d(P/p) = \alpha d(\pi/p).$$

Integrando esta ecuación se obtiene

$$P/p = n\,x/p + m,$$

donde m es una segunda constante. La integral de (17) es por lo tanto $P = nx + mp$, donde n y m son constantes arbitrarias.

5. Euler [1738, 1741] hace un notable estudio de la formación de una teoría matemática. Goldstine [1980, 68] hace unos comentarios refiriéndose al *Methodus Inveniendi* que pueden ser igualmente aplicados a estos primeros escritos: "... [Euler] cambia la discusión de esencialmente casos especiales a una discusión de clases muy generales de problemas ... tomó los métodos en casos especiales de James y John Bernoulli y los transformó en una nueva rama completa de las matemáticas". Un buen relato de estos escritos se presenta en Woodhouse [1810, Caps. 3 y 4].
6. Como complemento a [Euler 1766a, 1766b] (discutidos posteriormente) véase [Borda 1770].
7. En su bosquejo histórico del cálculo de variaciones en las *Leçons*, Lagrange [1806, 437], siguió su elogio del *Methodus Inveniendi* de Euler con la observación: "Mais la décomposition que l'auteur y fait des différentielles et des intégrales dans leurs éléments primitifs dérobe le mécanisme de ce calcul, et la généralité de son algorithme."
8. Véase, por ejemplo [Carll 1890, 114-115].
9. Un argumento similar se aplica cuando existe una segunda condición auxiliar en forma de integral, digamos de la forma $\int_a^b h(x,y,y')dx$ = constante. Una relación del tipo $\{f\} = \lambda\{g\} + \mu\{h\}$ es consistente con las ecuaciones $\int_a^b \{f\}\delta y = 0$, $\int_a^b \{g\}\delta y = 0$ y $\int_a^b \{h\}\delta y = 0$ y esta relación va a ser obtenida en el problema variacional de extremalizar $\int_a^b (f - \lambda g - \mu h)dx$ sin condiciones.
10. La memoria es en mucho un trabajo en progreso con respecto a este tipo de problemas. En las secciones iniciales Euler falla al darse cuenta que cuando el integrando de la integral variacional contiene términos de la forma $z = \int_a^x g(x,y,y')dx$ entonces es necesario tomar en cuenta la variación de todos los valores de z que exceden al valor correspondiente de la ordenada alterada. Así, a la ecuación que se tiene al final de §6 debe agregarse un término adicional de la forma $f - \int_x^b (\partial f/\partial z)dx \, d(\partial g/\partial y')/dx$. El análisis posterior del movimiento en un medio resistivo en §§16-18 es erróneo en consecuencia. Dificultades similares ocurren en §22, 23, 25 y 27. Finalmente, hacia el final de la memoria, Euler regresa al tema de §6 y da un análisis correcto, incluyendo una derivación de la forma correcta de la ecuación que había aparecido al principio. Las secciones finales de la memoria se convertirían en el punto de partida de las investigaciones presentadas en el Capítulo Tres del *Methodus Inveniendi*.
11. Fraser [1985, 158-160] presenta un relato del análisis original de Euler
12. El desarrollo original de Lagrange del algoritmo δ es descrito en Goldstine [1980, 110-129] y Fraser [1985, 160-172].
13. En la proposición V del Capítulo V del *Methodus Inveniendi*, Euler [1744, 204-205] considera la integral variacional $\int_a^b f(x,y,y',z)dx$, con $z = \int_a^x g(x,y,y')dx$, donde posteriormente se supone que se cumple la condición isoperimétrica $\int_a^b g(x,y,y')dx$ = constante. Sin embargo, simplemente recurre a la "regla de Euler" y deduce como un resultado la ecuación obtenida de (8) al reemplazar $\int_x^b (\partial f/\partial z)dx$ por $\int_a^x (\partial f/\partial z)dx + \alpha$, con α una constante.

14. Sobre la base de la observación hecha por Euler de (3), Kneser [1900, 580], Bolza [1909, 566] y Goldstine [1980, 74] atribuyen a Euler un caso especial de la regla del multiplicador para el "problema de Lagrange". Tal atribución es inaceptable ya que imputa a Euler un procedimiento específico y una panorámica teórica que él no tenía. Véase Fraser [1985, 160] y la nota 18 de este artículo.
15. En lugar de la x de Lagrange escribimos δx, en lugar de $f'(y) - [f'(y')]'$ se escribe $\partial f/\partial y - d(\partial f/\partial y')/dx$ y así sucesivamente.
16. El resultado aparece como Corolario 5 de la Proposición V del Capítulo Tres (§43) del *Methodus Inveniendi* [Euler 1744, 120], y el Problema III de [Lagrange 1762].
17. Euler [1744, 122-126] hace un análisis detallado de este ejemplo. Para un relato que sigue cuidadosamente el original, véase Goldstine [1980, 79-82]. Woodhouse [1810, 138-141] obtiene las ecuaciones para este problema de acuerdo a los métodos de Lagrange [1762, 1806].
18. Kneser [1900, 580] trató de acreditar a Euler el método de los multiplicadores para problemas con condiciones auxiliares en forma de ecuaciones diferenciales. Sugiere que los "multiplicadores de Lagrange" deberían ser renombrados como "multiplicadores de Euler Lagrange", sugerencia respaldada por Bolza [1909, 556] y Goldstine [1980, 74]. Sin embargo su posición no es apoyada por una consideración de la teoría de Euler (o los inicios de la teoría de Lagrange). En la última las variaciones son siempre calculadas directamente, nunca utilizando una ecuación auxiliar y multiplicándola por una función multiplicadora desconocida y sumando el producto al integrando en el problema variacional. El método de los multiplicadores en el cálculo de variaciones es mencionado por primera vez en la *Théorie* [1797] y desarrollado de manera profunda en las *Leçons* [1806]. Por lo tanto la designación "multiplicador de Lagrange" es precisa.
19. Para una discusión de la fundamentación de Lagrange, véase, Fraser [1987; 1989].
20. Véase, por ejemplo, Jellet [1850].
21. A pesar de que Mayer [1886, 74] parece tener la demostración con su ecuación (8), procede con un argumento extravagantemente complicado en tres páginas de análisis y diez ecuaciones más antes de obtener la conclusión deseada. (Parece improbable que el artículo haya estado sujeto a una revisión para su publicación). La obtención es descrita en Goldstine [1980, 282-285].
22. Mayer [1886, 74] escribe: "Es ist vielmehr nur kein Beispiel bekannt, in welchem das Lagrange'sche Verfahren zu einem falschen Resultate geführt hätte, und alle diejenigen besonderen Regeln der Variationsrechnung, die, wie die isoperimetrische, sich auch noch auf anderem, directen Wege beweisen lassen, gehen als blosse Anwendungen aus demselben hervor. Daher wurde die Lagrange'sche Methode von einem Theile der Mathematiker gewissermassen als Axiom acceptirt, während ein anderer Theil es vorzog, alle diejenigen Aufgaben der Variationsrechnung, zu deren Lösung man keine anderen Methoden kennt, überhaupt einfach zu ignoriren.
Im Anschlusse an Clebsch habe ich selbst mich immer zu dem ersten Theile gehalten und die Lagrange'sche Regel allen meinen Arbeiten über Variationsrechnung zu Grunde gelegt".
El enunciado de apertura en la memoria de Mayer, incidentalmente, indica que no tuvo conocimiento de primera mano de la teoría desarrollada en las *Leçons* de Lagrange: "Lagrange hat seine Multiplicatorenmethode, durch die er zur Aufstellung der allge-

tiellen Differentialgleichungen der Bewegung gelangte, ohne Weiteres aus der Mechanik hinübergenommen in die Variationsrechnung".

Referencias

Bolza, O. 1909. *Vorlesungen über Variationsrechnung*. B. G. Teubner: Leipzig und Berlin.

Borda, Chevalier de. 1770. "Éclaircissements sur les Methodes de trouver les Courbes qui jouissent de quelq propriété du maximum ou du minimum. *Histoire de l'académie royale des sciences année 1767 Avec les mémoires de mathématique et de physique pour la même année*. 90-92 (Histoire), 551-563 (Mémoires). Paris.

Carll, L. B. 1980. *A treatise on the calculus of variations*. New York

Carathéodory, C. 1935. *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*. Berlin: B. G. Teubner.

— 1952. "Einführung in Eulers Arbeiten über Variationsrechnung". En *Opera Omnia* de Euler, I 24, viii-li

Euler, L. 1738. "Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis". En *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*. 6 (1732/3) 123-155. Reimpreso en *Opera Omnia* de Euler I 25, 13-40

— 1741. "Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis". En *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 8 (1736) 159-192. Reimpreso en *Opera* I 25, 54-80.

— 1744. *Methodus inveniendi curvas lineas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Lausanne. Reimpreso como *Opera* I 24

— 1766a. "Elementa calculi variationum". En *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 10 (1764) 51-93. Reimpreso como *Opera* I 25, 141-176.

— 1766b. "Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum". En *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 10 (1764) 94-134. Reimpreso como *Opera* I 25, 177-207

— 1770. "De calculo variationum". Publicado como un apéndice del *Institutionum Calculi Integralis*, v 3, 459-596. En *Opera* I 11, 369-469

— 1772. "Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi". En *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 16 (1761) 35-70. Reimpreso como *Opera* I 25, 208-235.

Fraser, C. 1985. "J. L. Lagrange's changing approach to the foundations of the calculus of variations". *Archive for the History of Exact Sciences* 32: 151-191.

— 1987. "Joseph Louis Lagrange's algebraic vision of the calculus". *Historia Mathematica* 14, 38-53.

— 1989. "The calculus as algebraic analysis: Some observations on mathematical analysis in the 18th century". *Archive for History of Exact Sciences* 39, 317-335.

Goldstine, H. H. 1980. *A history of the calculus of variations from the 17th through the 19th century*. Springer-Verlag

Jellett, J. H. 1850. *An elementary treatise of the calculus of variations*. Dublin.

Kneser, A. 1904. "Variationsrechnung". En *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Band II 1, Heft 5 (IIA8). 571-625.

Lagrange J. L. 1755. ''Letter to Euler 12 August 1755''. En *Oeuvres* de Lagrange 14. 135-138.

— 1762. ''Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies''. En *Miscellanea Taurinensia''* II (1760-61) 173-195. Reimpreso en *Oeuvres* I, 335-362.

— 1773. ''Sur la Methode des variations''. En *Miscellanea Taurinensia IV* (1766-1769) 163-187. Reimpreso en *Oeuvres* de Lagrange.

— 1778. *Méchanique analitique*. Segunda Edición aparecida como *Mécanique analytique* en dos volúmenes en 1811 y 1813, reimpreso como *Oeuvres* 11 y 12.

— 1797. *Théorie des fonctions analytiques*. Paris. Segunda edición publicada en 1813. Reimpreso como *Oeuvres* 9.

— 1806. *Leçons sur le calcul des fonctions*. Segunda edición. Reimpreso como *Oeuvres* 10.

Mayer, Adolph. 1886. ''Begründung der Lagrang'schen Multiplicatorenmethode in der Variationsrechnung''. *Mathematische Annalen* XXVI. 74-82.

Osgood, W. F. 1925. *Advanced calculus*. New York: Macmillan.

Pars, L. A. 1962. *An introduction to the calculus of variations*. London: Heinemann.

Woodhouse, R. 1810. *A treatise on isoperimetrical problems and the calculus of variations*. Cambridge.