Mathesis 10 (1994) 171-186
[illegible]

El desmigajador de la realidad: Wittgenstein y las matemáticas

Miguel Espinoza

Resumen

Después de describir la especificidad de las ideas de Wittgenstein sobre la naturaleza de las matemáticas comparándolas con el realismo platónico, el intuicionismo y el convencionalismo, se hace notar que el filósofo deshace la unidad de la realidad matemática. Wittgenstein toca las matemáticas por su lado menos interesante, lógico y calculatorio. Resulta difícil, en esas circunstancias, contribuir eficazmente a la verdadera filosofía de las matemáticas. Lo más grave es que su filosofía, inadecuada a la esencia y a la pertinencia de las matemáticas, es consecuencia de sus ideas centrales como la noción de juego de lenguaje o forma de vida, por lo que nuestras críticas se transmiten, por transposición, a su filosofía general.

Abstract

I have tried to pin down the specificity of Wittgenstein's ideas on mathematics by comparing them to platonism, intuitionism, and conventionalism. Attention is called on the fact that having touched the logical and calculating sides of mathematics, Wittgenstein misses the most interesting part of this science. It is difficult, in those circumstances, to make a real contribution to the true philosophy of mathematics. The most regrettable part of the story is that Wittgenstein's ideas, inadequate to the essence and pertinence of mathematics, follow from some of his central doctrines such as the notion of a language game or form of life, the main responsibles of the disintegration of mathematical reality. Thus our criticisms can be transmitted by transposition to his general philosophy.

1. ¿Está el universo contenido en el símbolo?

El platonismo en filosofía de las matemáticas postula que detrás del mundo físico, sensible y dotado de movimiento, existe un mundo objetivo, habitado por ideas o universales abstractos, inmutables y omnitemporales que pueden combinarse para formar verdades o falsedades exactas y definitivas que podemos a veces descubrir. Este mundo perfecto, sobre el cual no podemos tener ninguna influencia, nos controla de una manera que no llegamos a comprender bien. En el proceso de descubrimiento, el lenguaje tiene un papel secundario y accesorio. La historia, las aproximaciones a la verdad, la contingencia, no tienen lugar en el mundo matemático: forman parte de nuestro esfuerzo por llegar a la verdad. La razón lingüística funciona como una escalera que nos permite elevarnos para ver. Hay en el platonismo, como en el intuicionismo de Brouwer, una primacía de la intuición intelectual con respecto a la demostración.

Al contrario, para el idealista, el mundo objetivo independiente de nuestros símbolos es un sueño. El Universo está en el símbolo. No hay verdad matemática en sentido ontológico; toda verdad es epistemológica y depende de nuestra percepción, de nuestra expresión, de nuestro lenguaje que no es solamente el traje con que se viste la verdad sino su contenido mismo. Después del *Tractatus*, Wittgenstein niega que las proposiciones matemáticas describan hechos referentes a los objetos e imagina que la noción de verdad-correspondencia (la adecuación de nuestra representación a la realidad) no tiene significación, y se encamina hacia una teoría nominalista o redundantista de la verdad.

Para el idealista, la verdad no es otra cosa que la coherencia de los símbolos entre ellos puesto que no es posible salir de los símbolos: se puede comparar el lenguaje con el lenguaje, pero no con algo extra-lingüístico. Por su parte, la concepción redundantista llama la atención sobre el supuesto hecho que decir 'p es verdad' y decir 'p' son la misma cosa, nada se gana, una vez que se ha reconocido p, con agregar 'es verdad'. Retengamos por lo menos que Wittgenstein da pie para una interpretación anti-realista de su pensamiento.

El rechazo del mundo objetivo es compartido por el constructivista. ¿Qué es el constructivismo? Como todo movimiento de ideas, no es fácil resumirlo en pocas líneas. Digamos, para fijar las ideas, que el constructivista exige una regla o un cálculo que le permita demostrar, producir o reconocer la existencia de un objeto o de una propiedad cuya existencia es presupuesta o afirmada explícitamente por un teorema. Se necesita un algoritmo, es decir, un proceso enteramente planificado, y por ende finito, que opere sobre configuraciones finitas, en etapas discretas y simples, donde cada paso esté determinado por el paso que le precede. Un algoritmo no resuelve solamente un problema único sino toda una clase de problemas que, aunque difieren por los datos que los constituyen, son regidos por las mismas prescripciones. Una prueba es constructiva si cada vez que implica la existencia de algo se muestran los procedimientos que permiten su construcción. El constructivista exigirá además que cada vez que se establezca una afirmación general, se den ejemplos, que cuando se trata de un conjunto, se nombren sus elementos de manera a distinguirlos nítidamente unos de otros.

La verdad, según el constructivismo y tal como es definida por Wittgenstein, es su método de verificación. Se pasa de la ontología a la epistemología: "La verificación no es un simple índice de la verdad sino que determina el sentido de la proposición" [Wittgenstein s.a. 2a. parte, Cap. VII, § 39]. El constructivista inventa o construye las verdades matemáticas, no las descubre: "Si existe una infinidad de números cardinales es porque nosotros construimos tal sistema infinito y lo llamamos sistema de números cardinales" [*Ibid*., 2a. parte, Cap. IV, § 28]. En una palabra, "el matemático crea la esencia" [Wittgenstein 1956].

Wittgenstein escribió que los que hablan de la solución del problema de Fermat (que podemos expresar así: $a^n + b^n = c^n$ donde a, b y c son números enteros y donde n es un exponente entero)

> no entienden la gramática de la expresión 'problema matemático' ni aquélla de la palabra 'solución'... Se ofrece un premio a la solución de un problema científico, a la parte exterior de la solución ... Las condiciones del problema son las condiciones externas, y si el problema es resuelto, lo que se produce corresponde a la solución del problema ... Si el problema fuera encontrar la construcción de un pentágono regular, una vez enunciado el problema, lo que caracteriza la construcción es la propiedad física que tiene de poder producir efectivamente un pentágono que la medida determina como regular [Wittgenstein s.a. 2a. parte, Cap. V, § 22].

Tenemos que dejar que el uso de una palabra nos instruya sobre su significado; análogamente, la prueba se encargará de enseñarnos lo que es probado.

Quisiera hacer notar, de paso, que esta actitud constructivista es compatible con el platonismo, mientras no se agregue que la prueba crea la existencia. Uno puede exigir legítimamente una prueba de existencia para tener el derecho personal de afirmar que conocemos tal o cual verdad, estrategia ausente en el platonismo. Desgraciadamente, como lo hemos visto, Witdgenstein dice explícitamente que el matemático crea la esencia.

La filosofía de las matemáticas de Wittgenstein puede ser calificada, con justicia, de constructivismo antropocéntrico puesto que acepta como verdadero no solamente lo que podemos demostrar como tal, sino que pide, además, que seamos capaces de seguir psicológicamente la demostración. De hecho, un común denominador de los intuicionistas es que nuestra capacidad de concebir o de imaginar no puede extenderse más allá de ciertos límites que habría que definir. Así, los límites de nuestra capacidad de percibir sensiblemente o intelectualmente una verdad serían los límites de esta verdad, como, según Wittgenstein, los límites de nuestro lenguaje son los límites del mundo. (Descartes, en las *Reglas para la dirección del espíritu*, abordó este problema y propuso aprender de memoria trozos de prueba para aumentar nuestra capacidad psicológica de demostración, lo que entró bien en nuestras costumbres.)

La exigencia de Wittgenstein excluye de la esencia de las matemáticas las pruebas demasiado largas para nosotros, lo que no ocurre con la mayoría de los constructivistas sensibles a la ayuda de las computadoras. Por ejemplo, en la solución del problema de los cuatro colores (¿es verdad que el número cromático del plano o de la esfera es igual a cuatro?), Appel y Haken, para llevar a cabo las últimas etapas de la demostración, ingeniaron un cálculo que necesitó 1200 horas de computadoras, y actualmente (octubre de 1993) la prueba de Wiles de la conjetura de Fermat ocupa más mil páginas, y los primeros que han tenido la prueba en sus manos nos piden tener confianza en ella, a pesar de los vacíos o presuposiciones no debidamente justificadas que presenta.

Los empiristas recientes, como Kitcher (1983), se han servido de la observación que no podemos seguir las pruebas demasiado largas y verificarlas, por decirlo así, de un vistazo, para afirmar que las matemáticas son tan empíricas y sobre todo tan falibles como las ciencias naturales. Incluso si a Wittgenstein le parece que el empirismo es inadmisible, de vez en cuando está cerca de él. ¿Cómo no calificar de empirismo o de conductismo la idea que el significado de un concepto sea dado por la práctica, por la acción, por su uso?

La capacidad de seguir paso a paso una demostración es no solamente lógica, es también psicológica, y sería coherente reconocer la pertinencia de este último aspecto en la descripción constructivista antropocéntrica de la esencia de las matemáticas. Sin embargo, Wittgenstein dice explícitamente que no quiere saber nada de la incidencia mental sobre las matemáticas: "Los procesos mentales, las alegrías, las depresiones, los instintos de la gente en su trabajo, sea cual fuere su interés desde otros puntos de vista, no me interesan para nada" [Wittgenstein s.a. 2a. parte, Cap. III, § 2]. Por supuesto, Hadamard no estaría de acuerdo (*Cf. Ensayo sobre la psicología dela invención en el dominio de las matemáticas*)

Lo que interesa a Wittgenstein, la esencia de las matemáticas, son las pruebas, los métodos de demostración. Pues bien, un método no es nunca un fin en sí sino un medio que finalmente permite 'ver' algo con los ojos del espíritu. Los pensadores antiguos estaban conscientes de eso. ¿Para qué sirve un camino que no lleve a ninguna parte? Afirmar que en las matemáticas lo esencial es el método es tan absurdo como considerar que un camino es un fin. Lo que cuenta, son los hechos matemáticos vistos después de caminar. Thom, haciendo notar el carácter secundario de la prueba, está convencido que cuando uno ha visto una verdad matemática, habrá siempre alguien que vendrá a demostrarla.

2. ¿Puede haber existencia sin prueba?

Brouwer concibe en la base de las matemáticas una intuición primordial, la percepción de los números, y en la base de los números una especie de dualidad, nuestra capacidad de distinguir un instante de otro, un elemento de otro. Las matemáticas son el desarrollo de la intuición primordial. El tiempo de la conciencia tiene aquí un rol fundamental. La intuición de los números es la base de la inteligibilidad y sería entonces inútil tratar de definirla o de explicarla.

¿Qué propone Wittgenstein? En su ontología no hay lugar para una base única de inteligibilidad, ni para objetos dotados de algunas propiedades universales, ni para nada esencial. 'El mundo se compone de hechos'. No hay esencia de los números, ni esencia de las matemáticas. Con su manera típica de deshacer la unidad de la realidad, de desmigajarla, de partirla en pedazos sin lazos necesarios, Wittgenstein afirma que las clases de números tienen entre ellas una semejanza como la que puede existir entre los miembros de una misma familia. Nada impide la extensión del concepto de número, como nada impide que tal concepto tenga límites fijos. Todo eso depende de nosotros, de la manera en que empleemos las palabras [Wittgenstein 1968]

Los problemas acerca de los números, las definiciones, las posibilidades de desarrollarlos, serían problemas de gramática, pero se sabe que no es fácil de aprehender el significado exacto de la palabra 'gramática' en Wittgenstein. Digamos por nuestra cuenta, que esperamos de una gramática que sea un algoritmo, una serie de reglas que tengan la propiedad notable de permitirnos distinguir los enunciados significativos. La aplicación podría continuar teóricamente al infinito porque la serie de enunciados correctos, en un lenguaje natural, no tiene aparentemente un límite superior. La gramática parece ser así un modelo de algo, una lógica profunda, o más bien, diría yo, una topología que habría que especificar, y que nos permitiría formar enunciados con sentido y reconocerlos. Pero esta sugerencia parece poco compatible con la doctrina omnipresente de los juegos del lenguaje los cuales, siendo individualmente autónomos, no reconocen una esencia común

> El estudio de los juegos del lenguaje es el estudio de las formas primitivas del lenguaje o de los lenguajes primitivos. Si queremos estudiar los problemas de la verdad y de la falsedad, del acuerdo y del desacuerdo de las proposiciones con la realidad, de la naturaleza de la aserción, la suposición y la pregunta, nos será muy provechoso considerar formas primitivas de lenguaje en las que estas formas de pensar aparecen sin el fondo perturbador de los procesos de pensamiento altamente complicados [Wittgenstein 1968a]

Los intérpretes de Wittgenstein parecen unánimes para reconocer que los juegos de lenguaje (i) son autónomos; (ii) la fuente de la claridad de una expresión; (iii) que uno puede aprender las reglas entrenándose, imitando, una vez que uno entra a jugar, y (iv) que las explicaciones son concretas, dadas en ejemplos particulares. Esta es la idea completa que tenía en mente al afirmar que Wittgenstein deshace la realidad, su antirealismo.

Tanto para el realista como para el intuicionista, la existencia de un objeto o de una propiedad goza de una cierta independencia con respecto a la prueba. Para el realista, porque reconoce la existencia de objetos y de propiedades en sí, fuera de nosotros; para el intuicionista, (pienso en Brouwer, en particular) porque los seres matemáticos son actos. Sobre este punto, Wittgenstein opina que quien considera que la existencia es independiente de la prueba no tiene un concepto claro de existencia. Hasta ahí, la opinión no es ontológica y es correcta. Es común que los matemáticos manipulen objetos y propiedades antes de definirlos, la historia de la disciplina abunda en ejemplos. Un caso ilustre es la manipulación del infinito antes de Cantor. Pero Wittgenstein no se detiene ahí: "En realidad, existencia es lo que se prueba con lo que se llama 'prueba de existencia'" [Wittgenstein s.a. 2a. parte, Cap. V, § 24]. La existencia es absolutamente indiscernible de la prueba (nominalismo)

Según los racionalistas clásicos como Descartes, los entes físicos necesitan una causa o razón suficiente para pasar de la esencia a la existencia, pero la situación de los entes matemáticos es diferente puesto que en ellos la esencia es indistinguible de la existencia: existe, matemáticamente, lo posible, es decir, lo no-contradictorio. Ahora bien, Wittgenstein, como los intuicionistas, ve en los entes matemáticos una diferencia entre la esencia y la existencia, por eso, se requiere una causa o razón suficiente para que la esencia se actualice. Tal causa es la voluntad humana para Brouwer, la prueba constructiva para los constructivistas.

Wittgenstein, como los intuicionistas, no tiene ninguna confianza en el principio del tercero excluido (para toda proposición P, la proposición [P o (*no-P*)] es verdadera) ni en la ley de la doble negación (la negación de un enunciado verdadero es falsa, la negación de un enunciado falso es verdadera) en tanto que procedimientos capaces de probar la existencia de algo. El tercero excluido y la ley de la doble negación son útiles en la prueba por reducción al absurdo, pero, según el intuicionismo, ese tipo de prueba puede a lo sumo hacer que algo sea posible, pero no actual. En la aritmética intuicionista, la disyunción $p \vee q$ recibe un sentido constructivo de la siguiente manera. $p \vee q$ es verdadero si y solamente si al menos uno de los dos, p o q, es efectivamente verdadero y que se sabe cuál es.

La exigencia de construcción efectiva deja sin significado cognoscitivo (sin valor de verdad, sin sentido literal) los enunciados como 'hay siete 7 en la expansión decimal de π' puesto que no sabemos si es verdad o no. Además que la afirmación puede ser verdadera en algunos modelos, y falsa en otros. (Recuérdese que los 'cazadores de decimales' de π han recurrido a métodos diferentes, aunque complementarios, como la ciclometría (Arquímedes) y la trigonometría (Viète)).

La misma situación se presenta (no conocemos el valor de verdad) acerca de los enunciados que recurren al infinito (conjunto infinito, tender al infinito, etc.) porque, en la práctica, solo lo finito tiene sentido claro. En la práctica, y en el mejor caso, sólo el infinito potencial tendría sentido, aquel que evoca la posibilidad de ir más allá de un límite dado, en las palabras de Aristóteles, aquello fuera de lo cual hay siempre algo más. Por ejemplo, todo número primo admite otro que le sigue y decimos entonces que la lista de números primos es ilimitada. Ininteligible sería, por otra parte, el infinito como un todo acabado, el infinito actual en el sentido de Cantor, concebido como una toma de conciencia de todos los elementos, al mismo tiempo, de un conjunto infinito, como el conjunto de los números enteros naturales.

Los fisicalistas pueden prolongar este rechazo del infinito actual haciendo notar, por una parte, que 'infinito' no puede significar otra cosa que nuestra capacidad, psicológica y biológica, de iterar un proceso, y que, por otra parte, esta capacidad, cuyo asiento es un cerebro finito, no puede sino ser limitada. Así, nada en nuestra experiencia, necesariamente finita, equivale al infinito actual. Durante mucho tiempo el infinito *actual* estuvo condenado en matemáticas, y se ve que su vida, desde el punto de vista de la comprensión conceptual, sigue siendo difícil. ¿Pero es acaso verdad, como lo afirma el fisicalista, que el cerebro escapa al continuo? Considérese que el cerebro contiene un número elevado de neuronas (10^{11}) y que cada neurona está compuesta por un número considerable de moléculas. Como las moléculas vibran, deben tenerse en cuenta los parámetros de posición de las moléculas, y si se admite que el espacio en el cual vibran las moléculas es continuo, se obtienen parámetros continuos. (Ver p. ej. Thom, *Prédire n'est pas expliquer*, 1991.)

Retomemos nuestro tema. Wittgenstein considera que el principio del tercero (o medio) excluido se comporta como un modelo o imagen que tratamos de imponer a la realidad, pero deja entender que nada nos obliga a hacerlo así y que sólo un dios podría darse el lujo de excluir una tercera posibilidad [Wittgenstein 1968]. Pero su rechazo del tercero excluido no es categórico en todos los contextos. De hecho, si un matemático elije emplear la expresión '*p* o *no-p*' como enunciado necesariamente verdadero, entonces tendría derecho a emplear el tercero excluido como regla de inferencia (convencionalismo). Luego, Brouwer y Wittgenstein ven las matemáticas más bien como una actividad que como teoría [*Ibid.*, p. 227].

Pero hasta ahí llega la similitud porque el matemático holandés reconoce —mientras que Wittgenstein no lo hace— la existencia de objetos abstractos, construcciones mentales independientes del lenguaje; las intuiciones matemáticas son actos que pueden o no ser expresados verbalmente.[1] Einstein, en sus notas autobiográficas, revela que no le cabe ninguna duda que el pensamiento progresa en gran parte sin recurrir a signos o palabras, y que se encamina, aunque no exclusivamente, de manera inconsciente. Por otro lado, se entiende que el filósofo, para quien el lenguaje natural es indispensable, caiga en la tentación de generalizar y saque la conclusión errónea que no hay pensamiento sin lenguaje.

1. Sobre las relaciones entre las ideas de Wittgenstein y de Brouwer se puede ver, p. ej., [Dummett 1959].

3. ¿Son las matemáticas esencialmente algorítmicas?

Es bien sabido que para Wittgenstein [s.a. Sumario, Caps. II, VI], el sentido de un concepto es su uso:

> el significado no es acaso realmente el uso de la palabra? ¿No es acaso la manera en que tal uso interviene en la vida? ... El sentido de la proposición no es el papel que tiene el cálculo. Algo no es una proposición sino en un lenguaje. Entender una proposición significa entender un lenguaje

Wittgenstein se ha encerrado en una concepción algorítmica de las matemáticas, lo que está claro dada su insistencia sobre el (pretendido) carácter esencial del cálculo y de la prueba.

Ahora bien, los teoremas de incompletud de Gödel nos obligan a reconocer que el pensamiento no es algorítmico. El primer teorema puede formularse así: (i) si la aritmética formal no es contradictoria, existe una fórmula *F* de la aritmética formal tal que ni *F* ni *no-F* sean demostrables en esa teoría. En otras palabras, si la aritmética formal no es contradictoria, no es una teoría completa. Pero es sobre todo lo que puede llamarse el segundo teorema de incompletud de Gödel el que muestra de manera más nítida el carácter no-algorítmico del pensamiento: (ii) si la aritmética formal no es contradictoria, su no-contradicción no es demostrable por los métodos formalizables en la aritmética formal. (Recordemos, de paso, que este resultado dio un golpe fatal a la parte del programa formalista de Hilbert consistente en la idea que es posible axiomatizar completamente las matemáticas.) Se sigue de los teoremas mencionados que somos capaces de ver una verdad que no haya sido obtenida gracias a una serie finita de procesos en número finito y aplicados a un número finito de datos. Eso quiere decir que un sistema lógico es, por sí mismo, incapaz de garantizar su propia descripción: lo verdadero no equivale a lo demostrable.

El tema es interesante y difícil [ver por ejemplo: Penrose 1980], pero uno no ve bien cómo podríamos abordarlo sin estudiar la dinámica mental una vez que se ha declarado, como Wittgenstein lo ha hecho, que los procesos mentales, en el estudio de las matemáticas, no le interesan. Gödel tenía más de una razón para quejarse de que Wittgenstein no había entendido sus trabajos y que los últimos escritos de su compatriota significan una regresión o, en los términos de Hawking, 'una desgracia' cuando se los comparan con la tradición filosófica dedicada al estudio de problemas más bien que al análisis del lenguaje.

Connes [Changeux 1989] distingue tres niveles del pensamiento matemático: el primero se define por la facultad de calcular, de aplicar una receta dada, lo que existe ya en los computadores. No hay comprensión de lo que se hace ni conciencia de su valor. El segundo nivel, más sofisticado, exige una comprensión del problema tratado que determina una estrategia en vista de un fin. Hay que comprender la significación de lo que se hace. Las operaciones están jerarquizadas. La elección de una estrategia muestra un cierto grado de libertad, una elección por parte de la mente, pero en ningún momento se ve una distancia entre el funcionamiento del cerebro y el objeto al cual se aplica. Todo lo necesario para la resolución del problema existe. Ahora bien, no es claro cómo se podría programar una computadora capaz de evaluar lo que hace. Connes considera que en el hombre el sentimiento de frustración, la tensión o el placer, cumplen esta función. Habría que arreglárselas para introducir en el programa una función similar a la frustración o al placer que evalúe y oriente la estrategia de la máquina que piensa. ¿Qué razón tendría una máquina para perfeccionarse, para mejorar su capacidad de jugar ajedrez, si no sufre, si no se frustra cuando hace una tontería, si le da igual perder o ganar?

La situación del tercer nivel es diferente: hay descubrimiento de nuevas zonas de la realidad matemática, se plantean nuevos problemas y se abren nuevas vías de resolución. El matemático cree ver ahí una disociación entre la actividad cerebral y el pensamiento. Se tiene la impresión que el espíritu se ocupa de una tarea diferente mientras que de manera interna, subconsciente, el problema continúa su curso en el cerebro. Es como si el espíritu, en su búsqueda de significación, se dejara guiar por la coherencia de la realidad matemática independiente del cerebro. Yo propongo concebir la conciencia como un demiurgo que modela el cerebro inspirándose en el orden de mundo inteligible.

Se entiende que esta reflexión quede fuera de la actitud wittgensteiniana porque esta última excluye explícitamente de las matemáticas el pensamiento y lo mental: "Las proposiciones matemáticas no expresan ningún pensamiento" [*Tractatus*, 6.21].

4. ¿Existe una necesidad detrás de las reglas?

Desde el punto de vista de la teoría del conocimiento, la necesidad aparece claramente en dos contextos: en las matemáticas y en la física. En física, la necesidad adopta la forma de la transmisión de una energía, de una fuerza o de una información. Es lo que la relación causal intenta descubrir. En matemáticas, la necesidad aparece en forma de deducción y pueden ser concebidas como el dominio de la deducción pura. En principio, si los axiomas tienen sentido, todo tiene sentido, porque se transmite necesariamente en la deducción. Ahora bien, una de las razones principales que hacen que un matemático, cuando reflexiona sobre lo que hace, adopte el platonismo, es la necesidad con la que los hechos se le imponen a su intelecto, y no le queda otra opción que dejarse cancelar por la necesidad. El estatuto de esta noción es central a la concepción de las matemáticas, y la idea que uno tenga de ella determina una filosofía.

En el *Tractatus*, se asigna la necesidad a la lógica, pero en los textos posteriores la necesidad desaparece favoreciendo así algunas ideas que en ciertos aspectos —en algunos solamente, porque Wittgenstein es un pensador independiente— se dejan emparentar al convencionalismo o al pragmatismo. Sucede que se subordina la necesidad a la elección de una regla o a la elección de una gramática, de un juego de lenguaje. Tales reglas serían idénticas a su uso, lo que quiere decir que ellas no manifiestan una realidad en sí: "No se puede excavar detrás de las reglas, puesto que no hay nada detrás de ellas" [Wittgenstein s.n. 2a. parte, Cap. I, § 1].

Dos referentes que permiten captar la especificidad de la idea de Wittgenstein son el pragmatismo y el realismo. Veamos el caso de Quine. En la medida en que las matemáticas contribuyen a pasar lógicamente de un enunciado de observación a otro, las matemáticas comparten el contenido empírico de la física matemática, y la apariencia de necesidad no es otra cosa que el reflejo de nuestra prudencia ante la posibilidad indeseable de modificar demasiado profundamente el campo cognitivo.

Nótese que de las matemáticas se conserva aquí solamente su papel lógico y que lo único que se les pide es que sean capaces de 'salvar fenómenos', de dar cuenta de ellos. El principio director, según Quine, es la máxima de la mutilación mínima: 'intente perturbar lo menos posible el todo de la ciencia'. Como los efectos de las verdades matemáticas se dejan sentir lejos y en muchos dominios, se entiende que las verdades matemáticas estén particularmente bien protegidas y que estemos dispuestos a modificarlas lo menos posible; eso es todo lo que tenemos que ver en la necesidad matemática. Pero Wittgenstein no es cientificista, no se da como fin intocable el progreso del conocimiento, dejando entender que la ciencia es un juego de lenguaje entre otros.

Para el realista, la necesidad es una sola, la necesidad natural, que se manifiesta, por ejemplo, en la transmisión de una fuerza física o en la transmisión del sentido en matemáticas. Existe un campo cognitivo, jerárquicamente organizado, donde el principio de la organización es la necesidad. La historia del conocimiento, y en particular el desarrollo de las matemáticas y de la física, es la historia de la búsqueda de necesidad. Si se han elaborado teorías cada vez más abstractas, unificadas y profundas es porque se ha intentado atar hechos, aparentemente contingentes, a una necesidad. Esta observación permite ubicar a la cabeza de las ciencias la metafísica, entendida como la ciencia de la necesidad pura, luego las matemáticas, la mecánica racional, la física, etc., en una jerarquía como la propuesta por Comte, sólo que aquí figura, en primer lugar, la metafísica. La idea de base es que existe un solo mundo, dotado de una sola inteligibilidad, necesidad o razón (considero que desde el punto de vista metafísico, estos tres conceptos forman uno solo), captados finalmente por un solo gran sistema conceptual. Toda concepción diferente de este realismo metafísico contendrá componentes escépticos, y las doctrinas de Wittgenstein ilustran esta afirmación.

La visión de Wittgenstein de la necesidad y de la significación que hace que ellas dependan de las reglas seleccionadas, de un cálculo o juego de lenguaje, es un argumento convencionalista contra la unidad del mundo y de la razón. Al contrario de lo que se afirmaba en el *Tractatus*, hemos visto que se lee en los escritos posteriores que no hay nada en común en las diversas formas de lenguaje, que cada juego de lenguaje es autónomo, la incorporación de una forma de vida. En las matemáticas, como en las otras situaciones, "lo que debe ser aceptado, lo dado es, podríamos decirlo así, las formas de vida" [Wittgenstein 1968, 226].

Algunos comentadores, por ejemplo Dummett, han creído ver en la insistencia de Wittgenstein en la elección de reglas, un convencionalismo radical. Esta interpretación no parece imposible, pero que yo sepa, Wittgenstein no dice explícitamente que elegimos las reglas de manera arbitraria. Puesto que la noción-clave es la forma de vida, habría que hacer la lista de sus componentes. ¿Cómo no incluir en ella las condiciones biológicas, y cómo no ver en estas últimas una serie de elementos naturales y universales que expresan, a su vez, condiciones matemáticas y físicas?

Sólo la descripción adecuada de la extensión del concepto de forma de vida podría aclararnos sobre el grado de convencionalismo de Wittgenstein, pero el filósofo austriaco diría probablemente que la tarea propuesta sería sin fin, indecidible, ya que para llevarla a cabo, tendríamos que recurrir a formas de vida. Se corre así el riesgo de razonar en círculo, lo que culminaría en una forma de escepticismo típicamente wittgensteiniano.

5. ¿Qué interés tiene una matemática sin pertinencia metafísica?

La serie de juegos de lenguaje no está ordenada jerárquicamente, las regularidades no están subordinadas a ninguna regularidad superior. No es entonces sorprendente que Wittgenstein [1968, 49] llegue a separar la filosofía (en la escasa medida en que reconoce a ésta un contenido positivo) de las matemáticas y que enseguida desligue las matemáticas de la metamatemática, una de las razones por las cuales no parece haber entendido, o no haber querido entender, el interés de los trabajos de Gödel o de Tarski.[1] Ya el *Tractatus* negaba la posibilidad de la metamatemática, y sabemos ahora, después de los aportes de Gödel, de Tarski, de Cohen, entre otros, que esta actitud es errónea. La metamatemática toca las matemáticas, y en la medida en que la metamatemática es una filosofía, no se puede afirmar, como Wittgenstein lo hizo, que la filosofía deje todo tal cual.

Una opción diferente y preferible, dada la actividad matemática, consiste en reconocer que las matemáticas, como la filosofía, son ideas, seres vivos que se unen para engendrar nuevos seres los cuales a su vez se desarrollan y mueren, dejando una descendencia. Generaciones enemigas pueden combatirse mientras que algunos de sus miembros mezclan sus sangres. La historia de las matemáticas se asemeja a la historia humana. De otra manera no se entendería que algunas ideas filosóficas precedan a ideas matemáticas, o que ideas en física puedan servir al progreso de las matemáticas, y así sucesivamente.

Imagine las matemáticas antiguas sin sus raíces cosmológicas o místicas —se convierten en curiosidades sin mañana— ¿Y cómo entender el nacimiento del cálculo infinitesimal fuera de su contexto metafísico y físico? Más cerca de nosotros en el tiempo, los trabajos de Gödel adquieren una nueva dimensión cuando se nos informa de su optimismo racionalista, de su esperanza leibniziana de ver la metafísica convertida en ciencia exacta, y se entiende la plena significación de la teoría de las catástrofes de Thom solamente en el contexto de la filosofía de la naturaleza donde aparece como una teoría general de la analogía, como una metodología o especie de lenguaje que permite organizar los datos de la experiencia en las condiciones más diversas.

> A fuerza de querer suprimir los lazos entre el pensamiento y la realidad, así como al rehusar dar a la ciencia el valor de una experiencia espiri-

1 Sobre las relaciones entre Wittgenstein y Gödel, y en particular sobre el juicio de Gödel de la obra de Wittgenstein se puede leer [Wang 1987].

tual, corremos el riesgo de quedarnos solamente con la sombra de la ciencia [Lautman]

Habría que admitir que los hechos matemáticos existen en la naturaleza pre-humana antes de existir conscientemente en nuestro intelecto. Las matemáticas, en tanto que ciencia, emergen de un cerebro sometido él mismo a condiciones matemáticas, físicas y biológicas. Imaginemos entonces que los objetos y propiedades matemáticos están hechos de una cierta 'materia' cuyas propiedades requieren especificación. Se puede pensar en este contexto al referente del concepto de punto material de la mecánica.

Recordemos que Leibniz, al discutir los fundamentos de la física, tuvo necesidad de postular la existencia de puntos metafísicos, detrás de los puntos físicos o átomos (divisibles sólo en apariencia) y detrás de los puntos matemáticos (exactos, pero son solamente modalidades, abstracciones). Los puntos metafísicos (o substancias) son a la vez exactos y reales, y sin ellos no habría nada real porque sin verdaderas unidades no habría multitud.

Si consideramos en cambio que los objetos matemáticos y sus propiedades son absolutamente transfísicos, y si conservamos la ontología matemática (no como hacen los logicistas), no podríamos dar cuenta del hecho que las matemáticas tienen un rol constitutivo (no son una mera aplicación del exterior) en la teoría de la física matemática. Si esta teoría es literalmente verdadera, y si contiene una parte matemática ineliminable, se sigue que los objetos y las propiedades matemáticas presupuestos son reales. Las partes de la física bien matematizadas como la gravitación y el electromagnetismo sugieren que el mundo platónico y que el mundo sensible son un solo mundo, y decir que la constitución matemática de las leyes en esos dominios es el resultado del azar significa renunciar a entender. El azar, causa ciega, siendo él mismo ininteligible, no puede explicar nada, la verdad implica la existencia —aunque para dar un contenido definitivo a la afirmación haya que esperar que las teorías se estabilicen, que hayan alcanzado el ideal de darnos las cosas como son—. Digamos que una fórmula, una proposición nos da una verdad literal cuando es trans-teórica, cuando pasa intacta de una teoría a otra más vasta y profunda que la engloba.

Wittgenstein recorrió un largo camino en el sentido opuesto al realismo descrito. Las reglas no determinan ninguna realidad y se supone que podemos elegir las reglas y la manera de aplicarlas (convencionalismo, pragmatismo). La objetividad no sería otra cosa que el acuerdo de la comunidad científica que comparte un juego de lenguaje y una forma de vida [Wittgenstein 1968, 88]. Difícil, en ese caso, de hacer justicia al progreso del conocimiento, de describir convenientemente el encadenamiento de teoremas y de descubrimientos durante siglos. Hemos visto que el realista se esfuerza por recuperar la visión unificada del conocimiento gracias a la unidad de la necesidad.

La historia de las matemáticas enseña que la solución de muchos problemas llega a ser posible sólo una vez que sectores particulares y mutuamente indiferentes consiguen ser reunidos. La reunión hace que una curiosidad gane en significación y permite a veces que pase a ser un teorema profundo. La solución de la conjetura de Fermat a la cual he hecho alusión ocurrió recientemente gracias a que los trabajos en geometría algebraica habían logrado enlazar el teorema a dominios bien explorados de las matemáticas. ¿Qué posibilidad tiene de dar cuenta de estos notables hechos una filosofía que deshace la unidad y la necesidad de la realidad?

6. Conclusión

¿Cómo no aplastar el mundo matemático y la actividad mental que arranca hechos al inconsciente, cuando se ha decidido poner atención solamente a "los libros de cuenta de los matemáticos"? [Wittgenstein s.a. 2a parte, Cap. III § 11]. Uno se queda con la impresión que la visión de Wittgenstein no puede ser aquella de un matemático, ni aplicable cómodamente a la significación y pertinencia de esta ciencia. Hay teoremas profundos cuyas consecuencias se dejan ver lejos. Considérese el papel constitutivo de la geometría en la relatividad general, de los números complejos en la mecánica cuántica, de los conceptos de singularidad y de bifurcación en la biología teórica, etc. Todos conocemos la importancia que se da a la medida y a las leyes cuantitativas en la ciencia moderna, incluso en las ciencias llamadas 'humanas'. Ahora bien, ¿cómo entender este hecho sin reducir los fenómenos a la geometría del espacio-tiempo?

Wittgenstein se acercó a las matemáticas por su lado menos interesante, por abajo, por sus aspectos lógicos, empíricos y calculatorios. Es difícil, dado ese punto de partida, de contribuir eficazmente a la filosofía de las matemáticas. El geómetra tiene menos posibilidades de extraviarse sobre la naturaleza de las matemáticas que el lógico puesto que la geometría, ciencia fundamental, se encuentra en la base de la mecánica y de otras teorías físicas, mientras que la lógica se ha derivado del lenguaje natural. Lo grave es que las ideas de Wittgenstein sobre las matemáticas, como lo he mostrado, están en gran parte implicadas por el núcleo de su filosofía general, las nociones de sentido, de comprensión, de juego de lenguaje y de forma de vida, por lo que las críticas que podemos presentar a su filosofía de las matemáticas se transmiten, por transposición, a su pensamiento en general.

Referencias

CHANGEUX A., J. P. Connes. 1989. *Matière à pensée*, Paris: O. Jacob.

DUMMETT, M. 1959 "Wittgenstein's philosophy of mathematics". *The Philosophical Review*. 68 (1959) 324-348.

KITCHER Ph. 1983. *On the nature of mathematical Knowledge*. Oxford University Press.

PENROSE, R. 1980 *The Emperor's New Mind. Concerning computers, minds and the laws of physics*. Oxford U.P.

WANG, Hao. 1987. *Reflections on Kurt Gödel*. M.I.T.

WITTGENSTEIN, L. s.f. *Gramática filosófica*, 2a. parte.

___ ___. 1956. *Remarks on the foundations of mathematics*, Nueva York.

___ ___. 1968. *Philosophical Investigations*. The Macmillan Co., New York, 3rd ed.

___ ___. 1968a. *Los cuadernos azul y marrón*. Tecnos, Madrid.

Miguel Espinoza es Doctor en Filosofía, Ph. D. (Washington University, St. Louis, Mo., EE UU, 1974) y habilitado a dirigir investigaciones en Filosofía de las ciencias (Universidad Louis Pasteur, Estrasburgo, Francia, 1993). Es Profesor titular de Filosofía de las ciencias en la Universidad de Estrasburgo donde dirige el Seminario de Ciencia y Metafísica. Es autor de *Dynamics of multivocal sentences*, Washington University, 1974, *El evento de entender*, Universidad Austral de Chile, 1977, *Análisis de la imaginación*, Universidad Austral de Chile, 1981, *Essai sur l'intelligibilité de la nature*, Editions Universitaires du Sud, Francia, 1987, *Théorie de l'intelligibilité*, Editions Universitaires du Sud, Francia, 1994.