Mathesis 10 (1994) 93-113

La ciencia analítica en la primera mitad del siglo XIX: el teorema del valor intermedio[1]

Jesús Alarcón
Mirela Rigo
Guillermina Waldegg

Resumen

Hacia la primera mitad del siglo XIX, las teorías científicas que se preciaban de serlo, se calificaban a sí mismas como 'analíticas'. Desde la *Mecánica analítica* de Lagrange, hasta la *Prueba puramente analítica* del teorema del valor intermedio de Bolzano, el alto nivel de abstracción y de generalidad de una teoría estaba sustentado en el uso de los 'métodos analíticos'. Sin embargo, el término 'analítico' no tuvo el mismo significado para todos los científicos de este periodo y es posible detectar diferencias notables en los supuestos que fundamentan el empleo de los métodos analíticos para cada uno de los autores. En este artículo se analizan distintos enfoques al teorema del valor intermedio que nos permiten apreciar las diferentes concepciones sobre la 'analiticidad' de una teoría.

Abstract

During the first half of the nineteenth century, the theories that presumed to be scientific described themselves as 'analytic'. From Lagrange's *Méchanique analytique* to Bolzano's *Purely analytic proof* of the intermediate value theorem, the high level of abstraction and generality reached by a theory was based on the 'analytic methods' used. However, the word 'analytic' did not have the same meaning for all the scientists of this period, and remarkable differences can be detected in the assumptions underlying analytic methods in each

1. La investigación que sustenta el contenido de este artículo ha sido auspiciada por el CONACyT. Proyecto 1633-S9208.

author. In this article different approaches to the intermediate value theorem are analyzed, revealing the various conceptions of what being an 'analytic' theory entails.

1. Introducción

Desde el nacimiento de la ciencia moderna en el siglo XVII, el término analítico fue aplicado recurrentemente a las teorías como un sinónimo de cientificidad y rigor. A principios del siglo XIX el estatus del calificativo era tal, que el simple uso del término parecía aportar una garantía de que las teorías en cuestión habían sido elaboradas siguiendo los más estrictos cánones newtonianos, considerados entonces como la única manera válida de hacer ciencia. Muchos de los prólogos y prefacios a los textos científicos de la época contienen verdaderas apologías del método y declaraciones de principios que buscan justificar la aplicación del término. Encontramos, por ejemplo, a Lagrange con la *Teoría de las funciones analíticas* y la *Mecánica analítica*; a Fourier con la *Teoría analítica del calor*, y a Cauchy y Bolzano, con la intención de realizar 'pruebas puramente analíticas'.

A lo largo de la construcción del cálculo, la idea de 'lo analítico' estuvo sujeta a diversas interpretaciones. Cada uno de los matemáticos que apelaron a ella le otorgaron una significación propia. Fue entonces una concepción que evolucionó paralelamente con el desarrollo de la disciplina.

La idea de lo analítico en el cálculo determinaba, y a la vez respondía a una forma particular de proceder 'rigurosamente' en esta disciplina. La definición (implícita) que cada matemático dio a la analiticidad resumía la forma de definir los objetos, la manera de operar con ellos, los criterios de rigor; constituía, en suma, todo un programa de investigación.

Cuando un proyecto de trabajo se lograba consolidar en sistematizaciones paradigmáticas del cálculo, y se mostraba su potencialidad, emergían sus verdaderas limitaciones, así como las del término analítico inserto en él. Se emprendía entonces un programa distinto y, en consecuencia, la idea de analiticidad se resignificaba.

En este artículo nos interesa mostrar algo de la historia de las sucesivas caracterizaciones del término analítico y de su evolución. Lo haremos circunscribiéndonos a tres autores: Lagrange, Cauchy y Bolzano, de cuyo trabajo nos interesa analizar la demostración del teorema del valor intermedio para funciones continuas, ya que en las pruebas que cada uno de ellos da a esta proposición plasma su programa de investigación y, con ello, su idea de 'lo analítico'.

El teorema del valor intermedio para funciones continuas representa un punto de convergencia entre el álgebra y el cálculo. En primer lugar porque es presupuesto obligado en las demostraciones del análisis, cuyo dominio está constituido, en la época que nos ocupa, por las funciones continuas. En segundo lugar, porque es, al mismo tiempo, caso particular y presupuesto del teorema fundamental del álgebra. Finalmente, porque este teorema, siendo básico para el álgebra, no puede probarse por métodos puramente algebraicos.

La demostración que cada uno de los matemáticos citados dio al teorema del valor intermedio no responde sólo a la exigencia formal de completar su trabajo; obedece a la necesidad de demostrar rigurosamente un resultado central para cada una de las disciplinas consideradas en forma independiente, así como también a la exigencia de establecer sus límites e intersecciones.

2. Lagrange y el programa de algebrización de la matemática

Es sabido que Lagrange tenía una visión algebraica de las matemáticas, que se ilustra en la *Teoría de las funciones analíticas* (1776), en las *Lecciones sobre el cálculo de funciones* (1806), en el *Tratado de la resolución de las ecuaciones numéricas de todos los grados* (1798), así como en sus contribuciones a la teoría general de las ecuaciones. Esta visión algebraica no es exclusiva de la matemática, sino que está también presente en sus trabajos físicos o de "matemática aplicada", como es la *Mecánica analítica* (1788). En consecuencia, el estudio del término analítico en Lagrange no puede circunscribirse a sus textos matemáticos; sólo mirando el conjunto de la obra lagrangiana puede apreciarse su programa de algebrización.

Como una extensión del ideal cartesiano, Lagrange emprende un proyecto de trabajo cuyo objetivo consiste en traducir al álgebra todas las otras ramas de la matemática (pura o aplicada). Su estrategia consiste, para cada una de las disciplinas específicas, en establecer una serie de principios y fórmulas generales derivados del análisis de "la cosa en sí misma", es decir, de la naturaleza y características de los fenómenos a estudiar.[2]

En la *Teoría de las funciones analíticas*, por ejemplo, los principios básicos se derivan de la posibilidad de desarrollar toda función en una serie de potencias, cuyos coeficientes son, a su vez, funciones de la

2 La propuesta de Lagrange es, de hecho, una extensión de los métodos empleados por Newton en los *Principia*, en donde el punto de partida son las tres leyes fundamentales cuyo origen no se encuentra en la matemática sino en la experiencia empírica.

variable. La 'función derivada' se define en términos de dichos coeficientes. Lagrange excluye del cálculo los conceptos de límite, infinitesimales, fluxiones, o cualquier otro término que pueda caer en el terreno de la *metafísica*.

En la *Mecánica analítica* los principios fundamentales son, para la estática, el principio de las velocidades virtuales y, para la dinámica, los principios de mínima acción y de las fuerzas vivas.

En sus trabajos sobre teoría de ecuaciones, Lagrange define a las ecuaciones como expresiones polinomiales cuyas propiedades fundamentales están dadas por las relaciones que existen entre las raíces a, b, c, ... y los coeficientes A, B, C, ... del polinomio. Estas relaciones se deducen de la posibilidad de descomponer todo polinomio como el producto de tantos factores lineales como unidades hay en el grado del polinomio.

Una vez establecidos los principios generales de una disciplina, Lagrange abandona los significados particulares para construir su teoría formal algebraica y dentro de ella, pone el énfasis en el símbolo y su operatividad, independizándolos de cualquier referencial. Sin embargo Lagrange regresa a estos resultados particulares, en sus trabajos sobre matemática aplicada y en los casos en los que la formalización es un obstáculo para probar ciertos resultados.

Lo anterior nos conduce a distinguir en el trabajo de Lagrange dos tipos de demostraciones; en primer lugar, aquellas que surgen del examen y la consideración de las cosas en sí mismas y sirven para establecer los principios básicos y las fórmulas generales que constituyen el basamento de cada teoría y, en segundo lugar, las pruebas puramente analíticas, construidas a partir de estos principios básicos y estas fórmulas generales. En el caso del teorema del valor intermedio, como veremos a continuación, no es posible dar una demostración 'puramente analítica'.

2.1 El teorema del valor intermedio

En el *Tratado sobre la resolución general de ecuaciones numéricas de todos los grados*, publicado en 1798 [Lagrange 1879 VIII], Lagrange afirma que el teorema del valor intermedio y su recíproco constituyen la base de toda la teoría de las ecuaciones, y lo enuncia y demuestra para el caso especial de una expresión polinomial cuyo valor cambia de signo al sustituir dos valores de la incógnita

> Teorema 1 - Si se tiene una ecuación cualquiera y si se conocen dos números tales que al ser sustituidos sucesivamente en el lugar de la incógni-

> to de esta ecuación, dan resultados de signos contrarios, la ecuación tendrá necesariamente al menos una raíz real cuyo valor estará entre estos dos números [Lagrange 1798, Introducción].

Lagrange hace dos demostraciones del teorema, una en el cuerpo del *Tratado* y otra en la *Nota I* del mismo texto. La primera demostración podría considerarse 'analítica' —desde el punto de vista de Lagrange— debido a que está basada en los principios generales de la teoría (toda ecuación polinomial puede factorizarse como producto de factores lineales y las raíces que intervienen en esta factorización son de la forma $a + ib$).

Sin embargo, en la *Nota I*, Lagrange señala que la proposición sobre la forma de las raíces imaginarias (es decir $a + ib$) depende a su vez del Teorema 1, por lo que su demostración analítica es circular.

Para llegar a una prueba rigurosa, Lagrange propone demostrar el teorema a través del examen de la "naturaleza misma de la ecuación, independientemente de alguna de sus propiedades" [Lagrange 1798, 133]:

Dado el polinomio, considera todos los términos positivos P y todos los términos negativos Q, de tal manera que el polinomio se expresa como $P - Q = 0$. Considera entonces dos cantidades p y q positivas con $p < q$ y tales que al sustituirlas en el polinomio se tiene, para p, $P > Q$ y para q, $P < Q$. Lagrange afirma entonces que

> Es evidente que esas cantidades P y Q aumentarán necesariamente en la medida en que x aumente y que, haciendo aumentar x en grados insensibles desde p hasta q, ellas aumentarán también en grados insensibles, pero de manera que P aumentará más que Q, pues de ser la más pequeña se vuelve la más grande. Entonces habrá necesariamente un término entre los dos valores p y q, en el cual P será igual a Q [Lagrange 1798, 134].

El razonamiento anterior depende de un argumento de continuidad en el que la ecuación se concibe como una sucesión de valores que varían en grados insensibles. Desde este punto de vista, la prueba no respeta el espíritu de una demostración analítica —pues no se sustenta en los principios generales de la ecuación sino en el estudio de 'la cosa en sí'—.

Lagrange completa su argumento mediante una analogía cinemática, que agrega una evidencia física a la evidencia geométrica del teorema

> así como dos móviles —que recorren la misma línea en el mismo sentido y que, partiendo de dos puntos diferentes, llegan a otros dos puntos, pero de manera que aquel que estaba más atrás al principio se encuentra

después más avanzado— se encuentra necesariamente en su camino [Lagrange 1798, 134]

De lo dicho en los párrafos anteriores podemos extraer algunas conclusiones. Aunque en la visión de Lagrange, el álgebra ocupa un lugar predominante sobre otras ramas de la matemática como un instrumento unificador, no es menos cierto que la teoría de ecuaciones, la teoría de las funciones analíticas y sus aplicaciones —como la teoría de las curvas y la mecánica—, constituyen partes bien diferenciadas entre ellas, su tratamiento analítico-algebraico depende de principios y fórmulas generales establecidas a partir de la consideración de las cosas en sí mismas y sus demostraciones deben realizarse respetando el espíritu de las cosas.

Desde esta perspectiva, y salvo en el caso de la resolución de ecuaciones numéricas, la idea de una función como una sucesión de valores o como una correspondencia entre los valores de las variables independiente y dependiente, difícilmente pueden sobrevivir en la teoría, pues esta idea sólo interviene al momento de establecer sus principios y fórmulas generales y no en el desarrollo. Ahora bien, es esta concepción de función —como sucesión de valores— la que permitirá más tarde a Bolzano y a Cauchy definir con precisión la noción de continuidad y demostrar el teorema del valor intermedio en otro nivel de rigor. Este es el momento de arranque del análisis clásico, previo a su aritmetización.

3. Cauchy: la sistematización del análisis

En sus trabajos matemáticos, Cauchy introduce nuevas definiciones para los conceptos del cálculo, organiza globalmente esta disciplina tomando el límite y la función como definiciones básicas y extiende considerablemente sus resultados (con los criterios de convergencia de series, la teoría general de la integral, los estudios de variable compleja, etc.). Con esto consigue, en buena medida, su objetivo de dar *a los métodos del análisis todo el rigor que se exige en la geometría* [Cauchy 1989, Introducción, i]

Cauchy expresa sus concepciones sobre el rigor y plantea los lineamientos metodológicos que orientan su obra al inicio del *Análisis Algebraico* (1821) y en un artículo publicado bajo el título ''Sobre el método analítico'',[3] los que tomaremos como base para el presente

3 Artículos publicados bajo el título ''Sui metodi analitici'' en la Biblioteca italiana entre 1830 y 1831, Milán.

trabajo. Guiado por el principio general de *no recurrir en el análisis a los razonamientos extraídos de la generalidad del álgebra (...)*, propone *demostrar rigurosamente las fórmulas y restringirlas entre límites justos (...)*, fijando con precisión *el sentido de las notaciones (...)* y considerando *a las diferentes fórmulas como relaciones entre cantidades reales (...)* [Cauchy 1989, i-ii, 150].

Este conjunto de ideas, en las que se sintetizan sus concepciones sobre el método analítico, son las directrices de su trabajo: determinan la forma de organizar y sistematizar las diferentes partes del cálculo, de definir sus conceptos y de manejar sus expresiones algebraicas. De este programa metodológico y la manera en la que lo aplica en la construcción del análisis, sobresalen, de entre otros, los siguientes dos aspectos.

3.1 Aspectos ontológicos de la teoría

En el trabajo de Cauchy, el número tiene un papel preeminente. El número es un concepto primitivo; no lo define explícitamente, pero lo describe, al inicio del *Análisis algebraico*, a través de la medición de las magnitudes: *el número* —afirma— *se ve nacer de la medida de las magnitudes* [Cauchy 1989, 2, 152]. Esta medida es una medida teórica que genera todos los números positivos, incluyendo a los irracionales asociados a longitudes de líneas rectas o curvas.[4] Incorpora así al análisis a todos los números que actualmente conocemos como reales positivos, objetos que, mediante una conjetura ontológica implícita, supone existentes.

Considera tácitamente que los números 'reales positivos' están estructurados en un dominio que posee las propiedades de continuidad y completez. Por su génesis, los números heredan dichas propiedades del dominio de las magnitudes, y al igual que en la geometría, Cauchy las toma como evidentes para el análisis. Tal es el caso de la proposición: 'toda sucesión creciente y acotada de números converge a un número', central en la prueba del teorema que nos ocupa y que introduce a su trabajo como verdad incuestionable, exenta de prueba. Partiendo de la existencia del número real positivo, establece que el número irracional *es el límite de sucesiones de racionales* [*Ibid*, 4], algoritmo de aproximación que le permite operar con los números irracionales con base en las definiciones del cálculo.

4. En el *Análisis algebraico* afirma: "una longitud de una línea recta o de una línea curva, puede ser representada, como toda magnitud, por un número o por una cantidad . . ." (p. 5).

Los números reales positivos son los únicos números que acepta como 'existentes' o 'reales', existencia que se deriva de su compromiso ontológico inicial, y no de las expresiones simbólicas o los procesos algebraicos, los que, para Cauchy, no conllevan la existencia de objetos, como puede observarse en el tratamiento que les da a los hoy llamados números negativos y complejos.

No hace mención de los números negativos como tales; se refiere a las *cantidades negativas*, argumentando que los símbolos + o -, que preceden a los números, sólo representan la operación que se realiza sobre ellos.

Tampoco aparecen los números imaginarios, habla de *expresiones imaginarias*, las que define *como expresiones simbólicas que no representan nada de real* [*Ibid*, 175]; para establecer su significado, considera a raíz de -1 *como si fuera una cantidad real, cuyo cuadrado fuera igual a* -1 [*Ibid*, 174] y a las ecuaciones imaginarias como *representación simbólica de dos ecuaciones entre cantidades reales* [*Ibid*, 176].

Así, las fórmulas algebraicas en general, y particularmente los símbolos que representan cantidades negativas o expresiones imaginarias, son fórmulas 'ontológicamente vacías' cuyo sustrato de significación se encuentra en el universo de los números 'reales', es decir, los aceptados como existentes en la teoría. Esto nos lleva a considerar otra cuestión importante de su construcción.

3.2 Aspectos 'semánticos' de la teoría

En el análisis de Cauchy, *las expresiones simbólicas son combinaciones de signos algebraicos que no significan nada en sí mismas* [*Ibid*, 173], estas expresiones carecen de significado en tanto no se interpreten, de inicio, o después de precisar el sentido de las notaciones [*cfr.* ''Sobre el método analítico'', 154], en términos de operaciones entre números 'reales'. Los números 'reales' son, así, los referentes que le dan sentido a las fórmulas, como sucede, por ejemplo, con las expresiones imaginarias y las cantidades negativas. Pero también, con base en estos números se determina la extensión particular de cada fórmula o cada teorema y se establece su validez (o verdad). Estos criterios 'semánticos' quedan plasmados en el extenso trabajo dirigido a delimitar los intervalos en los que las expresiones simbólicas son válidas (los dominios en los que las funciones son continuas o tienen 'soluciones de discontinuidad', los criterios para calcular intervalos de convergencia y divergencia de series); en la evaluación de las fórmulas (cálculo de integrales); en el análisis para hacer sustituciones de variables reales por variables imaginarias, etc.

Los métodos de Cauchy, especialmente el manejo de sus fórmulas y su significación mediante cantidades reales están presentes en las definiciones del concepto de límite y función, básicas en el Análisis algebraico.

La definición de cantidad infinitamente pequeña: *variable que tiene límite cero* [Cauchy 1989, 4], descansa en la de límite:

> aquel valor fijo al cual se aproximan indefinidamente los valores sucesivamente atribuidos a una variable, de tal manera que llegan a diferir de él tan poco como se desee [*Ibid*, 4],

definición que se apoya en la hipótesis implícita de que los valores (numéricos 'reales') que van tomando las variables que intervienen en ella, forman un dominio 'continuo', es decir, en el que los procesos de convergencia tienen siempre un límite.

La definición de límite le permite traducir los procesos indefinidos del cálculo en operaciones aritmético-algebraicas y finitas, eludiendo, de esta forma, las inconsistencias que surgen del empleo de los infinitésimos leibnizianos y también las limitantes y peticiones de principio del programa lagrangiano.

El concepto de límite es el punto de partida y la columna vertebral de su teoría: con base en este concepto, establece criterios para la convergencia de series y define las nociones de función continua, de derivada y de integral como conceptos propios del análisis. Esto hace que su trabajo contraste fuertemente con los que se hicieron previamente, en especial con el cálculo formalista de Lagrange, en el que dichos conceptos son caracterizados y manejados mediante criterios algebraicos.

En congruencia con su programa metodológico, el concepto de función se modifica: "En el Análisis algebraico, las cantidades expresadas por medio de las variables independientes son llamadas funciones de estas variables" [*Ibid*, 20-21]. La función no se caracteriza sólo por la fórmula algebraica o por las operaciones que en ella intervienen, como en la tradición formalista, sino también y fundamentalmente por los valores que toma. Para que una función de una sola variable esté completamente determinada, es necesario y suficiente que de cada valor particular atribuido a la variable se pueda deducir el valor correspondiente de la función [*Ibid*, 21]. La función es, entonces, una relación representada con base en símbolos algebraicos, los que denotan operaciones entre números, quedando explícita y correctamente definida, en la medida en que éstos queden determinados con precisión. La diferencia que establece entre el 'dominio' y las imágenes de la función, no sólo es un recurso formal, sino que es parte sustantiva de la operatividad del concepto: es la clave para poder analizar y correlacionar los procesos de variación de las variables dependientes e independientes, punto de partida imprescindible para sus definiciones básicas del cálculo. Esta definición de función hace comprensible lo meticuloso que es con la representación de funciones mediante series infinitas, tanto en lo que se refiere a la convergencia de la serie, como en lo que corresponde a los intervalos donde la serie converge a la función representada.[5]

El 'descenso' al dominio numérico para dar significado y validar operaciones y fórmulas algebraicas, y la caracterización de los conceptos de función continua, de derivada, de integral, de convergencia, de ecuación diferencial, etc., en el lenguaje de los límites y en términos de cantidades finitas (o sea, de 'cantidades reales'), son el sello distintivo del trabajo de Cauchy. Las demostraciones analíticas y rigurosas son, precisamente, las que se ajustan a estas definiciones y a estos lineamientos metodológicos, como veremos a continuación.

3.3 La prueba del teorema del valor intermedio

Con la aplicación de resultados de la teoría de ecuaciones al cálculo, y recíprocamente, de éste a la teoría de ecuaciones, Cauchy fusiona el álgebra y el análisis en el *Análisis algebraico*. En particular, el teorema del valor intermedio para funciones continuas constituye uno de los puntos de confluencia en la medida en que es una prueba de existencia de soluciones de ecuaciones, y aporta una estrategia para aproximar raíces (mediante el método de bipartición) es fundamental para el álgebra, en tanto que hace referencia a una propiedad de las funciones continuas, es central para el análisis.

Así como "Lagrange sustituye el cálculo infinitesimal por la teoría de las funciones derivadas" [*Ibid*, 162], Cauchy reemplaza la teoría lagrangiana por una teoría analítico-algebraica centrada en el estudio de las funciones continuas [*cfr*. Dugac 1981, 13-36]: la mayoría de las funciones que aparecen en los teoremas, son continuas; conceptos centrales, como el de integral y derivada, están definidos sobre la hipótesis de la continuidad de las funciones y una parte fundamental

5. Al respecto afirma: "no basta que sea convergente la serie que se obtiene a partir de operar una función para tener derecho a mirarla como representante de la función dada", "Sobre el método analítico", p. 159.

de su teoría tiene como propósito caracterizar analíticamente a las funciones continuas (en el Capítulo II del *Análisis algebraico*).

El concepto de función continua de Cauchy es inédito en el análisis, aunque este término haya sido utilizado por Euler para las funciones representadas mediante una sola expresión analítica. En la definición de función continua introducida por Cauchy, se describe analíticamente un aspecto de la variación de la función, en relación a la variación de la variable:[6]

> . la función $f(x)$ será, entre dos límites asignados a la variable x, función continua de esta variable, si para cada valor de x comprendido entre estos límites, el valor numérico de la diferencia $f(x + \alpha) - f(x)$ decrece indefinidamente con el de α [Cauchy 1989, 34].

Cauchy ofrece, en su *Análisis algebraico*, dos demostraciones distintas del teorema del valor intermedio para funciones continuas, una en el texto y la otra en las notas finales.

En el cuerpo del texto, el teorema aparece conjuntamente al lado de otras proposiciones sobre funciones continuas. En la nota III, se enmarca dentro del terreno de la resolución de ecuaciones y se presenta como caso particular —para valores reales— del teorema conocido como fundamental del álgebra, introducido en el Capítulo X.

En la prueba del texto (Capítulo II), Cauchy recurre a la evidencia geométrica que provee la gráfica de la función y se apoya en la idea de que las funciones continuas se representan geométricamente como líneas continuas —hecho que seguramente supone evidente, porque no cree necesario justificar—. Supone también evidente que siempre existe el punto de intersección de dos líneas no paralelas contenidas en un mismo plano.

El carácter gráfico de esta demostración está pautado por presupuestos geométricos que no corresponden a los principios metodológicos de Cauchy. En compensación, promete hacer en el apéndice del texto, *una prueba directa y puramente analítica del teorema.*

En la *Nota III*, enuncia el teorema del siguiente modo.

> 1er Teorema. Sea $f(x)$ una función real de la variable x que permanece continua en relación a esta variable entre los límites $x = x_0$, y $x = X$. Si las cantidades $f(x_0)$, $f(X)$ tienen signos contrarios, se podrá satisfacer la

6. De las interpretaciones que se han vuelto clásicas respecto a la definición de función continua de Cauchy están, por ejemplo: Guasti 1984, 24-25 y Grabiner 1981, 69-75.

> ecuación $f(x)=0$ para uno o varios valores reales de x comprendidos entre x_0 y X [*Ibid*, 460]

La demostración está basada en el método de biparticiones del dominio de la función. Ésta consiste en construir, en el dominio de la función, una sucesión creciente de x_i que inicia en x_0, y otra decreciente de X_i con principio en X, con la característica de que la función toma valores distintos en cada pareja x_i, X_i.

De la construcción, se desprende que la diferencia $x_i - X_i$ puede hacerse tan pequeña como se desee, de lo cual se concluye que la sucesión creciente x_i converge al mismo límite 'a' que la sucesión decreciente X_i.

Considera después las sucesiones $f(x_i)$ y $f(X_i)$, por construcción, cada pareja $f(x_i)$, $f(X_i)$ tendrá signos opuestos. Como $f(x)$ es continua, se deduce que cuando x_i y X_i tiendan a 'a', $f(x_i)$ y $f(X_i)$ tenderán a $f(a)$. Cauchy concluye que como $f(x_i)$ y $f(X_i)$, al aproximarse al límite "... permanecerán siempre con signos contrarios, es claro que la cantidad $f(a)$, necesariamente finita, no podrá diferir de cero" [*Ibid*, 462].

La demostración es *directa y puramente analítica*, porque está hecha conforme al 'método analítico', método que en el análisis de Cauchy queda plasmado en una suma de factores: la teoría se articula en torno a definiciones propias del análisis y los criterios para validar sus expresiones están relacionados con la operatividad algebraica, pero fundamentalmente hacen referencia a los números 'reales', los que dan significado a las fórmulas y permiten establecer su verdad. El lenguaje algebraico es solamente "un artificio para acrecentar los medios del análisis" ["Sobre el método analítico", 153], y no un principio organizador de la teoría, ni el sustrato de validación de sus fórmulas.

Así, la prueba es rigurosa y analítica, porque se basa en los principios metodológicos y en las definiciones específicas del análisis, particularmente en las definiciones de función y función continua. Éstas, como hemos visto, permiten estudiar y describir analíticamente los comportamientos de las variables dependiente e independiente y sus interrelaciones, punto modular en la prueba.

Cauchy hace un extenso trabajo en torno a la convergencia de series de funciones, marcando una diferencia entre los procesos de convergencia y la existencia del límite. Sin embargo, en el caso de los procesos de convergencia de las variables de funciones —que toman valores en un dominio numérico—, la existencia del límite la considera evidente, como se ve en el teorema recién analizado. Su metodología, y especialmente las definiciones de límite y función continua, plantearon la necesidad de reflexionar sobre un campo muy conocido operatoriamente, pero aún no tematizado: el continuo numérico. Una parte muy importante del desarrollo posterior del análisis se centró en esta reflexión.

4. Bolzano: el sistema de las ciencias

No es posible hablar de la filosofía y de la matemática de Bolzano de manera disociada; la primera está impregnada del modo de razonar y del rigor de la segunda y, recíprocamente, la segunda está enmarcada en un contexto teórico relacionado con el sistema de las ciencias y con su metodología y fundamentación.

Bolzano se interesa en el estudio de la matemática "en tanto que rama de la filosofía y medio de ejercitarse en el pensar correctamente" [Bolzano 1964, 131], para poder establecer su naturaleza y su esencia. La estrategia para lograr este objetivo consiste en reconstruir la matemática sobre una base puramente lógica. En primera instancia, Bolzano rechaza la manera como Kant asienta los axiomas de la aritmética y de la geometría sobre la base de la intuición pura. Para Bolzano, por debajo del nivel subjetivo de las intuiciones, está el estrato objetivo de la lógica. Bolzano sustituye el *a priori* kantiano por la caracterización intrínseca de los enunciados matemáticos, en tanto que proposiciones conceptuales puras. Las proposiciones primitivas (axiomas) se definen sobre la base de su poder deductivo y no sobre su evidencia, ya que la matemática es, en esencia, una 'ciencia deductiva'.

Desde esta perspectiva, el fundamento de una ciencia se debe buscar en la significación de sus enunciados, más que en su objeto de estudio. El problema de la unidad de la matemática es pues, esencialmente, el problema de la naturaleza de sus proposiciones y de su ordenamiento jerárquico dentro del cuerpo mismo de la teoría.

Estas tesis conducen a una reorganización de las ramas de las matemáticas y, con ello, a la reconsideración de un buen número de demostraciones que habían sido fundadas sobre bases 'erróneas'. La aritmética se convierte en la primera disciplina matemática —denominada 'teoría pura de los números'— sobre la que descansa el análisis, el cual, a su vez, se independiza de las interpretaciones geométricas y mecánicas y se vincula a la aritmética y al álgebra, constituyendo —estas tres disciplinas— la 'matemática pura'. En cuanto a la geometría, ésta se identifica como una rama de las 'matemáticas aplicadas' (aplicadas al espacio).

Dentro de esta concepción globalizadora, la demostración del teorema del valor intermedio, como resultado matemático cuya importancia dentro del análisis no deja de ser resaltada por Bolzano, no es un fin en sí mismo, sino un ejemplo paradigmático de lo que debe ser el razonamiento matemático. Este razonamiento tiene como propósito explicitar la "conexión objetiva" entre las proposiciones verdaderas, siguiendo el camino que va de las proposiciones fundamentales (*Grundsatze*) a las verdades-derivadas de éstas (*Folgewahrheit*) y estableciendo el lugar que ocupa cada resultado dentro de la teoría.

Congruente con su concepción de lo que debe ser el razonamiento matemático, en la "demostración puramente analítica del teorema que entre dos valores cualesquiera que dan resultados de signos opuestos se encuentra una raíz real de la ecuación" [Russ 1980, 156-185] (Praga 1817), Bolzano se propone establecer la demostración de un hecho que parece evidente desde un punto de vista geométrico —la gráfica de una función continua debe cruzar el eje cuando la función cambia de signo—, pero que sin embargo, dista mucho de serlo cuando se trata de deducirlo de principios aritméticos o algebraicos. Bajo este punto de vista, la geometría no es ya el modelo que, por la cohesión interna de sus deducciones y por el carácter evidente de sus axiomas, garantiza la coherencia de las otras ramas de las matemáticas. La geometría deja de ser el paradigma de las matemáticas para convertirse sólo en una rama aplicada o derivada de ellas.

4.1 La demostración puramente analítica del teorema del valor intermedio

Bolzano inicia su *Memoria* con una discusión sobre la insuficiencia de las pruebas dadas hasta ese momento del teorema del valor intermedio. La crítica apunta en dos direcciones: hacia imperfecciones metodológicas y hacia imperfecciones técnicas. Las primeras se refieren a la delimitación del dominio del análisis y de las otras disciplinas matemáticas: el teorema no puede ser demostrado mediante la evidencia geométrica —sobre cuya validez no hay ninguna duda— porque esta evidencia no constituye una proposición fundamental sino, por el contrario, se deriva del teorema que se trata de demostrar (en la medida en que la geometría es una disciplina aplicada, dependiente de las ramas puras).

Igual tratamiento merecen las demostraciones basadas en argumentos temporales o dinámicos (aquí Bolzano critica directamente a Lagrange en la argumentación que analizamos anteriormente), los cuales son considerados, en el mejor de los casos, como ejemplos o aplicaciones que no pueden tomar el lugar de las demostraciones, ya que

> ... la esencia de una deducción nunca está basada sólo en el uso metafórico de frases ... de tal manera que la deducción misma se torne vacía al quitarle estos elementos [Bolzano 1964, 161-162].

En suma, para Bolzano

> ... una prueba verdaderamente científica, o la razón objetiva de una verdad que es cierta igualmente para todas las cantidades, ... , no puede radicar en una verdad que es cierta sólo para [algunas] cantidades [*Ibid.*, 160].

La demostración de Bolzano establece, adicionalmente, los fundamentos del teorema que nos ocupa, esto significa que, además de asegurar su veracidad, lo hace formar parte orgánica del cuerpo de la teoría. De acuerdo a la metodología bolzaniana, la demostración matemática de un teorema no sólo tiene el objetivo de aportar evidencias a su favor, sino que debe insertar al teorema en una red de axiomas y proposiciones ordenados, de acuerdo a su complejidad creciente, dentro de una cadena de relaciones causales.

El teorema del valor intermedio ocupa, a partir de la demostración de Bolzano, un lugar claramente establecido dentro de esa cadena de relaciones que es la teoría del análisis: se sustenta en el concepto de 'función continua' y en las propiedades del dominio de la función que la determinan como tal. La demostración presenta un conjunto de verdades enlazadas mediante relaciones de causa y consecuencia o 'conexión objetiva', de tal manera que el teorema, que anteriormente no era más que un hecho aislado —aunque cierto— viene a ser, a partir de este momento, una 'verdad científica'. La demostración deja claro que las proposiciones del análisis dependen exclusivamente de definiciones y proposiciones del análisis o, en todo caso, de aquellas que jerárquicamente son anteriores en el encadenamiento de la matemática pura; de ahí que el método sea 'puramente analítico'.

Dentro de las imperfecciones técnicas que Bolzano critica en demostraciones dadas anteriormente al teorema del valor intermedio, está la concerniente a la definición de función continua. La definición de función continua que Bolzano introduce en esta *Memoria*, por una parte, evita cualquier recurso a la intuición geométrica, y por la otra, provee de un recurso operatorio que determina el estilo de demostración aceptable en el análisis:

> Una función $f(x)$ varía de acuerdo a una ley de continuidad para todos los valores de x que se encuentran dentro o fuera de ciertos límites, si cuando x es cualquiera de estos valores, la diferencia $f(x+w)-f(x)$ puede hacerse menor que cualquier cantidad, dado que w puede tomarse tan pequeño como se quiera [*Ibid.* p 162].

Para sustituir las demostraciones criticadas, Bolzano propone la siguiente secuencia de pruebas que descansa, de manera decisiva, en la definición anterior: primero presenta una discusión breve sobre series infinitas, de donde se deriva el criterio de convergencia necesario para demostrar los dos teoremas principales: el Teorema 1 —equivalente al después llamado Teorema de Bolzano-Weierstrass para cuya demostración usa el criterio de convergencia establecido—, y el Teorema 2, del valor intermedio, que descansa en la definición de continuidad y en el Teorema 1 previo. La idea de la demostración es la siguiente.

El teorema que se va a demostrar, dice Bolzano, reposa claramente sobre otro que dice que si dos funciones continuas de x, $f(x)$ y $g(x)$, tienen la propiedad de que, para $x=\alpha$, $f(\alpha)<g(\alpha)$ y para $x=\beta$, $f(\beta)>g(\beta)$ entonces existe un cierto valor intermedio entre α y β para el cual $f(x)=g(x)$.

Para demostrar este teorema, Bolzano hace intervenir directamente la definición de continuidad, ya que si $f(\alpha)<g(\alpha)$, en virtud de dicha definición se tiene que:

$$f(\alpha+i)<g(\alpha+i),$$

para una i suficientemente pequeña.

Pero la propiedad de *ser más pequeño que* es válida para la función de i representada por la expresión $f(\alpha+i)$, para todos los valores de i que son más pequeños que un cierto valor. Esta propiedad no es válida para todos los valores de i, en particular no es válida para $i=\beta-\alpha$, porque $f(\beta)>g(\beta)$. Ahora bien, para este caso, recurrimos al siguiente

> Teorema 1: Siempre que exista una propiedad *M* válida para todos los valores de una cantidad variable i menores que un cierto valor dado y que no se cumple para todos los valores en general, entonces existe un valor máximo u, para el cual se puede asegurar que toda $i<u$ posee la propiedad M [*Ibid.* 166].

Aceptando por el momento este teorema, fijemos nuestra atención en el valor $i=u$. No puede suceder, para este valor de i, que:

$$f(\alpha+u)<g(\alpha+u),$$

porque, aplicando de nuevo la definición de continuidad, se tendría que

$$f(\alpha + u + w) < g(\alpha + u + w),$$

con w suficientemente pequeña. Y no sería cierto, en consecuencia, que u es el mayor de los valores para los cuales se puede afirmar que todos los valores de i inferiores a u hacen

$$f(\alpha + i) < g(\alpha + i).$$

pero tampoco se puede tener que:

$$f(\alpha + u) > g(\alpha + u),$$

porque si esto fuera así, se debería cumplir, nuevamente por la continuidad de la función, que

$$f(\alpha + u - w) > g(\alpha + u - w)$$

tomando w suficientemente pequeño, y no sería verdad en consecuencia que

$$f(\alpha + i) < g(\alpha + i)$$

para todos los valores de $i < u$.

Se sigue entonces que:

$$f(\alpha + u) = g(\alpha + u)$$

con lo cual queda probado el teorema principal

Para la demostración del Teorema 1, Bolzano procede por biparticiones repetidas para producir una sucesión infinita de intervalos encajados, cuya intersección no vacía es el valor u que predice el teorema. Hay una sola cuestión delicada en esta demostración: asegurar que el valor máximo u realmente existe. Esto se deriva, según explica Bolzano, de un "concepto correcto de cantidad, ... es la idea de una cantidad real, actual" [*Ibid*, 166].

El criterio de convergencia —que posteriormente sería conocido con el nombre de Cauchy— que asegura la existencia del valor máximo *u*, se deduce de la consideración de una serie de potencias de x y de sus sumas parciales, que conforman una nueva sucesión:

> Si una sucesión de cantidades F_1x, F_2x, F_3x, ..., F_nx, ..., $F_{n+r}x$, ... tiene la propiedad de que la diferencia entre su n-ésimo término, F_nx, y cualquier otro término posterior, $F_{n+r}x$, no importa que tan lejos esté de F_nx, permanece más pequeño que cualquier cantidad dada, si *n* ha sido tomado suficientemente grande, entonces hay siempre una cierta cantidad constante X, y de hecho sólo una, a la cual los términos de la sucesión se aproximan y hacia la cual pueden acercarse tanto como se desee siempre que la sucesión se prolongue suficientemente [*Ibid.* 171].

La prueba que Bolzano ofrece para este criterio de convergencia, recurre a una argumentación inadmisible en la matemática actual:

> ciertamente no es imposible suponer la existencia de una cantidad X (invariable) a la cual los términos de la sucesión se aproximan arbitrariamente, porque con esta hipótesis se puede determinar la cantidad tan exactamente como se desee [*Ibid.* 171]

Russ propone [1992, 50] que el razonamiento de Bolzano en esta cita puede entenderse como sigue

1) Si existe la cantidad constante X, ésta puede ser determinada tan precisamente como se quiera,

2) luego, la suposición de la existencia de tal cantidad "no contiene imposibilidad",

3) de donde, esta cantidad real existe.

Para comprender la argumentación de Bolzano, es necesario entender primero la frase *no es imposible suponer*. Desde sus primeros trabajos, Bolzano afirma que es suficiente probar *la posibilidad de la existencia* de un concepto, para usarlo legítimamente en matemáticas. No corresponde a las matemáticas probar la existencia real de los objetos, ya que ese es asunto de la metafísica [*cfr.* 37]. El pensamiento que parece estar detrás de la afirmación 2) es que, si se puede derivar alguna contradicción de la posibilidad de X, la misma contradicción puede derivarse de la aproximación suficientemente cercana a X. En ese sentido, 1) puede ser visto como una cierta prueba de consistencia relativa de 2).

Para concluir, podemos enunciar las características de La *prueba puramente analítica* de Bolzano que, de alguna manera, resumen las características de su programa analítico para la matemática:

1) Hace explícitas las conexiones de causa-consecuencia entre las distintas proposiciones, estableciendo el lugar que ocupan, dentro de la teoría, cada una de ellas,

2) sólo hace uso de las proposiciones y definiciones del análisis —definición de función continua, propiedades del dominio de la función—, excluyendo cualquier referencia a proposiciones de otras disciplinas jerárquicamente posteriores, y,

3) sustituye criterios ontológicos por criterios de consistencia lógica para justificar la existencia de los objetos matemáticos

5. Conclusiones

Desde el punto de vista del desarrollo posterior de la matemática, las tres demostraciones que hemos estudiado tuvieron la virtud de señalar, cada una en su momento, las limitaciones de sus respectivos programas metodológicos.

Así, Lagrange lleva su programa algebraico a sus últimas consecuencias y es justamente en el teorema del valor intermedio en donde queda claramente identificada la insuficiencia de un enfoque puramente algebraico. Al eliminar del cálculo cualquier referencia a los procesos infinitos, Lagrange se está negando la posibilidad de demostrar, dentro de su teoría, las proposiciones concernientes a la continuidad.

Por su parte Cauchy, mediante su gran obra sintetizadora, muestra, a la manera de Euclides, los puntos delicados que deben ser revisados en un enfoque axiomático de la teoría, en particular las cuestiones relativas a la continuidad del dominio de una función. A diferencia de sus antecesores, Cauchy desplaza la atención hacia el dominio de las funciones, no obstante, queda pendiente todavía considerar este dominio como un objeto de investigación.

Finalmente Bolzano, como ningún otro, deja claro cuál es el problema a resolver si se quiere fundamentar el análisis: la construcción de los números reales.[7]

---

7 Posteriormente, entre 1830 y 1835, Bolzano desarrolló una teoría de los números reales en un intento claro de dar un fundamento aritmético al análisis. Sobre este tema véase Rootselaar: 168-180.

Referencias

BOLZANO, Bernardo. 1964. "Contribuciones a una exposición mejor fundada de las matemáticas" (1810) citado por Sebestik, J.: "Bernard Bolzano et son mémoire sur le théorème fondamental de l'Analyse" en *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, XVII.

CAUCHY, Agustin-Louis 1989. *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. 1er Partie. Analyse Algébrique.* Paris: Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, 1821. Éditions Jacques Gabay.

DUGAC, Pierre. 1981. "Des fonctions comme expressions analytiques aux fonctions représentables analytiquement". *Mathematical Perspectives*. Academic Press, Inc.: 13-36.

GIUSTI, E., 1984. "Gli 'errori' di Cauchy e i fondamenti dell'analisi". *Boll. Storia Scienze Matematiche* 4: 24-25.

GRABINER, Judith. 1981. *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. MIT Press.

LAGRANGE, J. L., 1879. *Oeuvres*. Ed. por Serret, J. R. y Darboux, G.). Paris: Gauthier-Villars. Tomo VIII.

_____ 1798. "Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés" [Contenido en Lagrange 1879].

RUSS, Steve. 1980. "A traslation of Bolzano's paper on the intermediate value theorem". *Historia Mathematica* 7: 156-185.

_____ 1992. "Bolzano's Analytic Programme". *The Mathematical Intelligencer* 14(3).

VAN ROOTSELAAR, B. "Bolzano's Theory of Real Numbers". *Archive for History of Exact Sciences* 2: 168-180.

Jesús Alarcón B. Investigador del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV, IPN (México)

Mirela Rigo Lemini, cursó la licenciatura en matemáticas en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Realizó la Mestría en Ciencias en la Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV, IPN. Es investigadora de la Sección de Metodología y Teoría de la Ciencia del CINVESTAV, IPN. Ha publicado trabajos en los libros de texto para el Programa Nacional de Formación de Profesores.

Guillermina Waldegg, nació en la ciudad de México. Estudió Física en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Maestría y Doctorado en Ciencias, con especialidad en Matemática Educativa en el CINVESTAV, IPN. Investigadora de la Sección de Metodología y Teoría de la Ciencia del CINVESTAV, IPN.