> *El tiempo llegará cuando estas cosas, que hasta ahora te han sido ocultadas, serán traídas a la luz.*
>
> 1ª Corintios 4:5

# Capítulo 1

## 1

¡Odio la escuela! Muchas veces he soñado con que se quema en un incendio o se cae en un temblor. Y así olvidarme de los maestros, de las tareas y dedicarme a hacer lo que me dé la gana. Detesto levantarme temprano cuando está oscuro y desayunar cuando todavía no tengo hambre. E igual odio eso de hacer deberes todas las tardes; pero lo peor de todo son los exámenes. A la hora indicada, me pongo muy nervioso y se me olvida todo lo que estudié. ¿De qué sirve aprenderme de memoria los nombres de las capitales de los países de Europa o los dificilísimos nombres de las partes de una célula? Todo eso se encuentra en las enciclopedias. Y si lo llego a necesitar, lo busco en algún libro o, más fácil, en internet. ¿Qué decir de las matemáticas? ¿Para qué demonios sirve el álgebra?

A pesar de que ya tengo catorce años, tengo que obedecer a mis padres en todo, esté o no de acuerdo con sus reglas. Mi papá no me escucha. Cuando me obligaba a jugar al fútbol nunca me atreví a decirle que no me gustaba. Afortunadamente, mi mamá se dio cuenta y habló con él.

Mi papá cree que gana las discusiones porque alza la voz y al final siempre me amenaza con no darme dinero. Por eso ahora tengo un poco de miedo, pues nos ha reunido en la sala para conversar con nosotros. Seguro que es otro de sus discursos sobre la obediencia, lo importante que es sacar buenas calificaciones en la escuela y los buenos modales. Pero, inesperadamente, dice que él y mi madre saldrán de viaje todo el fin semana. Irán a la capital por asuntos de trabajo. De inmediato pienso que estaré libre y por lo menos, esos días no tendré que obedecer ni sus horarios ni sus reglas. ¡Ah! También podré comer lo que me dé la gana. Sin darme cuenta, debí haber sonreído, porque mi papá se molesta al instante.

–¿De qué te ríes, Jorge? –pregunta él de improviso, lanzándome esa mirada que tanto coraje e impotencia me da–. ¿Acaso te gusta que nos alejemos por tres días completos? ¿No quieres a tus papás?

No sé qué responder, pues es obvio que me alegro de que mis padres me dejen solo. Bueno, con mis hermanas. También tengo algo de miedo, porque nunca lo han hecho antes. Para empezar, nuestra casa es muy vieja, con techos muy altos y suelos de madera. Se oyen ruidos extraños por las noches y, para colmo, las ventanas de las habitaciones dan directo a la calle y se oye todo lo que pasa afuera. Normalmente, no me da miedo, porque sé que mis padres también están ahí. Pero, ahora, yo seré el responsable de la casa, a pesar de que se quede con nosotros la señora que ayuda con la limpieza. Por otro lado, también deseo estar a solas y tener la libertad de tomar mis propias decisiones, aunque solo sea por tres días. Me gustaría poder decir todo esto y discutirlo con mi familia. Siento que mis hermanas son muy pequeñas para entenderme y que mis padres no me escucharían como yo quiero y necesito. Así, solo me queda bajar la mirada y decir un falso ‘lo siento’. Esto deja tranquilo a mi padre, quien continúa con su discurso, que se convierte en una ola de amenazas y recomendaciones.

## 2

Hoy es viernes y no hay clases. Pero suena el despertador a la misma hora de siempre. Me doy cuenta del error y vuelvo a cerrar los ojos. Me meto en el hueco caliente y oscuro que se forma entre las sábanas y me ilusiono con que el tiempo se para mientras trato de seguir soñando.

Por más que pienso en eso, no lo logro, y, aunque vuelvo a soñar, ya no es lo mismo. Al despertar por segunda vez, ni siquiera puedo recordar algo. Inmediatamente, me acuerdo del viaje de mis padres y sonrío al pensar que, por tres días, estoy doblemente libre, de la escuela y de mis papás. Sin embargo, no se me ocurre qué hacer.

El comportamiento de mis hermanas es en verdad increíble y me sorprende. Pensé que iban a estar insoportables, que iban a querer estar pegadas a mí y que tendría que estar cuidándolas todo el tiempo. Incluso tendría que soportar sus lloriqueos por la ausencia de mis papás. Las dos están sentadas en el comedor, bañadas y vestidas, desayunando lo que mi madre dejó preparado. Hasta tienen mi lugar listo para que yo esté con ellas. Esto me incomoda.

Por un lado, no me apetece desayunar con ellas; pero, por otro, me doy cuenta del gusto que les da.

Finalmente, después de tomar mi *ipod*, logro salir de la casa. Sin darme cuenta, llego a la fuente. Es muy grande y existen diferentes historias de por qué y para qué la hicieron. Un día me contó mi papá que es en honor a la persona que fundó este lugar, al parecer un tipo nacido en Italia. Pero, así como llegó, otro día también desapareció. Se fue sin decir algo. Tal vez era una persona a la que le gustaba estar solo, como a mí me pasa a veces. Por el momento, la fuente no tiene agua, así que me siento dentro de ella y cargo la espalda contra la base de la estatua. Con el fondo musical de *The Strokes,* en pocos minutos mis pensamientos dan vueltas. Mi mamá dice que me gusta soñar despierto o hacer castillos en el aire.

Después de un rato, que ahora me parece muy largo, salgo de la fuente y camino por las calles del pueblo, sin saber adónde. El lugar es muy pequeño y muchos de los habitantes nos conocemos. Durante los fines de semana viene mucha gente de afuera, porque el pueblo es una atracción turística. Hoy, por tratarse de un fin de semana largo, llegaron muchas personas que hablan distintos idiomas, ya que muchos de los visitantes son extranjeros. De pronto, me pongo muy nervioso, porque a lo lejos creo ver a Mariana. Llegó cuando las clases ya habían empezado y me gusta mucho. Me da la impresión de que aún no tiene amigos, pues casi siempre está sola y seria. Me armo de valor, decido acercarme a ella y camino a la heladería en donde se encuentra con sus padres. Tan concentrado estoy para llegar a ella que, por no fijarme bien, choco con una persona y caigo al suelo. Esto me hace malgastar tiempo y también perderla de vista, porque la persona insiste en pedir perdón y preguntarme si estoy bien. El accidente no me importa, lo único que quiero es comprar un helado con tal de estar cerca de ella. Sin embargo, me desilusiono. Cuando llego, por más que observo por todos lados, no la veo. Muy nervioso y desesperado, miro hacia afuera y en todas direcciones. Por dos segundos, me parece que entra a un edificio en la calle Juárez. Como estoy lejos, no estoy seguro de si se trata del museo o la casa de fotografía que está al lado. Corro. Llego ante las dos puertas que están casi pegadas y no sé a cuál entrar. Pasan unos segundos, y no me decido, y sigo ahí, parado y quieto, sin saber qué hacer. Me pongo aún más nervioso, pero quiero verla. El museo, decido de pronto.



## 3

A primera vista no la veo. Tengo que caminar hacia adentro, pues la luz es muy débil y no me ayuda. Se acerca un vigilante y me dice que no puedo pasar si no pago mi entrada. Paso a la caja y pido el precio de estudiante, que, afortunadamente, es muy barato. De nuevo se me acerca el encargado y me dice que no puedo correr, ni comer, ni gritar, y otras cosas. Yo ya no le hago caso, siento que me hace perder el tiempo. Camino un poco rápido, pero sí alcanzo a ver algunos de los cuadros. Sobre las paredes, a lo largo del pasillo, algunos se ven muy viejos y oscuros. La gran mayoría son imágenes de personas, aunque también hay unos fruteros. Me impresionan algunas de las caras de las pinturas, pues parecen estar tristes, solas y pobres.

Trato todavía de acelerar un poco el paso, pero sin llamar la atención del cuidador. Miro para todos lados y no veo ni a Mariana ni a sus papás. Tal vez me equivoqué y entraron a la casa de fotografía. Si fue así, es muy probable que ya se hayan ido. Al darme cuenta de mi error y de que ya pagué mi entrada, decido quedarme a ver algunos de los cuadros. Pienso que, de cualquier manera, me iba a dar mucho miedo acercarme y, peor aún, hablarle.

Al fondo del pasillo, frente a un cuadro aún más oscuro, se puede ver a un señor que observa, callado, muy atento, sin moverse. Lo he visto antes en el pueblo, pero no lo conozco, no sé su nombre. Me giro para verlo pero no le importa, parece que duerme con los ojos abiertos. Tiene como setenta años, su pelo y barba crecida y blanca hacen que parezca una de las pinturas de la entrada. Ya tiene arrugas alrededor de los ojos. Sus ropas muy usadas, pero limpias, descubren a una persona sencilla que no le da importancia a la manera de vestirse. Su forma de mirar lo hace parecer como si fuera muy tranquilo y supiera mucho. Su cara es la de un abuelito, que está dispuesto a escuchar, consentir y comprender. Se parece a uno de esos sabios que aparecen en los libros que venden en las papelerías.

A la noche, cuando regreso y recuerdo dónde estuve, pienso que mis papás jamás me creerían. Cuando ellos no estaban y con total libertad de hacer cualquier cosa, terminé en un museo viendo cuadros. Ellos no saben que me gusta Mariana, y, claro, no se los voy a decir. Se burlarían de mí, sobre todo mi papá, quien me diría que, a mi edad, es una pérdida de tiempo.

# 4

Despierto temprano, aunque no pude dormir muy bien porque, por momentos, creí oír ruidos extraños. Me baño, desayuno y, casi al mediodía, después de jugar un buen rato con el ordenador, tomo de nuevo mi *ipod* y salgo de la casa. Faltan unos cuantos segundos para las doce y otra vez estoy sentado contra la estatua dentro de la fuente. No sé cómo llegué hasta aquí. Parece ser que caminé como uno de esos monstruos que aparecen en las películas y que caminan sin ver. No se me ocurrió hacer planes con algún amigo porque, en realidad, prefiero estar solo. Seguro que la mayoría de ellos están jugando al fútbol, y a mí no me gusta. Cuando jugaba y no lo hacía bien, los del equipo se enojaban conmigo y me echaban la culpa si perdíamos el partido.

Para mi sorpresa, me doy cuenta de que el mismo anciano que había visto en el museo también llega a la fuente y se sienta en un banco frente a mí, a unos cuantos pasos. A pesar de estar solos, no siento miedo. El viejo no me asusta ni me inquieta. En el pueblo, como ya dije, nos conocemos casi todos y a él ya lo he visto antes. Eso sí, no sé a qué se dedica. El hombre, repito, parece muy tranquilo e inteligente. Cierra sus ojos, pero no da la impresión de que se quiera dormir, sino más bien pensar, sin que lo molesten. Me da envidia. Se ve tan tranquilo, como si no tuviera problemas ni preocupaciones. Por un momento, creo que el viejo me reconoce, pues hace un pequeño movimiento con la cabeza como saludo cordial. Yo devuelvo el gesto.

*El infinito. Ningún otro problema ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre.*

David Hilbert

# Capítulo 2

## 1

Mis papás regresaron hace varios días. Me trajeron un juego nuevo para el ordenador y a mis hermanas, vestidos para sus muñecas. Hoy es sábado y, como siempre, vamos al cine. Llegamos a la taquilla y no encontramos entradas para la película que está de moda y de la que todo el mundo habla, así que no nos queda otro remedio más que ver la que está en la otra sala. Es una película para niños muy vieja, europea, que parece ser que la gente no conoce. Como es de esperar, la sala está casi vacía. Hay muchos lugares sin ocupar y esto hace que nos podamos sentar como se nos antoje, es decir, mis papás juntos en una fila, mis hermanas en la de delante de ellos y yo alejado de todos.

Cuando comienza la película me doy cuenta de que una persona se sentó en el asiento junto al mío. No me giro, aunque pienso: ¿por qué si hay más butacas vacías tuvo que escoger este asiento? Tengo ganas de cambiarme de lugar; pero, por algún motivo, no lo hago. Pienso que no debo darle el gusto de que me quite. Así que, por orgullo, me quedo. No disfruto la película porque la historia es para niños pequeños. Además, es muy lenta y termina por aburrir a todos con excepción de mis hermanas. A los pocos minutos, pienso en otras cosas, pero no en lo que sucede sobre la pantalla. Oigo bostezar a mi vecino y creo que él también ya se aburrió y perdió interés. Giro la cabeza con cuidado y me doy cuenta de que se trata del mismo viejo que vi en el museo y en la fuente. Él advierte que ya lo reconocí y dice:

–Me llamo Octavio.

Como para distraerme, pregunta:

–¿Cuántas personas crees que hay en esta sala?

De inmediato, me pongo a contar con la mirada; pero, debido a la oscuridad, es casi imposible. Para hacerlo con cuidado, me tendría que levantar de mi lugar, caminar y contar a cada una de las personas. Aun así, lo intento y pienso que debe de haber alrededor de veinticinco.

–Tal vez tengas razón. Veo muchos lugares que no están ocupados. Me pregunto: ¿cuántas personas caben?

Ahora se me ocurre contar las butacas una por una, así que empiezo de nuevo. No avanzo mucho cuando el viejo me interrumpe, y me dice que hay una manera más fácil de saberlo. Basta con contar las filas y multiplicar este número por el número de butacas en una fila, y listo. Él tiene razón, es mucho más fácil así.

–Creo que caben como ciento veinte personas –digo después de unos segundos.

–¿Así que hay más butacas que personas en este momento?

–Claro, pero eso ya lo sabíamos.

–¿Cómo lo notamos? –pregunta el viejo.

–Pues es muy fácil, como hay butacas vacías, hay menos personas. Si no hubiera alguna butaca vacía, entonces el número de personas y butacas sería el mismo.

–Por supuesto –responde el viejo–. Dices que si a cada butaca le corresponde una persona y a cada persona una butaca, entonces el número es el mismo. Si no pasara esto, habría más elementos de una cosa o de la otra.

–Pues yo no dije eso, pero estoy de acuerdo.

–Y para averiguar si hay más butacas que personas, ¿se tienen que contar con detalle las partes de ambos grupos?

–No, tampoco, basta con ver si sobran o no lugares vacíos. Si sobran, eso quiere decir que hay más butacas; si no, entonces tenemos dos posibilidades. Primero, que todas las butacas estén ocupadas y que no sobre público. En este caso, diríamos que los dos grupos tienen el mismo número de integrantes. Segundo, que hubiera gente de pie, y entonces diríamos que hay más asistentes que asientos.

–Me parece razonable lo que dices. Lo único que haces es establecer una *relación uno a uno*, es decir, tratas de relacionar a cada persona con una butaca y a cada butaca con una persona. Por cierto, la palabra grupo es sinónimo de colección, agrupación, montón y conjunto, entre otros vocablos. Y a los integrantes o partes de los grupos se les puede llamar componentes, ingredientes o elementos. De ahora en adelante, usaremos las palabras *conjunto* y *elemento*, respectivamente, para no confundirnos.

Pienso, ¿de ahora en adelante? Pues, qué, ¿esto va para largo? En casi cualquier otra ocasión me hubiera disgustado seguir con la conversación, pero la película está tan aburrida y lenta que prefiero hacer casi cualquier cosa, hasta conversar con este viejo. Su aclaración me parece muy formal, pero va de acuerdo con su personalidad, por lo que no me sorprende escucharla. No presto mucha atención a su explicación y retomo la discusión.



–Pero esta relación ya está dada –digo–. Me imagino que los que construyeron el cine pensaron en eso. Es decir, si hay ciento veinte butacas solo caben, como máximo, ciento veinte personas cómodamente sentadas. No creo que vendan más de ese número de entradas. Tan es así que en la otra sala ya no cabe la gente, y la mandan para acá aunque esta no sea la película que querían ver. En la otra sala, sospecho que ninguna butaca está vacía, cada persona debe tener un lugar.

–Pensemos que los administradores del cine son honestos y no venden más entradas –responde el viejo–. También supongamos que en la otra sala no hay alguien de pie, ni sobran lugares vacíos. Nos encontramos con una relación uno a uno, es decir que, como tú dijiste, cada persona tiene asignado un lugar, y cada lugar tiene asignada una persona. En ese caso se concluye que hay exactamente el mismo número de personas que de butacas, sin necesidad de haberlos contado. Esto se puede aplicar para cualesquiera dos grupos de cosas, no importa de lo que se trate. Si es posible asignar un objeto del primer grupo con solo un objeto del segundo, y uno del segundo con solo un objeto diferente del primero, entonces forzosamente debe de haber la misma cantidad en cada grupo. Esto lo has vivido en la vida diaria sin darte cuenta, es más, las personas lo hacemos sin ser conscientes de ello. Cuando estás en el aula, tu maestro revisa, sin necesidad de pasar lista, si falta algún alumno. Lo único que tiene que hacer es una inspección visual, y verificar esta relación uno a uno. Es decir, relaciona a cada alumno con un pupitre. Si hay lugares vacíos, se da cuenta de que alguien faltó ese día a su clase. Y lo mismo hace el director de la escuela. No necesita contar a todos los alumnos del colegio, le basta con asomarse a cada aula. Si él sabe que cada pupitre está asignado a un alumno y observa que algunos están vacíos, suma los que están sin ocupar en cada aula para saber cuántos alumnos, en toda la escuela, faltaron ese día a clase. Esto es algo muy práctico y natural en las personas, lo vemos en muchos lugares y con usos muy diversos. *En conclusión, para saber cuántas cosas tenemos, no es necesario contarlas con precisión, sino ponerlas en una relación o correspondencia uno a uno con otro conjunto*. En ocasiones, sabemos cuántos elementos tiene el segundo conjunto, y así también sabemos cuántos tiene el primero, o viceversa. En otras ocasiones no conocemos el número de elementos de alguno de los dos conjuntos, pero sí podemos concluir si uno es mayor, igual o menor al otro.

–Ahora que lo dices yo también lo he usado –le digo al recordar una anécdota–. En mi cuarto tengo un lugar en el que caben diez discos compactos. Un día vi un espacio vacío y, de inmediato, me di cuenta de que faltaba uno. No tuve que contarlos. Así que investigué y me di cuenta de que mis hermanas lo habían cogido.

–Así es. Esta relación nos facilita muchas actividades y nos ayuda a tener un mejor control de las cosas. Si observas a las personas, te darás cuenta de lo que digo. Por ejemplo, en las tiendas tienen lugares asignados para cada producto y no necesitan contarlos con precisión. Si ven espacios vacíos, los llenan para suplirlos. Así que, en muchos casos, no te interesa la cantidad de elementos con precisión o saber el número exacto.



Pienso en esto y suena bien. Mis papás también lo hacen para, por ejemplo, saber si mis hermanas pierden los lápices de colores que les compraron y que fueron muy caros. Les dieron un estuche con veinticuatro espacios, y en cada uno de esos espacios debe ir un solo lápiz. Cada fin de semana les revisan los útiles. Es suficiente con ver el estuche para comprobar si han perdido algo: no cuentan uno por uno, simplemente ven si todos los lugares tienen su respectivo lápiz para colorear. Por supuesto que conmigo no lo hacen, ¡jamás lo aceptaría! Y, ahora que lo pienso, mi amigo tiene razón, en la vida cotidiana se usa esto más de lo que me había dado cuenta. Los cepillos de dientes, en el baño de mi casa, tienen asignado un único lugar. Si hay espacios vacíos, se puede saber con precisión qué cepillo falta. En los autobuses para viajar se hace lo mismo con los billetes que venden y los lugares disponibles. Si hay treinta asientos, únicamente se venden treinta billetes, es decir, hacen esta relación uno a uno. A cada billete se le asigna un lugar y a cada lugar un solo billete. Es algo tan común y no me había dado cuenta. Las personas no cuentan todo, en lugar de eso hacen esta relación tan sencilla y útil y se facilitan la vida. Estos ejemplos que pensé son fáciles. ¿Habrá conjuntos tan grandes que sea imposible saber cuántos elementos tienen, pero con los que se pueda usar esta útil correspondencia uno a uno? Ahora uso las palabras del viejo y me pregunto: ¿habrá conjuntos que tengan tantos elementos que sean difíciles de contar bien, con exactitud?

Tengo más preguntas, pero no las hago por dos motivos. Me gustaría pensarlas para tratar de resolverlas por mi cuenta. Y ya me cansé de hacerlo en voz baja para no molestar al resto de los espectadores. Esperaré a que estemos en otro lugar, tal vez lo vuelva a ver en la fuente. Ahora trato de poner atención de nuevo a la película, pero ya no puedo. Hay nuevos personajes que no sé de dónde salieron y no entiendo lo que hablan, porque no oí muchas cosas.

Octavio, como me dice que se llama, también trata de concentrarse de nuevo en la película. Ahora somos, otra vez, como dos extraños en un cine. La película ya no me interesa, así que pienso en otras cosas, como qué estrategia voy a usar la próxima vez que juegue *Need for Speed*. También me dedico a disfrutar las palomitas que me quedan. Saboreo una por una, para que me duren más.

## 2

Acaba la película, Octavio se para y, sin decirme nada, me da una pequeña bolsa. Sin necesidad de abrirla, sé que contiene canicas. Busco a mis papás y pierdo de vista al viejo. Me junto con mi familia, que hace planes para más tarde. Yo no opino y solo escucho lo que ellos dicen. Mis hermanas quieren regresar a casa para ver la tele; y mis padres quieren que cenemos todos juntos, pero no quieren gastar en un restaurante. Así que, casi sin discusión, el plan es volver a casa. Me armo de valor y les pido que me dejen llegar más tarde, que quisiera ver si mis amigos se quedaron en el kiosco de la plaza. Ellos discuten lo que digo. Mi madre sí quiere dejarme, pero le da miedo que camine solo por las calles en la oscuridad. Mi padre dice que eso me haría bien, para hacerme hombrecito. Por fin, deciden darme permiso, con muchas condiciones que acepto con tal de que me dejen ir. Son las siete de la noche y me dijeron que tengo que estar en casa a las nueve y media. Si llego aunque sea un minuto tarde, nunca me vuelven a dar permiso.

Lo de mis compañeros fue mentira. En realidad sé dónde están, pero no quiero ir a buscarlos. La mayoría debe de estar jugando con las maquinitas. Recuerdo al viejo y pienso que es muy agradable. Como dije antes, parece abuelito, como aquellos que son pacientes con sus nietos. Yo ya no tengo abuelos hombres, los dos ya murieron. A mí sí me gustaría tener al menos uno, pues algunos de mis amigos dicen cosas muy bonitas de ellos. En general, casi todos están de acuerdo en que sus abuelos los consienten mucho e incluso los protegen de sus papás cuando estos los quieren reprender o regañar.

Ahora camino por las calles y pienso en el lugar donde pudiera encontrar a Octavio. Sin saber por qué, voy hacia la catedral. En el cielo ya se ven muchas estrellas y de inmediato me acuerdo de cuando era chico y trataba de contarlas. De pronto, decido hacer lo mismo y me pongo a caminar con la mirada hacia arriba. Trato de hacerlo con cuidado para no caerme o chocar con alguien. De muy niño, este era uno de mis pasatiempos favoritos. Salía con mi mamá, agarrado de su mano, alzaba los ojos y trataba de contar las estrellas. Ella se desesperaba, porque íbamos muy despacio y porque casi tenía que arrastrarme y cargarme. Al principio, no sabía muchos números, y mi mamá me ayudaba. Después ya no me alcanzaba el tiempo porque siempre había más y más estrellas que contar. Nunca acabé de hacerlo, pero sí terminaba con dolores de cuello. Así que vuelvo a mi pasatiempo y me dedico a contar estrellas.



## 3

–¿Cuántas son? –pregunta una voz que reconozco.

Es Octavio, y no me sorprende que haga una pregunta así después de nuestra charla en el cine.

–No lo sé, no puedo contarlas todas. Siempre me confundo.

Mientras le explico esto, caminamos al centro del pueblo. Nos sentamos en un banco del parque, y nos ponemos a hablar. Él se interesa por mi juego de contar las estrellas. Me pregunta y le comento lo que hacía de chico.

–Yo hacía lo mismo –explica Octavio–. Recuerdo que, desde que me enseñaron los números en la escuela, quería contar todo lo que veía.

–A mí me pasó lo mismo. Trataba de contar todo lo que encontraba a mi paso: personas, animales, árboles, plantas, etcétera. Cuando salíamos de paseo, me dedicaba a contar los coches que nos pasaban. Pero lo más interesante siempre fueron las estrellas, porque hay muchísimas.

–¿Traes las canicas que te di en el cine? –pregunta mi amigo para cambiar de tema.

–Por supuesto, vine para acá directamente del cine. No se las di a mis papás, porque entonces me habrían preguntado que de dónde las había sacado, y quién sabe si les hubiera gustado la explicación. A mí me fascinan las canicas. Las guardo en latas separadas por tipos y tamaños. Ahora ya no las llevo a la escuela, pero cuando era más chico las cambiaba con mis amigos. Mi papá me dijo una vez que, cuando él era niño, lo divertido no era cambiarlas, sino jugar al hoyo o al círculo con sus amigos, durante el recreo y en el patio de tierra. El juego, si me acuerdo bien, era de la siguiente manera. Primero se dibujada un círculo o rueda sobre el piso de tierra con una vara, el canto de una moneda o una pequeña piedra. Segundo, los jugadores se ponían de acuerdo en el número y tipo de canicas que se ponían en el centro. Se podía jugar de manera individual o por parejas. Lo del tipo era importante, porque no era lo mismo poner agüitas que tréboles o ágatas. El tamaño también era importante, porque era más difícil sacar a los canicones. Tercero, se sorteaba quién empezaba primero. El propósito del juego era sacar el mayor número posible de canicas del círculo. El primer tiro era desde el borde del círculo. Uno tenía que pegarle a una canica y sacarla del círculo. Para poder seguir tirando, la canica de uno debía de permanecer dentro del círculo después de haber golpeado a la que salía. Para tirar, los niños tenían una preferida que se llamaba 'tiro', y era la que más rabia les daba perder. Los que sabían jugar tiraban con fuerza y de 'huesito'. Los que apenas estaban aprendiendo tiraban de 'uñita'. También me contó las reglas del primer juego, pero ya se me olvidaron, y también dijo que podía haber peleas porque se echaban la culpa, unos a otros, de querer hacer trampas. Él presumía de que era muy bueno y que tenía muchísimas canicas. ¿Te imaginas? Sería estupendo tener una colección inmensa, con todas las canicas del mundo.

–¡Qué bárbaro! Pero ¿tienes una idea de cuántas canicas puede haber en todo el mundo?

–No, la verdad es que jamás lo he pensado. Imagino que son muchas, tantas que tal vez no se puedan contar.

–Puede ser que tengas razón; las tuyas, ¿las puedes contar?

–Claro que sí, son pocas y es muy sencillo.

–Y, ahora, imagina a los niños de tu escuela que tengan alguna colección parecida a la tuya. ¿Crees que cada uno de ellos pueda contarlas?

–Por supuesto que sí. Algunos van a tardar más tiempo que otros, pero todos lo van a poder hacer. Cuando iba a primaria, había un niño que tenía como quince bolsas llenas. Un día otro amigo le preguntó que cuántas tenía. Él se quedó serio y dijo que no sabía. Después nos confesó que se pasó todo un fin de semana contándolas. Ya no me acuerdo cuántas eran, creo que como dos mil.



–¡Ese niño tenía muchas canicas! ¿Ahora te imaginas cuántas tendréis todos tus compañeros de clase?

–Pues muchas más. Si Sebastián tiene, más o menos, unas dos mil, entre todos debemos tener unas cinco mil.

–Ahora yo me pregunto por el número de canicas de todos los niños de tu escuela.

–No sé, pues quién sabe. No me imagino cuántas sean en total, aunque sí se podrían contar con mucha paciencia y ganas de hacerlo, ¿no crees?

–Claro que se puede –responde mi amigo–. Tengo entendido que en este pueblo hay cinco escuelas. ¿Podríamos saber el número de canicas que tienen todos los niños de este pueblo que asisten a primaria o secundaria?

De inmediato me imagino que sí es posible. Si Sebastián contó las suyas, se pueden contar las de todo el aula, toda la escuela y todas las escuelas del pueblo.

–Yo creo que sí, no ha de ser una tarea fácil pero sí se puede –respondo–. No me imagino el número que resultará. Debe de ser muy grande.

–Yo creo que no es tan grande como te imaginas, tal vez unos cuantos miles y ya. Hace algunos años, en este país había unas doscientas escuelas de primaria y secundaria. Imagina que estamos interesados en saber cuántas canicas tienen todos los estudiantes de todas las escuelas del país. ¿Lo podríamos hacer?

–No sé si se podría. Tal vez es imposible ir a las doscientas escuelas y contar las canicas de cada niño.

–Eso sí que es difícil, pero no necesitamos ir a todas ellas. Dices que sí podemos saber el número de canicas que tienen los niños de tu escuela. Y sabemos, más o menos, el número de escuelas en el país. Pues con estos dos datos nos basta, solo multiplicamos y obtenemos una *aproximación* del número total.

–Tienes razón –digo sorprendido por la fácil solución de Octavio–. Pero ¿basta con una aproximación? ¿No es necesario el número exacto?

–Para muchas cosas no es necesario el número exacto. Imagina que tuviéramos que ir a todas esas escuelas, tal vez jamás terminaríamos y además los gastos serían grandes. Con la aproximación resolvemos el problema de manera fácil y rápida.

–Tienes razón. Aunque no me imagino el resultado de la multiplicación que dices. Debe de ser enorme.

–No tan grande comparado con el número de canicas que tienen los niños en las escuelas de todos los países del mundo.

–Ese sí que debe de ser un número mucho más grande.

–Claro que lo es. Tan solo imagina que en el mundo hay alrededor de ciento noventa y dos países. Debemos multiplicar el número de canicas que hay en tu país por el número de países de todo el mundo y así obtener una aproximación. En este caso, está muy lejos de la respuesta correcta, pues en muchos países hay más de doscientas escuelas y algunos de sus alumnos tienen muchas más canicas que Sebastián.

–¡Qué número tan grande debe resultar!

–No creo que sea tan grande, es decir, hay unos números mucho mayores que ese. Solo que no estás acostumbrado a escucharlos y a pensar en ellos, pero por supuesto que existen. Solo hablamos de las canicas que pueden tener los alumnos de las escuelas de todo el mundo, pero es cierto que no consideramos absolutamente todas las que hay en el planeta. Hay personas que ya no van a estas escuelas pero tienen canicas guardadas por colección. El cálculo que hicimos debe ser muy grande, aunque siempre se podrán encontrar números mayores.

## 4

–Pero esto no es nada –continúa Octavio–. En la vida práctica usamos cantidades inmensas. Aun así es posible encontrar, en la naturaleza, conjuntos de cosas más y más grandes.

–¿Cómo de grandes?

–Enormes. Por ejemplo, ¿te has puesto a pensar en el número de hormigas que hay en todo el mundo?

–No, jamás se me ha ocurrido pensar en eso.

–¿Cómo te imaginas que podríamos contarlas?

En eso, oigo las campanas de la catedral y me doy cuenta de que, desgraciadamente, es tiempo de regresar a mi casa. Marco el teléfono móvil para decirles a mis papás que ya voy para allá. Me despido de mi amigo con un ligero movimiento de cabeza. En el camino pienso cómo se podrían contar las hormigas, pero no se me ocurre cómo hacerlo.

Cuando estoy ya en la cama, a punto de dormirme, pienso en dos cosas que dijo el viejo. *La primera es que* *podemos saber si un conjunto es más grande, igual o menor que otro, sin tener que contar sus elementos. Lo único que tenemos que hacer es buscar si hay una correspondencia uno a uno entre los dos conjuntos. Ver si cada elemento de cada conjunto está relacionado con uno y solamente un elemento del otro y viceversa, cada elemento del segundo conjunto está relacionado con uno y solamente uno del primero. Y segundo que no siempre es necesario contar con precisión los elementos de un conjunto, sino que, en ocasiones, es suficiente con hacer un cálculo aproximado.*

## 5

Hoy tengo clase de biología y como siempre pienso que me voy a aburrir. Sin embargo, esta vez el tema me interesa inmediatamente, pues el maestro dice que va a hablar sobre las hormigas. Empieza por decir que son insectos sociales, es decir, que viven en colonias, que son ordenados y que tienen repartidas sus actividades. Señala que en el mundo hay, aproximadamente, cuatro mil quinientas especies diferentes de hormigas. Ahora pongo atención y escucho cosas interesantísimas de estos pequeños animales: que es fácil confundirlos con las termitas; que nacen con alas pero solo los machos las conservan; que los machos mueren después del apareamiento; que sus nidos pueden estar excavados bajo una piedra o en troncos de árboles en descomposición; que una colonia de estos insectos puede estar compuesta por unos cuantos individuos, o por millones; que una colonia puede ocupar la cáscara de una nuez o varios metros cuadrados y muchas cosas más. Ya para terminar, dice que, incluso, existen unas hormigas que esclavizan a otras, y que las otras, más pequeñas, las arrastran y les dan de comer.

Por más que quiero poner atención en la clase, ya no lo puedo hacer, los primeros datos me dejan muy sorprendido. Estos insectos son tan numerosos que debe de haber millones y millones en todo el mundo. No me puedo imaginar la cantidad, pero debe de ser muy grande.

–¿Como cuántas colonias de hormigas hay en este país? –interrumpo al maestro con gran sorpresa de todo el grupo, pues siempre soy un alumno callado que no se atreve a hacer preguntas. Mi cara se pone muy roja, pues todos me miran, incluyendo a Mariana.

–Pues realmente son muchas –responde el profesor–, imagínate que solo en el patio de una casa puede haber unas cinco o seis colonias de hormigas. Pero en espacios abiertos y con condiciones apropiadas, como un bosque, la selva o una sabana, se pueden llegar a encontrar cientos de colonias de diferentes especies.

Esto sí que es fantástico. Al principio, el profesor dijo que hay aproximadamente cuatro mil quinientas especies de hormigas. Luego dijo que en una colonia puede llegar a haber varios cientos de miles, o incluso millones de individuos. Para hacer el cálculo más fácil, pienso que en cada colonia hay trescientos mil ejemplares y voy a pensar que en cada país de todo el mundo solo hay una colonia de cada especie. La multiplicación nos daría el número de hormigas en el mundo. ¡Que impresión! Este número sí que es inmenso, son trece mil quinientos millones de hormigas, y esto si solo hubiera una colonia única de cada especie. Pero el maestro dijo que en un solo bosque hay cientos de colonias. Así que mi aproximación es muy mala, pues debe de haber muchísimas más hormigas.

–Profesor, ¿como cuántos hormigueros hay en todo el mundo?

–No lo sé, Jorge –el maestro me contesta con paciencia–. Te digo que puede haber muchos cientos de miles tan solo en un país. En el mundo entero este número debe ser exageradamente grande.

Algunos de mis amigos me observan como diciendo no seas necio y ya deja de preguntar tonterías. Bueno, creo que hasta Mariana me vio, lo cual creo que es bueno porque ya notó que existo y hasta pudo aprenderse mi nombre. Ahora me doy cuenta de que es cierto lo que dijo Octavio: que se podían encontrar conjuntos enormes de cosas en la naturaleza. Por lo menos, el número de hormigas en todo el mundo debe de ser de millones de millones de millones. Ahora sí que ya no me puedo imaginar la cantidad. Pero también pienso que Octavio me diría que todavía se pueden encontrar conjuntos de cosas, dentro de la naturaleza, que tengan más elementos. Me imagino que debo pensar en animales más pequeños y que vivan en grandes cantidades.

Con esto de las hormigas, también recuerdo un cuadro que vi en la tienda del museo. Se trataba de un dibujo muy raro, donde aparece una cinta ancha torcida y unas hormigas que caminan sobre ella. A pesar de que la banda no es muy larga, cada hormiga puede caminar sin detenerse sobre ella, pues está doblada de tal manera que parece que jamás termina. Como yo sabía que Octavio probablemente también la habría visto en el museo, le pregunté qué quería decir. Me dijo que su nombre es la cinta de Moebius, y que fue pintada para representar una superficie de longitud finita, donde las hormigas podían caminar de manera ilimitada. No entendí la explicación, pero el dibujo me encantó.

## 6

Estoy en mi cuarto y saco unas hojas de papel que me dio Octavio la última vez que lo vi. Las pongo sobre la mesa y leo lo siguiente:

Te he escrito un cuento para que te entretengas.

### *El rey que se fue a la quiebra por no saber contar*

Hace muchos años, en una pequeña población, vivía un rey bastante flojo y adicto a todo tipo de juegos. Al contrario de él, sus súbditos eran muy trabajadores, así que el reino era próspero y con muchos recursos. El rey coleccionaba todo tipo de entretenimientos de mesa, incluso mandaba expediciones a otros países para que le trajeran los pasatiempos nuevos que encontraran. Un día ya no le llevaron más. Ya todo lo conocía y se le hacía aburrido. Fastidiado el monarca por esta situación, convocó una singular competición: a aquel que inventara un juego divertido le daría lo que él quisiera, sin importar qué fuera. El día del concurso, se presentó una persona con un pasatiempo llamado ‘ajedrez’. El inventor le explicó al rey las reglas para jugar y a este le encantó. Se cuenta que tanto le gustó a este último que se entretuvo jugando con el ganador de la convocatoria toda una semana entera. Llegó la hora de entregar el premio y el rey escuchó una singular petición.

Solo quiero algo muy sencillo –dijo el inventor del ajedrez–. Mi diseño cuenta con un tablero con sesenta y cuatro casillas. Pido que dentro de la primera de ellas, se coloque un grano de arroz; dentro de la segunda, se pongan dos; en la tercera, cuatro; en la cuarta, ocho, y así sucesivamente. Es decir, que se coloque un grano en la primera casilla y que en las demás se ponga el doble de la anterior. Tan solo eso quiero. Arroz para poder vivir sin hambre por el resto de mis días.

El rey, muy sorprendido de escuchar lo anterior, ofreció oro, dinero, joyas, un puesto real o algo con mayor valor que los granos de arroz. El inventor no cambió de parecer y se empeñó en que le dieran lo que pedía. Entonces el rey, un tanto irritado, ordenó que trajeran un saco con semillas y le pagaran a este individuo. Al cabo de unos minutos se informó que un saco no era suficiente. Entonces, el rey mandó traer un segundo costal. Pero pronto se dieron cuenta de que tampoco alcanzaba. Sin vacilar, el monarca pidió que trajeran el tercer saco de semilla, pero pasó lo mismo. Es decir, no alcanzaba para la paga. Un tanto desesperado, el rey ordenó que trajeran todos los sacos de arroz del reino. Pero ni así alcanzó para que cumpliera con su promesa. Se agotaron todos, uno por uno. Así fue como el rey se percató, con gran sorpresa de todos, menos del inventor, que no era posible pagar, que no alcanzaban todos los granos del reino para este fin. Así que el rey, para cumplir con su promesa, se puso a sembrar arroz para pagar a tan ingenioso inventor, y aun así no le alcanzó la vida para cumplir su promesa.

¿Cuál es el problema en este cuento? ¿Por qué no se le pudo pagar al hombre algo, en apariencia, tan sencillo?

Lo que el hombre pidió no fue poca cosa. Él dijo que en la primera casilla pusieran un grano de arroz (1); en la segunda, dos (2); en la tercera, cuatro (4); en la cuarta, ocho (8); en la quinta, dieciséis granos (16); y así sucesivamente. Esto se ve más fácil de la siguiente manera:

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots$$

Cada número simboliza los granos de arroz en cada casilla. Los tres puntos suspensivos sirven para no escribir todos los números que faltan. Es decir, los puntos simbolizan una abreviación. Lo que el hombre pidió fue que en cada casilla le pusieran el doble de la anterior. Si te das cuenta es lo que representan los números de la serie que anoté. El dos es el doble del uno, el cuatro el doble del dos, el ocho el doble del cuatro, y así sucesivamente.

Pero ahora vamos a hacer una pequeña pausa para recordar algo muy sencillo. Hace muchos años, cuando eras muy pequeño, aprendiste a sumar y multiplicar, luego a dividir y algunas operaciones más. Alguna vez tuviste la difícil misión de aprenderte las tablas de multiplicar para poder obtener una buena calificación. Tal vez esto te costó trabajo, pero lo que no sabías es que una multiplicación es la forma abreviada de escribir la suma. No te sorprendas, pues cuando multiplicas no haces otra cosa que solo sumar y sumar. Seguramente que si te pregunto que cuánto es tres por cinco, o cuánto es tres veces el cinco, me respondas de inmediato que quince porque así lo memorizaste. Pero en realidad tres veces el cinco no es otra cosa que sumar tres veces el cinco.

$$3 \times 5 = 5 + 5 + 5 = 15$$

Y así sucede con todas las tablas que te enseñaron. Por ejemplo, para obtener el resultado de multiplicar cuatro por siete, solo tienes que sumar cuatro veces el siete, es decir:

$$4 \times 7 = 7 + 7 + 7 + 7 = 28$$

Y lo mismo pasa para todas las tablas que ahora sabes de memoria. Por supuesto que la multiplicación es de gran ayuda, pues es una manera fácil de abreviar la suma.

Pero también existe una manera de abreviar la operación de la multiplicación, y esto es a través de la operación de exponenciación. De los exponentes te debes de acordar, pues cuando tomaste clases de álgebra siempre te enredabas por si los debías de sumar o multiplicar. Sin embargo, esto no es importante por el momento, así que ni te preocupes. Como te decía, la exponenciación es una manera de abreviar la multiplicación. ¿Cómo lo hace? Bueno, en lugar de escribir:

$$5 \times 5 \times 5$$

Nosotros escribimos: $5^3$. Esto nos indica que debemos multiplicar el cinco tres veces. En este caso al cinco se le llama *base* y al pequeño tres *exponente*. Lo único que te dice es que tienes que multiplicar la base tantas veces como indique el exponente.

Ahora vamos a usar un punto ( $\cdot$ ), en lugar del símbolo $\times$. Entonces, en otro ejemplo, es lo mismo escribir 16 que $2^4$, que es igual a $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Volvamos a los granos de arroz que se le deben pagar al inventor. Ya vimos que pidió que en la primera casilla pusieran un grano, en la segunda dos, en la tercera cuatro, en la cuarta ocho y, así, sucesivamente. También vimos que la serie de estos números se puede escribir como:

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots$$

Pero hay una forma alternativa de escribir estos números, con la notación que representa una abreviación de la multiplicación:

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots, 2^{63}$$

No te asustes de ver todos esos números, pues son muy fáciles de comprender. La serie anterior representa las potencias del número dos. El último exponente se debe a que el tablero tiene sesenta y cuatro casillas. El primer elemento de la serie es $2^0$. Esto es una convención que representa al uno, es decir, todo número distinto de cero elevado al exponente cero nos da uno. De nuevo uso los tres puntos para no poner todas las potencias que faltan; es decir, los tres puntos, en este caso, representan desde el $2^6$ hasta $2^{62}$. Como te darás cuenta, el inventor pedía muchos granos de arroz. En realidad él solicitaba la suma de todas las potencias de dos desde el cero hasta el sesenta y tres, es decir:

$$\text{Pago} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{63}$$

Si haces la suma, comprobarás que representa un número exageradamente grande. Es por eso que no le pudieron pagar. Aunque la expresión $2^{63}$ podría parecer pequeña, realmente representa un número muy grande. Si alguna vez tuviste la duda de cómo se pueden representar números muy grandes, aquí tienes una solución.

Octavio

# 7

El viejo dice que $2^{63}$ es un número muy grande, y que representa multiplicar el dos sesenta y tres veces. Para ver si es cierto, tomo la calculadora y hago la cuenta el número de veces que dice; pero no puedo, pues en la pantalla solo caben ocho números. Así que cojo una hoja de papel, un lápiz y mucha paciencia para hacer esta cuenta. Al final, el número que obtengo es realmente impresionante, el más grande que haya visto jamás:

$$2^{63} = 9.223.372.036.854.775.808$$

$2^{63}$ es un número muy grande y solamente representa que hay que multiplicar al dos sesenta y tres veces. Pero siento curiosidad por ver realmente cómo de grande es este número. Me meto en internet y ahí veo que un kilo de arroz tiene 40.000 granos. Así que divido el número que tengo entre cuarenta mil, y esta cifra la vuelvo a dividir entre cinco mil millones, que es el número de personas que, aproximadamente, hay en todo el mundo. El número final, que a lo mejor no es exacto, es 46.116. Esto querría decir que a cada persona que vive sobre la Tierra le corresponden 46.116 kilos de arroz. Lo cual es muchísimo. Me doy cuenta de que este número es inmenso y solamente he calculado el número de granos que debería de haber en un cuadro, en el último. Todavía falta sumar el número de granos que hay en cada uno de los cuadros anteriores, incluyendo $2^{62}$, $2^{61}$, $2^{60}$, $2^{59}$, entre muchos otros, que son números exageradamente grandes. Con razón el rey no pudo cumplir con su promesa.

Sigo pensando y ahora me pregunto: ¿cómo de grande puede ser $2^{300}$ o $2^{1.000.000.000}$ o dos con un exponente de millones de millones? Si tomo los trece mil quinientos millones que calculé del número de hormigas, y lo pongo como exponente del dos, el número $2^{13.500.000.000}$ resulta ser un número realmente inmenso. Ahora sí, el más grande que he pensado en toda mi vida. Pero, casi inmediatamente, descubro algo más sorprendente. Si le pongo más ceros al exponente, el número crece rápidamente. Esto es increíble. Estos números realmente son enormes, jamás me había imaginado siquiera que pudieran existir. Si multiplicar el dos sesenta y tres veces fue muy difícil, ni siquiera intento multiplicar el número dos trece mil quinientos millones de veces. Se me terminaría la vida y yo seguiría multiplicando por dos.

Más tarde, cuando sigo pensando en eso, comprendo que los números en que he estado pensando son realmente muy pequeños. Ahora se me ha ocurrido sustituir el dos por un número exageradamente grande. Por ejemplo, por el trece mil quinientos millones, y ahora me queda:

$$13.500.000.000^{13.500.000.000}$$

¡Este número debe de ser grandísimo!

Dejo los números a un lado y trato de pensar en conjuntos de cosas que tengan muchísimos elementos y ahora pienso en el conjunto de todas las estrellas. Pero lo que todavía no entiendo es por qué Octavio siempre dice que estos conjuntos son pequeños, que siempre hay más grandes. La verdad, no sé si creer en esto o no. A lo mejor me toma el pelo. Tal vez algún día alguien encuentre un número tan grande, pero tan grande, que no haya otro más allá. Tal vez sea el último y el mayor de todos. Tal vez se tengan que usar miles de hojas para escribirlo. Tal vez no se pueda escribir.

# 8

Ahora tengo un verdadero reto, algo que me hace pensar constantemente. Así como de niño contaba las estrellas, ahora trato de encontrar conjuntos más grandes, que tengan más elementos. Lo he intentado muchas veces pero sin buenos resultados. También trato de encontrar formas de calcular el número de sus elementos. Algunas veces le pongo a Octavio preguntas difíciles, como, por ejemplo, calcular el número de gotas de agua que hay en el mar. Entonces me recuerda que no es necesario hacer esto de manera precisa, que simplemente se encuentran métodos para dar una aproximación. En este caso, ya conocemos el tamaño de nuestro planeta y qué porcentaje es tierra o agua. En cuanto a los océanos también se ha estudiado su profundidad y si el fondo es plano o si tiene montañas y abismos. A lo mejor no podemos dar una respuesta exacta, pero sí nos podemos acercar. El viejo me explicó que hacer esto no siempre es fácil, que pueden tardar muchos años en calcularlo, pero al final se logra o logrará. La ciencia y la imaginación de las personas son muy poderosas, y se ha llegado a soluciones de problemas difíciles, no importa qué tanto lo sean. Así se trate de aves, rocas, insectos, plantas, árboles, peces, etcétera, se puede saber, aproximadamente, cuántos son. También me dijo que muchas veces no se calcula porque no sirve de nada saberlo, pero siempre hay maneras de hacerlo. Yo quiero estar seguro de esto y le llevo nuevas preguntas a Octavio, pero él siempre las resuelve de forma ingeniosa con los conocimientos que tiene. A lo mejor, al final, tendré que aceptar que, en la naturaleza, todos los conjuntos de cosas se pueden contar. Sin embargo, el mismo Octavio me dice que a lo mejor no es cierto. Charlo con él y me habla de unas cosas tan pequeñas, que son tantas que no creo que se puedan contar.

–¿Has oído hablar de los átomos? –pregunta el viejo.

–Creo que sí –respondo–; pero, la verdad, no me acuerdo de lo que son ni para qué sirven.

–Ahí está el problema, sí te enseñan cosas interesantes en la escuela, pero no les pones atención. El átomo es una parte muy pequeña de un elemento químico. En la antigua Grecia se empleaba este término para referirse a la parte de materia más pequeña que podía concebirse, que era indivisible. Todas las cosas que existen están compuestas por átomos: personas, animales, plantas y objetos. Estas partículas no se pueden ver a simple vista porque son muy pequeñas, y ni siquiera los más poderosos microscopios pueden ayudar a visualizarlos. ¿Ahora ya recuerdas que te lo mencionaron en la escuela?

–Tienes razón –respondo con un poco de pena–, el maestro de química nos habló de eso, pero solo aprendí lo necesario para pasar el examen y después se me olvidó todo. Me acuerdo que me costó un trabajo enorme aprender de memoria una tabla donde venían todos los nombres de los elementos. Lo encontré muy aburrido y difícil. Nunca me ha gustado la química.

–Pues esto de los conjuntos está relacionado con todas las áreas de estudio. En todos lados encontrarás agrupaciones de cosas que quieras estudiar.

–¿Entonces, también vamos a poder contar el conjunto de los átomos que hay en todo el mundo?

–Es posible, pero primero tienes que entender cómo de pequeño es un átomo para que después podamos pensar o discutir cuántos hay en todo el Universo. Todos los objetos que se encuentran en la naturaleza están formados por átomos. Así que imagina el número de átomos que deben de existir.

–¡Qué bárbaro! Ahora sí es este el conjunto más grande que te puedas encontrar en la naturaleza. Pero ¿cómo de pequeño es un átomo?

–Mucho, tanto que se ha calculado que una sola gota de agua contiene más de mil millones de millones de millones de estas partículas, es decir, más de mil trillones de átomos.

–¿Una sola gota de agua tiene tantos átomos?

–Sí, una sola e insignificante gota de agua. Esto nos da una idea de lo pequeños que son y de la gran cantidad que hay en la naturaleza. Ahora imagina los que debe de haber en un vaso con agua que tiene miles de gotas; o en una alberca con millones de ellas o en todo el mar con millones y millones y millones de gotas de agua. Pero recuerda que toda la materia está compuesta por estas partículas elementales, no únicamente el agua, sino todo lo que ves. El número de átomos en todo el mundo te aseguro que es espantosamente grande, pero aun así este inmenso número es pequeño comparado con otros.

–¡Espera un poco! –digo un poco molesto por no entender y por la necedad de Octavio de decir que cualquier número es chico o pequeño–. Dices que todo en este mundo es materia, ¿de acuerdo?

–Todo lo que te rodea. El agua, el fuego, la tierra y el viento.

–Si todo en este mundo es materia compuesta por átomos y estos son tan pequeños y numerosos, entonces toda la materia del mundo ha de contener una cantidad tan grande de átomos que no se puedan contar.

–¿Por qué no? Así como se sabe que en una gota de agua hay esa cantidad de átomos, asimismo se puede saber cuántos hay en cada ser humano, en cada hormiga, en cada león, en cada árbol, en cada animal y en absolutamente todo lo que existe en el mundo. De nuevo te digo que son aproximaciones, pero sí hay métodos para esto. Muchas personas dedican su vida a la ciencia y, al menos en teoría, es posible dar una aproximación de la cantidad de átomos que hay en todo el mundo. Esto no quiere decir que se vaya a hacer, solo que se podría, si se destinan los suficientes recursos para ello.

–No estoy totalmente de acuerdo. Además, hay algo que no entiendo. Al número final de este posible cálculo lo llamaste 'pequeño', cuando realmente es demasiado grande como para imaginárselo.

–Que tú no puedas o quieras imaginártelo, no quiere decir que no sea posible. Simplemente no estás acostumbrado. Y, sí, lo llamé pequeño, porque realmente lo es comparado con otros muchos conjuntos más grandes que se pueden encontrar. Mira, Jorge, esto no es tan difícil. Dime un número, el que se te ocurra.

–Tres millones.

–Pues yo te digo: tres millones *más uno*. Dime otro, el que sea, no importa.

–Cien millones de trillones.

–Muy bien, pues yo te digo: cien millones de trillones *más uno*. Siempre que tú me digas un número, el que sea, por más grande o pequeño que parezca, siempre es posible encontrar uno mayor con solo sumarle un uno, es decir, la unidad. ¿Acaso de niño no jugaste a esto?

–Ahora que lo dices, sí lo hice –digo un poco más tranquilo–. Pero lo jugaba diferente. Cuando era chico y salíamos a comprar algo, si por ejemplo mi madre decía un número, entonces yo le decía: “Uno más que tú para siempre”. Eso quiere decir que no importa qué número dijera ella, el mío era siempre, al menos, uno más. Claro, cuando yo era muy chico, los números que decía eran el diez, el treinta o el mil, pero no tan grandes como los que hemos descubierto.

–En tu juego o en el mío, el resultado es el mismo. No importa qué número digas, siempre podrás construir, al menos, otro mayor. En todo caso, basta con añadirle la unidad para encontrar uno mayor; porque está claro para ti que si tengo un número, cualquiera, el que sea, y le agrego una unidad, es decir, le sumo el número uno, este nuevo número es necesariamente distinto al anterior, ya que es mayor. Esta es una propiedad muy importante de los números. Pero sumar de uno en uno puede ser un proceso muy lento. Veamos cómo podemos producir números más grandes. Conoces la suma, la multiplicación y ahora elevar un número a un exponente. ¿Recuerdas que lo mencioné en el cuento del rey?

–Sí, me acuerdo. Simplemente es multiplicar el número grande, tantas veces como lo dice el pequeño.

–Así es. Estas tres operaciones sirven, en general, para aumentar. Es decir, si tienes digamos un cinco y le sumas mil, obtienes algo más grande; si lo multiplicas por lo mismo, obtienes algo aún mayor. Pero, si elevas el cinco al exponente mil, es decir, multiplicas el cinco mil veces, obtienes algo muchísimo mayor que el cinco original. Solo piensa que los números que hemos considerado (cinco, mil) son aún muy chicos. Si tú mencionas una cantidad de trillones y trillones, puedes hacer lo mismo, digamos elevarlo a la potencia mil, es decir, multiplicar la cantidad original mil veces. En esto no hay límites. A lo que te resulte le puedes hacer lo mismo y obtener nuevos números mayores y así las veces que quieras. Así que dada una cantidad, con excepción de los números cero y uno, siempre podrás obtener una mucho más grande, con estas operaciones o con otras que no conoces.

–Entonces, ¿no es posible llegar al último número, al mayor de todos?

–Claro que no es posible. Si alguien pretende hacer eso caerá en contradicción muy rápido. Basta con que mencione el número que él quiera, para sumarle un uno y demostrarle que hay, al menos, uno mayor.

–Si digo un número, el que sea, ¿cuántos números hay mayores que él?

–Una infinidad.

–¿Qué significa eso?

–Infinito es algo que no tiene fin, que jamás termina.

–Bueno, me has enseñado que siempre es posible contar o calcular el número de sus elementos, no importa que el conjunto sea exageradamente grande. Entonces, ¿qué conjuntos pueden ser infinitos, que no sea posible contar sus elementos? ¿Es posible pensar en algo que sea infinito? –pregunto de pronto con la sensación de que es pura invención y que me toma el pelo.



–Mira, de acuerdo con tu propio juego, el que jugabas de pequeño con tu madre, el conjunto de todos los números es infinito, pues nunca termina, siempre hay un número después de otro. Piensa que nuestra imaginación es extremadamente poderosa. Existen muchas cosas dentro de ella que no existen en la naturaleza. Muchas. Por ejemplo, tú has oído cuentos sobre dragones, magia o superhéroes que solo existen en tu imaginación. Tú has visto películas donde los animales hablan y razonan. También pensamos en unicornios y otros monstruos. Los números tampoco existen en la naturaleza. ¿Acaso has visto alguna vez un dos o un treinta y cuatro? Los números solo existen en nuestra mente. Los números son solo ideas, como los dragones, sirenas, hadas, centauros, brujas, gnomos, duendes y muchos otros entes mitológicos e imaginarios. Todos estos seres fantásticos no existen como materia, pero sí en la mente de las personas y con ellos se han escrito tratados, libros, cuentos, novelas e, incluso, se han filmado muchas películas. Hay dos filmes muy bonitos e interesantes que ilustran lo que te digo. Tenemos el caso de *Harry Potter* y *El señor de los anillos.* Es evidente que no existen Frodo, Gandalf, el Señor Oscuro, Aragorn o Glóin. Sin embargo, son personajes que viven en nuestra mente, como ideas, y son totalmente válidas. Algunos niños creen que *Superman* realmente existe. Incluso en la televisión están de moda los programas sobre vampiros y cuestiones sobrenaturales. Por otro lado, se llega a dar el caso de que algunas de estas ideas se hacen imprescindibles para la vida cotidiana, y las usamos sin preguntarnos por su existencia. Los números, por ejemplo, los usamos casi a diario: para ver la hora, comprar el pan, para pagar el transporte, para adquirir un refresco, etcétera, etcétera. Para nosotros ya son parte de nuestra vida cotidiana. Sin embargo, muy pocos se llegan a preguntar qué es un número, a pesar de que, como te digo, los usamos casi todos los días. Por ejemplo, ¿qué es un tres para ti?



–Pues un número.

–Pero *¿qué* es un número?

–¿Como que qué es un número? No lo sé –digo casi de inmediato, porque la pregunta me parece absurda.

–Pues no es otra cosa que una idea que representa algo en el mundo real. Un tres no existe como una planta, un árbol o un ser humano. Simplemente existe como idea abstracta y todos aceptamos su existencia, ¿no es así?

–Sí, jamás voy a ver un tres que camine por las calles. Pero ¿a qué te refieres con idea abstracta?

–Digamos que me refiero a esas cosas que solo existen en nuestra mente. Piensa en lo siguiente: existen muchos niños como tú, que tienen tu misma edad y que van a la escuela. Pero tú tienes cualidades que algunos de tus compañeros no tienen y ellos tienen otras que tú no tienes. Por ejemplo, algunos de ellos son muy buenos para el fútbol y tú no lo eres. Me has dicho que a ti te gusta una niña de tu clase y no a todos tus compañeros les gusta la misma niña. Todos nosotros nos parecemos, pero también tenemos cosas, cualidades, que nos hacen diferentes. Para abstraer, escoges un objeto y estudias cuáles son los elementos que lo componen y que lo hacen único. En el caso de los niños, tratamos de buscar todos esos elementos que tienen en común; y dentro del conjunto de esos jóvenes podemos buscar aquellas cualidades que los identifican uno por uno. Cuando observamos a un número en particular, lo podemos pensar como aquello (la cualidad) que tienen en común todos los conjuntos con ese mismo número de elementos. Pongamos el número cinco: esta es la cualidad que tienen todos los conjuntos con cinco elementos. Piensa en el conjunto de los dedos de tu mano derecha. Una cualidad importante es que tiene cinco elementos, que no es otra cosa que el número que siempre has conocido. Piensa en los aros de colores de la bandera olímpica, también son cinco. Pero hay otras muchas colecciones con la misma cualidad, como cinco árboles, cinco personas, cinco aulas de clase, etcétera. Hay algo que relaciona todos estos conjuntos, que se pueden poner en correspondencia, uno a uno, porque tienen el mismo número de elementos. Sin embargo, hay también otras cosas que hacen diferentes a los números. El tres es distinto del cuatro, y el cuatro es distinto del cinco.

–Eso que mencionas es muy fácil –digo orgulloso por creer que entiendo la explicación del viejo–. Si tengo un conjunto de cinco árboles, claro que los podré poner en correspondencia con los dedos de mi mano derecha. Solo basta que a cada dedo le asigne un árbol y viceversa.

–Estás en lo correcto. Eso lo puedes hacer con todos los conjuntos que tengan cinco elementos. Hay otros grupos de objetos que tienen en común tener tres elementos; otros tienen en común tener cien elementos. Bueno, pues *a este número que mide o nos indica el número de elementos de un conjunto se le llama su número cardinal*. Por ejemplo, el conjunto:

$$\{a, b, c\}$$

Tiene tres elementos y su número cardinal es el tres. El conjunto:

{bolígrafo, regla, lápiz, goma, lupa, compás, escuadra}

Tiene siete elementos, y su número cardinal es el siete. Y el conjunto:

$$\{1, 2, 3, \ldots, 1.000\}$$

Tiene mil elementos y ese número es su número cardinal. El número once es el número cardinal del conjunto de las letras de la palabra 'matemáticas'. Cuando el conjunto está bien definido y se conocen cuáles son sus elementos, sin importar lo grande que sea, *siempre* tiene un número cardinal que indica cuántos elementos tiene. Antes se pensaba que era imposible saber cuántos granos de arena había en una playa, y mucho menos en todas las playas de todo el mundo. Pero hemos visto varios métodos para contar, o aproximar, el número de muchas cosas. Así que puedes pensar en todos los conjuntos que hemos discutido antes (canicas, butacas, niños, hormigas, etcétera) y piensa en el número de sus elementos, es decir, en sus números cardinales.

Para terminar, Octavio añade:

–Estos números son solo ideas. ¿Recuerdas que mencioné que el conjunto de todos los números naturales es infinito, que jamás termina porque no existe un último elemento, ni el más grande de todos?

–Sí, claro que lo recuerdo.

–Bueno, después vamos a descubrir qué pasa con este conjunto. Y para que no creas que el conjunto de todos los átomos que hay en el mundo es el más grande, déjame decirte que ahora se sabe que el átomo no es la partícula de la materia más pequeña. Después se descubrieron, entre otros, los neutrones; y, más adelante, los sabios encontraron los ‘quarks’. Y es posible que en el futuro encuentren partículas aún más pequeñas.

## 9

Me gusta pasar tiempo con Octavio. Por un lado, siento que es el abuelo que nunca tuve. Siempre le da gusto verme, pero tampoco me presiona. Si algo no me gusta, ya sea comida o el tema de conversación, no insiste. Me respeta como un joven de mi edad y no me trata como un niño o como adulto. Él conversa de muchos temas y escucha lo que digo. Pone atención a mis argumentos. Jamás me interrumpe, ni me calla, ni me cuestiona. Lo más importante es que siempre discute cosas interesantes o desde distintos puntos de vista. Hemos analizado interpretaciones de películas para niños. Octavio me ha enseñado que, aun en el cine, no me debo sentar únicamente a ver la película de forma pasiva, sin pensar. Me tengo que preguntar el porqué de las cosas que aparecen en la pantalla, o el porqué de los diálogos entre los personajes. Por otro lado, algunos de los problemas que plantea se convierten en verdaderos retos. Además, mis conversaciones con él no solo tratan sobre estos números y conjuntos. Yo le he comentado algunas de mis cosas, como que no soy bueno para jugar al fútbol, que me da coraje que mi papá siempre me gane las discusiones, que me gusta mucho jugar con el ordenador, que odio la escuela y que creo que me gusta Mariana. Cuando le hablé de ella, él me dijo:

–Cuando la ves o estás cerca de ella, ¿te pones muy nervioso? Cuando estás cerca de ella, ¿sientes como si tuvieras mariposas en el estómago? Cuando estás solo y empiezas a pensar en distintas cosas, ¿terminas siempre pensando en ella? Cuando caminas por el pueblo, ¿tratas de encontrarte con ella? Si todas tus respuestas son afirmativas, entonces me temo, pequeño amigo, que no únicamente te gusta, sino que estás enamorado de ella.

Octavio también me ha contado cosas de él. Me dijo que antes trabajaba para la universidad y que aquí solo venía los fines de semana. Ya se jubiló, pero le siguen pagando y no tiene que ir a su oficina. Ahora vive aquí y va a la capital algunos fines de semana, en particular para buscar libros, visitar museos, tomar café con sus amigos, ir al fútbol y ver las películas nuevas. También me ha dicho que ya murió su esposa, creo que de cáncer. Tiene dos hijos que ya son grandes y no viven con él. Me ha dicho que escribe incluso para algunos periódicos. En algunas ocasiones, muy pocas, me ha ayudado con los deberes escolares. Él me dice cómo y dónde encontrar las respuestas. Un día, cuando me quejaba de mis tareas de matemáticas, me dijo que es una materia muy importante porque nos enseña a pensar. Pero de eso me hablaría después.



## 10

Llego a mi casa y de inmediato leo una nueva carta de Octavio.

Hola Jorge:

Ya vimos que lo que nos rodea se puede contar, o llegar al número aproximado de elementos que tiene un conjunto, no importa qué grande sea. Nunca vas a encontrar en la naturaleza un conjunto que no tenga fin, porque no existe. Por el contrario, cuando jugabas con tu madre, ella decía un número y tú siempre eras capaz de encontrar otro mayor. Ahora tenemos un ejemplo de algo que tiene un número infinito de elementos: el conjunto de todos los números con los que contamos objetos. A esta sucesión de números le llamaremos *el conjunto de todos los números naturales*. La palabra 'natural' es solo el nombre que se les da a los números que siempre has conocido; como el uno, dos, tres, cuatro, cinco, etcétera. Simplemente es una convención para llamarles de alguna manera y así distinguirlos de otros tipos de números. Así como tú te llamas Jorge. Es solo un nombre. El juego con tu madre muestra que los números no tienen fin, ya que no hay uno que sea el mayor de todos. Si pensaras haberlo encontrado, con añadirle una unidad a ese número ya habrías construido otro mayor, y así en adelante.

Por otro lado, si alguien te pide que escribas los números del uno al mil, tardarás mucho tiempo. No tiene sentido y hay otra forma sencilla y compacta de expresarlos. Solo tienes que escribir los primeros, luego tres puntos suspensivos y en seguida el último número, en este caso el número mil.

$$1, 2, 3, \ldots, 1.000$$

Lo anterior representa a la sucesión de números desde el uno hasta el mil. Como ya sabes, los tres puntos suspensivos simbolizan desde el cuatro hasta el novecientos noventa y nueve. Esto es una maravilla, pues facilita las cosas y no hay que escribir mucho para representar sucesiones de números muy grandes. Recuerda que esto ya te lo comenté en la carta pasada, cuando te relaté el premio que le pidió al rey el inventor del ajedrez. Pero esto no acaba aquí. Al usar los mismos puntos, se puede representar a la serie completa, es decir, infinita, de todos los números naturales de la siguiente manera:

$$1, 2, 3, \ldots$$

donde los tres puntos suspensivos simbolizan a todos los números siguientes, con la novedad de que no se indica cuál es el último, porque no existe. Es decir, en este caso ponemos una serie ilimitada; sin límite; sin fin. Así, con unos cuantos símbolos, hemos sido capaces de expresar algo que representa una infinidad.

Qué sencillo, ¿no? Solo escribí algunos de los primeros números de la serie y al final uso los tres puntos suspensivos, que aquí simbolizan una infinidad de números. Así tenemos que los tres puntos suspensivos sirven para escribir una cantidad limitada de números o una infinidad. Claro que se pueden combinar ambas ideas. Imagina que estás interesado en escribir el conjunto de números del uno al mil, pero también quieres representar la serie completa, es decir, infinita. En este caso la expresión es:

$$1, 2, 3, \ldots, 1.000, \ldots$$

Aquí se usaron ambas ideas, los primeros tres puntos simbolizan del cuatro al novecientos noventa y nueve, mientras que los segundos tres puntos simbolizan el mil uno, mil dos, mil tres, etcétera. Es decir, toda la infinidad de números naturales que existen a partir del mil uno.

Con esta representación puedes escribir cualquier serie de números naturales. No necesariamente debes de empezar en uno, puedes comenzar desde cualquiera, como el tres:

$$3, 4, 5, \ldots$$

O mil:

$$1.000, 1.001, 1.002, \ldots$$

Tampoco es necesario que vayas de uno en uno. Aquí también hay completa libertad, depende de tus necesidades y exigencias. Por ejemplo, puedes representar las potencias de cinco, es decir: $5^1$, $5^2$, $5^3$, etcétera. Lo que es igual a:

$$5, 25, 125, \ldots$$

Quiero hacer énfasis en que *un número cardinal* es la expresión de una cantidad, *es la medida del número de elementos de un conjunto*. Pero la sucesión de todos los números juntos forman lo que se conoce como el conjunto de todos los números naturales. Piensa en conjuntos de la naturaleza, aquellos que se pueden contar o es posible aproximar el número de elementos. Si tenemos, por ejemplo, canicas, podemos formar un conjunto de tres canicas, otro de quince, otro de veinte, unos de más de siete, etcétera.

Este conjunto de los números naturales, que no tiene fin, tiene características muy importantes, que sirven para entenderlo y lo definen de manera exacta.

Saludos, Octavio.



## 11

¿Algo tan pequeño representa algo que nunca termina? Realmente me sorprende la carta de mi amigo. Estos números en realidad son increíbles. Los días pasados pensé en lo que el viejo mencionó en la carta. Representar a algunos conjuntos muy grandes, hasta me parece un juego de niños. Recordé los conjuntos que discutí con él y los represento en un cuaderno. Por ejemplo, comienzo con el conjunto de las diez canicas que me regaló. Me doy cuenta de que las puedo escribir todas.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

O utilizar los tres puntos suspensivos.

$$1, 2, 3, \ldots, 10$$

Recordé que en el mundo puede haber, aproximadamente, trece mil quinientos millones de hormigas. Si lo quiero representar en una expresión, es muy fácil.

$$1, 2, 3, \ldots, 13.500.000.000$$

Y no tuve la necesidad de escribir todos los números, uno por uno. Esto en verdad me gusta, facilita mucho la vida para escribir conjuntos de cosas muy grandes.



## 12

Hoy es viernes y tengo muchas preguntas para mi amigo. Llego a su casa, que en realidad es una cabaña que se encuentra cerca de los límites del pueblo, ya casi para llegar al bosque, y de inmediato Octavio me explica algo acerca de los números que no había pensado.

–Ahora ya sabemos tres cosas muy importantes acerca de la sucesión de todos los números naturales. *Primero, que dado cualquier número siempre sabemos cuál es el que le sigue, pues basta con sumarle un uno. Segundo, también sabemos que existe una infinidad de ellos pues no existe el último de todos, ya que siempre es posible construir uno mayor con sumarle una unidad. Y tercero,* *que es posible escribir la serie completa con la ayuda de los tres puntos suspensivos*. Pero esto que te digo no siempre ha sido aceptado, incluso por grandes personajes de la Antigüedad. Por ejemplo, Galileo, un gran pensador considerado el fundador de la ciencia moderna, decía que pensar en la serie completa de todos los números nos podía llevar a contradicciones.

–Oye, no sé quién es ese Galileo. Después me hablas de él –replico–. ¿Pero por qué decía que no se puede?

–Galileo comparó dos sucesiones de números que eran infinitas, y mostró que era posible hacer corresponder a cada número de la primera con uno y solamente un número de la segunda y viceversa.

–Entonces mostró –interrumpo a Octavio– que las dos sucesiones tenían el mismo número de elementos.

–Así es. Galileo comparó, por un lado, la sucesión de todos los números naturales.

$$\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

Y, por el otro, la sucesión de sus respectivos números cuadrados:

$$\{1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots\}$$

Las dos sucesiones se pueden hacer corresponder porque a cualquier número natural le puedes asociar su cuadrado; y viceversa, a cada número cuadrado le asocias su raíz. No habrá número de cualquiera de las dos sucesiones que se quede sin algún número por asignar. Así que, como ya dijiste, mostró que las dos sucesiones tienen exactamente el mismo número de elementos. Pero, para Galileo, la segunda de ellas tenía necesariamente menos elementos que la primera, pues faltaban, al menos, en la segunda sucesión los números $\{2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, \ldots\}$. Para él, el argumento era contradictorio porque las sucesiones no podían ser iguales y, al mismo tiempo, desiguales. Concluyó que era imposible comparar entre sí sucesiones con un número infinito de elementos y tratar de ver si una era mayor, menor o igual que la otra. Galileo no fue el primero en llegar a este tipo de conclusiones. Él, como sus contemporáneos y antecesores, no podía concebir que algunas de las propiedades de los conjuntos con un número infinito de elementos debieran ser diferentes o negaran a aquellas de los conjuntos finitos. Algunos pensadores anteriores a él discutieron, por ejemplo, que si nuestra naturaleza es finita, entonces no podemos pensar en cosas infinitas.

Pero, si nos limitamos a usar como herramienta una relación uno a uno, entonces podemos, sin necesidad de contar los elementos, concluir si una de las sucesiones es mayor, igual o menor que la otra. Para establecer dicha correspondencia es necesario pensar que ya tenemos todos los elementos de ambas sucesiones. Obviamente, no podemos establecer dicha relación sin esta suposición, porque, en efecto, no terminaríamos de construir ambas sucesiones, ya que tienen una infinidad de elementos.

–Déjame ver si entendí bien. Cuando tienes un número, el que sea, siempre se le puede sumar un uno y obtener uno mayor. Y esta operación se puede repetir una infinidad de veces. Así nos damos cuenta de que la sucesión es infinita, ¿así es?

–Tal como lo dijiste –responde el viejo.

–Ahora me dices que no basta hacer estas sencillas sumas para tener todos los naturales. Entonces, ¿de qué sirvió eso de sumarle un uno a cualquier número?

–No te compliques, pequeño amigo. Eso de sumarle un uno a cualquier número nos sirvió para verificar, para estar convencidos de que la sucesión nunca se acaba, de que en verdad es infinita. Pero un humano vive en promedio un poco más de setenta años, así que no podemos contar de manera infinita. Por ejemplo, supón que una persona vivió setenta y cinco años exactos, y que toda su vida, desde que nació hasta que murió, se dedicó a enunciar los números, uno por uno, en orden y sin repetir. Supón también que se tarda un segundo en pronunciar cada uno de ellos. Esto quiere decir que numeró, aproximadamente, dos mil trescientos sesenta y cinco millones doscientos mil números. Y este número ni siquiera es tan grande. Ahora imagínate una mujer que vivió muchos más años y que podía enunciar dos números por segundo, o más. No importa qué rápida sea ella, a lo más contará un número finito de números. Aquí es donde entra la grandiosa capacidad de la mente, que hace posible pensar que tenemos la *serie completa* de todos los naturales, aunque sean infinitos en número. Hasta ahora, esta discusión ha sido posible porque nos hemos limitado a reflexionar cuando usábamos argumentos estrictamente matemáticos, y estas solo se encuentran en nuestra mente. Con anterioridad, algunos intelectuales involucraban también argumentos en torno a la naturaleza y otros de carácter filosófico y teológico, que tornaban el análisis más difícil. Ahora no únicamente aceptamos, desde el punto de vista matemático, que la sucesión de todos los números naturales es infinita, sino que, además, afirmamos que la podemos manipular o usar en su totalidad. Esto lo podemos hacer porque ya encontramos un nuevo criterio, la correspondencia uno a uno, para saber si un conjunto es igual, mayor o menor a otro, independientemente de si tiene un número finito o infinito de elementos. Antes, necesariamente teníamos que contar el número de los elementos de los conjuntos; y como las colecciones infinitas no se podían terminar de contar, pues no podíamos compararlas. Así que ahora gracias a una notación muy sencilla...

$$1, 2, 3, \ldots$$

... se puede afirmar que esa sucesión es infinita.

–Pero ¿cómo es posible que no todos los grandes sabios de antes aceptaban la existencia de la serie completa de los números naturales?

–Darte una respuesta concreta es muy difícil. La noción de infinito atrajo la atención de pensadores desde hace muchos años. Es una idea muy compleja que puede ser estudiada y analizada desde puntos de vista muy diferentes. Pasaron muchos siglos para que este concepto que te comento fuera admitido por la mayoría de los estudiosos de los números. Lo mismo pasó cuando alguien sugirió que deberían de existir los números negativos o los fraccionarios. La primera reacción de la mayoría fue de rechazo. Pero esto no únicamente sucede en las matemáticas. En la vida común y corriente, cuando alguien sugiere una nueva idea, en principio esta es comúnmente rechazada y su autor, muchas veces, recibe la burla o el enojo de sus contemporáneos. Durante mucho tiempo se pensó que era imposible volar para el hombre, y ahora hasta a la luna ha llegado. Así que, si tú puedes pensar en que tenemos ya dado al conjunto infinito de todos los números naturales, habrás avanzado en tu pensamiento enormemente. Ahora tú tienes la oportunidad de pensar en la totalidad de los números, es decir, que puedes imaginarte que ya están todos dados, absolutamente todos aunque sean infinitos.

–Pero seguramente esos sabios también sabían que la serie de números es ilimitada, que nunca se acaba. ¿Qué es lo que ellos no podían aceptar?

–A que te puedes imaginar que tienes *toda* la serie completa de números naturales.

–Ya me confundiste. De nuevo, ¿qué es lo que no aceptaban?

–Vamos para atrás. Cuando jugabas con tu madre a que tú le podrías proporcionar un número mayor que el que ella te diera, no pensabas que ya estuviera dada toda la serie, porque eso querría decir que también ya estaba el número que tú pensabas mencionar o construir mentalmente. Pero tú construías un número mayor al añadir una unidad, sin importar cómo de grande fuera el número que te habían proporcionado. Este conjunto *potencialmente* puede ser infinito, porque dado cualquier número podrías construir otro mayor, y otro mayor, y otro mayor, y así en adelante, y nunca ibas a llegar al fin. El proceso nunca termina, siempre es posible construir otro. Cuando tu padre te ordena algo, y dice que lo hagas inmediatamente, para sonar imperativo usa el vocablo ‘ahora’, que significa ‘en este instante’, ‘en este momento’. Pero como tú no quieres interrumpir lo que haces, ya sea que juegues a la videoconsola, o veas la tele, o escuches a los *Beatles*, le contestas: “ahorita”, que es un diminutivo de ahora. Así le sugieres que sí vas a cumplir sus órdenes, pero no de inmediato, sino en unos instantes posteriores. No lo vas a desobedecer, pero seguirás su mandato eventualmente, *potencialmente* lo harás, cuando tu quieras, cuando decidas. No es lo mismo pensar que ganarás la lotería, a ya haberla ganado.

–Entonces, existen, al menos, dos formas de concebir la idea de infinito.

–Sí. En geometría elemental, uno de los principios te permite prolongar una recta de manera indefinida, es decir, que la puedes extender y extender, tanto como tú quieras; de esta manera es potencialmente infinita. En nuestra mente nosotros tenemos libertad de crear todo lo que queremos: dragones, unicornios, monstruos; y las matemáticas se encuentran en nuestra mente. Desde el punto de vista matemático tenemos libertad de crear ideas, conceptos o métodos que no necesariamente sean resultado de nuestras necesidades prácticas de medir, calcular o contar algo.

–Entonces, ¿cómo le llamas al otro tipo de infinito, aquel que nos permite pensar en todos los números como si ya los tuviéramos?

–Simplemente *infinito actual*, pero aquí el vocablo actual no tiene una connotación o significado relacionado con el tiempo; no se habla ni del presente, ni del pasado ni del futuro. Aquí uno se refiere a que el conjunto ya existe de hecho, ya está dado en la práctica. En términos geométricos, pensarías que una recta ya es infinitamente larga, no que lo será gracias a que la puedes extender tanto como queramos. En términos aritméticos, concibes la sucesión de números entendiendo que ya tienes *todos*, absolutamente todos, los elementos del conjunto, que no se le pueden agregar más porque ya no queda algo más que añadir. En ese sentido la notación...

$$\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

... es muy adecuada, porque por un lado las llaves te señalan que todos los números ya están dentro de un saco, que ya los tienes todos, que ahí están contenidos. Pero, al mismo tiempo, por el otro lado, los puntos sucesivos te señalan que la sucesión no tiene fin, que es infinita.

> *Oh Dios, podría estar limitado en una cáscara de nuez, y creerme el rey del espacio infinito.*
>
> William Shakespeare

# Capítulo 3

## 1

Empieza a cambiar el clima. Los días se han vuelto más calurosos y ventosos, y esto trae un cambio en el ánimo de las personas. A mucha gente no le gusta, pues es un anuncio de que se acercan las lluvias y, con eso, ciertas molestias. Algunas calles se inundan y se complica la circulación; se va la luz con frecuencia y, en general, es más difícil hacer algunas cosas. Yo no pienso igual. A mí me gusta cuando los ríos se llenan de agua, y el campo y el bosque se ponen verdes, y los días son más largos y oscurece más tarde.

En la noche cayó la primera lluvia, más bien llovizna, del año. Dejó el patio de la escuela sucio y resbaladizo; nadie se atreve a correr y jugar por miedo a caerse, mojarse y ensuciarse. No es que mis amigos sean muy limpios y cuidadosos, sino que saben que los maestros se pueden enojar. Además es muy incómodo estar con la ropa mojada por el resto del día. Así que los alumnos nada más caminan y charlan tranquilamente, mientras los maestros no salen de las aulas o del cuarto que está reservado especialmente para ellos.

Hay un profesor que no hace esto, sino que está parado frente a la cancha de cemento de fútbol, con un balón en los pies y solo observa a los alumnos que están cerca. Este profesor es joven y nuevo en el colegio. Nadie sabe qué materia va a dar o a qué grado, solo que mañana debemos ir al auditorio porque va a dar una conferencia sobre las teorías de la evolución. Lo miro atentamente, hay algo en esta persona que me cae bien, pero no sé qué es. Tal vez sea su manera de vestir, o de estar observando, que es muy distinta al resto de todos los profesores, no lo sé. De pronto patea el balón y llega directamente a mí. Sin saber qué hacer, lo pateo con la intención de devolverlo a su dueño, pero no logro darle la dirección correcta y va a dar a otro de los alumnos que camina un tanto distraído. Este lo patea hacia otro de sus amigos y comienza un ir y venir de la pelota. No pasan muchos minutos y ya se juega un partido de fútbol, con el balón del maestro nuevo. Me sorprende que el profesor juegue con los alumnos, cosa nunca antes vista en esta escuela.

Ningún otro de los maestros se da cuenta de lo que pasa en el patio. A la hora del toque de la campana caminamos a las aulas y mis amigos están muy contentos. Dicen que cuando este profesor dé clase, todo va a ser diversión y nada de trabajo.

## 2

Llego a mi casa y se me olvida pronto lo que pasó en el colegio. Estoy cansado y no tengo ganas de hacer nada. Pero alcanzo a oler que la comida ya está lista y esto me agrada. Como rápido y me siento a hacer los deberes. Ahora me he dado cuenta de que prefiero hacerlos pronto para tener el resto del tiempo libre. Saco la carta que me dio mi amigo la última vez que lo vi y la leo por tercera o cuarta vez. En ella me comenta lo que piensa él del pueblo, lo bien que le caigo y cosas por el estilo. Me gusta hablar con Octavio, ya sea en persona o, simplemente, leyendo lo que me escribe.

Al releer la carta vuelvo a pensar en tres cosas. *Primero, en el número cardinal que es el que indica cuántos elementos tiene un conjunto. Segundo, en el conjunto infinito que contiene a todos los números naturales. Y tercero, en la explicación entre la distinción entre el infinito potencial y el actual*.

Sin darme cuenta de cómo, empiezo a pensar, y, de repente, ya estoy hecho un lío. Pienso que si el conjunto de todos los números naturales está bien definido, y sí lo está, entonces debe tener un número cardinal que nos diga cuántos elementos tiene. ¿Pero cómo vamos a saber cuál es este número cardinal si la sucesión de todos ellos no tiene un último elemento? Lo pienso por un rato, aunque no tengo idea de cuál pueda ser la respuesta. Decido que ya es tiempo de hacerle una visita al viejo, pues si sigo así me voy a confundir más y más, y más y más. Creo que esta vez si se equivocó en algo, porque por más que lo pienso no veo por dónde pueda estar la respuesta.

Con esto en la cabeza, corro hacia su casa para decírselo, pues no puedo esperar a comentarle que encontré un fallo en lo que escribió. En el camino encuentro a unos amigos, se divierten con un balón y me invitan a unirme al grupo, porque creo que les falta uno para completarse. Dudo si quedarme o no, pues tengo muchas ganas de conversar con el viejo, pero también me dan ganas de jugar. Me quedo un rato; y, después de un tiempo, decido irme. Pongo de pretexto que tengo que regresar a mi casa, pues mis padres me esperan y tengo que llegar pronto. El partido que jugué en el patio de la escuela el otro día, me enseñó que también es divertido jugar al fútbol y estar con mis amigos.

En menos de diez minutos estoy frente a la cabaña de mi amigo. Lo veo escribir sobre unas hojas, con muchos libros alrededor y, de fondo, una música extraña pero agradable. Alza la vista y parece que le da gusto verme, pues de inmediato deja lo que hace y me invita a tomar asiento.

–Creo que hay algo mal en lo que escribiste en la última carta –digo de inmediato, una vez que recupero las fuerzas para hablar.

–¿En serio? –dice Octavio con falsa sorpresa en el rostro–. En verdad quiero que me expliques de qué se trata.

–Es algo que tiene que ver con lo que dijiste respecto a que todo conjunto tiene un número cardinal, ¿lo recuerdas?

–Claro que sí –contesta realmente interesado en mis palabras–. En aquella carta te dije que tengas el conjunto que tengas, no importa cuál sea, siempre va a haber un número que se relacione con él, que es precisamente el que nos indica el número de elementos que tenga.

–Pero yo digo que esto no es cierto, porque encontré un conjunto en donde no funciona esto. Bueno –corrijo–, no es que lo haya encontrado, tú mismo me mostraste que podemos pensar en él.

–¿Cuál es ese conjunto que hace que mis argumentos sean falsos? ¿Cuál es esa afirmación falsa que mencioné disfrazada de verdad?

–Pues el conjunto que contiene a todos los números naturales. ¿Estás de acuerdo en que es un conjunto que jamás termina?

–No, lo que te dije es que está compuesto por un conjunto infinito de números; pero, como una idea abstracta, puedes pensar que ya los tienes todos juntos, en su totalidad. Es decir, el conjunto lo puedes pensar como ya dado todo. Los puntos suspensivos indican que el conjunto no termina, pero no que en ese momento se está formando.

–Bueno, de cualquier forma no puede existir un número que represente a todos los elementos que tiene. Cualquier número que pienses, no importa qué grande sea, no es suficientemente grande para contar a todos sus elementos, pues son infinitos. Si pienso cualquier número siempre existe otro mayor, que puede ser el mismo más la unidad. Es por esto que lo que me escribiste es falso –concluyo de manera triunfal.

–Tienes razón en tu razonamiento. Ahora estamos ante un gran problema que hay que resolver. Debe de haber un número que represente a la totalidad de los elementos que tiene; pero, como bien dijiste, no puede ser ninguno de los que conocemos, porque, por más grande que sea, siempre existe al menos otro mayor, que es ese mismo número más la unidad, es decir, su sucesor. Y si decimos que es este, entonces también tiene un sucesor, y así en adelante. Pero sí estás convencido de que tiene un número cardinal.

–Claro que lo tiene. El conjunto está bien definido. Sabemos cuáles son sus elementos. Pero no puede ser ninguno de los que ya conocemos.

–Entonces, hay que inventar uno nuevo que cumpla con esta función.

–¿Inventar? –pregunto ahora muy sorprendido y hasta enojado, porque creo que me toma el pelo–. Esto parece una trampa. Si no existe, pues ya hay que dejarlo así. Cualquiera que inventes va a tener el mismo problema, no va a representar a todos los números, pues son infinitos.

–¿A ver, por qué crees que te hago trampa? Cuando ves una de las películas de la serie de la *Guerra de las Galaxias* y te presentan a un nuevo ser de otro planeta, no te sorprende que no se parezca a los humanos. ¿O qué? ¿Cuando ves un ser muy raro tú gritas: '¡Tramposos!'? No, al contrario piensas: 'Qué brutos, qué imaginación tienen estos tipos'. Lo mismo les debió haber pasado a los egipcios, babilonios, griegos, mayas y otros pueblos. Ellos no inventaron todos los símbolos que necesitaban para representar a los números en un mismo día. La necesidad, cuando encontraban números más grandes, los obligaba a encontrar nuevos jeroglíficos. ¿Y qué decir del pueblo hindú cuando inventaron los números que ahora usamos? Sin embargo, como tú mismo has dicho, nuestro nuevo número no puede ser igual a los que siempre hemos conocido, a los naturales. Pero el conjunto sí existe y conocemos sus elementos. Así que tenemos que inventar un nuevo símbolo o número que nos indique el número de elementos de ese conjunto.

–Oye, pero no conocemos el número de elementos.

–Recuerda que para poder compararlo con otros conjuntos y saber si tiene más, menos o igual número de elementos, no es necesario saber cuántos son exactamente, sino poder encontrar una correspondencia uno a uno entre todos y cada uno de los elementos de ambos conjuntos.

–Pues sí, cierto, ¿verdad?

–Por tanto, ¿qué nombre quieres que le pongamos a este nuevo número, y qué forma o signo usamos?

–¿Puede ser el nombre que sea?

–Claro, pues nosotros lo inventaremos. Lo importante es lo que va a representar o simbolizar: aquel número que nos dice cuántos elementos tiene la sucesión completa de todos los números. ¿Se te ocurre algún nombre?

–La verdad, no. Mejor escógelo tú.

No lo quiero decir, pero únicamente pienso en nombres como Luis, Pedro, Francisco, etcétera, y me hubiera dado pena y coraje que se burlara de mí.

–Entonces, con tu permiso, te voy a proponer uno. No voy a diseñar uno nuevo, pues a lo mejor me queda muy feo, como si fuera garabato, y se parece a uno de los seres extraterrestres de alguna película de ciencia ficción. Mejor escojo uno de los que ya existen, como por ejemplo algún símbolo de tráfico, o de música, o alguno que se encuentre en el programa que utilizas en la computadora para escribir. Existen muchos alfabetos (por ejemplo, el griego, el chino o el japonés) que usan muchos símbolos que para nosotros son extraños. En particular, hace tiempo conocí el alfabeto hebreo y me gustó mucho su primera letra, que se llama *aleph* y se representa con el símbolo $\aleph$. Y, con tu permiso, como en este momento me siento muy creativo le voy a agregar un subíndice cero, y entonces va a quedar como $\aleph_0$, para no confundirla con la propia letra hebrea. En realidad es como si escogiéramos la letra $m$ o la $n$ o la $z$. Entonces, el número nuevo que representará a la cantidad de elementos de la serie completa de todos los números naturales se va a llamar aleph cero, ¿qué te parece?

–No estoy feliz con el nombre. Además, aún no me has convencido de por qué es necesario inventar un nuevo número.

–Me gusta tu actitud. Para convencerte necesito más argumentos y que tú lo pienses con más cuidado.

# 3

Aparentemente, ¡qué fácil resolvió Octavio el problema que le planteé! Aún no estoy seguro de cómo lo hizo, pues tan solo se le ocurrió inventar un nuevo número, dándole un nombre raro y listo. Pero todavía me queda la duda de si es válido para usarlo. Necesito alguna prueba que me confirme que no hace trampa para salir del problema. Al decirle esto a Octavio me comenta que hay formas muy fáciles de convencerme de que este número es nuevo, pero que en otra ocasión me las enseñará. Por ahora quiere que lea otro cuento más, así que saca unas hojas de una vieja mochila y me las da. Qué bien, el cuento pasado del rey me gustó mucho y espero que este también. Así que la nueva carta empieza así:



Ante todo, es importante que tomes en cuenta que si hablamos de conjuntos que contienen un número infinito de elementos, estos deben de tener propiedades, características o cualidades distintas a las de los conjuntos finitos. De no ser así, no tendríamos por qué llamarlos de otra manera y su estudio no tendría interés alguno. Así que prepárate.

**La interminable vida de Tristram Shandy**

Bertrand Russell (1872-1970), un filósofo británico a quien le debemos grandes trabajos en esta temática del infinito, narra la siguiente situación:

“Tristram Shandy, como se sabe, invirtió dos años para hacer la crónica de los dos primeros días de su vida, y se lamentaba de que a ese ritmo el material se acumularía más rápidamente de lo que él era capaz de elaborarlo, de suerte que con el paso de los años cada vez estaría más lejos del final de su relato. Ahora bien, yo sostengo que si él hubiese vivido eternamente [es decir, un número infinito de años] sin sentirse cansado de su trabajo, entonces, aun en el caso de que su vida hubiese estado tan repleta de acontecimientos como cuando comenzó, ninguna parte de su biografía hubiera quedado sin escribirse. En efecto, el día centésimo será escrito en el año centésimo, el día milésimo en el año milésimo y así sucesivamente [...]. Esta proposición paradójica, pero perfectamente verdadera, depende del hecho de que el número de días de todo el tiempo no es mayor que el número de años".[1]

¿No se te hace increíble? Si su vida fuera finita, es decir que acabara pronto, no le daría tiempo de escribir su autobiografía. Pero como es infinita, es decir extremadamente larga, sí le da tiempo. ¿No es esto absurdo? Así nos parece porque estamos acostumbrados a tratar con conjuntos con un número finito de elementos; pero ahora debemos estar preparados para las más increíbles sorpresas. Estos números infinitos no deben comportarse como los que ya conocemos. Te sucede lo mismo cuando ves películas de magos, monstruos y otras cosas que solo existen en tu imaginación. Es obvio que estos seres no se van a comportar como lo hacen los seres humanos a los que estás acostumbrado. ¿O todos tus amigos chupan sangre, o pueden volar o caminar sobre las paredes?

Saludos, Octavio.



(1) Bertrand Russell. 1967. "Las matemáticas y los metafísicos", contenido en: *Misticismo y lógica*. Buenos Aires: Editorial Paidós. (Traducción de José Rovira Armengol. Col. Biblioteca de Filosofía. Serie Menor, número 9). Pág. 109.

¡Qué cuento tan interesante, original y entretenido me dio mi amigo! Ya es hora de dormir y no puedo dejar de pensar en la clase que dará el nuevo maestro mañana. Su actitud me dejó realmente asombrado: portándose como otro alumno, rio y jugó al fútbol como si fuera uno más en la escuela. El tema que va a tratar también me interesa: las teorías de la evolución. Alguna vez nos explicaron esto en la escuela, pero no recuerdo casi nada. También quiero ver cómo se portan mis amigos, pues tal vez no lo tomen en serio y no le pongan atención, pues posiblemente lo van a ver sin autoridad.

## 4

Por fin va a empezar la conferencia sobre las teorías de la evolución. El auditorio está totalmente lleno y solo se ve, sobre el escenario, una gran pantalla frente a todos nosotros. Se apagan las luces y, antes de que los alumnos empiecen a chiflar o a gritar, proyectan una serie de fotos muy impresionantes. Aparecen animales muy extraños, parecidos a peces, caballos, elefantes, lagartos, monos, etcétera, pero muy diferentes a los que conozco. Todos estamos interesados y el silencio es total. Siguen las imágenes, todas ellas con un parecido a algunos animales de la actualidad, aunque siempre hay algo que cambia. Al final se prende de nuevo la luz y ya está el nuevo maestro sobre el escenario, con un pequeño micrófono inalámbrico.

“¿Cómo saben que todas las personas que viven en el mundo se parecen a ustedes? –comienza la conferencia el maestro–. ¿Cómo saben que del otro lado del mundo no hay niños con tres manos, dos cabezas o seis dedos en cada mano, y aun así son perfectamente normales, de acuerdo a los estándares de sus países? ¿Se han preguntado cómo eran los seres vivos hace cien mil, doscientos mil o un millón de años? Las imágenes que les acabo de enseñar son una muestra de que algunos seres han cambiado notablemente a través del tiempo. Hay muchos factores que intervienen para que se lleven a cabo estos cambios. Por eso estoy aquí con ustedes, para que juntos entendamos el proceso de la evolución de la vida y la manera en que nos afecta".

Todos mis amigos ponen mucha atención, primero con las fotos y luego con las preguntas iniciales del maestro. El principio fue muy agradable, no como las clases, que los maestros las hacen siempre serias y aburridas. La conferencia dura una hora y trata sobre los principios de diversas teorías acerca de cómo evolucionan las especies. El maestro atrapó nuestra atención y nos llevó por este tema poco a poco, con inteligencia y de una manera natural. Resulta muy agradable, esta persona sabe del tema, a pesar de ser joven. Y sobre todo tiene una manera muy fácil de explicarlo.



No puedo dejar de hacer una comparación con Octavio, pues a los dos les gusta el conocimiento y comparten la manera de comunicarlo. Su estilo es claro y sencillo. El viejo realmente me cae muy bien, pero la diferencia de edad genera problemas. No me atrevo a hablarle de ciertos temas, porque creo que no me va a entender. Si mi papá no puede, ¿por qué lo haría una persona todavía mayor? Pero, con este nuevo profesor, presiento que puedo aprender muchas cosas. El simple hecho de que juegue con los alumnos hace todo más fácil, pues muestra que podemos aprender sin aburrirnos, desde un simple juego que antes consideraba tonto, hasta temas serios como el de la conferencia. Ahora me pregunto si este nuevo maestro conocerá algo sobre la sucesión infinita de los números. Termina la charla y todos aplaudimos. Es todo un éxito. Enseguida, el profesor invita a que hagamos preguntas y, después de unos segundos que parecen años, un compañero se atreve a preguntar por qué desaparecieron los dinosaurios. En lugar de decir que fue la caída de un meteorito muy grande, explicación que ya oí alguna vez en la tele, el maestro comenta que, probablemente, ciertos cambios climáticos hicieron desaparecer los alimentos a los que ellos estaban acostumbrados. Al despedirse y dar las gracias, nos dice su nombre: Fernando Vasconcelos.

## 5

De regreso a mi casa tengo muchas dudas. ¿Por qué un maestro nuevo a mitad del curso? ¿Qué quieren las autoridades de la escuela? ¿Cómo es que el profesor quiere que nos hagamos sus amigos? Esto suena muy bonito para que pueda ser cierto. Como no tengo la suficiente confianza para hablar de esto con mis padres, voy con la única persona que creo que me puede ayudar, mi amigo Octavio. Pero al contarle mis dudas, él lo toma de manera muy divertida. Ríe tanto que parece que nunca va a dejar de hacerlo. Me dice que no cabe duda de que soy una persona infinitamente compleja y difícil para tener contenta. Luego me explica que no debo de preocuparme de más, que mi inquietud no tiene fundamento, que debería confiar más en las personas y que disfrute, con mis compañeros, del nuevo profesor. Él me dice que las autoridades del país están sumamente preocupadas porque el nivel educativo es muy bajo y que así no vamos a poder competir con otros países; y que, en competiciones internacionales, siempre salimos en los últimos lugares y que es muy importante buscar diferentes métodos para hacer que los muchachos vayan más contentos a las escuelas. Le comento al viejo que a pesar de que él es un amigo para mí, me gustaría tener más conocidos de mi edad. En esta ocasión el viejo me habla mucho sobre mi forma de ser, lo que considera correcto e incorrecto, lo que me preocupa y cómo solucionarlo. Hablamos largo rato acerca de estos temas, como si fuéramos abuelo y nieto. Este es un aspecto de Octavio que siempre encuentro que me tranquiliza y ayuda. También comparto mis conclusiones acerca de la vida de Tristram Shandy.

–Me alegro mucho que te haya gustado este nuevo cuento –dice el viejo–, ahora vamos a hacer algunos diagramas para ver algo que resulta muy interesante. ¿Recuerdas el ejercicio que hicimos en el cine de relacionar una butaca con un niño y un niño con una sola butaca?

–Claro que me acuerdo –contesto muy convencido.

–Muy bien. Ahora imagina que tenemos un cine con infinitas butacas numeradas, así que un maestro invita a sus infinitos alumnos a este cine. Todos están muy felices porque tienen un lugar seguro. A cada niño se le ha asignado un número, para que cuando lleguen solo tengan que sentarse en el lugar que les corresponde. En la butaca uno se sentará el niño que tiene el número uno; en la butaca dos se sentará el niño a quien le fue asignado el número dos; en la butaca tres, el niño que tiene el tres; y así sucesivamente. Por tanto, no debe sobrar ningún lugar vacío y no debe haber niño sin lugar. Pero cuando todos estos niños van camino del cine, en la calle se encuentran con otro pequeño que no está invitado y que no tiene lugar. A los alumnos les da lástima y quieren que vaya con ellos a la función, pero se preocupan porque creen que no alcanzará lugar, pues ya todos están asignados. Ya no cabe nadie más. Entonces el maestro les dice que no se preocupen, que lo inviten y ya encontrarán una solución. Al llegar a la sala con infinitas butacas, el profesor coloca en la butaca uno al niño que se encontraron en la calle, y les pide a los demás que se corran un lugar, es decir, que en la butaca número dos se siente el niño con el número uno; en la butaca tres, el niño que tiene el número dos; en la butaca cuatro, el que tiene el número tres; y así sucesivamente. De inmediato algunos protestan, porque dicen que el último niño no alcanzará una butaca. Pero el maestro les recuerda que no hay un último elemento. No importa qué butaca sea, puede ser la mil y entonces le corresponde el alumno mil menos uno; o la tres millones y entonces le corresponde el alumno tres millones menos uno; o la *n*-ésima butaca y entonces le corresponde el alumno *n*-ésimo menos uno. O lo pueden ver al revés, al niño con la entrada uno le toca la butaca dos; al niño dos millones se le asigna la butaca dos millones más uno; y al *n*-ésimo alumno le corresponde la butaca *n*-ésima más uno. A cada elemento de cada sucesión le corresponde uno, y solamente uno, de la otra sucesión, por lo que las dos sucesiones son iguales. Además, les dice el profesor que, por tratarse de dos conjuntos infinitos, ninguno de los dos tiene un último elemento. Al final todos quedan acomodados y pueden disfrutar de un momento agradable.

Entonces el viejo anota un diagrama sobre la hoja y me lo enseña.

$$\begin{array}{rcccccccccc}
\text{Butacas} = & \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots, & n, & \ldots\} \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\
\text{Niños} = & \{0, & 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n-1, & \ldots\}
\end{array}$$

–El conjunto de los niños –explica Octavio– tiene un elemento de más, el niño que no estaba invitado. Le llamé cero porque no estaba considerado desde el principio para asistir y porque además lo pusimos delante de todos los demás niños, en el primer lugar. Las flechas representan cómo se acomodaron, es decir, al niño de la calle lo sentaron en la butaca uno, mientras que a los demás niños los corrieron un lugar. Fíjate que las flechas van en ambas direcciones. Eso quiere decir que a cada elemento de la primera sucesión le corresponde un único elemento de la segunda; y viceversa, a cada elemento de la segunda le corresponde un único de la primera. Si tú mencionas la butaca quinientos, ahí está sentado el niño cuatrocientos noventa y nueve. Si, por el otro lado, mencionas al niño tres mil cuatrocientos cuatro, sabemos que está sentado en la butaca tres mil cuatrocientos cinco. No importa qué niño o butaca menciones, ningún niño se queda sin butaca, y ninguna butaca se queda sin niño. Esto quiere decir que los dos conjuntos tienen exactamente el mismo número de elementos.

–Estoy de acuerdo contigo, pero esto debería ser imposible, porque la segunda sucesión debería tener, al menos, un elemento más, el niño cero.

–¿Pero sí estás de acuerdo en que las dos sucesiones tienen el mismo número de elementos?

–Sí, aunque me cuesta trabajo aceptarlo. Sin embargo, así lo muestran las flechas.

–Entonces, por un lado, el conjunto de todas las butacas tiene como número cardinal a $\aleph_0$; y, por el otro, el conjunto de todos los niños tiene como número cardinal a $1 + \aleph_0$, ya que está compuesto por el conjunto que contiene como elemento al niño de la calle que tiene al número uno como su número cardinal, y $\aleph_0$ que es el número cardinal del conjunto que contiene a todos los niños. Y, al mismo tiempo, los dos conjuntos se pueden hacer corresponder de tal manera que a cada elemento del primero le toca un único elemento del segundo, y viceversa. Esto quiere decir que:

$$\aleph_0 = 1 + \aleph_0$$

–Caramba, tú me habías dicho que esto nunca podía pasar en el caso de un número natural finito.

–Pero ya no hablamos de números naturales *finitos*. Si nuestros argumentos anteriores son correctos, es decir, las flechas están bien (y esto no puede pasar en el caso de que $\aleph_0$ fuera un número finito), entonces esto quiere decir que $\aleph_0$ *no puede ser un número finito o un número natural*.

–Totalmente de acuerdo. Entonces, ¿qué es?

–Bueno, es diferente. Mira –responde mi amigo–, no le vamos a llamar un 'número infinito', porque esta caracterización sería negativa. Infinito es la negación de lo finito. Pero nos ha costado mucho trabajo llegar a esta idea. Vale la pena buscarle un nombre más adecuado. Le llamaremos *transfinito*, que quiere decir *más allá* de lo finito. Es como el caso de tus padres, quienes después de muchos esfuerzos tuvieron un hijo varón, tú. ¿Crees que se hubieran quedado satisfechos con ponerte como nombre 'niño'? No, ellos querían un nombre que tuviera algún significado, un apelativo que les gustara o que les recordara a alguien muy querido, tal vez alguno de sus padres o de sus abuelitos. En este caso, la palabra transfinito es únicamente un nombre, pero que no tiene un significado negativo o peyorativo.

–¿Peyorativo?

–Sí, un nombre que fuera despectivo, que lo empleas con desprecio.

–Entonces este aleph cero en verdad que es distinto a todos los números que conocemos.

–Muy distinto. Pero, esto es muy importante, por el hecho de ser diferente no negamos que existe. Sino que afirmamos que debe de haber otro tipo de número distinto a los que ya conocemos; por eso le llamamos número transfinito. Lo mismo les debió pasar a los naturalistas, aquellos que coleccionaban plantas y animales, cuando se descubrió América. ¡Imagínate la cantidad de plantas y animales que para ellos eran desconocidos!

–Pues sí. Pero ¿transfinito? No me termina de gustar.

–Te repito que está más allá de los finitos, de los que sí tienen fin.

–Una cosa sí es cierta, no se porta como los finitos.

–Y eso no es todo, hay muchas otras propiedades más que lo confirman, solo que esas las veremos en otra ocasión. Hay algo que quiero que pienses. Vimos que si a un conjunto infinito le agregamos un elemento nuevo, se puede poner en relación, uno a uno, con el conjunto original. Se puede asignar a cada elemento del primer conjunto, un solo elemento del segundo conjunto y viceversa. ¿Qué pasaría si le agregamos, o quitamos, dos, tres, cuatro o cinco elementos más? ¿Se podrían poner, una vez más, en correspondencia los dos conjuntos resultantes?

–No lo sé. Pero no creo.

–Quiero que pienses en eso y me vengas a ver cuando lo tengas listo. Ahora regresa a tu casa porque ya es tarde.

## 6

Sé que tengo que regresar a mi casa, pero no tengo ganas de ir. Lo que me acaba de decir Octavio me sorprendió mucho, pues hasta hace pocos días creía que, si le sumas un uno a cualquier número, este tenía que ser distinto al original, sin importar cuál fuera. Pienso en muchos números, les sumo la unidad y compruebo que siempre son distintos. Digamos que tomo el treinta y dos, al sumarle la unidad se obtiene el treinta y tres, y obviamente treinta y dos es distinto a treinta y tres. Ahora lo hago con uno más grande: el mil doscientos treinta y cuatro. Si se le suma la unidad, se obtiene el mil doscientos treinta y cinco y, una vez más, estos dos números son distintos. Pero con el nuevo número llamado aleph cero no pasa esto. Y todo porque representa el número de elementos de un conjunto infinito. Si se le aumenta un elemento a un conjunto infinito, se pueden poner sus elementos en correspondencia con el conjunto original, como lo demostró el viejo con el ejemplo de las butacas. Pero él me dijo que no solo le sumara o le quitara un elemento, sino que dos, tres, cuatro y cinco. ¿Qué pasará al hacer esto? No lo sé. Así que, aunque no quiero llegar a mi casa, me apuro para hacer este ejercicio en una hoja de papel. Mi padre cena en el comedor y está de muy buen humor. Aprovecho para conversar con él y hacerle unas preguntas breves.



–Buenas noches, papá –digo acercándome a la mesa–. ¿Cómo te fue hoy en el trabajo?

–Bien, como siempre –contesta mi padre–. Gracias.

–¿Te puedo hacer una pregunta?

–Claro que sí, ya sabes que para eso estoy –dice mi papá y se nota que hace un esfuerzo por mostrarse atento a lo que digo.

–¿Qué pasa cuando le sumas un uno a cualquier número?

–Pues aumenta de tamaño –responde sin entender del todo.

–Y este nuevo número, ¿es diferente al original?

–Por supuesto que sí, pues si le sumas uno tiene que ser estrictamente mayor.

–¿Y siempre pasa esto?

–¿A qué te refieres exactamente? –responde mi padre un tanto extrañado.

–Quiero saber que si no existen números, tal vez un poco raros, que al sumarles un uno no cambien, que sigan siendo lo mismo.

–No existe tal cosa –responde mi papá después de pensarlo un poco y darle un sorbo a su café.

–Gracias, papá, solo eso quería saber. Me voy a mi cuarto para hacer los deberes.

Evidentemente, mi padre no está al tanto de los conjuntos infinitos y del sorprendente aleph cero. Tal vez esto sí sea invento del viejo y mío. Quizá nadie lo conoce y somos los primeros que lo hacemos. Esto me anima a hacer el ejercicio que me sugirió Octavio. Así que escribo el conjunto de todos los números igual que lo hizo mi amigo.

$$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Voy a empezar por quitarle un elemento a este conjunto, el número uno, y le voy a llamar ***M***.

$$\boldsymbol{M} = \{2, 3, 4, \ldots\}$$

Ahora tengo que ver si se pueden poner en correspondencia, uno a uno, cada uno de los elementos. Recuerdo que el viejo lo hizo de manera muy sencilla, solo usó unas flechas para indicar la correspondencia. Hago lo mismo y resulta que sí se puede:

$$\begin{array}{cccccccccc}
\boldsymbol{N} = \{ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots, & n, & \ldots\} \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\
\boldsymbol{M} = \{ & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \ldots, & n+1, & \ldots\}
\end{array}$$

Esto resulta muy fácil, pues es muy parecido a lo que se hizo con el ejemplo de las butacas. A cada elemento del conjunto llamado ***N***, le corresponde solo uno del llamado ***M***. Y viceversa, a cada elemento del conjunto ***M*** le corresponde uno y solo uno del conjunto ***N***. Así que ambos tienen el mismo número transfinito, como dice el viejo, que representa a sus elementos, es decir, aleph cero. Ningún elemento sobra en uno de los dos conjuntos, cada uno tiene su correspondiente pareja con el segundo grupo. Ahora se me ocurre que le voy a quitar no solo un elemento, sino dos. A este nuevo conjunto le voy a llamar ***O***, solo por llevar el orden del abecedario. Hago el diagrama y pasa exactamente lo mismo.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\boldsymbol{N} = \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots, & n, & \ldots\} \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\
\boldsymbol{O} = \{3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \ldots, & n+2, & \ldots\}
\end{array}$$

No importó que le quitara dos elementos, también se pudo hacer la correspondencia. Nadie queda sin pareja, pues son conjuntos infinitos. Lo interesante es que vuelven a tener el mismo número de elementos, por lo que tienen el mismo número que los representa, de nuevo el aleph cero. Ahora voy a quitarle tres elementos.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\boldsymbol{N} = \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots, & n, & \ldots\} \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\
\boldsymbol{P} = \{4, & 5, & 6, & 7, & 8, & \ldots, & n+3, & \ldots\}
\end{array}$$

Vuelve a dar el mismo resultado, se puede hacer la misma asociación. Así que no importa si al conjunto de los números le quito uno, dos o tres elementos, siempre se pueden poner en correspondencia, uno a uno, los elementos de los dos conjuntos. Es como en el ejemplo de las butacas, simplemente se corren los niños los lugares que son necesarios. Digamos que no se encontraron solo a un niño en la calle, sino que dos, tres, cuatro niños que no tenían asignado un lugar. Y repitieron el proceso que me comentó mi amigo las veces que fueron necesarias. Para comprobarlo lo hago quitándole cinco elementos y el resultado es exactamente el mismo.

De pronto me doy cuenta de una cosa, que no importa si se les quita o pone elementos, se va a poder hacer la correspondencia, por medio de las flechas, para que nadie quede sin su pareja. Puedo seguir con este proceso de quitarle elementos, o pensar en que hay más niños que no van a la escuela y, a pesar de eso, entran al cine y se les acomoda en una butaca, sin que nadie se quede de pie. Hago los dos ejercicios y llego a agregar, y quitar, hasta veinte elementos. El comportamiento es el mismo y puedo seguir haciéndolo sin ninguna complicación. ¿Hasta dónde podré llegar con este ejercicio? ¿Cuántos elementos se podrán quitar o agregar sin que se tenga que modificar el número que representa a estos conjuntos? Ya tengo otras dudas que debo consultar con Octavio.

## 7

Estas últimas tres semanas han sido muy raras en la escuela, con el nuevo maestro y el comportamiento de los alumnos. Después de la conferencia sobre las teorías de la evolución, hubo otras exposiciones. El maestro habló de temas como las estrellas, los aparatos más pequeños del mundo (llamados nanomáquinas), el ciclo de reproducción de algunos peces y muchas otras cosas que no se enseñan comúnmente en los libros; y, si lo llegan a hacer, siempre es de una manera que no atrae al alumno. Pero este maestro es muy distinto. Sabe de muchas cosas y lo explica todo muy fácil, claro y hasta divertido. Lo que más me gusta es que, gracias a esto, se me ha quitado un poco la timidez, pues hace que discutamos en equipo algunas cosas que nos dice. Pero no nos obliga. Las cosas que nos dice son más fáciles de resolver entre dos, tres o cuatro personas, incluso entre todo el grupo. Para cada idea que decimos, aunque sea la más simple del mundo, él tiene un comentario que nos alienta a pensar y descubrir la solución. Así que a todos nos gusta participar. Esto ha hecho que algunos alumnos que nunca hablábamos con los demás ya lo hagamos, incluso Mariana ha participado en estas discusiones. En el recreo, el maestro practica distintos deportes, fútbol, básquet o incluso vóley. El otro día, se sentó solo en un banco y parecía que tomaba notas de mis amigos. Observaba a alguno y después anotaba algo. Esto me agradó mucho, pues primero creo que el maestro se preocupa por conocernos. Y segundo, porque ahora, últimamente, tengo la manía de anotar todo para que no se me olviden las cosas que le quiero preguntar a Octavio. Así que este maestro ha hecho el ambiente más interesante y divertido.

## 8

Estamos en clase de deportes y deciden jugar al fútbol, pero yo no quiero hacerlo. Una vez que hacen los equipos, me ponen en el banquillo, como siempre, para un posible cambio que espero que no se dé. Me cuesta mucho trabajo controlar el balón y, cuando le pego, no sale ni con fuerza ni con la dirección que yo quiero. A veces, hasta me duele la pierna cuando lo golpeo. Lo que sí he notado es que a Mariana le gusta jugar básquet y le debería pedir al maestro de deportes que me enseñe para jugar con ella. Octavio me ha dicho que me anime a conversar, antes que otro de mis compañeros lo haga y se convierta en su novio. Pero me da pánico fracasar.

# 9

Es viernes por la tarde y mañana no tengo que ir a la escuela. Le pido permiso a mi mamá de salir y llego a la catedral, donde encuentro a Octavio sentado en un banco, leyendo un libro. Me acerco despacio, sin hacer ruido, para no interrumpirlo; pero él inmediatamente se da cuenta de que estoy ahí.

–¡Qué gusto verte, amigo! –dice el viejo con un tono amigable–. ¿Qué haces aquí tan solito?

–Espero a un amigo –miento.

–Qué bien, es bueno que las personas de tu edad tengan muchos amigos y descubran juntos la vida.

Ahora ya ninguno dice nada. Creo que se dio cuenta de la mentira, pero parece que no le importa. Cómodamente vuelve a abrir su libro y se pone a leer como si yo no estuviera ahí. Él sigue con su lectura, como si nada. Pero no puedo dejar pasar esta oportunidad de decirle lo de los conjuntos, así que hago un esfuerzo y comienzo a hablar con él.

–He pensado en lo del nuevo número aleph cero –comento sin afán de interrumpir su lectura.

–¿Y qué has pensado? –pregunta el viejo de lo más tranquilo, como si lleváramos varias horas con este tema.

Le cuento el ejercicio que hice con los conjuntos, eso de quitar o poner números y que aun así se pueda establecer la relación uno a uno. Le pregunto cuándo terminará esto, hasta dónde se puede seguir el proceso.

–¿Conoces los números pares? –pregunta Octavio como si no oyera mi pregunta.

–Sí –contesto sin saber adónde quiere llegar–, son el dos, cuatro, seis, ocho, diez, doce, etcétera, ¿no?

–Esos son. Quiero que hagamos un ejercicio con esos números. Primero vamos a sacarlos del conjunto de todos los números naturales, ya que están dentro de este.

–¿Cómo que dentro de este?

–A lo que me refiero es que el conjunto de los números pares está *contenido* dentro de todos los números naturales. Para que nos quede más claro, los escribiré de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{N} = \{1, \boldsymbol{2}, 3, \boldsymbol{4}, 5, \boldsymbol{6}, \dots\}$$

–Los números que están resaltados –explica el viejo– son los que me mencionaste, es decir, los pares. Los que sobran, los que no están resaltados, son los impares. Vamos a escribir a los pares como:

$$\boldsymbol{P} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

–Ya entendí, los diagramas me ayudan a entender lo que me dices. Los números pares sí están dentro del conjunto de todos los números naturales que ya conocemos. De hecho son la 'mitad' de todos, ¿no?

–Podemos pensar que así es, que el conjunto de los números pares es la mitad del conjunto de los números naturales, ya que estos últimos son el resultado de unir a todos los pares con los impares.

–Pues en el diagrama es lo que se ve. Pero entonces hay menos pares que naturales, ¿no?

–Eso es precisamente lo interesante –dice el viejo–, preguntarse si hay más números naturales que pares. Primero tenemos algo muy peculiar, porque este conjunto que parece la mitad de los naturales es infinito. Si una persona menciona un número par, es decir, que se pueda dividir entre dos, o que es un producto de multiplicar cualquier número por el dos, siempre podremos mencionar otro número par, solamente sumándole dos unidades al número mencionado. Por ejemplo, si alguien dice el veinte, le sumamos dos y nos da veintidós, que es par. Así para cualquier número par que nos mencionen.

–Pero, yo insisto, al ver las dos sucesiones uno claramente se da cuenta de que el conjunto de los naturales debe de tener el doble de números.

–Bueno, primero, en matemáticas no es suficiente con *ver* algo, sino que hay que razonar que es verdad. En segundo lugar, te lo voy a mostrar de una manera muy fácil, como siempre hemos hecho: te enseñaré que existe una relación uno a uno entre los elementos de los dos conjuntos.

–Eso sí que quiero *verlo* –digo en un tono retador.

Ahora, Octavio da la vuelta a la hoja donde hace los diagramas y apunta:

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
\boldsymbol{N} = \{ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & \ldots, & n, & \ldots \} \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\
\boldsymbol{P} = \{ & 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & 12, & 14, & 16, & \ldots, & 2n, & \ldots \}
\end{array}$$

–Mira, para verificar que las flechas van en ambos sentidos y que ninguno de cada uno de los números de los dos conjuntos se queda sin un único elemento que se le asocia del otro conjunto, piensa de la siguiente manera: a cada número natural, no importa el que sea, le corresponde un único elemento del conjunto de los pares (este número es el que resulta de multiplicarse por el número dos). Como todos los números naturales son diferentes, también son diferentes los que resultan de ser multiplicados por dos. Y ahora, de manera inversa, a cada dos números pares diferentes divididos entre dos les corresponden, necesariamente, dos números naturales diferentes. De esta manera, a cada elemento de cada conjunto le corresponde uno y solamente un elemento del otro conjunto, lo que nos dice que ambos conjuntos tienen exactamente el mismo número de elementos. Si quieres, te reto a que me digas algún número de cualquiera de las dos sucesiones que no se corresponda con algún número de la otra sucesión.

–Esto es increíble. –Trato de pensar en algún número natural que no esté correspondido con algún par, pero no lo encuentro–: Me dices algo que va en contra de lo que siempre nos han enseñado en geometría: que el todo es mayor que cualquiera de sus partes. *Aquí me dices que* *una parte es igual al todo*. Si se lo dijera a mis papás, me dirían que estoy loco, que eso nunca puede pasar.

–Acuérdate de que hablamos de conjuntos infinitos y que estos deben de tener algunas características que los distingan de los finitos y, por lo tanto, nos deben deparar muchas sorpresas. Para empezar, hace unos instantes me preguntaste que hasta cuándo iba a durar el proceso de quitar elementos a la sucesión de todos los números naturales y que se pudiera seguir poniendo en correspondencia uno a uno con ella misma. Con el ejercicio del conjunto de los números pares, hemos mostrado que se le puede quitar una infinidad de elementos a la sucesión de todos los números naturales y, aun así, encontrar una correspondencia uno a uno con ella misma.

Ahora pienso que, así como todo número se hace par cuando lo multiplico por dos, un número se vuelve necesariamente impar cuando lo multiplico por dos y le quito una unidad. Así:

$$\text{Para } n = 1,\ 2n - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$$
$$\text{Para } n = 2,\ 2n - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$$
$$\vdots$$
$$\text{Para } n = 15,\ 2n - 1 = 2 \cdot 15 - 1 = 30 - 1 = 29$$
$$\vdots$$
$$\text{Para } n = 538,\ 2n - 1 = 2 \cdot 538 - 1 = 1.076 - 1 = 1.075$$
$$\vdots$$

Al ver el diagrama que ha dibujado Octavio, inmediatamente se me ocurre que el conjunto de todos los números impares también debe de tener el mismo número de elementos que el conjunto de los números naturales y, por lo tanto, el mismo número de elementos que el conjunto de los números pares. Enseguida, sin decir palabra, tomo la libreta y el lápiz de manos de Octavio y dibujo el siguiente diagrama, que, por cierto, a mí no me queda tan bonito y claro como a Octavio. Incluso las flechas quedan un poco torcidas.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\boldsymbol{N} & = & \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots, & n, & \ldots\} \\
 & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\
\boldsymbol{I} & = & \{1, & 3, & 5, & 7, & 9, & \ldots, & 2n-1, & \ldots\}
\end{array}$$



Octavio simula sorpresa y me dice:

–Pero, esto, ¿qué quiere decir?

–Pues que el conjunto de los números impares, que está contenido en el conjunto de todos los números naturales, también se puede poner en correspondencia uno a uno con los naturales y los pares, y, por lo tanto, los tres conjuntos tienen exactamente el mismo número de elementos. Entonces, necesariamente, $\aleph_0$ es el número cardinal de cada uno de los tres conjuntos.

–Perfecto, ¿y qué más puedes inferir?

Tomo de nuevo el lápiz y dibujo el símbolo de aleph cero que ahora tanto me gusta. Me quedo pensando por unos segundos y me pregunto que más se podrá decir del ejercicio que Octavio ha guiado. Vuelvo a ver mis esquemas y regreso al primero de ellos.

$$\boldsymbol{N} = \{1, \boldsymbol{2}, 3, \boldsymbol{4}, 5, \boldsymbol{6}, \ldots\}$$

Veo como se intercalan los números impares con los pares. Siempre después de un impar va un par y viceversa, después de un par, siempre va un impar. La suma o unión de los dos conjuntos forma exactamente al conjunto de todos los números naturales. Ahora, sin decir palabra ni girarme hacia Octavio, escribo:

$$\begin{array}{ccccc} \text{PARES} & + & \text{IMPARES} & = & \text{NÚMEROS NATURALES} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \aleph_0 & + & \aleph_0 & = & \aleph_0 \end{array}$$

Me quedo helado, mudo. Por un momento, creo haber hecho el descubrimiento más importante de mi vida. Esto es algo que los más importantes sabios de la Antigüedad nunca habrían imaginado ni entendido. No quiero echar a perder el momento diciendo alguna tontería, así que me quedo callado por unos segundos que me parecen una eternidad. Lo veo, pero no lo creo.



–¡Increíble! –exclama Octavio–. Este es un número que sumado a sí mismo nos da el mismo número.

–¡Esto no pasa con los números que siempre he conocido! ¿Verdad?

–Tienes toda la razón, esto nunca pasa con los números que tú conocías. Sin embargo, acuérdate de que este es un número transfinito y debe tener características que lo hagan diferente de los finitos. Esta es una de esas peculiaridades, no la única.

–¿Hay más conjuntos que se comporten de la misma manera?

–Pero si tú mismo ya los viste. ¿Te acuerdas del ejercicio de quitarle al conjunto de todos los número naturales uno, dos, tres, cuatro, cinco elementos? Todos esos conjuntos se pudieron poner en correspondencia uno a uno con el conjunto de todos los números naturales, y entonces puedes afirmar que todos tienen a aleph cero como su número cardinal.

–Pero ¿hay más conjuntos infinitos que, aparentemente, sean más chicos que la totalidad de los números naturales y que tengan cardinalidad a aleph cero? ¿O conjuntos, que, aparentemente, tengan más elementos que el conjunto de todos los números naturales y tengan como número cardinal a $\aleph_0$?



–Claro que sí hay muchos más, ya te lo había comentado. Solo se necesita un poco de imaginación. ¿Te acuerdas del concepto de potencia, aquel que significa la multiplicación repetitiva?

–Sí, me lo comentaste en el cuento del rey que se fue a la quiebra por no saber contar.

–Muy bien. Pues en ese cuento se usaron las potencias de dos, que es un conjunto que cumple con lo que me dijiste. Pero las potencias de tres, cuatro, cinco, seis, siete, etcétera, también tienen estas características. Piensa, por ejemplo, en el conjunto que contenga a todas las potencias de cinco.

Y escribe en otra hoja lo siguiente:

$$\boldsymbol{P}^5 = \{5^1, 5^2, 5^3, 5^4, \ldots\}$$

–¿Ahora recuerdas que ya lo habíamos comentado? –pregunta el viejo.

–Tienes razón, entonces me explicaste que solo hay que multiplicar por sí misma la base, que en este caso es el cinco, cuantas veces indique el exponente, ¿no?

–Sí. El mismo conjunto se puede escribir de la siguiente manera y representa exactamente lo mismo.

$$\boldsymbol{P}^5 = \{5, 25, 125, \ldots, 5^n, \ldots\}$$

–¿Aquí también funciona la correspondencia uno a uno con el conjunto de todos los números naturales?

–Claro. Piensa que al 1 le asocias el $5^1$ (igual al cinco); al 2 le asocias el $5^2$ (igual al veinticinco); al 3 el $5^3$ (igual al ciento veinticinco); y, al número $n$, le asocias el $5^n$. Este nuevo conjunto $\boldsymbol{P}^5$ tiene, aparentemente, muchísimo menos elementos que la sucesión completa de todos los números naturales, pues aquí no están:

1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, . . . , 24, 26, . . .

124, 126, . . . , 624, 626, . . . , 3.124, 3.126, . . .

Sin embargo, como también puedes establecer esa correspondencia uno a uno entre todos y cada uno de los elementos de ambos conjuntos, entonces ambos tienen el mismo número cardinal, $\aleph_0$.

–¡Qué bárbaro! –es lo único que se me ocurre decir. Por dentro, estoy muy sorprendido.

Una vez dicho esto, Octavio se para y camina rápidamente hasta perderse entre los turistas que visitan el pueblo.

> *Nadie jamás será capaz de expulsarnos del paraíso que Cantor ha creado para nosotros.*
>
> David Hilbert

# Capítulo 4

## 1

Aunque me sigue dando mucha pereza despertarme y desayunar cuando aún no tengo hambre, por lo menos ahora voy con algunas ganas a la escuela. El profesor Vasconcelos ha realizado algunos cambios que hacen menos aburridas sus clases. Para empezar, utiliza mucho las presentaciones en *Power Point,* lo que hace más rápidas las horas de clase. En lugar de tomar muchas notas, vemos imágenes muy interesantes. Nos ha llevado al museo y explicó algunas de las pinturas que ahí se encuentran. También ha dejado tareas donde tenemos que escribir sobre temas que nos gustan y también investigar en internet. Incluso hemos visto películas, como *El imperio contraataca*, y después hace preguntas y eso motiva que discutamos entre nosotros. Ahora nos conocemos mejor y he podido oír lo que opina Mariana. Con solo oír su voz basta. Está claro que es muy lista, pues normalmente menciona ideas que a los demás no se nos habían ocurrido. Además habla de otras cosas que la mayoría de nosotros nunca hemos visto o visitado, como el Museo de Antropología, el Castillo de Chapultepec o la Columna del Ángel de la Independencia.

Hace unos días se inauguró una ludoteca, que no es otra cosa que un salón grande que tiene varias mesas con sillas y donde se guardan muchos juegos. Se puede usar aquí en la escuela o llevarlos a casa, pero casi nadie hace esto porque lo divertido es jugar con alguien. No sé de dónde han sacado tantas cosas. Hay muchos juegos raros e interesantes, y dicen que hasta algunos fueron traídos de Japón. También se han juntado grupos de alumnos con los mismos intereses para formar equipos. Así que algunos juegan ajedrez, damas chinas, *rummy*, dominó y maratón. Otros pueden armar rompecabezas y además hay equipos de fotografía, fútbol, básquet y hasta béisbol, que antes nadie jugaba. Algunos amigos están en varios equipos.

Nunca imaginé que esta sería mi oportunidad para hacerme amigo de Mariana. Resulta que el *backgammon* es su juego favorito y a mí también me gusta muchísimo. Así que, al menos dos días a la semana, nos quedamos después de clase y jugamos un rato. Claro que aún no me atrevo a invitarla a algún lado o a tomar un helado, ni siquiera a acompañarla a su casa. Pero ya sabe quién soy. Lo malo es que yo creo que se ha de dar cuenta de que me gusta, pues me pongo muy nervioso cuando estoy cerca de ella y nunca sé qué decir.

Las lecciones del nuevo maestro siguen. Nos habla de temas poco conocidos y que no aparecen en los libros. El otro día discutió sobre los superhéroes de la televisión. Nos enseñó varias historietas en las que aparece *Superman*, pues dijo ser aficionado a este superhéroe y por eso tiene la colección completa. Uno de mis amigos le preguntó cómo controla *Superman* sus poderes, cómo ve a través de los muros con su vista de rayos x sin quemarlos y sin pasarse de la distancia que quiere. Entonces el maestro sonrió y dijo que eso solo lo sabe un experto en el tema, pero como él es uno, nos iba a explicar todas estas cosas rápidamente. Nos habló del planeta de donde viene *Superman*, de sus padres, de por qué lo mandaron a la Tierra, de todos los superpoderes que posee, de la persona de quien se enamoró, etcétera. Al final, nos pidió que escribiéramos en una hoja un superpoder que nos gustaría tener, para qué lo usaríamos y por qué ese en particular. Uno de mis amigos le preguntó si podía escoger todos, y ser exactamente como *Superman*, pero el maestro dijo que así ya no tenía gracia, que lo interesante era elegir uno solo para cada uno de nosotros. Esta tarea no fue nada fácil, pues es complicado escoger entre ser superfuerte, o tener vista de rayos x, o volar. Al final escogí poder volar y tener la libertad de ir adónde yo quiera, sin tener que caminar, y así no cansarme.

Cuando todos entregamos nuestros deseos, el maestro dijo que escogería volar, pues desde pequeño quiso saber qué se siente y muchas veces soñó con eso. Toda la clase se puso feliz cuando nos dijo que la próxima película sería sobre *Superman*, aunque todavía no sabía cuál de todas. Por lo que dijo, creo que nos gustan algunas de las mismas cosas. Todavía no me atrevo a acercarme a él, para hacerle preguntas.

En clase, hoy, el maestro nos dijo que iba a dar otra conferencia en el auditorio el próximo viernes. Algunos alumnos no tienen ganas de ir, porque esta vez hablará de matemáticas y todos piensan que ahora sí será aburrida. Inmediatamente, tengo pensamientos que se ponen en contra unos de otros. Lo que definitivamente no quisiera es que el maestro hablara de las cosas que yo he discutido con Octavio y que siento que nadie más sabe. Bueno, estoy casi seguro de que ninguno de mis compañeros las ha oído antes, yo creo que ni Mariana. Por otro lado, a lo mejor el maestro sabe cosas que Octavio no me ha contado o que a lo mejor podría entender mejor si alguien me las explicara de otra manera. Esto me pasa a menudo. Me entran muchas dudas, me preocupo mucho y no sé qué hacer. Cuando esto me pasa, mi mamá me tranquiliza y me dice que me preocupo sin razón, que muchas veces ni siquiera suceden las cosas como me las imagino. Aunque, generalmente, le doy la razón a ella, no puedo dejar de preocuparme. Esa es mi manera de ser y no la puedo cambiar.

Esta semana me mandaron muchos deberes, así que no he tenido tiempo de otra cosa más que leer, estudiar y escribir ensayos relacionados con el colegio. Hasta mis padres se extrañan de que no salga por las tardes, me preguntan que si estoy enfermo. Esto me da risa. Primero, no me dejaban salir a ninguna parte y ahora se preocupan si no lo hago. ¿Quién los entiende?

Parece ser que al profesor Vasconcelos no le gustan las rutinas, porque todos los días hace y dice cosas distintas. He notado que llega por distintos caminos a la escuela. Algunas veces veo que sigue un camino, y en ocasiones otros. Además, he notado que se detiene a ver una casa, una calle, un animal o algo que llame su atención.

Siempre hay algo que lo hace pensar e irse a otro mundo, donde no oye ni presta atención a los demás. Algunos de mis amigos ya cuentan chismes de él. Unos dicen que lo vieron con una novia; otros dicen que vive en una casa pequeña llena de libros; y otros dicen que vivió algunos años fuera del país mientras estudiaba. Pero yo no creo en esos chismes porque parecen puras invenciones. Parece ser que todavía no tiene amigos aquí. Aunque, en general, casi todo el mundo habla bien de él. Los que juegan al fútbol dicen que es muy bueno. Siempre sabe qué decir para que las discusiones sean interesantes. Y también puede castigar, como el otro día que separó a dos que se peleaban en la calle de atrás de la escuela. Tal vez Octavio lo conozca y me pueda explicar cómo es que sabe tantas cosas.

## 2

Es viernes y el auditorio está lleno con todos nosotros. Además hay algunos profesores, porque les gusta oír al nuevo maestro. Ellos también están contentos con él. Inicia la conferencia y, por un momento, no parece que vaya a ser de matemáticas. El maestro empieza por exponer algunas de las nuevas teorías y descubrimientos acerca del origen del hombre. Comenta sobre los restos más antiguos y explica cómo y cuándo se supone que el hombre se trasladó a Europa. También habla de unos huesos de animales, que algún humano les talló unas rayas con el propósito de contar algo. La conferencia sigue y dice cómo el hombre se volvió sedentario y que eso lo obligó a tratar de medir el tiempo; pone como ejemplo distintas culturas y explica el calendario de cada una de ellas. Las imágenes que pone son fantásticas. También explica lo difícil que es usar esos sistemas de números, porque algunas culturas no tenían el cero ni símbolos correctos para representarlos. Así que las operaciones de suma, resta, multiplicación y división eran muy difíciles. Incluso los expertos en historia de las matemáticas (yo no sabía ni que existía alguien así) aún no se ponen de acuerdo en muchas cosas que ahora nos parecen elementales. Bueno, esas fueron sus palabras. La conferencia acaba cuando el maestro narra cómo fueron introducidos los números negativos, que la gente no podía aceptar porque les parecían absurdos. En esos días pensaban que si los números sirven para contar o medir, ¿cómo es que existe un número que vale menos que cero? Eso es absurdo. Inmediatamente pienso que lo mismo sucede con los números transfinitos, que al principio parece absurdo que existan números más allá de los finitos. Al final, como siempre, el maestro invita a que hagamos preguntas. Y, como siempre, primero hay un silencio como de iglesia. Finalmente, levanto la mano y le pregunto si ese conjunto de números es infinito. Todo el mundo se gira para mirarme, incluyendo a Mariana, con cara de: ¿qué demonios preguntaste? Nadie entiende excepto el maestro, que me dice que es una excelente pregunta. Yo ya sé la respuesta, pero quiero ver cómo los coloca o los arregla, pues Octavio siempre pone los puntos suspensivos al final. No debe de ser así, o no creo que sea así. Desgraciadamente, el maestro no explica realmente lo que quiero saber. Termina la conferencia y no logro prestar atención a sus últimas palabras, al parecer muy divertidas, pues todos se rieron. Cuando salimos, Mariana se acerca y me dice:

–¿Qué quiere decir eso de que el conjunto de todos los números negativos sea infinito? ¿Cómo se te ocurrió preguntar eso?

–Si quieres –respondo– el martes te lo explico, mientras jugamos al *backgammon*.

Inmediatamente me arrepiento de lo que le dije a Mariana.

¿Para qué esperar todo el fin de semana? ¿Por qué no le dije que la invitaba a tomar un helado para hablar de eso? ¡Qué tonto fui! Esta era la oportunidad ideal para hacer algo con ella fuera de la escuela. Pero ya no tiene solución. Ahora me tengo que aguantar hasta el martes, a menos que la encuentre en el pueblo durante el fin de semana.

Por un buen rato no dejo de pensar que perdí mi oportunidad de ver a Mariana fuera de la escuela. Y después tampoco dejo de pensar en ese conjunto de números negativos del que habló el maestro. ¿Cómo se deben escribir, de derecha a izquierda o de izquierda a derecha? Esto lo pienso porque en algún momento de la charla el maestro dijo que los números naturales más los números negativos forman otro conjunto que se llama los números enteros. Pero ¿cómo se ponen estos dos conjuntos juntos? Por más vueltas que le doy, no tengo ni idea.

# 3

Caminar por las calles del pueblo siempre me ha gustado, mientras escucho mi música favorita en mi *ipod*. Es divertido ver a los turistas que siempre toman fotos de las mismas cosas y que se creen muy listos porque regatean los precios con los comerciantes del centro. Vuelvo a pensar en la conferencia del maestro y me doy cuenta de que mi mamá tenía razón: me preocupo por cosas que después no pasan. El maestro no habló de aleph cero ni de las cosas que Octavio me ha enseñado. Habló, muy en general, de la historia de los números, cosas que yo tampoco sabía.

Son las seis de la tarde y llego a la cabaña del viejo. Octavio me invita a un vaso de leche con chocolate y un pan delicioso acompañado de nata, que tanto me gusta. Le cuento lo que pasó en la escuela, de la conferencia, de los números negativos y de que existen muchos más. Él me escucha atento y mueve la cabeza afirmativamente, de vez en cuando ríe. Cuando termino mi relato, me explica que no solo existen ese tipo de números, sino que también los llamados triangulares, cuadrados, primos, perfectos, racionales o fraccionarios, irracionales, trascendentes, algebraicos, complejos, etcétera. Poco a poco los iré conociendo, pero a su debido tiempo. También muestra una especie de satisfacción por el tema de la conferencia del maestro, incluso sus comentarios me hacen pensar que pudiera conocer al joven profesor.

–Ahora que ya conoces los negativos –dice Octavio –, vamos a hacer un ejercicio. Primero los anotaremos en el papel.

–¡Eso es precisamente lo que traté de hacer, pero no pude! –exclamo emocionado.

–¿Por qué no pudiste?

–Lo que pasa es que no supe cómo escribirlos, pues estoy acostumbrado a escribir de izquierda a derecha y esta serie no tiene primer término a la izquierda y no sé cómo empezar.

–Pues eso se arregla muy fácil –dice el viejo sacando papel y lápiz para escribir–. Los voy a anotar, a ver qué te parece. Antes de eso, ¿cómo quieres que llamemos a este conjunto igualmente infinito?

–No lo sé, tal vez ***-N***, pues son los negativos de los que hemos visto estas semanas.

–Esa es una solución; pero, la verdad, no me gusta. ¿Qué te parece si mejor les asignamos solo la letra arbitraria ***Z***?

–Está bien –respondo sin realmente importarme con qué letras llamemos a este conjunto.

–Muy bien, ahora el diagrama queda de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1\}$$

–Los tres puntos suspensivos a la izquierda, al principio. ¿Es válido hacer eso?

–Claro que sí. Es lo mismo que en el conjunto de ***N***, los tres puntos siguen siendo una abreviación para escribir, solo que colocados de manera diferente. Aunque también es válido escribirlo al revés, es decir:

$$\boldsymbol{Z} = \{-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots\}$$

Ahora me pregunto: ¿cuál será el número que representa a la cantidad de todos los elementos de este nuevo conjunto de los enteros negativos?

–Cuando estaba en la conferencia también me surgió la misma duda, pero tiene que ser el mismo aleph cero. Lo digo porque este conjunto es muy parecido a ***N***. Son exactamente los mismos números, solo que con el signo menos. Así que debe de tener el mismo aleph cero como cardinalidad.

–Suena muy bien lo que dices y por supuesto que tienes razón. Sin embargo, ¿cómo hacemos para comprobarlo?

–Cómo hemos hecho desde el principio –respondo recordando las conversaciones anteriores–. Basta que anotemos este conjunto junto con el de ***N*** y poner a cada elemento de un conjunto en correspondencia con un solo elemento del otro, por medio de flechas, y listo.

–De nuevo tienes razón –dice el viejo muy satisfecho–. Aquí tienes una hoja y lápiz para que lo hagas mientras voy por más nata y pan.

El viejo se levanta y va hacia la cocina. Tomo lápiz y papel y escribo con mucha facilidad lo que me pidió. Basta asignarle al uno el menos uno, al dos el menos dos, al tres el menos tres, al cuatro el menos cuatro, y así sucesivamente para toda la infinidad de números de ambos conjuntos.

$$\begin{array}{rcccccccccc} \mathrm{N} = \{ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots, & n, & \ldots\} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \boldsymbol{Z} = \{ & -1, & -2, & -3, & -4, & -5, & \ldots, & -n, & \ldots\} \end{array}$$

Regresa Octavio y le enseño el diagrama que muestra que el conjunto de los negativos tiene como número cardinal a aleph cero. Ambos conjuntos tienen exactamente el mismo número de elementos. Pero ahora me dice que vamos a unir los dos conjuntos más el cero, es decir, a ***N***, ***Z*** y cero. Yo no entiendo del todo y escribe lo siguiente para que lo comprenda:

$$\{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

Me pregunta sobre la cardinalidad de este nuevo conjunto y no sé qué decirle. Primero pienso en sumar dos veces aleph cero más uno, pues son dos conjuntos infinitos más un nuevo elemento (el cero), y esto ya sé que es igual a aleph cero. Pero me hace dudar que el conjunto empiece y termine con puntos suspensivos, pues no sé cómo poner las flechas que vayan para ambos lados.

Después de pensarlo un poco, le comento al viejo mis reflexiones y me dice que no tengo que hacer las cosas tan complicadas.

–¿Recuerdas cuando discutimos los números pares y los impares? –pregunta él.

–Sí –contesto–. Me enseñaste cómo los números pares unidos con los impares forman el conjunto de los números naturales.

–Exactamente eso es lo que dijimos. ¿Recuerdas cuál fue el número cardinal para esos dos conjuntos?

–Pues el de siempre –contesto–, el número que inventamos, aleph cero.

–¿Y recuerdas que también concluimos entonces que $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$?

–Claro, esa ha sido una de mis grandes sorpresas.

–Pues este es exactamente el mismo caso. Tenemos dos conjuntos con cardinalidad $\aleph_0$ y otro conjunto (el número cero, que está entre ambos) con cardinalidad igual a 1. Entonces tenemos:

$$\aleph_0 + 1 + \aleph_0$$

Pero, también sabemos que:

$$1 + \aleph_0 = \aleph_0$$

Así tenemos,

$$\aleph_0 + \aleph_0$$

que es igual a:

$$\aleph_0$$

Ya no es necesario decir otra palabra. Con esto basta. No es necesario que pongamos las flechas. Otro conjunto nuevo, este con más del doble de elementos que el conjunto de todos los números naturales, y que también tiene cardinalidad aleph cero.

## 4

Ahora ya conozco otro tipo de números que jamás terminan y me pregunto si hay más del mismo estilo. Al principio de esta conversación, el viejo me mencionó nombres de otros tipos de números. Unos sí los conocía, como los fraccionarios; pero otros no. Creo que dijo “trascendentes”, no sé si le escuché bien. Me pregunto si también serán infinitos, y si son igual de interesantes y si todos tendrán el mismo número cardinal aleph cero. Aunque ya me empieza a aburrir que todos sean iguales.

Camino a mi casa no puedo dejar de pensar en dos cuestiones. Por un lado, en que puede existir otro tipo de números, aparte de los que conozco, igual de infinitos e interesantes. Y, por otro, que tal vez Mariana se interese en estos temas. Estaré junto a ella el martes, porque nos toca jugar al *backgammon*, y le voy a hablar de estas cosas.

# 5

Estoy sentado en un banco. Disfruto del recreo, mientras como un chocolate y bebo un refresco. El maestro joven pasa delante de mí y estoy a punto de preguntarle lo que me dijo el viejo, pero no lo hago y me quedo sentado. Me sorprende porque él da media vuelta y se sienta junto a mí, me mira y me saluda con una sonrisa. Hay días en que no juega con alguien, solo se pasea por el patio o simplemente desaparece de la vista de todos, aunque yo sé que va a la biblioteca. Pero en este momento está aquí, conmigo, y no sé cómo hacer para empezar a hablar. Él empieza, pero no me agrada lo que me dice.

–¿Quieres jugar un poco?

–La verdad es que no sé jugar bien al fútbol y prefiero no hacerlo –contesto tímidamente.

El ríe de buena gana y eso no me gusta. Al ver mi cara de enojo, me explica:

–Sé que en ocasiones parece que el fútbol es el único deporte que aquí se practica, pero hay muchas cosas más que jugar en este recreo. Si te diste cuenta, se inauguró la ludoteca, en donde puedes encontrar diversos juegos que no son fútbol ni tienen relación con él.

–Tienes razón –contesto más tranquilo–. ¿Por qué se les ocurrió abrir una ludoteca en esta escuela?

–Yo creo que en todas las escuelas debería haber una. Siempre he pensado que el juego es muy importante en la vida. Desde pequeños aprendemos jugando y es una actividad que a la mayoría de las personas, por no decir a todas, nos gusta. ¿Acaso a ti no te gusta jugar?

–¡Claro que me gusta! Solo que aquí en la escuela a la mayoría les gusta el fútbol y yo soy muy torpe para eso.

–Te entiendo, de muy chico a mí tampoco me gustaba. Pero con práctica fui mejorando. Aún hoy, no soy bueno, pero sí me divierto mucho. No digo que es todo en la vida, solo que es bueno conocer de todo un poco. Es por esto por lo que convencí al director de que esta escuela debería tener una ludoteca. Por cierto, aquí traigo un juego que no practico desde que era un adolescente como tú, y tengo muchas ganas de jugar.

–¿De qué se trata? –pregunto interesado por lo que pueda ser.

–Es algo muy sencillo pero sumamente entretenido –responde el profesor a la vez que saca dos pequeñas cajas negras y me da una–. Imagina que tú y yo estamos en guerra, ambos tenemos tres barcos de diferente tamaño y el propósito es hundir a los del enemigo.

–¿En guerra? –pregunto sorprendido, porque siempre he pensado que la guerra es algo malo y que ni siquiera se debería jugar con ello.

–No pongas esa cara. Estoy de acuerdo contigo en que las guerras no deberían existir –dice el maestro como si leyera mis pensamientos–. Este es un juego de estrategia, de esos que ayudan a agilizar la mente, y no tiene nada de malo. Sé que la paz es lo mejor, pero en la vida no siempre tenemos lo más adecuado para las personas. Así que relájate y vamos a jugar.

Me da mucho gusto que el profesor comparta esta idea conmigo, pues por un momento pensé que éramos totalmente distintos. Abro la caja y me encuentro, en la parte de arriba, muchos cuadros con un pequeño orificio en el centro. En la parte de abajo aparece lo mismo, pero con barquitos de diferente tamaño que se pueden colocar en los orificios. También hay palitos de plástico, blancos y rojos, que caben perfectamente en los hoyitos.

–¿Cómo se juega a esto? –pregunto.

–Como ya te dije, hay que hundir los barcos del oponente. Si te das cuenta, en la cuadricula están las letras *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *J,* que representan a cada renglón. Para identificar a las columnas están los números del uno al diez. Así que tenemos cien cuadritos, cada uno con un orificio en el que caben estos pequeños palos de plástico. Los tres barcos son de diferente tamaño, uno abarca tres cuadros, el otro cuatro y el más grande cinco; y todos se pueden colocar en los orificios. Cada jugador tiene un tablero igual. Debes poner tus tres barcos en la parte de abajo, sin que yo los vea; yo hago lo mismo y empieza el juego. Tendrás cinco tiros para disparar a mis barcos, y al final yo te digo si le diste a alguno o no. Luego yo tengo cinco tiros y tú me dices si acerté o no. Después, de nuevo, tienes cinco tiros; luego yo otros cinco y así hasta que uno de los dos hunda todos los barcos del oponente. Cada vez que yo tire, pondrás un palo blanco en el punto que te mencioné. Si le doy a tu barco, pones uno rojo encima de él. Por ejemplo, el bote mediano abarca tres cuadros. Si le doy a los tres, entonces ese barco estará hundido. ¿Tienes alguna duda?

–Solo una. Dices que hay que tratar de hundir los barcos con tiros, pero ¿cómo vamos a tirar?

–Me faltó explicar eso. Pues vamos a tirar, es decir, lanzar un misil al contrario, diciendo los nombres de cada cuadro.

–¿Los nombres? ¿Cada uno de los cuadros tiene un nombre?

–¡Claro que lo tiene! ¿Para qué crees que sirven las letras y los números que representan a los renglones y a las columnas? Cada cuadro puede ser identificado, de manera única, con una letra y un número. Digamos que yo lanzo un misil en *D*4, entonces me refiero al renglón *D* y a la columna 4. Si tu barco ocupa ese cuadro, entonces pones un palito rojo encima del buque; si no, pues pones uno blanco. Si le pegué a tu barco, y este ocupa tres cuadros, solo me faltarán dos para hundirlo. Al final de los cinco tiros tienes que decir: 'Me diste'; en caso de que le haya atinado a tus buques. O 'me hundiste', si es el caso, o te quedas callado si no le atiné a alguna nave. ¿Está claro?

–Ahora ya me quedó todo claro, vamos a jugar.

–Muy bien, toma tus tres buques de guerra y colócalos en el tablero para que empiece el bombardeo. Dos últimas cosas que no te he dicho: una, no vale poner los barcos en diagonal, solo en horizontal y vertical; dos, deberías anotar los tiros que me dices en el otro tablero, para que no los olvides y los repitas perdiendo oportunidades.

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | *A*1 | *A*2 | *A*3 | *A*4 | *A*5 | *A*6 | *A*7 | *A*8 | *A*9 | *A*10 |
| **B** | *B*1 | *B*2 | *B*3 | *B*4 | *B*5 | *B*6 | *B*7 | *B*8 | *B*9 | *B*10 |
| **C** | *C*1 | *C*2 | *C*3 | *C*4 | *C*5 | *C*6 | *C*7 | *C*8 | *C*9 | *C*10 |
| **D** | *D*1 | *D*2 | *D*3 | ***D4*** | *D*5 | *D*6 | *D*7 | *D*8 | *D*9 | *D*10 |
| **E** | *E*1 | *E*2 | *E*3 | *E*4 | *E*5 | *E*6 | *E*7 | *E*8 | *E*9 | *E*10 |
| **F** | *F*1 | *F*2 | *F*3 | *F*4 | *F*5 | *F*6 | *F*7 | *F*8 | *F*9 | *F*10 |
| **G** | *G*1 | *G*2 | *G*3 | *G*4 | *G*5 | *G*6 | *G*7 | *G*8 | *G*9 | *G*10 |
| **H** | *H*1 | *H*2 | *H*3 | *H*4 | *H*5 | *H*6 | *H*7 | *H*8 | *H*9 | *H*10 |
| **I** | *I*1 | *I*2 | *I*3 | *I*4 | *I*5 | *I*6 | *I*7 | *I*8 | *I*9 | *I*10 |
| **J** | *J*1 | *J*2 | *J*3 | *J*4 | *J*5 | *J*6 | *J*7 | *J*8 | *J*9 | *J*10 |

Tomo el barco que abarca tres cuadros y pienso dónde ponerlo. Es la primera vez que juego a esto y debo planear una buena estrategia, pues el maestro dijo que se trata precisamente de eso. No tengo que pensar mucho para decidirme. Los voy a colocar muy alejados unos del otros, así será más difícil que el maestro les atine. Los pongo sobre los extremos y le digo que estoy listo. El profesor me dice que comience el bombardeo, tomo lápiz y papel y trato de atinarle a sus barcos.

–*B*3, *C*7, *H*6, *J*7 y *J*10 –lanzo mis tiros con la esperanza, casi confianza, de pegarle a uno de sus barcos.

Espero que diga que le di; pero, en lugar de eso, bombardea a mis buques con mucha efectividad, pues casi me pega.

–*A*1, *C*1, *F*10, *H*9 y *J*4 –dice el maestro.

–No me diste –digo nervioso, porque estuvo cerca de atinarle a dos de mis barcos–. Ahora yo te voy a tirar. *D*1, *E*9, *F*7, *H*10 y *J*3.

–Me diste, mis tropas están heridas –dice el profesor en tono de juego–. Pero resisto como buen guerrero que soy.

Estoy feliz porque le pegué primero. Ahora solo es cuestión de tiempo que le gane.

–*A*2, *F*1, *I*1, *C*10 y *J*10 –bombardea el maestro, que le atina cuatro veces a mis barcos.

–Me diste –digo muy desanimado–. ¿Cómo hiciste para tener tanto tino?

–Ya te dije que es pura estrategia. Ahora te toca tirar a ti.

Así continúa el juego, pronto me hunde los tres barcos y yo solo destruyo uno. Desanimado le pido la revancha y me vuelve a ganar. Él parece muy contento. Me dice que si practico algún día seré muy bueno, pero no debo desesperarme.

–Ya es hora de regresar a clase –dice el maestro joven–. Si te interesa seguir jugando, te espero a la hora de la salida en la sala de la ludoteca. Ya sabes que van muchos alumnos a jugar. Si te encuentro ahí, te enseñaré algunas estrategias que podrás usar para ser el mejor en este juego.

Inmediatamente pienso que esto echará a perder mi plan con Mariana, pero no le puedo decir que no al maestro. Me siento muy presionado. Pienso lo peor. Creo que Mariana se va a enojar y que después no querrá jugar conmigo.

## 6

Claro que tengo ganas de ir al salón de juegos a la salida. Por un lado, tal vez pueda jugar con Mariana y empezar a contarle mis descubrimientos con los conjuntos infinitos. Por otro lado, si el profesor me va a enseñar algunas estrategias, las quiero aprender para que nadie me gane. Si me vuelvo bueno en este juego, tal vez mis amigos quieran jugar conmigo. Recuerdo el cuento del inventor del ajedrez y me imagino como el ganador de un concurso de batalla naval donde me dan oportunidad de escoger el premio, y ya sé qué pediría.

Aún faltan tres horas para la salida; no es mucho, pero se me van a hacer muy aburridas y largas. Para empezar, sigue geografía. Esta clase jamás me ha gustado, pues la maestra solo recita nombres de países lejanos, y un motón de nombres de ríos, montañas y capitales que nos tendremos que aprender de memoria para la hora del examen. Empiezo a pensar en Mariana e inmediatamente pierdo atención. Cuando menos me doy cuenta, mis compañeros redactan una composición y yo no tengo idea de cuáles fueron las instrucciones para hacerla. Me da miedo preguntar, pero no me queda otra.

Por fin terminan las clases y de inmediato me dirijo a la sala de juegos. Me sorprende ver tantos alumnos, pues antes lo único que querían era ir a sus casas. Nunca se quedaban en la escuela por tanto tiempo. El profesor, al fondo, lee un libro. Me acerco lentamente y no sé si hablarle, pues parece muy entretenido y tal vez se le olvidó que quedamos en jugar. Pero en la mochila que está en el suelo veo una bolsa de plástico transparente con los dos tableros de batalla naval. Tal vez sí me espera y se puso a leer para no aburrirse.

–Toma los tableros de mi mochila –dice el maestro sin apartar la mirada de su lectura–, no creas que te vas a escapar de este compromiso.

Una vez que tenemos los tableros arreglados, llega Mariana, quien se sienta a un lado de nosotros. Ella conoce el juego desde antes y parece disfrutar de la compañía de ambos jugadores. Mientras jugamos, el maestro me da algunos consejos básicos de estrategia que yo aprendo muy contento, y a los cuales Mariana también está muy atenta. En mi cabeza pienso: está ludoteca es una maravilla, me dio la oportunidad de hacer amistad con la niña que me gusta y con el profesor buena onda. Al final de una partida me pregunta si le puedo ayudar, pues tiene que preparar su próxima conferencia y quiere ver si funciona bien. Quiere comentar unas ideas para ver qué me parecen. Por supuesto que le digo que sí, pues me siento como una persona importante, al escuchar antes que nadie la conferencia para dar mi punto de vista. Alcanzo a ver de reojo que a Mariana también la he impresionado.

–¿Conoces los números fraccionarios? –pregunta el maestro joven.

–Sí los conozco –respondo–. Son los que usan dos números para representarlos, uno arriba del otro, separados o divididos por una raya, ¿cierto?

Aquí temo que me empiece a preguntar sobre la suma, resta, multiplicación o división de estos números, pues siempre me hago un lío con estas operaciones.

–Esos mismos –dice el profesor–. ¿Puedes escribir algunos números fraccionarios que recuerdes?

Saco una hoja de mi libreta y anoto el tres cuartos, un medio y tres quintos, porque el maestro joven me interrumpe con una pregunta.

$$\frac{3}{4},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{3}{5}$$

–Si te pidiera que escribieras *todos* los números fraccionarios que existen, ¿lo podrías hacer?

Pienso un momento en esto y creo que no es posible, pues hay muchos números fraccionarios y no sabría cómo escribirlos todos o, simplemente, no me alcanzaría el tiempo. Pienso que para representarlos usamos los números naturales, tanto arriba como abajo, y yo ya sé que ese conjunto es infinito. Así que la totalidad de números fraccionarios también tiene que ser infinita.

–No. No creo que se pueda –digo con un poco de inseguridad.

–No te apures, es precisamente de lo que te quiero hablar: la manera de escribir todos los números fraccionarios que existen. Yo sé que conoces muy bien los números naturales, así que dibújalos en tu libreta.

¿Cómo sabe que conozco bien los números naturales? No importa, por ahora hago lo que me dice y anoto la colección de números. Pero el maestro borra los corchetes y la ***N***, y queda lo siguiente:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

–Muy bien. Como bien dijiste, los números fraccionarios, también llamados quebrados, se forman de la división de dos números enteros. Ahora vamos a usar la serie de los naturales y a cada número le pondremos un uno encima, para formar la siguiente sucesión de números fraccionarios:

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

–Si te das cuenta –explica el profesor–, en la parte de abajo está la serie de los naturales, solo que todos tienen como numerador al número uno.

–¿Qué es eso del numerador?

–Los números que están arriba. A los que están abajo se les llama denominadores. Solo es una manera de nombrar las cosas.

–Tengo una duda. Es cierto que ahí están todos los naturales, que ahora forman fracciones, pero esa serie es infinita, ¿no?

–Tienes toda la razón. Hemos formado una sucesión de fracciones infinitas. Sin embargo, debes saber que no son todas las que existen, hay muchas más. Para formar otra serie infinita basta con cambiar todos los numeradores que son un número uno, por un número dos.

$$\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \frac{2}{7}, \ldots, \frac{2}{n}, \ldots$$

–Tienes razón, esta serie de números también es infinita como la primera. En la parte de abajo tenemos a todos los números naturales, en los denominadores, como dijiste que se llaman. Ahora ya tenemos dos series de números fraccionarios con una infinidad de elementos cada una de ellas, pero ¿cuántas más se pueden formar?

–Las que quieras, solo basta que, para formar la que sigue, cambiemos todos los numeradores por un tres en lugar del número dos.

Al decir esto el maestro anota lo siguiente:

$$\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \ldots, \frac{3}{n}, \ldots$$

–Ya entendí lo que haces –le comento al maestro y empiezo a escribir la serie que sigue–. Ahora escribirás lo mismo, pero en la parte de arriba pondrás cuatros, ¿no?

–En efecto. Es precisamente lo que sigue.

Le enseño el diagrama al maestro y dice que está muy bien; y escribimos juntos las series siguientes.

$$\frac{4}{1}, \frac{4}{2}, \frac{4}{3}, \frac{4}{4}, \frac{4}{5}, \frac{4}{6}, \frac{4}{7}, \ldots, \frac{4}{n}, \ldots$$

$$\frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{5}, \frac{5}{6}, \frac{5}{7}, \ldots, \frac{5}{n}, \ldots$$

$$\frac{6}{1}, \frac{6}{2}, \frac{6}{3}, \frac{6}{4}, \frac{6}{5}, \frac{6}{6}, \frac{6}{7}, \ldots, \frac{6}{n}, \ldots$$

Desgraciadamente, veo el reloj de la pared del salón y me doy cuenta de que tengo que regresar a mi casa. Me despido del maestro, me giro hacia Mariana y con toda naturalidad le digo que si nos vamos juntos. Ella dice que sí con un ligero movimiento de cabeza. Le cedo el paso, y cuando cruzo por la puerta me siento el chaval más feliz del mundo. Por fin me atreví a acompañarla a su casa. Apenas salimos de la escuela, ella me pregunta de dónde nació mi interés por los conjuntos infinitos y que si le puedo contar de qué trata. Internamente, me inflo como un sapo y siento que no piso el suelo mientras camino.

# 7

Llego a mi casa y me encierro en mi cuarto. No lo puedo creer. ¿Cómo es que no me puse nervioso cuando le dije a Mariana si nos íbamos juntos? Estoy feliz. Me acuesto sobre la cama, viendo al techo, y trato de recordar todas las cosas que le dije y sus expresiones. Después de un rato, también me acordé del profesor y su comentario de que ya sabía que yo conocía el conjunto de todos los números naturales. Después de que Octavio me ha dicho que él era profesor en la universidad, pienso que el profesor habrá hablado con él.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{7}, & \ldots, & \frac{1}{n}, & \ldots \\[2ex]
\frac{2}{1}, & \frac{2}{2}, & \frac{2}{3}, & \frac{2}{4}, & \frac{2}{5}, & \frac{2}{6}, & \frac{2}{7}, & \ldots, & \frac{2}{n}, & \ldots \\[2ex]
\frac{3}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{3}{3}, & \frac{3}{4}, & \frac{3}{5}, & \frac{3}{6}, & \frac{3}{7}, & \ldots, & \frac{3}{n}, & \ldots \\[2ex]
\frac{4}{1}, & \frac{4}{2}, & \frac{4}{3}, & \frac{4}{4}, & \frac{4}{5}, & \frac{4}{6}, & \frac{4}{7}, & \ldots, & \frac{4}{n}, & \ldots \\[2ex]
\frac{5}{1}, & \frac{5}{2}, & \frac{5}{3}, & \frac{5}{4}, & \frac{5}{5}, & \frac{5}{6}, & \frac{5}{7}, & \ldots, & \frac{5}{n}, & \ldots \\[2ex]
\frac{6}{1}, & \frac{6}{2}, & \frac{6}{3}, & \frac{6}{4}, & \frac{6}{5}, & \frac{6}{6}, & \frac{6}{7}, & \ldots, & \frac{6}{n}, & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Abro mi libreta en donde pinté los diagramas y los observo por un largo rato. Al final me doy cuenta de algo muy importante, ¡que hay series infinitas por todos lados! No lo puedo creer, hacia la derecha cada renglón no termina, pero hacia abajo tampoco. Para ver mejor esto vuelvo a anotar todo lo que hicimos, aunque con una pequeña modificación.

He agregado tres puntos suspensivos al final de cada renglón y cada columna, para indicar que son infinitas. Después de todo esto no es muy difícil de ver, pues todo el secreto está en que se usan los números naturales que son infinitos. El primer renglón es infinito porque son los mismos números naturales, solo que tienen el uno en la parte de arriba, como numerador. En el segundo renglón pasa lo mismo, solo que con numerador dos. El tercero tiene numerador tres, y así sucesivamente. Por tanto, hay infinitos renglones. Pero el número de las columnas también es infinito, pues también se hace uso de los naturales que jamás terminan. Aquí los números están al revés. La parte de arriba, el numerador, en cada caso es la sucesión de todos los números naturales. Y el denominador es igual a 1 en la primera columna; a dos en la segunda; a tres en la tercera; y así en adelante. Resulta que todos estos números juntos forman lo que el maestro llamó los números fraccionarios, así que estos sí deben de ser muchos más que los naturales, pues como dijo el profesor: "Los números naturales son solo una pequeña, muy pequeña parte, de todas las fracciones que existen". ¡Este conjunto realmente es enorme! Y, por otro lado, ahora me doy cuenta por qué Octavio siempre dice que este $\aleph_0$, a pesar de ser transfinito, es muy pequeño. Creo que ahora sí encontré un conjunto que tiene cardinalidad mayor que la del conjunto de todos los números naturales.

Ahora me pregunto sobre la cardinalidad de todas las fracciones. Estoy convencido de que no puede ser el mismo aleph cero, pero no sé cuál pueda ser. Tal vez el viejo vaya a inventar otro número extraño más. Tengo que ir a verlo de inmediato. Si me pregunta por qué aleph cero no es candidato, le voy a decir que es imposible. Todos estos números no pueden ponerse en correspondencia con los naturales. Cada fila y cada renglón por separado sí, pero no la totalidad de ellos. No, este conjunto es mucho mayor. Este conjunto es la suma infinita de renglones y columnas con un número infinito de elementos. Esto es una infinidad de infinidades. Voy a escribir varios conjuntos en donde ponga algunos renglones y algunas filas en correspondencia con los naturales, con sus flechas y todo, para que se convenza de lo que digo.

Al día siguiente, llego a la cabaña del viejo y no lo encuentro. Así que decido dar un paseo alrededor. A unos cien metros de la cabaña, rumbo al norte, se encuentran unas grandes piedras. Me dirijo hacia ellas y trepo con un poco de dificultad. No pasan ni diez minutos y escucho ruidos de personas que se acercan. Me escondo entre las rocas y vigilo atentamente. Reconozco la voz del maestro joven, junto con otras de varios amigos de la escuela. Ahora lo recuerdo: en el colegio organizaron un día de campo para ir a pescar, pero no me inscribí. Al parecer les fue muy bien, pues todos vienen contentos y algunos cargan cubos con pescados grandes en su interior. También se les ve en la cara una mezcla de cansancio y satisfacción. Decido seguir escondido hasta que pasen; pienso que para la próxima excursión seguro que voy. A lo lejos veo que el grupo se acerca a la cabaña. No puedo estar seguro por la distancia, pero creo que, en la entrada, el maestro joven deja un cubo donde venían los pescados. Después de unos cinco minutos, veo que Octavio llega a su casa y me acerco. Yo creo que ya sabe quién le dejó los pescados, y me invita a comer.

Últimamente el viejo me ha regalado copias, del tamaño de una hoja, de los cuadros que tiene colgados sobre la pared. Aunque también es cierto que, cada vez que vengo a su cabaña, tiene algunos nuevos. Octavio me dice que así puedo admirar a algunos de los más famosos artistas, son sus palabras, y gratis. Por lo general, me gustan los cuadros que tienen los colores más llamativos. Hoy, cuando entré, de inmediato vi una pintura relacionada con el tiempo. Al menos así lo creo, porque veo en él unos relojes deformados, aparentemente por el sol. Por un momento, pienso que para ser un gran pintor no únicamente se necesita talento para usar los pinceles, sino también tener ideas originales que nadie haya tenido jamás. Cuando le comento esto a Octavio, me dice que eso sucede en todos los campos del intelecto, como, por ejemplo, en las matemáticas, la física, la filosofía, la literatura, la fotografía y el cine.

Cuando ya estamos sentados, le comento a Octavio mi descubrimiento de que son muchísimos los números fraccionarios que no se pueden poner en correspondencia uno a uno con los naturales. Él, como siempre, me escucha muy atento y de inmediato saca unas hojas de papel y unos lápices.

–Esos diagramas que hiciste son muy interesantes –dice Octavio–, y estoy de acuerdo contigo, pero solo en una parte. Es cierto que cada renglón y cada columna son como los naturales. Por lo tanto, cada colección tiene como número cardinal a aleph cero. ¿Te preguntaste por el número que representa a esa infinidad de infinidades?

–¿Infinidad de infinidades? –pregunto casi interrumpiendo al viejo, orgulloso porque yo ya lo había pensado así.

–Sí, la totalidad de números fraccionarios, a los que también se les llama racionales, es una infinidad de infinidades. Como tú bien percibiste, así como los escribiste con el maestro joven, se ve que cada renglón y cada columna son sucesiones infinitas. Así tenemos una colección formada por un número infinito de sucesiones infinitas. ¿Estás de acuerdo?

–Sí, estoy de acuerdo –respondo fascinado y recordando el diagrama que hice en mi cuarto.

–Pues bien, pequeño amigo, ahora hay que encontrar el número cardinal, o la cardinalidad, de este conjunto inmenso. Pero ¿estás convencido de que no puede ser aleph cero? ¿Has pensado en algún otro?

–Pues creí que íbamos a inventar otro, como hicimos con aleph cero. Otra letra rara que representará a este conjunto formado por infinidad de conjuntos infinitos. Tendría que ser algo así como la suma de infinitas veces aleph cero, ¿no?

–Puede ser, pero no es así. En la mayoría de nuestros ejemplos, nos hemos limitado a encontrar una correspondencia uno a uno entre ambas sucesiones, ¿recuerdas?

–Claro que lo recuerdo. Hubo tardes que hice muchos ejercicios.

–Así es, pero resulta que el maestro joven y tú ya encontraron una manera de ordenar todos los números fraccionarios. Lo hicieron por renglones.

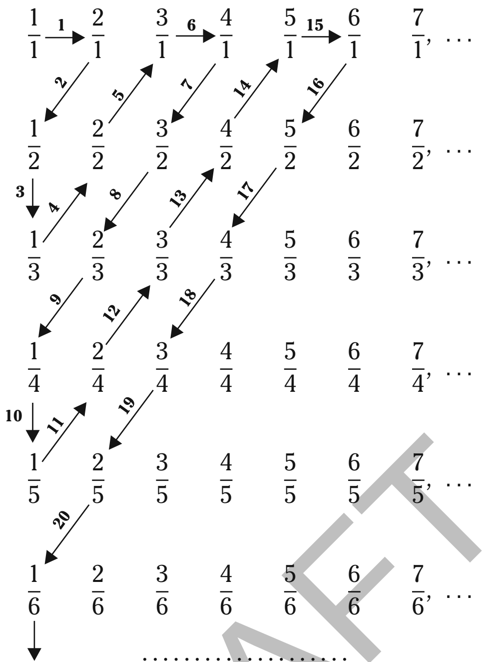
$$
\begin{array}{cccccccccc}
\frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{6}, & \frac{1}{7}, & \ldots, & \frac{1}{n}, & \ldots \\
\frac{2}{1}, & \frac{2}{2}, & \frac{2}{3}, & \frac{2}{4}, & \frac{2}{5}, & \frac{2}{6}, & \frac{2}{7}, & \ldots, & \frac{2}{n}, & \ldots \\
\frac{3}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{3}{3}, & \frac{3}{4}, & \frac{3}{5}, & \frac{3}{6}, & \frac{3}{7}, & \ldots, & \frac{3}{n}, & \ldots \\
\frac{4}{1}, & \frac{4}{2}, & \frac{4}{3}, & \frac{4}{4}, & \frac{4}{5}, & \frac{4}{6}, & \frac{4}{7}, & \ldots, & \frac{4}{n}, & \ldots \\
\frac{5}{1}, & \frac{5}{2}, & \frac{5}{3}, & \frac{5}{4}, & \frac{5}{5}, & \frac{5}{6}, & \frac{5}{7}, & \ldots, & \frac{5}{n}, & \ldots \\
\frac{6}{1}, & \frac{6}{2}, & \frac{6}{3}, & \frac{6}{4}, & \frac{6}{5}, & \frac{6}{6}, & \frac{6}{7}, & \ldots, & \frac{6}{n}, & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$



Al decir esto, Octavio anota algo parecido a lo que hice, pero con algunas flechas y unos números.

–Ahora –explica Octavio–, te voy a enseñar un truco para establecer la correspondencia uno a uno con el conjunto de todos los números naturales y mostrar que ambos conjuntos tienen el mismo número cardinal.

–¡Eso sí que quiero verlo! –exclamo asombrado, porque estoy seguro de que son diferentes.




–Primero, voy a imaginarme que cada número fraccionario es una perla y, enseguida, voy a hilvanar un collar con ellas. Para eso coloco los números fraccionarios por renglones y columnas como tú ya lo habías hecho. Ahora introduzco un hilo a través de cada perla para mantenerlas unidas. En nuestro diagrama, las flechas representan el hilo. Debes seguir las flechas y verás como unimos a todos los renglones y columnas de números fraccionarios. Ninguna perla se va a quedar fuera de este collar. Y aquí está lo más interesante: numeramos las flechas con el uso de la sucesión de todos los números naturales, en el orden que indicamos. Y habremos establecido una relación uno a uno entre el conjunto de todos los números fraccionarios con el conjunto de todos los números naturales (el hilo engarzado). Así hemos demostrado que las dos sucesiones contienen exactamente el mismo número de elementos. Finalmente, observa que existen algunos números fraccionarios que se repiten y que hay que eliminar.

–¿Números que se repiten? ¿Te refieres a que hay fracciones que son las mismas?

–Exactamente, Jorge. Fíjate, por ejemplo, en las fracciones que tienen el mismo denominador que numerador. Es decir, uno entre uno, dos entre dos, tres entre tres, etcétera. Todas ellas representan al número uno; hay que quedarse con el uno entre uno y eliminar las demás.

–Tienes razón –comento al darme cuenta de lo que dice mi amigo–. Pero también hay otras fracciones que son iguales –casi grito por este descubrimiento–. El dos entre uno es igual al cuatro entre dos y al seis entre tres.

–Así es, hay infinidad de fracciones que hay que tachar porque se repiten. Ahora dime, ¿cuál es el número cardinal de todos los números fraccionarios?

De nuevo, veo el diagrama y concluyo que no puede ser otro más que aleph cero, pues las flechas numeradas los ponen en correspondencia uno a uno con el conjunto de todos los números naturales. A cada fracción se le asigna un natural y viceversa. También recuerdo lo que me dijo el viejo la vez pasada, que solo basta acomodar los elementos de manera adecuada para ver que sí se pueden numerar.

–Pues no puede ser otro que aleph cero –digo bastante impresionado, y decepcionado, con el resultado.

–Así es, pequeño amigo. Estas sucesiones no son otra cosa que una infinidad de infinidades, cada una con cardinalidad aleph cero, y la totalidad también tiene cardinalidad aleph cero. Hemos encontrado la manera de ordenarlos igual que los números naturales, de ponerlos en correspondencia uno a uno con todos ellos. Así que, al final, estos dos conjuntos tienen la misma cardinalidad. Ambos tienen exactamente el mismo número de elementos.

–¿Cómo es posible que pase esto si los naturales son solo una parte pequeña de todos los números fraccionarios? –pregunto recordando las palabras del maestro.

–Es la magia del infinito, pues en él encontramos propiedades distintas que no conocíamos. Cosas que nos sorprenden, pero que son muy interesantes. Lo que acabas de decir es algo muy cierto. A primera vista, puede parecer que la cardinalidad de la totalidad de los números fraccionarios o fracciones, no puede tener a aleph cero como su número cardinal, pero vimos que no es así. Como bien dijiste, los naturales están dentro de los números fraccionarios. Así que podemos pensar que un conjunto infinito, que jamás termina, es aquel en el que sus elementos se pueden poner en correspondencia uno a uno con una parte del mismo. Esto quiere decir que, cuando hablamos de conjuntos infinitos, el todo no es, necesariamente, mayor que una de sus partes. Esta misma aseveración es falsa para el caso de los conjuntos finitos. Esto que te digo nos pasó en los naturales, en los pares, en los impares, en los enteros positivos, en los negativos y ahora con los fraccionarios. Hablar del infinito es hablar de un paraíso que alguien creó para todos los que estemos interesados, y nadie, absolutamente nadie, nos podrá expulsar de él. El infinito representa una de las más grandes ideas de todos los tiempos. Desde épocas muy remotas, grandes personajes han hablado y escrito mucho acerca de esto. Sin embargo, pocos han llegado a comprender y disfrutar las maravillas que proporciona. Es fácil perderse en este maravilloso concepto, pero es muy placentero cuando descubres lo que hay detrás de todo esto. Como la idea de una colección formada por un número infinito de sucesiones infinitas que tienen como representante a aleph cero. Esto es algo que solo el infinito nos proporciona y aquellos que lo conocemos somos seres afortunados que debemos disfrutarlo al máximo.

–Aun así, sigo sin entender por qué a los sabios del todo el mundo les llevó tanto tiempo comprenderlo.

–Bueno, el hombre sigue siendo igual de animal que hace miles de años. No hemos aprendido a vivir en paz, ni a reconocer y respetar las diferencias de los otros. En este caso en particular, la razón más poderosa podría ser que no fue sino hasta finales del siglo XIX cuando un intelectual se propuso analizar y estudiar el concepto de infinito única y exclusivamente desde el punto de vista de las matemáticas, sin recurrir a argumentos filosóficos ni teológicos.

## 8

Al llegar a mi casa, lo primero que haré es escribir simbólicamente algunas de las propiedades que tiene este número transfinito aleph cero, que son diferentes a las características de los números finitos. Así tengo que, al menos,

$$1 + \aleph_0 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 + \aleph_0 + \cdots + \aleph_0 = \aleph_0$$

Las últimas palabras del viejo suenan como una especie de poesía al infinito; esta idea me ha impresionado. También pienso que el viejo se emociona mucho, como si estuviera hablando de algo sublime, algo que da una especie de poder y que pocas personas lo conocen. ¿Acaso yo seré de los pocos seres que han logrado conocer el infinito? Puede ser que sí.

Cuando le pregunto a Octavio, me dice que voy en el camino correcto. Pero si quiero conocer más el paraíso de esta idea, el camino es aún largo. Hay muchas más maravillas por descubrir, y se debe hacer lentamente. Al final, le pregunto si no le molesta que para la próxima visita venga acompañado. Me dice que no hay problema alguno, pero realmente se pone muy contento cuando le digo que se trata de Mariana.

> *La matemática es aquella materia en la que nunca sabemos de lo que estamos hablando, ni si lo que estamos diciendo es verdadero.*
>
> Bertrand Russell

# Capítulo 5

## 1

Hoy no hay clases, ni mi padre tiene que ir al trabajo. Así que les digo una verdad a medias y les pido permiso para ir con mis amigos a jugar, caminar y divertirnos. Todavía no me atrevo a hablarles de Octavio, pues no sé cuál va a ser su reacción. Seguro que mi mamá dirá que es peligroso que me haga amigo de un señor tan grande y que vive solo y, si mi padre la oye, es capaz de prohibirme ir a allí. Claro que me siento mal por no decirles la verdad, pero creo que sería mejor si se los presentara un día en la calle, cuando nos encontremos accidentalmente con él. Por otro lado, no es una total mentira, pues voy a pasar a por Mariana para ir juntos con Octavio.

Llegamos a la cabaña de mi amigo y él es muy amable con ella. Le dice que está en su casa y que tiene libertad de tomar todo lo que quiera, en especial los libros, si alguno le llama la atención. Yo estoy muy contento de que Mariana haya aceptado venir y de que esté interesada en algunas de las cosas que a mí me gustan. Olvido todo y solo disfruto de la cabaña, y le enseño a ella algunas de las copias de las pinturas que más me gustan. Comemos y mi amigo nos habla de cocina. Nos cuenta que estudió un tiempo gastronomía y que le encanta cocinar. También dice que yo soy como él cuando era chico, que me interesan muchos temas y que aprenderé muchas cosas a lo largo de la vida. Nos habla de la universidad y lo divertido que es estudiar ahí, porque siempre hay cosas interesantes. Nos cuenta que él siempre iba a los cine clubs donde, además de ser muy baratos, pasaban películas que uno nunca veía en los cines comerciales. También dice que, en fines de semana, visitaba algunos museos que tenía la universidad en el centro de la ciudad. Nos ve a los dos y nos dice que, cuando sea el momento de ingresar, él mismo nos ayudará a estudiar para presentar unos exámenes muy buenos. Esto me alegra mucho, pues me dice que voy a tener la oportunidad de vivir lejos de aquí, de conocer la ciudad, y que estudiaré cosas muy interesantes todos los días.

Nos quedamos en silencio mientras comemos el postre. Después, le explico a Mariana el descubrimiento del número cardinal del conjunto de todos los números fraccionarios. Le dije que tenía la sensación de que había descubierto un conjunto infinito con un número cardinal mucho mayor a aleph cero, pero que no fue así. Octavio me enseñó una manera de cómo se podían reordenar y poner en correspondencia uno a uno con el conjunto de todos los números naturales y así resultó que las dos sucesiones tenían la misma cantidad de elementos. Le digo a Mariana que ahora estoy un poco decepcionado, porque creo que todos los conjuntos infinitos tienen el mismo número de elementos y, por lo tanto, tienen el mismo número cardinal y $\aleph_0$ es el único número transfinito. ¿Qué otro conjunto más grande puede haber que una infinidad de infinidades?

Octavio ha oído pacientemente toda mi explicación sin interrumpirme, como para que ella piense que soy muy listo. Sonríe y nos dice que deberíamos jugar a batalla naval o 'submarinos', como era conocido en sus tiempos. A él también le gusta este juego y dice que nos vamos a divertir. Saca unos tableros que parecen los mismos de la escuela, y pienso que el profesor Vasconcelos se los debe haber prestado.

El viejo nos enseña más estrategias y veo como, poco a poco, ambos mejoramos en este juego tan entretenido. Eso de reconocer los nombres de cada cuadro nunca fue complicado, pues basta mencionar una letra y un número para identificarlos. Al final de una partida entre Mariana y yo, el viejo nos dice:

–Este juego me gusta mucho por varias razones. Es muy fácil de jugar, pero al mismo tiempo es muy entretenido. En la vida real, la marina usa un sistema parecido para localizar cosas en el mar, como barcos hundidos o náufragos. Cada punto que existe en el espacio lo pueden identificar con unas cuantas coordenadas, y así decirles a los demás dónde se encuentran.

De repente, de imprevisto, nos dice: '¿Conocen algún número entre el cero y el uno?'.

–Pues a la mitad está el cero punto cinco (0.5) –dice Mariana.

–En efecto, tienes razón. También está el cero punto cincuenta y tres (0.53).

–Tienes razón –le digo al viejo, observando que ahora usó, después del punto, una cifra con dos dígitos. Así que le digo una con tres dígitos, usando la misma cifra pero aumentada–. Y está el cero punto quinientos treinta y seis (0.536).

–Si a esas vamos –dice Mariana–, además está el cero punto cinco mil trescientos sesenta y cuatro (0.5364).

Si continuamos aumentando un dígito más, será muy difícil recordar tantos números. Nos damos cuenta de que este juego jamás terminaría, pues se puede aumentar un número infinito de números después del punto decimal. Octavio dice que tenemos razón los dos, que los números decimales que están entre el cero y el uno son infinitos. Y se pueden expresar de manera similar a los cuadros que hay en el juego de batalla naval.

–¿Cómo es esa forma? –pregunto.

–Muy sencilla. Vamos a usar la letra *a* y dos pequeños números a la derecha llamados subíndices. Esto nos servirá para escribirlos todos, sin que se repitan y sin que vaya a faltar alguno. El primero de los subíndices nos dirá en qué renglón se encuentra el dígito, y el segundo señalará la columna.

–La verdad es que no entiendo la idea –le digo al viejo con toda sinceridad.

–Es muy fácil. Imagina que me dices que encontraste la manera de escribir todos los números decimales que existen entre el cero y el uno. Los colocaste entonces de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0.75689658482\ldots\ldots. \\ 0.756896584821\ldots\ldots \\ 0.7568965848219\ldots.. \\ 0.75689658482197\ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

–Pero como nadie ha encontrado esa manera –continúa Octavio–, vamos a usar la letra "$a$" y los subíndices que te dije. Veamos el ejemplo del primer renglón, el número:

$$0.75689658482\ldots\ldots.$$

Vamos a representarlo por...

$$0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots$$

Lo que nos dicen los pequeños números –explica el viejo–, es la posición en la que se encuentra cada dígito. En nuestro caso, el siete después del punto decimal está representado por $a_{11}$, que indica que está en el renglón uno y la columna uno, igual que en el juego.

–Entonces –dice Mariana–, el cinco, representado por $a_{12}$, ¿quiere decir que está en el primer renglón y en la segunda columna?

–Exactamente, así es. En conclusión, si alguien dice que puede escribir todos los decimales que existen entre el cero y el uno, y los puede escribir en renglones, se podrían expresar como:

$$
\begin{array}{l}
0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots\ldots\ldots \\
0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots\ldots\ldots \\
0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots\ldots\ldots \\
0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

–Ahora entiendo, es igual que en el juego que tú llamas "submarinos". La letra $a_{32}$, por ejemplo, solo expresa el número que está en el tercer renglón y en la columna dos, ¿no es así? –digo yo.

–Así es, Jorge, muy bien. A cada número decimal le hacemos corresponder solamente un número natural, de tal manera que ninguno de los dos conjuntos queda sin algún número al que esté asignado. Como lo haríamos con las butacas y los espectadores a un cine.

$$
\begin{array}{l}
1 \leftrightarrow 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots\ldots\ldots \\
2 \leftrightarrow 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots\ldots\ldots \\
3 \leftrightarrow 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots\ldots\ldots \\
4 \leftrightarrow 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n \leftrightarrow 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

–¿Entonces el conjunto de los números que están entre el cero y el uno, también tiene cardinalidad aleph cero? ¿No?

–Si podemos establecer una relación uno a uno entre la sucesión de todos y cada uno de los números naturales con todos y cada uno de los números decimales comprendidos entre el cero y el uno, habremos mostrado que ambos conjuntos tienen el mismo número cardinal. Y como la sucesión de todos los números naturales tiene a $\aleph_0$ como su número cardinal, entonces el conjunto de todos esos números decimales tendría a ese mismo número cardinal. Pero les voy a mostrar que es imposible establecer una correspondencia uno a uno entre esos conjuntos, y si no están en correspondencia, entonces no pueden tener el mismo número cardinal. Como es muy difícil hacerlo de forma directa, lo haré de manera indirecta.

–¿De manera indirecta? –pregunto sin entender qué pretende hacer Octavio.

–Sí. Es un método al que recurren muchos padres cuando se cansan de que sus hijos no obedezcan órdenes directas. La del baño, por ejemplo, es una de las más comunes. A cierta edad, a muchos niños pequeños les da mucha pereza bañarse y prefieren seguir jugando o ver la tele. Si el papá o la mamá ordena directamente al niño que se bañe, es muy probable que surja un pleito o un berrinche. Entonces algunos padres recurren a la orden indirecta de preparar el baño, añadir algunos juguetes y decirle al niño que ya puede jugar en el baño. Un buen número de niños obedecerá pensando que se trata de un juego. Claro que es muy probable que llore cuando le laven el pelo; pero, por lo menos, no lloró para entrar al agua. Nosotros vamos a recurrir a una estrategia semejante. Mostraremos nuestro caso de manera indirecta, ya que hacerlo de manera directa envuelve un argumento largo y complejo.

–¿Y nos vas a convencer de que tu procedimiento está bien?

–Claro, porque está apoyado en un principio lógico muy sólido, que viene desde Aristóteles. Mira, cuando tú afirmas algo, cualquier cosa, lo que sea, o bien es cierto o es falso; pero no existe una tercera posibilidad. Di, cualquier cosa.

–Soy mayor que mis dos hermanas –digo sin pensarlo mucho.

–O es cierto, o es falso; pero no existe una tercera posibilidad –dice Octavio–. En este caso, como tú ya me has dicho antes, yo sé que esta proposición es verdadera.

–El número cuatro es menor que el tres –dice Mariana, como poniendo a prueba el método de Octavio.

–Es falso –comenta sin dudar Octavio–. Cualquier cosa que digas o es cierta o es falsa, pero no existe otra opción. A este argumento se le llama el "Principio del Tercer Excluso". Como dice el mismo enunciado, una tercera oportunidad no se puede dar, queda excluida. Lo que dices es cierto o es falso. Por esto, los filósofos dicen que no existen mentiras a medias o verdades a medias. Algo es cierto o es falso.

–Entonces, ¿por qué dices que vas a recurrir a un método indirecto? –interrumpo para no quedar fuera de la conversación–. ¿Cuál es la diferencia con las cosas que hemos hecho antes?

–Hasta ahora he podido convencerte de mis argumentos porque estos no han sido complicados. Y quiero que los que faltan sigan siendo iguales, es decir, si hasta ahora no hemos complicado las cosas, no tenemos por qué empezar ahora. Lo último que quiero es confundirlos o que pierdan interés en lo que hacemos.

–Por mí no te preocupes –dice Mariana–. Hasta ahora he entendido todo muy bien.

–Claro –casi grito–. Y, si no entendemos, podemos preguntarte, ¿no?

– Bueno, primero les voy a aclarar mi estrategia. Lo que queremos mostrar es que la cardinalidad del conjunto de todos los números decimales que se encuentran entre el cero y el uno es mayor que la cardinalidad del conjunto de todos los números naturales. ¿Vamos bien?

–Por supuesto –decimos los dos–. Quieres mostrar que el conjunto de todos los números decimales entre el cero y el uno tiene más elementos que el conjunto de todos los números naturales.

–Otra forma de decirlo –y miro a Mariana para ver si ella me pone atención– es que vamos a mostrar que no se puede encontrar una correspondencia uno a uno entre estos dos conjuntos. Si intentáramos dibujar las flechas, debería haber números decimales que no tuvieran su correspondiente en la lista de números naturales. Es decir, no todas las flechas serán de ida y vuelta. Si este es el caso, los conjuntos no tienen el mismo número de elementos y entonces uno de los dos conjuntos es mayor que el otro. Es exactamente el mismo ejemplo de las butacas y de los individuos que tratamos la primera vez que nos encontramos en el cine. Ahí había butacas vacías, y eso quería decir que había más butacas que gente que hubiera pagado su entrada.

–Muy bien –continúa Octavio–. Mejor no lo pudiste haber dicho.

–Yo sí quisiera que me explicaras tu método –interrumpe Mariana–, antes de que empieces a hablar de números transfinitos. Porque, si no, me voy a hacer un lío tremendo.

–Bueno –comenta Octavio–. Mejor para mí, así yo también aclaro mi pensamiento y ordeno mis ideas. Primero, para decir que un conjunto es mayor que otro, es suficiente con mostrar que tiene, al menos, un elemento más que el otro. En el cine, con que hubieras encontrado una butaca vacía, solo una, era suficiente para darte cuenta de que había más lugares que personas. ¿Vamos bien?

–Perfecto –digo–. Eso es muy claro en el caso de los conjuntos con un número finito de elementos.

–Para el caso de los conjuntos con un número infinito de elementos –interviene Mariana–, como no podemos contar sus elementos, entonces tratamos de establecer una correspondencia uno a uno entre cada uno de los elementos de los dos conjuntos y así mostrar que tienen exactamente el mismo número de elementos.

–Esas son las flechas –interrumpo– que ponemos en los diagramas. Pero, hasta ahora, siempre hemos mostrado que se pueden poner las flechas. Y, entonces, todos los conjuntos infinitos de los que hemos hablado tienen exactamente el mismo número de elementos.

–Ahora vamos a hacer lo contrario –nos detiene Octavio–. Demostraremos que uno es mayor que otro, que tiene más elementos, al menos uno más. Con eso es suficiente. Para hacer esto, debemos probar que no podemos establecer una correspondencia uno a uno entre los dos conjuntos. Es decir, que existe al menos un elemento de uno de los dos conjuntos que no tiene su correspondiente en el otro conjunto. En conclusión, que las flechas no irán en los dos sentidos para ese elemento. ¿Voy bien?

–Sí –decimos los dos.

–Cuando una persona les miente –Octavio, aparentemente, cambia de tema– muchas veces le creen. En ocasiones, ustedes no tienen con qué comparar y no pueden darse cuenta si los engañan. Pero, en otros casos, ustedes sí se dan cuenta cuando alguien les dice una mentira. Por ejemplo, si un fulano te dice que llamó a tu casa la noche anterior, y tú estabas ahí, sabes que la persona miente.

–A mi sí me ha pasado –digo.

–Cuando a uno le dicen una mentira –afirma Mariana–, y te das cuenta, entonces uno cree en lo contrario de lo que le dijeron. En este caso pensaría que no llamaron por teléfono.

–Muy bien –dice Octavio–, entonces yo voy a empezar con una mentira, con algo que es falso. Al inicio, ustedes aún no saben que es falso, pero cuando advierten que digo mentiras, entonces ustedes afirmarán lo contrario. Sin darse cuenta, ustedes aplican el Principio del Tercer Excluso, y si perciben que algo no es cierto, entonces tiene que ser falso. Repito, ahora empezaré con algo que es falso, es decir, que es una mentira. Voy a suponer que sí, que ya encontramos una correspondencia uno a uno entre todos los elementos de ambas sucesiones, es decir, que ya demostramos que ambos conjuntos tienen exactamente el mismo número de elementos.

–Pero –interrumpo– eso es lo contrario de lo que queremos probar.

–Ya lo sé –afirma Octavio, con toda paciencia–. Si de ahí se deduce algo que es contrario o contradice a algo que ya hemos mostrado con anterioridad, es decir algo que es mentira, entonces eso quiere decir que nuestra suposición original no es cierta. Ahora, pongan atención los dos. Vamos a suponer que *sí* existe esa correspondencia uno a uno entre los dos conjuntos. Es decir, ya encontramos una relación...

$$
\begin{array}{l}
1 \leftrightarrow 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ \ldots\ldots\ldots \\
2 \leftrightarrow 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ \ldots\ldots\ldots \\
3 \leftrightarrow 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ \ldots\ldots\ldots \\
4 \leftrightarrow 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\ \ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n \leftrightarrow 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}\ \ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

... que a cada número natural le asocia un número decimal entre el cero y el uno, y que a cada número decimal entre el cero y el uno, le asocia un número natural. Es decir, las dos sucesiones tienen exactamente el mismo número de elementos y estas están totalmente agotadas. Por tanto, ninguno de ellos se quedó sin su correspondiente en el otro conjunto, y viceversa. ¿Están de acuerdo?

–Sí –decimos los dos simultáneamente.

–Bueno, pues les voy a mostrar un número decimal que sí es parte de esa sucesión y que no tiene su correspondiente número natural. Vamos a construir un número decimal nuevo, que no tomamos en cuenta cuando hicimos nuestra relación. Para empezar, para asegurarnos de que sí forma parte de esa sucesión, nuestro nuevo número debe empezar con cero punto (es decir, 0.). Ahora, tomemos el primer dígito del primero de los números decimales, el que está en el lugar $a_{11}$. Si este dígito es, digamos, un tres, entonces lo cambiamos por un cinco, un ocho o un nueve. En otras palabras, lo cambiamos por cualquier número que sea distinto al que ya está ahí. Es decir, este nuevo dígito es necesariamente diferente a $a_{11}$. Como ya es diferente, lo vamos a nombrar $b_{11}$, solo por darle un nombre. Ahora nos fijamos en el segundo dígito del segundo de los números decimales, tomamos $a_{22}$ y hacemos lo mismo. Si ese dígito es un cinco, lo cambiamos por un tres o un seis o un ocho, o por cualquier dígito que sea diferente. Este nuevo dígito es necesariamente diferente a $a_{22}$, y lo llamamos $b_{22}$. Nos fijamos en la diagonal que cruza a los distintos números decimales. Aquellos que en nuestro diagrama corresponden a $a_{33}$, $a_{44}$, $a_{55}$, etcétera. Los nuevos dígitos se llamarán $b_{33}$, $b_{44}$, $b_{55}$, y así en adelante.

–¿Para qué vamos a hacer todo esto? –pregunto casi interrumpiendo al viejo.

–Para asegurarnos de que este nuevo decimal, que sí está entre el cero y el uno porque empieza con cero punto algo, es distinto a todos los que ya están en el diagrama que usamos para establecer la correspondencia uno a uno entre todos los números naturales y todos los números decimales comprendidos entre el cero y el uno. Este nuevo número decimal es precisamente:

$$0.b_{11}b_{22}b_{33}b_{44}b_{55}b_{66}b_{77}\ldots b_{nn}\ldots$$

–Pero, si es un número decimal entre el cero y el uno –exclama Mariana–, entonces debe estar en la sucesión original.

–No puede ser igual al número que está en el primer renglón –explica el viejo–, porque al menos difiere con ese número en el primer dígito. Es distinto en, al menos, $a_{11}$. Tampoco es igual al segundo porque al menos es diferente a este en el segundo dígito; en otras palabras, es diferente al número en el lugar $a_{22}$. Tampoco es igual al tercero porque es diferente a este, al menos en el tercer dígito, etcétera. Entonces, este nuevo número que acabamos de construir no se encuentra en la lista original, porque es diferente a cada número en, al menos, el dígito que se encuentra sobre la diagonal. Esto quiere decir que habíamos mentido, porque habíamos dicho que ya habíamos encontrado una correspondencia uno a uno entre *todos* los miembros de ambas sucesiones, la de los números naturales y la de los números decimales comprendidos entre el cero y el uno.

–Si mentimos –interrumpe Mariana–, entonces su contrario es verdad. Si la mentira fue que ya habíamos encontrado esa relación, la verdad es que no existe tal correspondencia. En otras palabras, la verdad es que el conjunto de todos los números decimales que hay entre el cero y el uno *no* se puede poner en correspondencia uno a uno con el conjunto de todos los naturales.

–Claro –continúa Octavio–, pues se partió de la suposición de que *sí* se podía; de que ya teníamos la relación que asociaba a todos y cada uno de los números de ambas sucesiones con uno y solamente un elemento de la otra sucesión. Se habían colocado en una supuesta relación uno a uno con el conjunto de todos los naturales, representada por los renglones. Sin embargo, se exhibió un nuevo número decimal que no estaba asociado con algún número natural. Tengan en cuenta que nuestra correspondencia agota a la totalidad de los números naturales. Repito, ya habíamos supuesto que estaban *todos* asociados con algún número decimal. Pero, al no haber estado en la lista original de decimales, ahora no alcanzan los naturales para hacer una relación entre los decimales que están entre el cero y el uno y los naturales. En conclusión, nuestra relación no podía haber sido uno a uno. Aquí tienen un ejemplo donde las flechas no necesariamente van para los dos lados.

–¿Esto es suficiente para afirmar que la sucesión de números decimales es más grande que la de los naturales? –cuestiona Mariana.

–Así es. Es más grande porque en el diagrama usé a todos los naturales para representar a algunos decimales. Ahora hemos visto que, una vez agotada toda la sucesión de números naturales, al menos hay un decimal que no está asociado a algún número natural. Esto quiere decir que hay más decimales que naturales. Además, así como construimos este nuevo número decimal, podemos seguir construyendo otros. Lo único que tenemos que hacer es seguir el mismo método y asegurarnos de que nuestro nuevo número decimal sea diferente al anterior en, al menos, el dígito que se encuentra sobre la diagonal; y así en adelante.

Aún lleno de dudas, le pregunto:

–¿Por qué no corremos todo el conjunto de números decimales un lugar y al nuevo número que acabamos de construir lo ponemos al principio? En el ejemplo del cine, al niño nuevo lo pusimos adelante.

–Sí –responde Octavio con paciencia–. Pero acuérdate que en aquellos casos primero añadimos los nuevos elementos a los respectivos conjuntos y *después* establecimos las dos correspondencias uno a uno. Los dos conjuntos se agotaron juntos al hacer la correspondencia. En este nuevo caso, una vez que ya tenemos la relación uno a uno, es decir, una vez que ya tenemos agotados a todos los números naturales, entonces nos damos cuenta de que al menos un elemento del otro conjunto no está asociado con algún número natural. Lo que nos dice que este segundo conjunto tiene, al menos, un elemento más, es decir, que es mayor.

–¡Esto es increíble! Entonces, ¿cuál es el número cardinal de esta colección de números? –pregunta ella.

–Pues otro número transfinito –digo yo–, que en este caso podríamos llamarlo *aleph uno* y representarlo con los símbolos $\aleph_1$.

–No, no corras, Jorge. No te adelantes. Sí, sí es otro número transfinito, aunque no podemos asegurar que sea $\aleph_1$.

–¿Por qué no? –insisto.

–Porque hay muchos números transfinitos mayores que $\aleph_0$ –afirma el viejo–, y tú tendrías que mostrar que el que acabas de obtener es precisamente el inmediato sucesor de $\aleph_0$.

Ahora soy yo quien se queda impresionado. ¿De dónde saca estas ideas? El viejo dice cosas que no entiendo. Miro a Mariana y comprendo que ella está de acuerdo con él. Pero ¿cómo y por qué?

–Cuando a mí me enseñaron las operaciones elementales entre conjuntos –dice Mariana–, es decir, la unión e intersección entre conjuntos, la maestra también nos dijo que dado cualquier conjunto (en ese tiempo ella siempre nos hablaba de conjuntos con un número finito de elementos) *siempre* existe, al menos, otro mayor que tiene más elementos.

Estoy con la boca abierta porque yo no sabía que Mariana supiera tanto de conjuntos. De reojo veo que Octavio asiente con la cabeza a las cosas que asegura Mariana.

–¿Cuál es ese conjunto? –la apoya él.

–No sé, ya no me acuerdo de tanto.

–Vamos a pensar entre los tres –dice Octavio–. No puede ser cualquier conjunto. Necesitamos uno que esté relacionado con el primero para poder compararlos. Para hacer las cosas más fáciles, pensemos en un conjunto con tres elementos.

$$\{a, b, c\}$$

–¿Qué otro conjunto tiene más elementos?

Yo no tengo ni idea, pero Mariana parece estar cerca de la respuesta y casi grita:

–El conjunto que tiene como elementos a:

$$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

¡Es más grande!

Se dibuja una sonrisa sobre la cara de Octavio y me dice:

–Esta niña es listísima. Ella se refiere al nuevo conjunto que contiene a todos los posibles subconjuntos del conjunto original. ¿Cuáles son esos subconjuntos? Bueno, primero, son las letras de nuestro conjunto original, tomadas de una en una. Segundo, son las mismas letras tomadas en parejas de dos en dos. Y tercero, finalmente, es el subconjunto que se forma con las letras tomadas de tres en tres. (Existe otro subconjunto contenido en el conjunto potencia, pero no lo necesitamos por el momento y, por lo mismo, no lo vamos a discutir por ahora). A este conjunto formado con la totalidad de los subconjuntos de un conjunto se le llama 'conjunto potencia'.

–Sí, en ese estaba pensando, pero no me acordaba del nombre –interrumpe ella.

–Este nuevo conjunto *siempre* –sonríe Octavio– es estrictamente mayor, en el número de elementos, que el conjunto original.

Ahora parezco un simple espectador en un estadio, pues Mariana está realmente emocionada y dice:

–Eso quiere decir que dado cualquier conjunto siempre existe otro mayor, sin importar cuántos elementos tenga, y después otro mayor, y otro más grande, y así en adelante. No hay límite. Así que, si tenemos un conjunto con número cardinal $\aleph_0$, debe de haber al menos otro con número cardinal $\aleph_1$. Y entonces debe haber al menos otro con número cardinal $\aleph_2$, y así en adelante, como digo, sin límite.

Octavio, sin decir palabra, únicamente escribe la sucesión:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_n, \ldots$$

Mentalmente, me digo: “Y tú, burro, llegaste a pensar que todos los conjuntos infinitos se podían poner en correspondencia uno a uno con el conjunto de todos los números naturales, y que todos los conjuntos infinitos tenían el mismo número de elementos”. Por un momento, prefiero quedarme callado y no decir una tontería que muestre que no había entendido. “No –sigo pensando–, lo que menos quiero es que Mariana crea que realmente soy un burro”.

Octavio, que sabe que esto aún no me queda claro, me dice:

–Jorge, ya mostramos que el conjunto de todos los números decimales que se encuentran entre el cero y el uno es mayor que el conjunto de todos los números naturales, pero su número cardinal puede ser cualquier $\aleph$, no necesariamente el que sigue a $\aleph_0$. ¿Cómo sabemos que no hay otros conjuntos infinitos que tengan un número cardinal que se encuentre entre $\aleph_0$ y $\aleph_1$?

Todavía no me repongo de la sorpresa cuando Mariana añade:

–Pero, así como podemos pensar en una sucesión de alephs con subíndices iguales a los números contenidos en el conjunto de todos los números naturales...

Y escribe:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_n, \ldots$$

–... también, después, podemos pensar en otra sucesión con otros subíndices que indiquen números más grandes.

Octavio, como si le adivinara el pensamiento, escribe:

$$\aleph_{\omega\,0}, \aleph_{\omega\,1}, \aleph_{\omega\,2}, \ldots, \aleph_{\omega\,n}, \ldots$$

Ya nada detiene a Mariana, quien únicamente dice: ‘Y otra con otros subíndices, y otra,...’.

Octavio sabe que estoy totalmente sorprendido y piensa que ha sido suficiente por una tarde. Nos mira a los dos y nos dice:

–¿Por qué no vienen juntos otro día, para que sigamos charlando? Nos quedan muchos detalles por aclarar, pero no quiero bombardearlos con más ideas.

Mi cabeza da vueltas y nada más pienso que pueden existir en mi mente una infinidad de infinidades de infinidades de números transfinitos diferentes. Sin darme cuenta, ya estamos afuera caminando, en dirección a la heladería. Mariana me habla de una película que ella vio en la Ciudad de México y que trata de un tipo que se vuelve loco en su intento por encontrar relaciones entre distintos números. Yo la veo a ella, pero no la escucho, solo pienso que además de ser la niña más linda que jamás he conocido, también es la más lista. ♦